

РОЗДІЛ IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Лекція 9. Послідовності та їх границі

План

1. *Границя числової послідовності*
2. *Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності*
3. *Основні теореми про границі послідовності*

1. Границя числової послідовності

Правило або закон, згідно з яким кожному натуральному числу n ставиться у відповідність деяке дійсне число x_n називається *числовою послідовністю*. Позначають $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, або $\{x_n\}$, де x_n — загальний член послідовності.

Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число n_0 , що для $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. При цьому кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *збігається* до числа a . Позначення: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ або $x_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$.

Послідовність, що має границю, називається *збіжною*, а яка не має границі, називається *розбіжною*.

Зауважимо, що нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям:

$$\begin{aligned} -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \\ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Це означає, що число x_n належить інтервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Такий інтервал називається ε — околom точки a .

Означення границі послідовності можна дати наступним чином. Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо в будь-якому ε — околi числа a містяться всі члени послідовності, починаючи з деякого номера. Поза цим околom може бути скінченне число членів послідовності.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою зверху*, якщо існує таке число M , що для всіх її членів x_n виконується нерівність $x_n \leq M$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою знизу*, якщо існує таке число m , що для всіх її членів x_n виконується нерівність $x_n \geq m$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою*, якщо вона обмежена зверху й знизу. Послідовність $\{x_n\}$ називається *монотонно зростаючою (спадною)*, якщо $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$).

Властивості збіжних послідовностей

1. Кожна збіжна послідовність має єдину границю.
2. Кожна збіжна послідовність є обмеженою.
3. Границя сталої рівна цій сталій.
4. Кожна монотонна обмежена послідовність є збіжною.
5. Нехай послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ є збіжними і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

Тоді якщо $a < b$, то починаючи з деякого номера виконується нерівність $x_n < y_n$.

6. Нехай виконується нерівність $x_n \leq y_n \leq z_n$. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{z_n\}$ збіжні, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, то послідовність $\{y_n\}$ також збіжна і виконується $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

2. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності

Послідовність $\{\beta_n\}$ називається *нескінченно великою*, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \infty.$$

Очевидно, що всяка нескінченно велика послідовність є необмеженою, проте не всяка необмежена послідовність є нескінченно великою.

Послідовність $\{\alpha_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Теорема. Якщо $\{\beta_n\}$ – нескінченно велика послідовність і всі її члени відмінні від нуля, то послідовність $\left\{\frac{1}{\beta_n}\right\}$ нескінченно мала, і, навпаки, якщо

$\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність і $\alpha_n \neq 0$, то послідовність $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ нескінченно велика.

Теорема. Сума (різниця) двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Наслідок. Алгебраїчна сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Теорема. Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу є нескінченно малою послідовністю.

Наслідок. Добуток нескінченно малої послідовності на число є нескінченно малою послідовністю.

Наслідок. Добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Дійсно, якщо послідовність $\{\alpha_n\}$ нескінченно мала, то вона обмежена. Отже, добуток двох нескінченно малих послідовностей можна розглядати як добуток нескінченно малої послідовності на обмежену.

Із останнього наслідку випливає, що добуток скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

3. Основні теореми про границі послідовності

Теорема (про структуру збіжної послідовності). Для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ була збіжною і мала границю число a , необхідно і достатньо, щоб $x_n = a + \alpha_n$, де $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність.

Теорема. Якщо $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – збіжні послідовності, то:

1. Послідовність $\{x_n + y_n\}$, яка є сумою (різницею) збіжних послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, збіжна і її границя дорівнює сумі (різниці) границь цих послідовностей, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2. Послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$, яка є добутком збіжних послідовностей $\{x_n\}$ й $\{y_n\}$, збіжна і її границя дорівнює добутку границь цих послідовностей, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

3. Послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, яка є часткою збіжних послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, за умови $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, збіжна і її границя дорівнює частці границь цих послідовностей, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$