

## Лекція 11. Неперервність функції

### План

1. *Основні поняття*
2. *Властивості функцій неперервних на відрізку*
3. *Рівномірна неперервність*
4. *Точки розриву функції та їх класифікація*

### 1. Основні поняття

З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу – поняття неперервності функції.

**Означення** Функція  $f(x)$  неперервна в точці скупчення  $x_0$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо розглядати означення границі функції в точці, то означення неперервної функції можна сформулювати інакше.

**Означення (Гейне).** Функція  $f(x)$  називається неперервною в точці скупчення  $x_0$ , якщо для довільної послідовності  $\{x_n\}$  збіжної до  $x_0$ , відповідна послідовність значень функції  $\{f(x_n)\}$  збігається до  $f(x_0)$ , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

**Означення (Коші).** Функція  $f(x)$  називається неперервною в точці скупчення  $x_0$ , якщо для кожного (достатньо малого) числа  $\varepsilon > 0$  існує таке число  $\delta > 0$ , що при умові  $|x - x_0| < \delta$  виконується нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Сформулюємо означення неперервності функції мовою приростів. Покладемо  $\Delta x = x - x_0$ . Число  $\Delta x$  називають *приростом аргумента*, а різницю  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  називають *приростом функції*.

Функція  $f(x)$  називається неперервною в точці  $x_0$ , якщо нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції.

Функція  $f(x)$  неперервна на інтервалі  $(a, b)$  (відрізку  $[a, b]$ ), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу (відрізку).

**Теорема.** Якщо функції  $f(x)$  та  $g(x)$  неперервні в точці  $x_0$ , то їх сума, різниця, добуток і частка (при умові  $g(x_0) \neq 0$ ) також неперервні функції.

**Теорема.** Якщо функція  $t = \varphi(x)$  неперервна в будь-якій точці  $x_0$  і  $y = f(t)$  неперервна в точці  $t_0 = \varphi(x_0)$ , то складена функція  $y = f(\varphi(x))$  неперервна в точці  $x_0$ .

## 2. Властивості функцій неперервних на відрізку

**Теорема (Больцано-Коші).** Нехай функція  $y = f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  і на кінцях його набуває значень різних знаків (Рис. 14). Тоді на інтервалі  $(a, b)$  знайдеться точка  $c$ , в якій функція перетворюється на нуль.

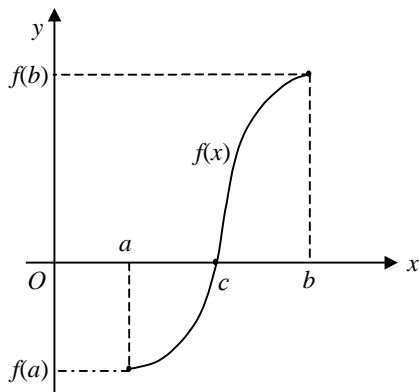


Рис. 14

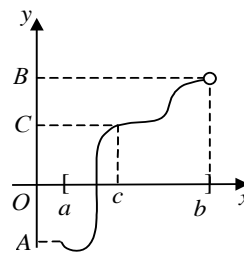


Рис. 15

**Теорема (Коші).** Нехай функція  $y = f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  і на його кінцях набуває різних значень (Рис. 15). Позначимо  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ . Тоді при будь-якому  $C: A < C < B$  знайдеться точка  $c \in [a, b]$ , така що  $f(c) = C$ .

**Теорема (Вейєрштрасса).** Якщо функція  $y = f(x)$  визначена і неперервна на деякому відрізку  $[a, b]$ , то вона обмежена на цьому відрізку.

**Теорема (Вейєрштрасса).** Функція  $y = f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ , досягає на ньому свого найбільшого та найменшого значення.

## 3. Рівномірна неперервність

Функція  $y = f(x)$  називається *рівномірно неперервною на деякому проміжку  $I$* , якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  існує число  $\delta > 0$ , таке що для будь-яких  $x_1, x_2 \in I$ , які задовольняють умову  $|x_1 - x_2| < \delta$ , виконується нерівність

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

**Теорема (Кантора).** Якщо функція  $y = f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ , то вона рівномірно неперервна на ньому.

#### 4. Точки розриву функції та їх класифікація

Класифікація точок розриву

1.  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ ,  $x_0$  – усувна точка розриву першого роду.

2.  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ ,  $x_0$  – не усувна точка розриву першого роду. Різниця  $f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)$  – стрибок функції.

3. Якщо хоча б одна з границь  $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$  не існує або рівна нескінченності, то  $x_0$  – точка розриву другого роду.

Приклад. Довести, що при  $x = 3$  функція  $y = \frac{x+1}{x-3}$  має розрив та встановити його характер.

Розв'язання. При  $x = 3$  функція має розрив, оскільки це значення належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Обчислимо:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x+1}{x-3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x+1}{x-3} = +\infty.$$

Отже, функція при  $x \rightarrow 3$  не має скінченних односторонніх границь (і не визначена у цій точці). Тому  $x = 3$  є точкою розриву другого роду.

Приклад. Дослідити функцію  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$  на неперервність.

Розв'язання. Функція  $y = \operatorname{arctg} t$  є основною елементарною функцією з областю визначення  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Функція  $t = \frac{1}{z} = z^{-1}$  також елементарна і визначена при  $z \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , тобто  $z \neq 0$ . Але функція  $z = x - 2$  також елементарна і визначена при  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Тобто єдиною точкою, що не

належить області визначення функції  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$ , є точка  $x = 2$ . Тому  $x = 2$  є точкою розриву.

З'ясуємо характер цього розриву. При  $x \rightarrow 2 - 0$  маємо  $\frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty$ . Звідси

$\lim_{x \rightarrow 2-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}$ . При  $x \rightarrow 2 + 0$  маємо  $\frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty$ . Звідси

$\lim_{x \rightarrow 2+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2} = +\frac{\pi}{2}$ . Односторонні границі скінченні, але не рівні. Тому  $x =$

2 є точкою неусувного розриву першого роду зі стрибком

$$f(2 + 0) - f(2 - 0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$