

## Тема 9. Неперервність функції

### Теоретичні відомості

Згідно з означенням, функція  $f(x)$  неперервна в точці  $x_0$ , якщо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Це означення рівносильне такому: функція  $f(x)$  неперервна в точці  $x_0$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Для неперервності функції в точці  $x_0$  необхідно і достатньо, щоб

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0),$$

де  $f(x_0 - 0)$  – ліва границя функції,  $f(x_0 + 0)$  – права границя,  $f(x_0)$  – значення функції в точці  $x_0$ .

#### Класифікація точок розриву

1.  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ ,  $x_0$  – усувна точка розриву першого роду.

2.  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ ,  $x_0$  – не усувна точка розриву першого роду. Різниця  $f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)$  – стрибок функції.

3. Якщо хоча б одна з границь  $f(x_0 - 0)$ ,  $f(x_0 + 0)$  не існує або рівна нескінченності, то  $x_0$  – точка розриву другого роду.

#### Приклади розв'язування вправ

**Приклад 1.** Довести, що при  $x = 3$  функція  $y = \frac{x+1}{x-3}$  має розрив та встановити його характер.

**Розв'язання.** При  $x = 3$  функція має розрив, оскільки це значення належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Обчислимо:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x+1}{x-3} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x+1}{x-3} = +\infty.$$

Отже, функція при  $x \rightarrow 3$  не має скінченних односторонніх границь (і не визначена у цій точці). Тому  $x = 3$  є точкою розриву другого роду.

**Приклад 2.** Дослідити функцію  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$  на неперервність.

**Розв'язання.** Функція  $y = \arctg t$  є основною елементарною функцією з областю визначення  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Функція  $t = \frac{1}{z} = z^{-1}$  також елементарна і визначена при  $z \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , тобто  $z \neq 0$ . Але функція  $z = x - 2$  також елементарна і визначена при  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Тобто єдиною точкою, що не належить області визначення функції  $y = \arctg \frac{1}{x-2}$ , є точка  $x = 2$ . Тому  $x = 2$  є точкою розриву.

З'ясуємо характер цього розриву. При  $x \rightarrow 2 - 0$  маємо  $\frac{1}{x-2} \rightarrow -\infty$ . Звідси  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \arctg \frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}$ . При  $x \rightarrow 2 + 0$  маємо  $\frac{1}{x-2} \rightarrow +\infty$ . Звідси  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \arctg \frac{1}{x-2} = +\frac{\pi}{2}$ . Односторонні границі скінченні, але не рівні. Тому  $x = 2$  є точкою неусувного розриву першого роду зі стрибком

$$f(2 + 0) - -f(2 - 0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

**Приклад 3.** З'ясувати характер розриву функції  $y = \frac{x^2-4}{x-2}$  і точці  $x = 2$ .

**Розв'язання.** При  $x = 2$  функція не визначена. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Тому функція  $y$  в точці  $x = 2$  має усувний розрив.

**Приклад 4.** Дослідити на неперервність функцію  $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ .

**Розв'язання.** При  $x = 1$  функція має розрив, оскільки це значення не належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Для цього знайдемо односторонні границі при  $x \rightarrow 1$ .

Якщо  $x \rightarrow 1 - 0$ , то  $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$  і  $\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$ .

Якщо  $x \rightarrow 1 + 0$ , то  $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$  і  $\lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$ .

Оскільки права границя не є скінченною, то функція у точці  $x = 1$  має розрив другого роду.

**Приклад 5.** Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{якщо } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & \text{якщо } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Дана функція не є елементарною. Тому з того, що вона визначена при  $x \in (-\infty, +\infty)$ , висновок про відсутність точок розриву зробити не можна. Але функції  $y = x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = 2$  елементарні. Тому у внутрішніх точках відповідних проміжків їх задання  $(-\infty, 0]$ ,  $(0, \frac{\pi}{2})$ ,  $[\frac{\pi}{2}, +\infty)$  розривів не існує. Отже, розриви функція може мати у точках  $x_1 = 0$  та  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Розглянемо  $x_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-0} x = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \sin x = 0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки  $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$ , то функція неперервна у точці  $x_1 = 0$ .

Розглянемо  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} 2 = 2, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2. \end{aligned}$$

Оскільки  $f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$ , то функція  $f(x)$  має в точці  $x_2 = \frac{\pi}{2}$  неусувний розрив першого роду зі стрибком  $f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = 2 - 1 = 1$ .

### Питання для самоперевірки

1. Дати різні означення неперервності функції  $f(x)$  в точці  $x_0$ .
2. Записати необхідну і достатню умову неперервності функції в точці.
3. Які точки називають точками розриву функції?
4. Що являють собою односторонні границі функції?

5. Які точки можуть бути точками розриву елементарної функції?
6. Дати класифікацію точок розриву.

### Вправи

1. Довести, що при  $x = 5$  функція  $y = \frac{x}{5-x}$  має розрив.
2. З'ясувати характер розриву функції  $y = \frac{1}{1+2^{1/1-x}}$  при  $x = 1$ .

**Відповідь:** 1-го роду, неусувний.

3. З'ясувати характер розриву функції  $y = \frac{\sin x}{x}$  у точці  $x = 0$ .

**Відповідь:** 1-го роду, усувний.

4. Дослідити функцію  $y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$  на неперервність.

**Відповідь:**  $x_1=1, x_2 = 3$  – точки розриву 2-го роду.

5. Дослідити функцію  $y = \frac{x^3-8}{x-2}$  на неперервність.

**Відповідь:**  $x_2 = 2$  – точка усувного розриву.

6. Дослідити функцію на неперервність

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

**Відповідь:**  $x_2 = 0$  – точка розриву 2-го роду.

7. Дослідити функцію на неперервність

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{tg} x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

**Відповідь:**  $x = \frac{\pi}{2}$  – точка неусувного розриву.