

## РОЗДІЛ IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

### Тема 8. Границя функції

#### Теоретичні відомості

Число  $a$  називається *границею послідовності*  $\{x_n\}$ , якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдеться число  $N_0$ , що для  $n > N_0$  виконується нерівність  $|x_n - a| < \varepsilon$ . При цьому кажуть, що послідовність  $\{x_n\}$  *збігається* до числа  $a$ . Позначення:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  або  $x_n \rightarrow a$ .

Число  $A$  називають *границею функції*  $f(x)$  в точці  $x_0$ , якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдеться число  $\delta > 0$ , що для всіх значень  $x$  з області визначення функції, які задовольняють умову  $0 < |x - x_0| < \delta$ , виконується нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Позначення:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  або  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Число  $A$  називають *границею функції*  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдеться число  $\delta > 0$ , що для всіх значень  $x$  з області визначення функції, які задовольняють умову  $|x| > \delta$ , виконується нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Позначення:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  або  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow \infty$ .

При обчисленні границь зручно використовувати ряд їх властивостей:

I (арифметичні властивості границь)

Якщо існують  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  та  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , то

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot g(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

II (границя суперпозиції функцій)

Якщо існують скінченні границі  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$  та  $\lim_{x \rightarrow a} f(t) = A$ , то існує

границя складної функції  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A$ .

Використовуються також границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (перша визначна границя);}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ (друга визначна границя).}$$

### Приклади розв'язування вправ

**Приклад 1.** Показати, що послідовність  $\frac{3}{4}; \frac{5}{7}; \frac{7}{10}; \dots; \frac{2n+1}{3n+1}; \dots$  має границю число  $\frac{2}{3}$ .

**Розв'язання.** Загальний член послідовності  $x_n = \frac{2n+1}{3n+1}$ . Тому

$$x_n - \frac{2}{3} = \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} = \frac{3(2n+1) - 2(3n+1)}{3(3n+1)} = \frac{1}{3(3n+1)}.$$

Задамо додатнє число  $\varepsilon$ . Розглянемо нерівність  $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ , тобто  $\frac{1}{3(3n+1)} < \varepsilon$ .

Помножимо обидві частини останньої нерівності на  $\frac{3n+1}{\varepsilon}$ :  $\frac{1}{3\varepsilon} < 3n+1$ , звідки

$$n > \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3\varepsilon} - 1 \right).$$

Якщо за  $N_0$  в означенні границі послідовності взяти число  $N_0 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3\varepsilon} - 1 \right)$ , то для всіх  $n > N_0$  виконуватиметься умова  $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ . Це

означає, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$ .

**Приклад 2.** Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2)$ .

**Розв'язання.** Оскільки функція  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  ( $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ) є елементарною, то для обчислення її границі підставимо в аналітичний вираз функції замість аргументу його граничне значення. Одержимо,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 4 - 6 + 2 = 0.$$

**Приклад 3.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{1^3 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3.$$

**Приклад 4.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x - 6}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x - 6} = \frac{2 \cdot 1^2 + 1 - 3}{1^2 + 5 \cdot 1 - 6} = \frac{0}{0}$$

Розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники. Розглянемо рівняння  $2x^2 + x - 3 = 0$ . Його корені  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{3}{2}$ .

Отже,  $2x^2 + x - 3 = 2(x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(2x + 3)$ .

Аналогічно, розв'язавши рівняння  $x^2 + 5x - 6 = 0$ , одержимо

$x_1 = 1, x_2 = -6$ . Тому  $x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$ . Отже,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x + 3)}{(x - 1)(x + 6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x + 3)}{(x + 6)} = \frac{5}{7}$$

**Приклад 5.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ .

**Розв'язання.** При  $x = 2$  чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю.

Скористаємось основною властивістю дробу і помножимо чисельник і знаменник на вираз, який є спряжений до чисельника. Одержимо,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+7})^2 - 3^2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{1}{\sqrt{2+7}+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

**Приклад 6.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - x}$ .

**Розв'язання.** В даному прикладі маємо невизначеність виду  $\frac{\infty}{\infty}$ . Щоб розкрити дану невизначеність, поділимо чисельник і знаменник на  $x$  у найвищому степені, тобто на  $x^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{4x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 4 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

**Приклад 7.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ .

**Розв'язання.** Маємо невизначеність виду  $\frac{0}{0}$ . Використаємо першу визначну границю.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

**Приклад 7.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{5x}{2x} \cdot \cos 2x \right] = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

**Приклад 8.**  $\lim_{x \rightarrow 1} 2^{\frac{3x}{x+2}}$ .

**Розв'язання.** Використаємо другу визначну границю

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2^{\frac{3x}{x+2}} = 2^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x+2}} = 2^{\frac{3 \cdot 1}{1+2}} = 2.$$

**Приклад 9.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{x+3} \right)^{\frac{2x+5}{x+1}}$ .

**Розв'язання.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{x+3} \right)^{\frac{2x+5}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{x+3} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{x+1}} = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} \right) \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + \frac{5}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)} = \left( \frac{2}{1} \right)^{\frac{2}{1}} = 4.$$

### Питання для самоперевірки

1. Що називається границею функції  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  та  $x \rightarrow \infty$ ?
2. Сформулюйте правила граничного переходу у випадку арифметичних дій.
3. Чому дорівнює границя сталої величини?

4. Які існують типи невизначеностей?

5. Сформулюйте першу і другу визначну границю.

### Вправи

1. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$ .

**Відповідь:** а) 9, б)  $-\frac{2}{5}$ , в)  $\frac{1}{2}$ .

2. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$ .

**Відповідь:** а) 0, б)  $-\frac{1}{56}$ , в) 0.

3. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x-2} \right)^{2x-1}$ .

**Відповідь:** а)  $\frac{2}{3}$ , б) 0, в)  $e^6$ .

4. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x})$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} \right)$ .

**Відповідь:** а)  $-2$ , б)  $\frac{5}{3}$ , в)  $-\frac{1}{2}$ .