## Практичне заняття 13. Застосування диференціального числення до побудови графіка функції

### Приклади розв'язування задач

***Приклад 1.*** Дослідити на максимум і мінімум функцію $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

1. Знаходимо першу похідну $y'=x^2-4x+3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2-4x+3=0$ $\left(f'(x)=0\right)$. Звідки $x_1=1,\quad x_2=3$.

Похідна скрізь неперервна. Значить, інших критичних точок для заданої функції не існує.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $\left(-\infty,\ +\infty\right)$ здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали $\left(-\infty,\ 1\right)$, (1, 3), ( 3, + ∞ ). Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x=0\in(-\infty,1),\quad y'(0)=3>0;$$

$$x=2\in(1,3),\quad y'(2)=2^2-4\cdot2+3=-1<0;$$

$$x=4\in(3,+\infty),\quad y'(4)=4^2-4\cdot4+3=11>0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл. 1). З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення $x$ = 1 похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при $x$ = 1 функція має максимум: $y_{\max}(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot1^2+3\cdot1+1=\frac{7}{3}$.

Табл. 1

| $x$ | (– ∞, 1) | 1 | (1, 3) | 3 | (3, + ∞) |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $y$ | ↗ | $y_{\max}(1)=\frac{7}{3}$ | ↘ | $y_{\min}(3)=1$ | ↗ |

При переході через значення $x$ = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при $x$ = 3 функція має мінімум: $Y_{\min}(3)=\dfrac{3^3}{3}-2\cdot 3^2+3\cdot 3+1=1.$

На інтервалі:

1) $(-\infty,\ 1)$ — функція зростає;

2) (1, 3) — спадає;

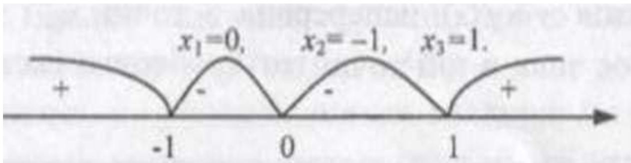
3) $(3,\ +\infty)$ — зростає.

Крім того, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1\right)=\pm\infty$ .

***Приклад 2.*** Дослідити функцію $f(x)=3x^5-5x^3+1$ на зростання (спадання) та екстремуми.

*Розв'язання*

$$f(x)=3x^5-5x^3+1$$

1. $D(f):(-\infty;+\infty)$;
2. $f'(x)=15x^4-15x^2$
3. $f'(x)=0,15x^4-15x^2=0, x^2\left(x^2-1\right)=0$
4. 

5. $f(x)$ зростає при $x\in(-\infty;-1);(1;\infty)$; $f(x)$ спадає при $x\in(-1;1)$

$x_{\max}=-1, y_{\max}=f(-1)=3\cdot(-1)^5-5(-1)^3+1=-3+5+1=3$
$x_{\min}=1, y_{\min}=f(1)=3\cdot 1^5-5\cdot 1^3+1=-1$

***Приклад 3.*** Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)=x^3+3x^2-24x+2$ при $x\in[1;3]$.

*Розв'язання*

$$f(x)=x^3+3x^2-24x+2,\ x\in[1;3]$$

1. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$

*2.* $f'(x) = 0,\ 3x^2 + 6x - 24 = 0,\ x^2 + 2x - 12 = 0 \qquad x_1 = -4, x_2 = 2$

3. $x_1 = -4 \notin [1;3]$

4. $f(1) = 2, f(2) = -6, f(3) = 4$

5. $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 4 \qquad \min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -6$

*Відповідь,* $\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 4 \qquad \min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -6$

***Приклад 4.*** Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Маємо $y' = -2xe^{-x^2}$, $\quad y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$. Друга похідна $y''$ перетворюється в нуль, коли $x^2 - \frac{1}{2} = 0$, звідки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

При переході через точки $x_1$ і $x_2$ друга похідна змінює знак. Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Результати дослідження заносимо в табл. 2.

Табл. 2

| $x$ | $\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $y$ | $\cup$ | Перегин | $\cap$ | Перегин | $\cup$ |

Із цієї таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.

***Приклад 5.*** Визначити асимптоти кривої $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm0} y = \lim_{x\to\pm0} \frac{x^2+2x-1}{x} = \lim_{x\to\pm0}\left(x+2-\frac{1}{x}\right) = \mp\infty,$$

то пряма $x = 0$ (вісь $Ox$) є вертикальною асимптотою.

2. Нехай похила асимптота має рівняння $y = kx + b$, тоді

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(y-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right) = 2.$$

Отже, пряма $y = x + 2$ є похилою асимптотою.

***Приклад 6.*** Дослідити функцію $y = \dfrac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях $x$ за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $\left\{-\infty < x < 1;\;\; 1 < x < +\infty\right\}$.

2. Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to1\pm0} y = \lim_{x\to1\pm0} \frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to1\pm0}\left(x-1\right)^2} = +\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю $Ox$: $y = 0$, $\dfrac{2x-1}{\left(x-1\right)^2} = 0$, $2x-1=0$, $x = \dfrac{1}{2}$, $\left(\dfrac{1}{2};\;0\right)$; з віссю $Oy$: $x = 0$, $y = \dfrac{-1}{1} = -1$, $\left(0;\;-1\right)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 3:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3}; \quad y' = 0 \Rightarrow$$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$ — критична точка. При $x = 1$ $y'$ не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x = -1$ $y' = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0(-)$;

при $x = \frac{1}{2}$ $y' = \frac{-1}{-1/8} = 8 > 0(+)$.

Табл.3

| $x$ | $(-\infty,\ 0)$ | 0 | (0, 1) | 1 | $(1,\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | – | 0 | + | Не існує | – |
| $y$ | ↘ | $y_{\min}$ (–1) | ↗ | Не існує | ↘ |

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «–» на «+», через це в точці $x$ = 0 функція має мінімум: $y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1$.

У точці $x$ = 1 функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; \quad y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; при $x$ = 1 $y''$ не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$: при $x = -1$ $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0\ (-)$;

при $x=0 \quad y''=\dfrac{2}{1}=2>0 \ (+)$.

Друга похідна, проходячи через $x=-\dfrac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\frac{8}{9}\approx -0{,}9.$$

Таким чином, точка $\left(-\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці $x$ = 1 функція не визначена. При $1<x<+\infty \quad y''>0$, значить, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо у табл. 4.

Табл. 4

| $x$ | $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ | 1 | $(1,\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | 0 | + | Не існує | + |
| $y$ | $\cap$ | Перегин (– 8/9) | $\cup$ | Не існує | $\cup$ |

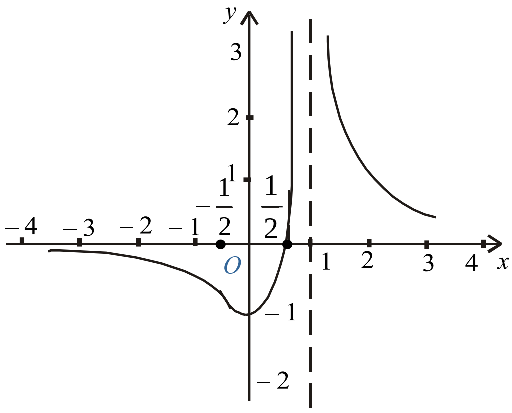
7. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y$ = 0 (вісь $Ox$).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції. Для точнішої побудови візьмемо додатково точки на мал.1: (–5; – 0,3), $\left(\frac{2}{3},\ 3\right)$, (2; 3), (3; 1,3).




Мал.1

## Задачі

**1.** Знайти інтервали монотонності таких функцій:

1. $y = x^2(a-x)^2$.　　2. $y = x + \dfrac{a^2}{x}; (a>0)$.

3. $y = x\sqrt{2-x^2}$.　　4. $y = (x-2)^5(2x+1)^4$.

5. $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}; (a>0)$.　　6. $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

7. $y = \dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.　　8. $y = x - e^x$.

9. $y = x^2e^{-x}$.　　10. $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

**2.** Визначити екстремуми функцій:

1. $y = 2x^3 - 3x^2$.　　2. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

3. $y = \dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.　　4. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$.

5. $y = \dfrac{1}{\ln(x^4+4x^3+30)}$.6. $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$.

7. $y = x - \ln(1+x)$.  8. $y = x - \ln\left(1+x^2\right)$.

9. $y = (x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}$ .10. $y = \left(x^2 - 2x\right)\ln x - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$.

**3.** Знайти найбільше і найменше значення функцій у заданих проміжках:

1. $y = x^4 - 2x^2 + 5;\ [-2; 2]$.  2. $y = x + 2\sqrt{x};\ [0; 4]$.

3. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; [-1; 2]$. 4. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2; [-1; 1]$.

5. $y = \sqrt{100 - x^2};\ [-6; 8]$.  6. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2};\ [0; 1]$.

7. $y = \dfrac{x-1}{x+1}; [0; 4]$.

8. $y = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{1-x};\ (0 < x < 1);\ (a > 0; b > 0)$.

9. $y = \sin 2x - x;\ \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.  10. $y = 2\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^2 x;\ \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

**4.** Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіків функцій:

1. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ .2. $y = (x+1)^4 + e^x$.

3. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.  4. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.

5. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$ .6. $y = (x+2)^6 + 2x + 2$.

7. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3a^2};\ (a > 0)$ .8. $y = a\sqrt[3]{x - b}$.

9. $y = e^{\sin x};\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.  10. $y = \ln\left(1 + x^2\right)$.

**5.** Знайти асимптоти таких ліній:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.  2. $xy = a$.

3. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$.    4. $y=c+\dfrac{a^3}{(x-b)^2}$.

5. $2y(x+1)^2=x^3$.    6. $y^3=a^3-x^3$.

7. $y^3=6x^2+x^3$.    8. $y^2(x^2+1)=x^2(x^2-1)$.

9. $xy^2+x^2y=a^3$.    10. $y(x^2-3bx+2b^2)=x^3-3ax^2+a^3$.

**6.** Провести повне дослідження функцій і накреслити їх графіки:

1. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.    2. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.    4. $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$.

5. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.    6. $y=(x^2-1)^3$.

7. $y=32x^2(x^2-1)^3$.    8. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$.

9. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.    10. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.