Тема 5. Добутки векторів

Теоретичні відомості

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається число (скаляр), що обчислюється за формулою $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|cos\varphi,$ де φ — кут між цими векторами.

Якщо $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ є

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Кут між двома векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$;

3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$;

4. $(\vec{a}\vec{a}) = |\vec{a}|^2$; $\sqrt{(\vec{a})^2} = |\vec{a}|$;

5. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0,$ якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, і навпаки $(\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$.

6. $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0,$ то кут φ − гострий, $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0,$ то кут φ − тупий.

7. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ *на* $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ такий, що:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot sin\varphi,$ де φ — кут між двома векторами;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Позначення: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$

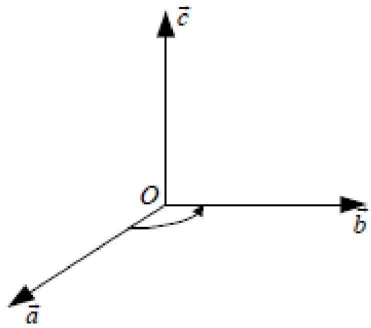

Рис. 5

Якщо $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, то

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}||\vec{b}$.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
3. $\left(\alpha\vec{a} \times \vec{b}\right) = \alpha\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.
4. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
5. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = S_{\text{паралелограма}}$.

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Позначення: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Властивості мішаного добутку:

1. $\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = V_{\text{паралелепіпеда}}$.
2. Умова компланарності трьох векторів заданих в координатах:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Дано три точки $A(1;1;1), B(2;2;1), C(2;1;2)$. Знайти кут BAC.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB} = \{1;1;0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1;0;1\}$. Згідно з формулою кута між векторами маємо:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}^\wedge\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, кут $BAC = 60^{\circ}$.

Приклад 2. Дано вершини чотирикутника $A(1;-2;2), B(1;4;0)$, $C(-4;1;1), D(-5;-5;3)$. Довести, що діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори діагоналей $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{AC} = \{-5;3;-1\}$, $\overrightarrow{BD} = \{-6;-9;3\}$. Обчислимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (-5)\cdot(-6) + 3\cdot(-9) + (-1)\cdot 3 = 0.$$

Оскільки скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони взаємно перпендикулярні. Отже, взаємно перпендикулярні і діагоналі чотирикутника.

Приклад 3. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - \vec{k}, \vec{b} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} -$ $-\overrightarrow{12k}$. Обчислити проекцію $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Розв'язання. За формулою $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \frac{\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{c}|}$.

Знайдемо $\vec{a}+\vec{b} = \{4;-2;-6\}$. Скориставшись формулою проекції та скалярного добутку, отримаємо

$$\text{Пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \frac{3\cdot 4 + (-4)\cdot(-2) + (-12)\cdot(-6)}{\sqrt{9+16+144}} = 4.$$

Приклад 4. Дано вершини трикутника $A(-1;-1;2), B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Розв'язання. З елементарної математики відомо, що $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BD$. Звідки шукана висота

$$BD = \frac{2S}{AC}.$$

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB} = \{4; -5; 0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{0; 4; -3\}$.

Тоді $AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+9} = 5$, а $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$. Оскільки

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}.$$

Тоді $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 25$. Отже, $2S_{\Delta ABC} = 25$, $BD = \frac{2S}{AC} = \frac{25}{5} = 5$.

Приклад 5. Установити чи компланарні вектори $\vec{a} = \{2; 3; 1\}, \vec{b} = \{1; -1; 3\}, \vec{c} = \{1; 9; -11\}$.

Розв'язання.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 22 + 9 + 9 + 1 + 33 - 54 = 20.$$

Отже, вектори не компланарні.

Приклад 6. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1), D(4; 1; 3)$.

Розв'язання. Відомо, що $V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6}V_{\text{піраміди}}$.

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB} = \{3; 6; 3\}, \overrightarrow{AC} = \{1; 3; -2\}, \overrightarrow{AD} = \{2; 2; 2\}$. Таким чином, їх мішаний добуток

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Звідки, $V_{\text{піраміди}} = |-18| = 18, V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$ куб. од.

Питання для самоперевірки

1. Що називається скалярним добутком двох векторів?

2. Які властивості має скалярний добуток векторів?

3. Як виражається скалярний добуток двох векторів через їх координати?

4. Що називається векторним добутком двох векторів? Сформулюйте його властивості.

5. Як виражається векторний добуток двох векторів через їх координати?

6. Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності векторів.

7. Що називається мішаним добутком трьох векторів? Сформулюйте його властивості.

8. Як знайти мішаний добуток трьох векторів, якщо відомі їхні координати?

9. У чому полягає умова компланарності трьох векторів?

Вправи

1. За якого значення α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \overrightarrow{2k}$ будуть перпендикулярні?

Відповідь: $\alpha = 4$.

2. Дано вектори $\vec{a} = \{1; -3; 4\}, \vec{b} = \{3; -4; 2\}, \vec{c} = \{-1; 1; 4\}$. Обчислити пр$_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

Відповідь: 5.

3. Дано вектори $\vec{a} = \{3; -1; -2\}, \vec{b} = \{1; 2; -1\}$. Знайти координати вектора $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{b}$.

Відповідь: $\{10; 2; 14\}$.

4. Дано три послідовні вершини паралелограма $A(-3; -2; 0), B(3; -3; 1)$, $C(5; 0; 2)$. Знайти його четверту вершину D та кут між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

Відповідь: $D(-1; 1; 1)$; $\left(\overrightarrow{AC}\,^\wedge \overrightarrow{BD}\right) = 120^0$.

5. Установити, чи компланарні вектори $\vec{a} = \{2; -1; 2\}, \vec{b} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = \{3; -4; 7\}$.

Відповідь: компланарні.

6. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1), D(4; 1; 3)$.

Відповідь: 3 куб. од.