РОЗДІЛ ІІІ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Тема 6. Пряма на площині

Теоретичні відомості

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами. Відповідно різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

а) *Загальне рівняння прямої на площині*

$$Ax + By + C = 0.$$

В прямокутній декартовій системі координат дана пряма перпендикулярна вектору $\vec{n}(A, B)$, який називається *нормальним вектором* прямої.

б) *Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_o, y_o)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}(A, B)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

в) *Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_o, y_o)$ *паралельно напрямному вектору* $\vec{s}(m, n)$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

г) *Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки* $M_1(x_1, y_1)$ *та* $M_2(x_2, y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

д) *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

$$y = kx + b,$$

де $k = tg\alpha -$ *кутовий коефіцієнт.*

е) *Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_o, y_o)$ *і має кутовий коефіцієнт* k

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

є) *Рівняння прямої, що проходить через точки* $A(a, 0), B(0, b)$,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Кут φ, який відраховується проти годинникової стрілки від прямої l_1 до прямої l_2, заданих рівняннями $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, визначається

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

Якщо прямі паралельні, то $\varphi = 0, tg\varphi = 0$. Тоді $k_1 = k_2$.

Якщо прямі перпендикулярні, то $\varphi = 90^o, tg\varphi$ не існує. Тому умова перпендикулярності має вигляд

$$1 + k_1k_2 = 0 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Нехай прямі l_1, l_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$,

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

Тоді кут $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}})$. Отже,

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Якщо прямі l_1, l_2 паралельні, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Якщо прямі l_1, l_2 перпендикулярні, то $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначають

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклади розв’язування вправ

Приклад 1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; -3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (4; 5)$.

Розв’язання. Використаємо рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Маємо

$$4(x - 2) + 5\big(y - (-3)\big) = 0,$$

$$4x - 8 + 5y + 15 = 0,$$

$$4x + 5y + 7 = 0.$$

Приклад 2. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1; -4)$ паралельно вектору $\vec{s} = (-3; 2)$.

Розв’язання. Використаємо рівняння $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$. Отримаємо

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y—4}{2}, \qquad \frac{x-1}{-3}-\frac{y+4}{2}=0,$$

$$\frac{2(x-1)—(-3)(y+4)}{-6}=0, \qquad 2(x-1)+3(y+4)=0,$$

$$2x-2+3y+12=0, \qquad 2x+3y+10=0.$$

Приклад 3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(-3;4)$ і $M_2(1;2)$.

Розв'язання. Рівняння прямої запишеться

$$\frac{x-(-3)}{1-(-3)}=\frac{y-4}{2-4}, \qquad \frac{x+3}{4}=\frac{y-4}{-2},$$

$$\frac{x+3}{4}-\frac{y-4}{-2}=0, \quad x+2y-5=0.$$

Приклад 4. Знайти точку перетину даних прямих $4x-3y+9=0$, $3x+2y-23=0$.

Розв'язання. Координати шуканої точки задовольняють обидва рівняння прямих і тому знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x-3y+9=0 \\ 3x+2y-23=0. \end{cases}$$

Розвяжемо наступну систему за формулами Крамера

$$\begin{cases} 4x-3y=-9 \\ 3x+2y=23. \end{cases}$$

В результаті матимемо $\Delta=17$, $\Delta_1=51$, $\Delta_2=119$. Звідси

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{51}{17}=3, \qquad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{119}{17}=7.$$

Отже, точка перетину прямих – $(3;7)$.

Приклад 5. Знайти рівняння прямої, яка відтинає від осі Oy відрізок $b=4$ і утворює кут $\alpha=60^{\circ}$ з додатнім напрямом осі Ox.

Розв'язання. Використаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом. Так як $k=tg\alpha=tg60^{\circ}=\sqrt{3}$, то шукане рівняння $y=\sqrt{3}x+4$.

Приклад 6. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-3;2)$ і паралельна до прямої $2x+5y+7=0$.

Розв'язання. Шукана пряма перпендикулярна до нормального вектора заданої прямої $\vec{n} = (2; 5)$. Звідси матимемо:

$$2(x-3) + 5(y-2) = 0,$$

$$2x + 6 + 5y - 10 = 0,$$

$$2x + 5y - 4 = 0.$$

Приклад 7. Вершини трикутника мають координати $A(4; 3), B(1; 8)$, $C(8,4)$. Знайти рівняння висоти цього трикутника, проведеної з вершини A до сторони BC.

Розв'язання. Висота AK проходить перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (8-1; 4-8) = (7; -4)$.

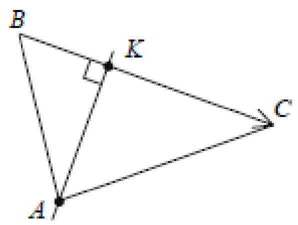

Рис.7

Складемо і розв'яжемо рівняння:

$$7(x-4) - 4(y-3) = 0,$$

$$7x - 28 - 4y + 12 = 0,$$

$$7x - 4y - 16 = 0.$$

Приклад 8. Перевірити, чи перпендикулярні прямі:

а) $3x - 2y + 4 = 0$ і $4x + 6y - 3 = 0$;

б) $y = 2x - 7$ і $y = -\frac{2}{3}x + 3$.

Розв'язання.

а) В даній задачі $A_1 = 3, B_1 = -2, A_2 = 4, B_2 = 6$.

Так як $3 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 = 0$, то прямі перпендикулярні.

б) В даній задачі $k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{2}{3}$. Так як $k_1 \cdot k_2 \neq -1$, то прямі перпендикулярні.

Питання для самоперевірки

1. Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?

2. Запишіть рівняння прямої: а) яка проходить через задану точку у заданому напрямі; б) через дві задані точки; в) загальне рівняння прямої; г) рівняння прямої у відрізках на осях.

3. Як знайти кутовий коефіцієнт прямої, заданої загальним рівнянням?

4. Сформулюйте умову паралельності та перпендикулярності двох прямих.

5. Як записати рівняння прямої , яка проходить через початок координат?

6. За якою формулою обчисляється відстань від точки до прямої?

Вправи

1. Визначити, які з точок $M_1(3;5), M_2(-1;4), M_3(4;-2)$, лежать на прямій $7x + y - 26 = 0$.

Відповідь: M_1 і M_3.

2. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(-3;4)$.

Відповідь: $-3x + 4y + 13 = 0$.

3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;2)$ паралельно вектору $\vec{s}(2;5)$.

Відповідь: $5x - 2y - 11 = 0$.

4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(3;-1)$ і $M_2(2;4)$.

Відповідь: $5x + y - 14 = 0$.

5. Знайти рівняння прямої, яка відтинає від осі Oy відрізок $b = -2$ і утворює кут $\alpha = 45^{\circ}$ з додатнім напрямом осі Ox.

Відповідь: $y = x - 2$.

6. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;2)$ перпендикулярно до прямої $2x + 5y + 7 = 0$.

Відповідь: $5x - 2y - 11 = 0$.

7. Відомі координати вершин трикутника $A(2;3), B(8;7), C(-2;9)$. Знайти рівняння середньої лінії цього трикутника, яка параельна до сторони AC.

Відповідь: $3x + 2y - 25 = 0$.

8. Перевірити, чи паралельні прямі:

а) $6x - 4y + 7 = 0$ і $3x + 2y + 1 = 0$;

б) $y = 2x + 3; y = 2x - 1$.

Відповідь: а) ні; б) так.