Тема 2. Матриці та операції над ними

Теоретичні відомості

Матрицею називають систему елементів (зокрема, чисел), розміщених у певному порядку і утворюючих таблицю. Матриці прийнято позначати великими буквами, а їх елементи, для зручності, – малими буквами з двома індексами (перший – номер рядка, другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент). Наприклад, якщо матриця A складена з $m \cdot n$ елементів, розміщених в m рядків і n стовпців, то її позначають символом

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

при цьому кажуть, то матриця A розміру $m \times n$.

Елемент в i −му рядку та j −му стовпці матриці A позначають a_{ij}.

Матрицю, в якій число рядків не дорівнює числу її стовпців $(m \neq n)$, називають *прямокутною*. Якщо $m = n$, то матрицю називають *квадратною*, а число n −*порядком матриці.*

Визначник, складений з елементів квадратної матриці, називається *визначником цієї матриці* і позначаться $\det A$ або $|A|$.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю, називають *нульовою*.

Квадратна матриця, діагональні елементи якої $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ відмінні від нуля, а всі інші дорівнюють нулю, називається *діагональною*.

Діагональна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, називається *одиничною*. Позначають її буквою E.

Якщо в матриці замінимо рядки стовпцями з тими самими номерами, то одержимо нову матрицю, що називається *транспонованою* і позначається A^T.

Сумою матриць одного й того самого порядку $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця того самого порядку $C = A + B; C = \left(c_{ij}\right)$, будь-який її елемент дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ *на деяке число* α називається така матриця C, кожен елемент c_{ij} якої утворюється множенням відповідних елементів матриці A на $\alpha, c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Різниця матриць A і B визначається як сума A і $(-B)$.

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times p$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, кожний елемент якої рівний сумі добутків відповідних елементів $i -$го рядка матриці A на відповідні елементи $j -$го стовпця матриці B.

Зазначимо, що добуток AB двох матриць існує тоді і тільки тоді, коли число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Для множення матриць не виконується комутативний закон.

Якщо $A -$ квадратна матриця, то оберненою до неї буде матриця того самого порядку, яка позначається A^{-1} і задовольняє умові $A \cdot A^{-1} = E$. Обернена до A існує лише тоді, коли $\Delta(A) \neq 1$, і обчислюється за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} −алгебраїчні доповнення до елементів матриці A.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти матрицю $A = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Використовуючи правила множення матриць на число і додавання матриць, дістанемо

$$A = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 14 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ -3 & -3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -11 \\ 3 & 11 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти добуток $A \cdot B$, якщо $A = (3 \quad 2)$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Матриця A має розмір 1×2, матриця B має розмір 2×1, тому добуток $A \cdot B$ існує та має розмір 1×1.

$$A \cdot B = (3 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)) = (1).$$

Приклад 3. Знайти добуток $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 9 & 15 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 21 \end{pmatrix}.$$

Ще раз переконуємось в тому, що $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Приклад 4. Знайти добуток ABC, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Задані матриці мають розмір 2×2, тому їх можна перемножити, причому одержимо матрицю того самого порядку. Помножимо спочатку A на B.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-28) + 3 \cdot 38 & 4 \cdot 93 + 3 \cdot (-126) \\ 7 \cdot (-28) + 5 \cdot 38 & 7 \cdot 93 + 5 \cdot (-126) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}.$$

Тепер помножимо одержану матрицю на C.

$$ABC = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + (-6) \cdot 2 & 2 \cdot 3 + (-6) \cdot 1) \\ -6 \cdot 7 + 21 \cdot 2 & (-6) \cdot 3 + 21 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Знайти матрицю $C = B - 2A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Маємо $A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$. Тоді

$$C = B - 2A^T = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} -= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 6. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то матриця A неособлива і має обернену. Щоб скласти цю матрицю, знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці A.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$; $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$; $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$.

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називають матрицею?

2. Як визначити розмір матриці?

3. Які види матриць ви знаєте?

4. Яка матриця називається транспонованою?

5. Сформулюйте правила: додавання матриць, віднімання матриць, множення матриці на число.

6. За яким правилом виконується множення двох матриць?

7. Яку матрицю називають оберненою до даної? Чи завжди вона існує?

8. За якою формулою знаходиться обернена матриця?

9. Сформулюйте умову існування оберненої матриці.

Вправи

1. Виконати дії

а) $3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь:

а) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) Виконати множення не можна;

в) $(-2 \quad 18)$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 12 & -13 & 11 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Знайти x і y з рівняння $(x \quad y)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (5 \quad 3)$.

Відповідь: $x = \frac{7}{13}; y = \frac{15}{13}$.

3. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, і перевірити, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -11 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $D = 2A + BC - A^2$, якщо

$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 32 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Переконатися в тому, що наведені матриці не комутативні:

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $AB = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 4 \\ 26 & 36 & 22 \\ 15 & 26 & -3 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 24 & 17 & 21 \\ 24 & 6 & 30 \\ 16 & 23 & 23 \end{pmatrix}$.

6. Перевірити асоціативний закон множення матриць на прикладі матриць

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.