Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Теоретичні відомості

Розглянемо лінійну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

де a_{ik} $(1 \le i, k \le n) -$ коефіцієнти при змінних, b_i $(1 \le i \le n) -$ вільні члени.

Упорядкована сукупність чисел $(\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, які перетворюють кожне рівняння системи в правильну числову рівність, тобто задовольняють її, називається *розв'язком системи* рівнянь (1).

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх не має.

Система називається *сумісною*, якщо вона має принаймні один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків.

Дві системи називаються *рівносильними (еквівалентними)*, якщо вони мають однакові множини розв'язків. Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається *визначником системи (1).*

Метод Крамера

Введемо в розгляд визначники

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix},$$

утворені з визначника Δ заміною відповідних стовпців стовпцем вільних членів системи (1).

Теорема Кантора. *Якщо визначник* Δ *системи (1) відмінний від нуля, то система сумісна і має єдиний розв'язок, що визначається за формулами*

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

Ці формули називаються *формулами Крамера.*

Матричний метод

Введемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді, згідно з правилом множення матриць, систему рівнянь можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X:

$$A \cdot X = B.$$

Якщо матриця A має обернену A^{-1}, то

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Дана формула називається *матричним записом* розв'язку системи лінійних рівнянь. Отже, щоб розв'язати систему рівнянь, достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи A, і помножити її на матрицю з вільних членів зліва.

Метод Гауса

Довільні системи лінійних рівнянь розв'язуються за методом Гауса (метод послідовного виключення невідомих). Він полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система зводиться до еквівалентної системи східчастого або трикутного вигляду, з якої послідовно, починаючи з останніх за номером невідомих, знаходимо всі інші невідомі.

Метод Гауса зручно використовувати, працюючи з розширеною матрицею системи замість самих рівнянь. Розширену матрицю в цьому випадку записують з вертикальною прямою рискою, яка відділяє коефіцієнти біля невідомих від вільних членів. Стовпець вільних членів міняти місцями з іншими стовпцями розширеної матриці не можна.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти розв'язок системи $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 5 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ лінійних рівнянь методом Крамера.

Розв'язання. Знаходимо визначники $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Тоді за формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Приклад 2. Розв'язати систему за правилом Крамера: $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 10 \end{cases}$

Розв'язання. Для системи $\Delta = \Delta_x = 0$, але $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, отже система розв'язків немає.

Приклад 3. Знайти розв'язок системи $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + y \qquad = 0 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$ лінійних рівнянь методом оберненої матриці.

Розв'язання. Випишемо матрицю даної системи $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо визначник матриці A, розклавши його за третім стовпчиком:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -15 - 7 = -22.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то існує обернена A^{-1} та шукана матриця має вигляд $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, тобто $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Визначимо A^{-1}, для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Тоді $A^{-1} = \frac{-1}{22}\begin{pmatrix} 1 & -7 & -3 \\ -2 & -8 & 6 \\ -5 & 13 & -7 \end{pmatrix}$.

Отже, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{22}\begin{pmatrix} 1 & -7 & -3 \\ -2 & -8 & 6 \\ -5 & 13 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{2}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix}$.

Звідси $x = \frac{1}{11}, y = -\frac{2}{11}, z = \frac{6}{11}$.

Приклад 4. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

Розв’язання. Скористаємось методом Гауса. Випишемо матрицю коефіцієнтів даної системи та виконаємо елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & -3 & -4 & 5 & -16 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -15 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -15 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -20 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -16 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 48 \end{array}\right).$$

В результаті одеримо трикутну систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 13, \\ \quad -2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -15, \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = -5, \\ \qquad\qquad\quad 15x_4 = 48. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв’язок . Дійсно

$x_4 = \frac{48}{15} = \frac{16}{3}$; $x_3 = -5 + x_4 = -5 + \frac{16}{3} = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{2}(5x_3 + 6x_4 - 15) = -\frac{28}{3}$; $x_1 = 13 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = \frac{28}{3}$.

Отже, розв'язком системи є: $x_1 = \frac{28}{3}, x_2 = -\frac{28}{3}, x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = \frac{16}{3}$.

Питання для самоперевірки

1. Що таке розв'язок системи лінійних рівнянь?
2. Яка система називається сумісною (несумісною)?
3. Дайте означення сумісної визначеної і сумісної невизначеної системи.
4. Чи може система мати два розв'язки?
5. Які системи називають еквівалентними (рівносильними)?
6. Які існують методи розв'язання систем лінійних рівнянь?

Вправи

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 = 19; \\ x_1 - x_2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 10x_3 = 164; \\ -x_1 + 9x_2 + 7x_3 = -96; \\ 7x_1 + 3x_2 + 9x_3 = -32; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -7x_1 - 9x_2 + 11x_3 = 66; \\ -6x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 63; \\ 10x_1 + x_2 - 8x_3 = -102. \end{cases}$

Відповідь: а) $x_1 = -4;\ x_2 = -11;$ б) $x_1 = 10;\ x_2 = -1;\ x_3 = -11;$

в) $x_1 = -11;\ x_2 = 0;\ x_3 = -1.$

2. Розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 = -99; \\ 2x_1 + 5x_2 = -50; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 44; \\ x_1 + x_2 - 9x_3 = 21; \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 70; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -11x_1 + 6x_2 - 11x_3 = -63; \\ 6x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 33; \\ 9x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 8x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 79; \\ 2x_1 - 3x_3 = 21; \\ 8x_1 - 11x_2 + x_3 = 74. \end{cases}$

Відповідь: а) $x_1 = -5;\ x_2 = -8;$ б) $x_1 = 1;\ x_2 = 11;\ x_3 = -1;$

в) $x_1 = 9;\ x_2 = -5;\ x_3 = -6;$ г) $x_1 = 3;\ x_2 = -5;\ x_3 = -5.$

3. Методом Гауса знайти розв'язки (якщо вони існують) таких систем лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ x + 3y + 4z = 6; \\ 2x - y - z = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + z = 4; \\ 2x - 3y + z = 3; \\ 3x + 2y + 2z = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y - z = -2; \\ 3x - y + 2z = 9; \\ 4x + 4y - 3z = -5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 5; \\ 4x + 3y - 4z = 7; \\ 4x + 8y - 12z = 3; \end{cases}$

Відповідь: а) $x = 1;\ y = -1; z = 2;$ б) $x = 0;\ y = -1;\ z = 2;$ в) $x = 1;\ y = 0;\ z = 3;$ г) система несумісна.