МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ
ЛУЦЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Теорія ймовірностей та математична статистика

Методичні вказівки до практичних занять

для студентів спеціальностей

5.03060101 «Організація виробництва»

5.05010201 «Обслуговування комп'ютерних систем і мереж»

денної форми навчання

Луцьк 2014

До друку _____________________ Голова Навчально-методичної ради Луцького НТУ
(підпис)

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій Луцького НТУ
_____________________ директор бібліотеки.
(підпис)

Затверджено Навчально-методичною радою Луцького НТУ,

протокол № __від ___ ______ 20___ року

Рекомендовано до видання Навчально-методичною радою ТК Луцького НТУ,

протокол №__від ___ ______ 20___ року

_____________________ Голова навчально-методичної ради ТК Луцького НТУ
(підпис)

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової комісії природничо-математичних дисциплін ТК Луцького НТУ

протокол №__від ___ ______ 20___ року

Укладач: ________________Ю.В. Боровська, викладач Технічного коледжу Луцького НТУ
(підпис)

Рецензент: ________________Ю.І. Харкевич, кандидат фізико-математичних наук
(підпис)

Відповідальний
за випуск: ____________Ю.В. Боровська, викладач Технічного коледжу Луцького НТУ
(підпис)

Теорія ймовірностей та математична статистика: Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальностей 5.03060101 «Організація виробництва», 5.05010201 «Обслуговування комп'ютерних систем і мереж» денної форми навчання Ю.В. Боровська − Технічний коледж ЛНТУ, 2014 − 31с.

Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальностей 5.03060101 «Організація виробництва», 5.05010201 «Обслуговування комп'ютерних систем і мереж» денної форми навчання складено відповідно до діючої програми з теорії ймовірностей та математичної статистики. Дозволяють студентам краще засвоїти основні поняття та методи розв'язання задач з теорії ймовірностей та математичної статистики при підготовці до практичних занять.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ймовірностей та математична статистика, які дедалі ширше застосовуються в багатьох галузях науки і техніки, є важливими складовими фундаментальної підготовки сучасних висококваліфікованих фахівців.

Методичні вказівки містять короткі теоретичні відомості, приклади розв’зання задач та перелік задач до кожної з тем програми. Методичні рекомендації ставлять за мету допомогти студенту оволодіти необхідним математичним апаратом, його основними положеннями, прийомами, методами; розв’язуванням задач та прикладів з курсу теорії ймовірностей та математичної статистики.

Розділ 1. Випадкові події

Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей. Простір елементарних подій. Безпосередній підрахунок ймовірностей. Класичне означення ймовірності. Дискретні ймовірності простори. Геометричне означення ймовірності.

Теоретичні відомості

Імовірністю випадкової події A називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \le m \le \le n$), які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:

$$P\,(A) = \frac{m}{n}.$$

Для неможливої події $P\,(\varnothing) = 0$ ($m = 0$). Для вірогідної події $P\,(\Omega) = 1$ ($m = n$).

Отже, для довільної випадкової події $0 < P\,(A) < 1$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта — стандартні. Навмання з ящика береться одна деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

Розв'язання. Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту:

$$n = 15.$$

Нехай A — подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій, що сприяють появі випадкової події A, дорівнює дев'яти ($m = 9$). Згідно з (1) маємо:

$$P\left(A\right) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Приклад 2. У цеху працює 10 верстатів-автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю перебувати в роботоздатному стані або в стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

Розв'язання. Оскільки кожний верстат-автомат може перебувати у двох несумісних станах — роботоздатному або нероботоздатному, то кількість усіх елементарних подій множини Ω буде $n = 2^{10}$.

Позначимо через A випадкову подію — із ладу вийде три верстати з десяти. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі A, буде

$$m = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7!} = 120.$$

Отже,

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{3}}{2^{10}} = \frac{120}{2^{10}}.$$

Задачі

1.1. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайти ймовірність того, що з навмання взятих двох деталей будуть:

1) дві придатні;

2) дві браковані;

3) 1 придатна і 1 бракована.

1.2. Партія складається з 20 виробів, з яких 8 виробів 1-го сорту, 6—2-го, 2—3-го сорту, а решта — браковані. Навмання беруть 4 вироби. Знайти ймовірність того, що серед них виявилося 2 вироби 1-го сорту, 1—2-го сорту і 1 бракований.

1.3. Навмання взятий телефонний номер складається із 6 цифр. Знайти ймовірність того, що в ньому всі цифри різні.

1.4. На прямокутній полиці навмання розставлено 8 томів зібрання творів. Знайти ймовірність того, що в результаті I, II і III томи стоять поруч.

1.5. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, вважаючи, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано правильні цифри.

1.6. У лотереї на кожні 500 білетів розігрується 100 речових і 50 грошових виграшів. Знайти ймовірність виграшу для особи, яка має один білет.

1.7. На складі є 10 кінескопів заводу № 1 і вісім кінескопів заводу № 2. Навмання взято чотири кінескопи. Знайти ймовірність того, що серед них два кінескопи заводу № 1 і два кінескопи заводу № 2.

1.8. Партія електролампочок складається з 10 придатних і п'яти бракованих. Із партії навмання по одній беруть усі лампочки. Знайти ймовірність того, що останньою буде взято придатну.

1.9. У партії із 16 деталей чотири нестандартні. Навмання з поверненням беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед них дві деталі будуть стандартними.

Тема 2. Алгебра подій. Аксіоми теорії ймовірностей.

Теоретичні відомості

Додавання. *Сумою двох подій* A і B називається така подія $C = A \cup B$ ($C = A + B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B.

Множення. *Добутком двох подій* A і B називається така подія $C = A \cap B$ ($C = AB$), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A і B.

Віднімання. *Різницею двох подій* A і B називається така подія $C = A \setminus B$ ($C = A - B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням події А і одночасним ненастанням події В.

Події A і $\bar{A}$ називаються *протилежними*, якщо вони несумісні й утворюють повну групу подій, тобто $A \cap \bar{A} = \varnothing$ і $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають *сумісними*.

Якщо $A \cap B = \varnothing$, то такі випадкові події A і B називають *несумісними*.

Теореми множення ймовірностей

Нехай подія A є добутком двох подій B і C. Тоді:

а) якщо події B і C незалежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$;

б) якщо події B і C залежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C/B)$.

Ці теореми справджуються й для добутку n ($n > 2$) подій.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Навмання з неї беруть одне число.

Побудувати випадкові події: 1) A — узяте число кратне 2; 2) B — кратне 3.

Визначити $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

Розв'язання. 1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; 2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

Звідси дістаємо:

$A \cup B$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} ∪ {3, 6, 9, 12, 15} = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15};

$A \cap B$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} ∩ {3, 6, 9, 12, 15} = {6, 12};

$A \setminus B$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} \ {3, 6, 9, 12, 15} = {2, 4, 8, 10, 14}.

Приклад 2. Партія містить 12 стандартних і чотири нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) не менш як дві стандартні;
2) усі три нестандартні;
3) принаймні одна стандартна.

Розв'язання. 1) Нехай подія A — «серед трьох узятих деталей не менш як дві стандартні». Тоді її можна подати як суму двох подій: A_1 — «серед трьох узятих деталей дві стандартні і одна нестандартна» і A_2 — «усі три узяті деталі стандартні». Події A_1 і A_2 несумісні, тому маємо:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Імовірності подій A_1 і A_2 знайдемо згідно з класичним означенням імовірності.

$$n = C_{16}^3 = 560;\ \ m_1 = C_{12}^2 \cdot C_4^1 = 66 \cdot 4 = 264;\ \ m_2 = C_{12}^3 = 220.$$

Отже, $P(A) = \dfrac{484}{560} \approx 0{,}864.$

Задачі

2.1. У партії із 20 деталей 15 стандартних, а решта нестандартні. Навмання беруть чотири деталі. Знайти імовірність того, що серед них:

1) не більше як дві нестандартні;
2) усі чотири стандартні;
3) принаймні одна нестандартна.

2.2. У цеху з восьми зупинок верстата в середньому чотири зумовлюються заміною різця; дві — несвоєчасним надходженням заготівок; решта — іншими причинами. Знайти ймовірність зупинки верстата з інших причин.

2.3. У разі масового виготовлення виробів брак становить у середньому 1,5 % загальної кількості всіх виробів. З-поміж придатних виробів 85,3 % становлять вироби 1-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб належить до 1-го сорту.

2.4. Довести, що добуток імовірностей протилежних подій не перевищує 0,25.

2.5. Партія складається з двох деталей 1-го сорту, двох 2-го сорту і трьох — 3-го сорту. Деталі беруть по одній навмання без повернення. Знайти ймовірність того, що деталь 1-го сорту з’явиться раніше за деталь 3-го сорту.

2.6. У цеху є три резервні мотори, для кожного з яких імовірність бути ввімкненим у даний момент дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в даний момент ввімкнено:

1) принаймні два мотори;
2) принаймні один мотор.

Тема 3. Умовні ймовірності. Незалежність подій.

Теоретичні відомості

Якщо ймовірність випадкової події A обчислюється за умови, що подія B відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$\mathrm{P}\left(A/B\right)=\frac{Đ(\grave{A}\bigcap\hat{A})}{Đ(\hat{A})},\quad \mathrm{P}\left(B\right)\neq 0.$$

Випадкові події A і B називають *залежними*, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

У протилежному випадку випадкові події A і B називаються *незалежними*.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задана множина цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

Розв'язання. Нехай подія A — поява числа кратного 3, B — кратного 2. Тоді

A = (3, 6, 9, 12), $m_1 = 4$; B = (2, 4, 6, 8, 10, 12), $m_2 = 6$; $A\cap B$ = (6, 12), $m_3 = 2$;

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)=\frac{m_1}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3};\ \mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};\ \mathrm{P}\left(\mathrm{A}\bigcap\mathrm{B}\right)=\frac{m_3}{n}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6};$$

$$P\,(A\ /\ B) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}/\mathrm{B}\right)=\frac{Đ(\grave{A}\bigcap\hat{A})}{Đ(\hat{A})}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Відомі значення:

$$P\,(A\bigcap\overline{B})=0{,}3;\ P\,(\overline{A}\bigcap B)=0{,}4;\ P\,(\overline{A\bigcap B})=0{,}9.$$

З'ясувати, чи є залежними випадкові події A і B.

Розв'язання.

$$P\,(A\bigcap B)=1-P\,(\overline{A}\bigcap\overline{B})=1-0{,}9=0{,}1;$$

$$P\,(A)=P\,(A\bigcap\overline{B})+P\,(A\bigcap B)=0{,}3+0{,}1=0{,}4;$$

$$P\,(B)=P\,(B\bigcap\overline{A})+P\,(A\bigcap B)=0{,}4+0{,}1=0{,}5;$$

$$P\left(A/B\right)=\frac{Đ(\grave{A}\bigcap\hat{A})}{Đ(\hat{A})}=\frac{0,1}{0,5}=\frac{1}{5}=0,2;$$

$$P\left(B/A\right)=\frac{Đ(\grave{A}\bigcap\hat{A})}{Đ(\grave{A})}=\frac{0,1}{0,4}=\frac{1}{4}=0,25.$$

Оскільки $P\left(A/B\right)\neq Đ(\grave{A}), Đ(\hat{A})\neq Đ(\hat{A}/\grave{A}),$ то випадкові події A і B є залежними.

Задачі

3.1. Імовірність безвідказної роботи блока, що входить у систему впродовж певного часу дорівнює 0,9. Для надійності роботи системи встановлюється такий же блок, що буде знаходитись у резерві. Яка ймовірність безвідмовної роботи системи, коли при цьому враховувати резервний блок?

3.2. Радіолокаційна система, до якої входять дві станції, що працюють самостійно, виконує деяке завдання з виявлення літака-порушника повітряного простору України на певній ділянці кордону. Для виконання цього завдання необхідно, щоб у справному стані була хоча б одна радіолокаційна станція. Імовірність безвідказної роботи першої станції дорівнює 0,95, а другої 0,85. Система працюватиме надійно, якщо буде справною хоча б одна радіолокаційна станція. Знайти ймовірність цієї події.

3.3. В урні міститься 4 зелених і 8 червоних кульок. Кульки із урни виймають по одній без повернення. Таким способом було вийнято три кульки. Обчислити ймовірності таких випадкових подій A — перша кулька буде червоною, друга — зеленою, третя — червоною.

3.4. Відомо, що $A\cap B\neq\varnothing$. Довести, що

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{B}/\mathrm{A}\right)\geq 1-\frac{p(\overline{\hat{A}})}{p(\grave{A})}.$$

Тема 4. Формули повної ймовірності. Формули Байєса.

Теоретичні відомості

У разі, коли випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій B_i, які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісними $\left(\mathrm{B}_i \bigcap \mathrm{B}_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \ i, j = 1, \ldots, n, \bigcup_{з=1}^{n} \hat{A}_i = \Omega\right)$, імовірність події A обчислюється за формулою $\mathrm{P}\left(A\right) = \sum_{з=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{P}\left(B_i\right)\ \mathrm{P}\left(A / B_i\right)$, яка називається *формулою повної ймовірності*.

Застосовуючи формулу множення ймовірностей для залежних випадкових подій A, B_i ($i = \overline{1, n}$), дістаємо *формули Байєса*

$$P\left(B_i / A\right) = \frac{Ð(\hat{A}_i)\ Ð(À / \hat{A}_i)}{\sum_{з=1}^{n} Ð(\hat{A}_i)\ Ð(À / \hat{A}_i)}$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. На склад надходять однотипні вироби з чотирьох заводів: 15% — із заводу № 1, 25% — із заводу № 2; 40% — із заводу № 3 і 20% — із заводу № 4. Під час контролю продукції, яка надходить на склад, установлено, що в середньому брак становить для заводу № 1 — 3%, заводу № 2 — 5%, заводу № 3 — 8% і заводу № 4 — 1%. Навмання взятий виріб зі складу виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовив завод №1?

Розв’язання. Позначимо B_1 гіпотезу проте, що виріб був виготовлений заводом № 1, B_2 — заводом № 2, B_3 — заводом № 3 і B_4 — заводом № 4. Ці гіпотези єдино можливі і несумісні. Нехай A — випадкова подія, що полягає в появі бракованого виробу.

За умовою задачі маємо:

$P(B_1) = 0{,}15$, $P(B_2) = 0{,}25$, $P(B_3) = 0{,}4$, $P(B_4) = 0{,}2$, $P(A/B_1) = 0{,}03$, $P(A/B_2) = 0{,}05$, $P(A/B_3) = 0{,}08$, $P(A/B_4) = 0{,}01$.

За формулою Байєса переоцінюємо першу гіпотезу B_1:

$$P\left(B_1/A\right)=\frac{\text{Ð}(\hat{A}_1)\ \text{Ð}(\grave{A}/\hat{A}_1)}{\text{Ð}(\hat{A}_1)\ \text{Ð}(\grave{A}/\hat{A}_1)+\text{Ð}(\hat{A}_2)\ \text{Ð}(\grave{A}/\hat{A}_2)+\text{Ð}(\hat{A}_3)\ \text{Ð}(\grave{A}/\hat{A}_3)+\text{Ð}(\hat{A}_4)\ \text{Ð}(\grave{A}/\hat{A}_4)}=$$

$$=\frac{0{,}15\cdot 0{,}03}{0{,}15\cdot 0{,}03+0{,}25\cdot 0{,}05+0{,}4\cdot 0{,}08+0{,}2\cdot 0{,}01}=\frac{0{,}0045}{0{,}051}=\frac{45}{510}=\frac{3}{34}\ .$$

Задачі

4.1. Маємо дві партії деталей. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 10 стандартних і 3 нестандартних. Із першої партії береться одна деталь і перекладається у другу. Знайти ймовірність того, що деталь, яку після цього взяли із другої партії :

1) стандартна; 2) нестандартна.

4.2. Маємо три партії деталей. Перша складається з 10 стандартних і 4 нестандартних, друга — із 14 стандартних і 4 нестандартних, третя — із 16 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із навмання вибраної партії береться деталь. Знайти ймовірність того, що деталь буде:

1) стандартною; 2) нестандартною.

4.3. Металеві заготівки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55 % із першого, 45 % із другого. При цьому продукція з першого цеху містить 3 %, а з другого цеху — 5 % браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку:

1) придатна; 2) бракована.

4.4. На склад надходить продукція від двох підприємств. Від першого — 60 %, від другого — 40 %. Перше підприємство дає 80 % продукції 1-го сорту і 20 % 2-го сорту, а друге дає 70 % продукції 1-го сорту і 30 % 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взята одиниця продукції буде:

1) першого сорту; 2) другого сорту.

4.5. Для посіву пшениці заготовлено насіння, серед якого 95 % 1-го сорту, 3 % 2-го та 2 % 3-го сорту. Імовірність того, що з насінини виросте колосок, в якому не менш ніж 50 зерен, для 1-го сорту насіння становить 0,5, для 2-го сорту — 0,2, для 3-го — 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш як 50 зерен.

Тема 5. Повторення випробувань. Схема Бернулі. Поліноміальна схема. Граничні теореми в схемі Бернулі. Теореми Муавра-Лапласа. Формули Пуассона.

Теоретичні відомості

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A з’явиться m раз, подається у вигляді

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія A з’явиться від m_i до m_j раз, обчислюється так:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} \tilde{N}_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_i}^{m_j} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Імовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні її в електромережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9. Обчислити ймовірність того, що з п’яти електролампочок, увімкнених у електромережу не перегорять: 1) дві; 2) не більш як дві; 3) не менш як дві.

Розв’язання. За умовою задачі маємо: p = 0,9; q = 0,1; n = 5; m = 2.

1) $P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2!\ 3!}(0,9)^2\ (0,1)^3 = 10 \cdot 0,81 \cdot 0,001 = 0,0081;$

2) $\mathrm{P}_5\ (0 \le m \le 2) = \sum_{m=0}^{2} C_5^m p^m q^{5-m} = C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p\, q^4 + C_5^2 p^2 q^3 =$

$= q^5 + 5p\, q^4 + 10p^2 q^3 = (0,1)^5 + 5\ 0,9\ (0,1)^4 + 10\ (0,9)^2\ (0,1)^3 =$

$= 0,00001 + 5 \cdot 0,9 \cdot 0,0001 + 10 \cdot 0,81 \cdot 0,001 =$

$= 0,00001 + 0,00045 + 0,0081 = 0,00856;$

3) $\mathrm{P}_5\ (2 \le m \le 5) = \sum_{m=2}^{5} C_5^m p^m q^{5-m} = 1 - \sum_{m=0}^{1} C_5^m p^m q^{5-m} =$

$= 1 - C_5^0 p^0 q^5 - C_5^1 p\, q^4 = 1 - (0,00001 + 0,00045) = 1 - 0,00046 = 0,99954.$

Задачі

5.1. Садівником восени було посаджено сім саджанців яблуні. Імовірність того, що будь-який із саджанців навесні проросте, у середньому складає 0,7. Обчислити ймовірність того, що із семи саджанців яблуні навесні проростуть: 1) три саджанці; 2) не менш як три. Знайти найімовірніше число саджанців, які навесні проростуть, і обчислити відповідну ймовірність.

5.2. Завод виготовляє однотипні телевізори, з яких 85% вищої якості. Із партії виготовлених заводом телевізорів навмання вибирають сім. Яка ймовірність того, що серед них телевізорів вищої якості буде: 1) 4; 2) не менш як 4.

5.3. Відомо, що серед виробів заводу стандартні деталі становлять у середньому 85%. Скільки необхідно взяти цих деталей, щоб $m_0 = 65$?

5.4. Імовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів за схемою Бернуллі є величиною сталою і дорівнює $p = 0{,}8$. Скільки необхідно провести таких експериментів, щоб імовірність появи випадкової події $m \geq 900$ дорівнювала 0,99?

5.5. Частка діабетиків у певній місцевості становить у середньому 0,2%. Навмання було обстежено 4000 осіб. Яка ймовірність того, що серед них діабетиків буде: 1) 4 особи; 2) від 3 до 6 осіб; 3) не більш як 4 особи.

<u>Розділ 2. Випадкові величини</u>

Тема 6. Випадкові величини**.** Дискретні випадкові величини. Дискретні розподіли.

Теоретичні відомості

Величина називається *випадковою*, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів вона набуває того чи іншого можливого числового значення з певною ймовірністю.

Якщо множина можливих значень випадкової величини є зчисленною то таку величину називають *дискретною*. У противному разі її називають *неперервною*.

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

$$F(x) = P(X < x)$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	-4	-1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$, дістаємо наведені далі співвідношення.

1) $F(-4) = P(X < -4) = 0$;

2) $F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0,1$;

3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0,1 + 0,2 = 0,3$;

4) $F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,2 +$
$+ 0,1 = 0,4$;

5) $F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) =$
$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7;$

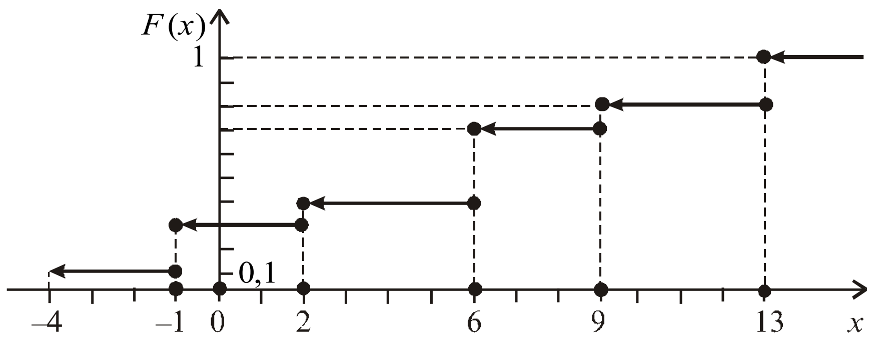
6) $F(12) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) =$
$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8;$

7) $F(x)|_{x>13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) +$
$+ P(X = 13) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1.$

Компактно $F(x)$ можна записати в такій формі:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \le -1; \\ 0{,}3, & -1 < x \le 2; \\ 0{,}4, & 2 < x \le 6; \\ 0{,}7, & 6 < x \le 9; \\ 0{,}8, & 9 < x \le 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на мал. 1.



Мал. 1.

Задачі

6.1.Троє складають іспит із теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей, побудувати $F(x)$ і накреслити її графік.

6.2. У першому ящику міститься 7 стандартних і 3 браковані деталі, у другому — 6 стандартних і 4 браковані. Навмання з першого ящика беруть чотири деталі, а з другого — одну. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед чотирьох навмання взятих — і побудувати $F(x)$.

6.3. На шляху руху автомобіля стоять п’ять світлофорів, кожний із яких з імовірністю 0,5 дозволяє або забороняє рух. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа світлофорів, що їх автомобіль промине без затримки.

6.4. За заданим законом розподілу дискретної випадкової величини X маємо:

$X = x_i$	-4	-1	2	5	8	10
$P(X = x_i) = p_i$	a	$1{,}5a$	$0{,}5a$	$3{,}5a$	$2{,}5a$	a

Знайти a. Обчислити: $P(X < 2)$, $P(-4 < X \le 8)$.

Побудувати функцію розподілу ймовірностей і накреслити її графік.

Тема 7. Випадкові величини. Неперервні випадкові величини. Неперервні розподіли.

Теоретичні відомості

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Властивості щільності:

1. $f(x) \geq 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha x = 1.$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha;\beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Закон неперервної випадкової величини X задано у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2}\sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Згідно із властивістю 4 щільності маємо:

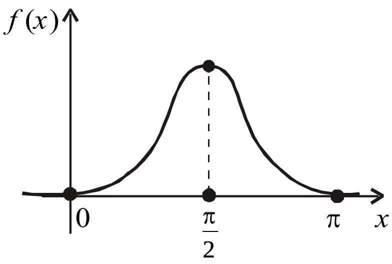
$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x \frac{1}{2}\ \sin dx=\frac{1}{2}\int_0^x \sin dx=\frac{1}{2}(-\cos x\,|_0^x)=\frac{1}{2}(-\cos x+1)=$$

$$=\frac{1-\cos x}{2}.$$

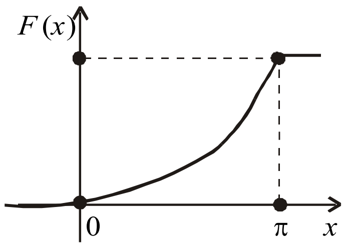
Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на мал. 2 і 3.



Мал. 2



Мал. 3

Застосуємо 3 властивість щільності:

$$P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

Задачі

7.1. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le\frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$. Побудувати графіки $F(x)$, $f(x)$ і обчислити $P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{3}\right)$.

7.2. Випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей Коші:

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Знайти a і $F(x)$.

7.3. Крива щільності ймовірності — півеліпс із півосями $a = 4$; $b = 2$.

Записати вираз для $f(x)$ і $F(x)$.

Побудувати графік функції $F(x)$.

7.4. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$, $P(0 < X < 2)$.

Тема 8. Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання, властивості. Дисперсія, властивості. Моменти розподілу випадкових величин. Коефіцієнт асиметрії, коефіцієнт ексцесу. Мода, медіана.

Теоретичні відомості

Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеною на дискретному просторі Ω, називається величина $M(X)=\sum_{з=1}^{\infty} x_з ð_з$.

Якщо Ω — обмежена множина, то $M(X)=\sum_{s=1}^{n} x_з p_з$.

Якщо простір Ω є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається величина $Ì\ (\tilde{O})=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини $D(X)=M(X-M(X))^2$.

Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x_i	– 4	– 2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Згідно з формулою для знаходження дисперсії маємо:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\sum_{з=1}^{6}\tilde{o}_з^2 ð_з-\left(\sum_{з=1}^{6}\tilde{o}_з ð_з\right)^2;$$

$$Ì\ (\tilde{O})=\sum_{з=1}^{6}\tilde{o}_з ð_з=-4\cdot 0,1-2\cdot 0,2+1\cdot 0,3+2\cdot 0,2+4\cdot 0,1+6\cdot 0,1=$$
$$=-0,4-0,4+0,3+0,4+0,4+0,6=0,9;$$

$$M(X^2) = \sum_{з=1}^{6} \tilde{o}_з^2 \eth_з = 16 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}1 + 36 \cdot 0{,}1 =$$

$$= 1{,}6 + 0{,}8 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}6 + 3{,}6 = 8{,}7;$$

$$D(X) = 8{,}7 - (0{,}9)^2 = 8{,}7 - 0{,}81 = 7{,}89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} \approx 2{,}8.$$

Задачі

8.1. Випадкова величина ξ має розподіл:

ξ	1	2	3
p	0,5	0,3	0,2

Знайти $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$, початкові та центральні моменти до 3-го порядку включно.

8.2. Робітник за зміну обслуговує 14 однотипних верстатів-автоматів. Імовірність того, що верстат за зміну потребує уваги робітника становить 1/7. Знайти $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$ дискретної випадкової величини ξ — числа верстатів-автоматів, що потребують уваги робітника за зміну.

8.3. Випадкова величина ξ має розподіл:

ξ	0	1	2
p	0,3	0,5	0,2

Знайти $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi$, початкові та центральні моменти до 3-го порядку включно.

8.4. Знайти $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi,\ \alpha_0,..,\alpha_3,\ \mu_1,..,\mu_3$, якщо випадкова величина ξ має розподіл:

ξ	-1	0	1	2
p	0,1	0,4	0,2	0,3

8.5. Знайти $M\xi,\ D\xi,\ \sigma_\xi,\ \alpha_0,..,\alpha_3,\ \mu_1,..,\mu_3$, якщо випадкова величина ξ має розподіл:

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Тема 9. Числові характеристики випадкових векторів. Умовні закони розподілу. Математичне сподівання. Коваріація, коефіцієнт кореляції. Умовні закони розподілу і їх характеристика.

Теоретичні відомості

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин називають перелік можливих значень $Y = y_i$, $X = x_j$ та відповідних їм імовірностей спільної появи.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} x_j p_{x_j}.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} y_i p_{y_i}.$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y)$$

$$\sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y):

$X = x_j$ / $Y = y_i$	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	$0,1a$	$2a$	$0,9a$	
4,4	$2a$	$0,2a$	$1,8a$	
6,4	$1,9a$	$0,8a$	$0,3a$	
P_{xj}				

Знайти a. Обчислити $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$; K_{xy}; r_{xy};

Розв'язання. Скориставшись умовою нормування дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P_{ij} = 0,1a + 2a + 0,9a + 2a + 0,2a + 1,8a + 1,9a + 0,8a + 0,3a = 1 \Rightarrow a = 0,1.$$

Зі знайденим a закон системи набирає такого вигляду:

$X = x_j$ / $Y = y_i$	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	0,01	0,2	0,09	0,3
4,4	0,2	0,02	0,18	0,4
6,4	0,19	0,08	0,03	0,3
P_{xj}	0,4	0,3	0,3	

Обчислюємо основні числові характеристики:

$$M(X)=\sum_{j=1}^{3}x_j p_{x_j}=5,2\cdot 0,4+10,2\cdot 0,3+15,2\cdot 0,3=2,08+3,06+4,56=9,7;$$

$$M(X^2)=\sum_{j=1}^{3}x_j^2 p_{x_j}=(5,2)^2\,0,4+(10,2)^2\,0,3+(15,2)^2\,0,3=$$

$$=10,816+31,212+69,312=111,34;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=111,34-94,09=17,25;$$

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}=4,15;$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{3}y_i p_{y_i}=2,4\cdot 0,3+4,4\cdot 0,4+6,4\cdot 0,3=0,72+1,76+1,92=4,4;$$

$$M(Y^2)=\sum_{i=1}^{3}y_i^2 p_{y_i}=(2,4)^2\,0,3+(4,4)^2\,0,4+(6,4)^2\,0,3=$$

$$=1,728+7,744+12,288=21,76;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=21,76-(4,4)^2=21,76-19,36=2,4;$$

$$\sigma_y=\sqrt{D(Y)}=1,55;$$

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}y_i x_j p_{ij}=2,4\cdot 5,2\cdot 0,01+2,4\cdot 10,2\cdot 0,2+2,4\cdot 15,2\cdot 0,09+$$

$$+4,4\cdot 5,2\cdot 0,2+4,4\cdot 10,2\cdot 0,02+4,4\cdot 15,2\cdot 0,18+6,4\cdot 5,2\cdot 0,19+$$

$$+6,4\cdot 10,2\cdot 0,08+6,4\cdot 15,2\cdot 0,03=0,1248+4,896+3,2832+4,576+$$

$$+0,8976+12,0384+6,3232+5,2224+2,9184=40,28;$$

$$K_{xy} = M(XY) — M(X)\,M(Y) = 40,28 - 9,7\cdot 4,4 = 40,28 - 42,68 = 1,4.$$

Оскільки $K_{xy} > 0$, то між відповідними величинами існує кореляційний зв’язок. Для вимірювання тісноти кореляційного зв’язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{-2,4}{4,15\cdot 1,55}\approx 0,37.$$

Задачі

9.1. Закон системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) заданий таблицею:

$Y \backslash X$	2	4	6	8	p_{y_i}
– 6	$0{,}1a$	$0{,}5a$	$0{,}4a$	a	
– 4	$0{,}9a$	$0{,}4a$	$0{,}5a$	$0{,}2a$	
– 2	a	$2{,}1a$	$1{,}1a$	$1{,}8a$	
p_{x_i}					

Обчислити r_{xy}, $M(X / y = 4)$, $M(Y / x = -2)$.

9.2. Виготовлені на заводі циліндри сортуються за відхиленням їх внутрішніх діаметрів від номінального розміру на чотири групи зі значеннями 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 мм і за овальністю на чотири групи зі значенями 0,002; 0,004; 0,006; 0,008 мм. Спільний розподіл цих відхилень X — діаметра і Y — овальності циліндрів наведено в таблиці:

$Y \backslash X$	0,01	0,02	0,03	0,04	p_{y_i}
0,002	0,01	0,02	0,04	0,04	
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06	
0,006	0,04	0,1	0,08	0,08	
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02	
p_{x_j}					

Знайти r_{xy}.

Тема 10, 11. Основні дискретні та неперервні розподіли.

Теоретичні відомості

1. Біноміальний закон розподілу $MX = np, \; DX = np(1-p)$.

2. Закон розподілу Пуассона $MX = \lambda, \quad DX = \lambda$.

3. Геометричний розподіл $MX = \dfrac{1}{p}, \quad DX = \dfrac{1-p}{p^2}$.

4. Гіпергеометричний розподіл $MX = \dfrac{kn}{N}, \; DX = \dfrac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$.

5. Рівномірний закон розподілу $MX = \dfrac{a+b}{2}, \; DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

6. Показниковий закон розподілу $MX = \dfrac{1}{a}, \; DX = \dfrac{1}{a^2}$.

7. Нормальний закон розподілу $MX = a, \quad DX = \sigma^2$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1 Визначити ймовірність потрапляння за контрольні межі не менш ніж 2 деталей із проби з 5 деталей, якщо автомат, із продукції якого беруться проби, обробляє 2 деталі за 1 хв і за зміну у його продукції виявляється 38 деталей, які виходять за контрольні межі. Застосувати для розв'язування задачі закон розподілу Пуассона.

Розв'язання. Застосуємо формулу розподілу Пуассона: $P(X = m) = \dfrac{(\lambda t)^m}{m!}$, $m =$ 0,1,…. Знайдемо λ — середню кількість бракованих деталей, які виготовляються за 1 хв. Якщо тривалість зміни 480 хв, то $\lambda = \dfrac{38}{480} \approx 0{,}08.$ Пробу з 5 деталей виготовляють за $t = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ хв, $\lambda t = 0{,}08 \cdot 2{,}5 = 0{,}2.$ Знайдемо шукану ймовірність: $P(X \geq 2) = \sum\limits_{m=2}^{5} \dfrac{(\lambda t)^m}{m!} = 0{,}0175.$ Значення ймовірності знайдемо в таблицях при $\lambda t = 0{,}8$ і $m = 2.$

Задачі

10.1. Час відправлення міжміського автобуса рівномірно розподілений на часовому проміжку від 0.00 до 20.00. Визначити ймовірність того, що пасажир, який прибув на станцію о 16.00, встигне на автобус.

10.2. Випадкова величина X розподілена показниково. Яка з подій більш ймовірна: випадкова величина набула значення, більшого чи меншого за своє математичне сподівання?

10.3. Визначити ймовірність того, що нормально розподілена величина потрапляє у проміжок $[\alpha;\beta)$, скориставшись таблицями функції $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

10.4. Розмір деталі — нормально розподілена величина з $MX=10$. Деталь вважається стандартною, якщо її відхилення від математичного сподівання не перевищує 0,8. Побудувати графік залежності між значеннями σ і часткою (у відсотках) бракованих деталей.

Список рекомендованої літератури

1. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. — Ч. I. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2005. — 304 с.

2. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. — Ч. II. Математична статистика. — К.: КНЕУ, 2005. — 364 с.

3. Волощенко А. Б., Джалладова І. А. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. — К.: КНЕУ, 2003. — 256 с.

4. Бугір М. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. − Теорнопіль, «Підручники й посібники», 1988 р.

5. Бугір М. К. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. − Теорнопіль, «ЦМДС», 1988 р.

6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. − М.: «Высшая школа», 1971.

7. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. − М.: «Высшая школа», 1975.

8. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навчальний посібник. – Ірпінь: Академія ДПС України, 2001. – 77 с.

Теорія ймовірностей та математична статистика: Методичні вказівки до практичних занять для студентів спеціальностей 5.03060101 «Організація виробництва», 5.05010201 «Обслуговування комп'ютерних систем і мереж» денної форми навчання Ю.В. Боровська − Технічний коледж ЛНТУ, 2014 − 31с.

Комп'ютерний набір	Ю.В.Боровська
Редактор	Ю.В.Боровська

Підп. до друку 2014р.
Формат 31х84/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.
Ум. друк. арк. ___. Обл.-вид. арк. 2,5.
Тираж ___ прим. Зам. 1.

Редакційно-видавничий відділ
Луцького національного технічного університету
43018 м. Луцьк, вул. Львівська, 75
Друк – РВВ Луцького НТУ