

Тема 5. Повторення випробувань. Схема Бернуллі. Поліноміальна схема. Граничні теореми в схемі Бернуллі. Теореми Муавра-Лапласа. Формули Пуассона.

Теоретичні відомості

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A з'явиться m раз, подається у вигляді

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія A з'явиться від m_i до m_j раз, обчислюється так:

$$P_n(m_i \leq m \leq m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} \tilde{N}_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_i}^{m_j} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Імовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні її в електромережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9. Обчислити ймовірність того, що з п'яти електролампочок, увімкнених у електромережу не перегорять: 1) дві; 2) не більш як дві; 3) не менш як дві.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $p = 0,9$; $q = 0,1$; $n = 5$; $m = 2$.

$$1) P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2! 3!} (0,9)^2 (0,1)^3 = 10 \cdot 0,81 \cdot 0,001 = 0,0081;$$

$$\begin{aligned} 2) P_5(0 \leq m \leq 2) &= \sum_{m=0}^2 C_5^m p^m q^{5-m} = C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p^1 q^4 + C_5^2 p^2 q^3 = \\ &= q^5 + 5p q^4 + 10p^2 q^3 = (0,1)^5 + 5 \cdot 0,9 (0,1)^4 + 10 (0,9)^2 (0,1)^3 = \\ &= 0,00001 + 5 \cdot 0,9 \cdot 0,0001 + 10 \cdot 0,81 \cdot 0,001 = \\ &= 0,00001 + 0,00045 + 0,0081 = 0,00856; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) P_5(2 \leq m \leq 5) &= \sum_{m=2}^5 C_5^m p^m q^{5-m} = 1 - \sum_{m=0}^1 C_5^m p^m q^{5-m} = \\ &= 1 - C_5^0 p^0 q^5 - C_5^1 p^1 q^4 = 1 - (0,00001 + 0,00045) = 1 - 0,00046 = 0,99954. \end{aligned}$$

Задачі

5.1. Садівником восени було посаджено сім саджанців яблуні. Імовірність того, що будь-який із саджанців навесні проросте, у середньому складає 0,7.

Обчислити ймовірність того, що із семи саджанців яблуні навесні проростуть:

1) три саджанці; 2) не менш як три. Знайти найімовірніше число саджанців, які навесні проростуть, і обчислити відповідну ймовірність.

5.2. Завод виготовляє однотипні телевізори, з яких 85% вищої якості. Із партії виготовлених заводом телевізорів навмання вибирають сім. Яка ймовірність того, що серед них телевізорів вищої якості буде: 1) 4; 2) не менш як 4.

5.3. Відомо, що серед виробів заводу стандартні деталі становлять у середньому 85%. Скільки необхідно взяти цих деталей, щоб $m_0 = 65$?

5.4. Імовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів за схемою Бернуллі є величиною сталою і дорівнює $p = 0,8$. Скільки необхідно провести таких експериментів, щоб ймовірність появи випадкової події $m \geq 900$ дорівнювала 0,99?

5.5. Частка діабетиків у певній місцевості становить у середньому 0,2%.

Навмання було обстежено 4000 осіб. Яка ймовірність того, що серед них діабетиків буде: 1) 4 особи; 2) від 3 до 6 осіб; 3) не більш як 4 особи.