

Лекція 14. Числові характеристики системи двох дискретних випадкових величин

План

1. Основні числові характеристики

2. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції та його властивості

1. Основні числові характеристики для випадкових величин X, Y , що утворюють систему (X, Y)

$$M(X) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_j p_{ij} = \sum_{j=1}^m x_j p_{x_j}. \quad (14.1)$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_j^2 p_{ij} - M^2(X) = \sum_{j=1}^m x_j^2 p_{x_j} - M^2(X). \quad (14.2)$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)}. \quad (14.3)$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i p_{ij} = \sum_{i=1}^k y_i p_{y_i}. \quad (14.4)$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i^2 p_{ij} - M^2(Y) = \sum_{i=1}^k y_i^2 p_{y_i} - M^2(Y) \quad (14.5)$$

$$\sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}. \quad (14.6)$$

2. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції та його властивості

Під час вивчення системи двох і більше випадкових величин доводиться з'ясовувати наявність зв'язку між цими величинами та його характер. З відповідною метою застосовують так званий *кореляційний момент*:

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i x_j p_{ij} - M(X)M(Y). \quad (14.7)$$

У разі $K_{xy} = 0$ зв'язок між величинами X та Y , що належать системі (X, Y) , відсутній. Коли $K_{xy} \neq 0$, то між відповідними X і Y кореляційний зв'язок існує.

Тісноту кореляційного зв'язку характеризує коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (14.8)$$

$$|r_{xy}| \leq 1, \text{ або } -1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

Отже, якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то $K_{xy} = 0$ і $r_{xy} = 0$. Рівність нулеві r_{xy} є необхідною, але не достатньою умовою незалежності випадкових величин.

Справді, може існувати система залежних випадкових величин, в якій коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Прикладом такої системи є система двох випадкових величин (X, Y) , яка рівномірно розподілена всередині кола радіусом

R із центром у початку координат. Дві випадкові величини X і Y називають *некорельованими*, якщо $r_{xy} = 0$, і *корельованими*, якщо $r_{xy} \neq 0$.

Отже, якщо X і Y незалежні, то вони будуть і некорельованими. Але з некорельованості випадкових величин у загальному випадку не випливає їх незалежність.

Приклад 1. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) :

$X = x_j$ $Y = y_i$	5,2	10,2	15,2	P_{y_i}
2,4	0,1a	2a	0,9a	
4,4	2a	0,2a	1,8a	
6,4	1,9a	0,8a	0,3a	
P_{x_j}				

Знайти a . Обчислити $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$; K_{xy} ; r_{xy} ; $P(2,4 \leq Y < 6,4; 5,2 < X \leq 15,2)$.

Розв'язання. Скориставшись умовою нормування (13.1), дістанемо:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P_{ij} = 0,1a + 2a + 0,9a + 2a + 0,2a + 1,8a + 1,9a + 0,8a + 0,3a = 1 \Rightarrow a = 0,1.$$

Зі знайденим a закон системи набирає такого вигляду:

$X = x_j$ $Y = y_i$	5,2	10,2	15,2	P_{y_i}
2,4	0,01	0,2	0,09	0,3
4,4	0,2	0,02	0,18	0,4
6,4	0,19	0,08	0,03	0,3
P_{x_j}	0,4	0,3	0,3	

Основні числові характеристики обчислюємо за формулами (14.1) - (14.8):

$$M(X) = \sum_{j=1}^3 x_j p_{x_j} = 5,2 \cdot 0,4 + 10,2 \cdot 0,3 + 15,2 \cdot 0,3 = 2,08 + 3,06 + 4,56 = 9,7;$$

$$M(X^2) = \sum_{j=1}^3 x_j^2 p_{x_j} = (5,2)^2 0,4 + (10,2)^2 0,3 + (15,2)^2 0,3 = 10,816 + 31,212 + 69,312 = 111,34;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 111,34 - 94,09 = 17,25;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 4,15;$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^3 y_i p_{y_i} = 2,4 \cdot 0,3 + 4,4 \cdot 0,4 + 6,4 \cdot 0,3 = 0,72 + 1,76 + 1,92 = 4,4;$$

$$M(Y^2) = \sum_{i=1}^3 y_i^2 p_{y_i} = (2,4)^2 0,3 + (4,4)^2 0,4 + (6,4)^2 0,3 =$$

$$= 1,728 + 7,744 + 12,288 = 21,76;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 21,76 - (4,4)^2 = 21,76 - 19,36 = 2,4;$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 1,55;$$

$$M(XY) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 y_i x_j p_{ij} = 2,4 \cdot 5,2 \cdot 0,01 + 2,4 \cdot 10,2 \cdot 0,2 + 2,4 \cdot 15,2 \cdot 0,09 +$$

$$+ 4,4 \cdot 5,2 \cdot 0,2 + 4,4 \cdot 10,2 \cdot 0,02 + 4,4 \cdot 15,2 \cdot 0,18 + 6,4 \cdot 5,2 \cdot 0,19 +$$

$$+ 6,4 \cdot 10,2 \cdot 0,08 + 6,4 \cdot 15,2 \cdot 0,03 = 0,1248 + 4,896 + 3,2832 + 4,576 +$$

$$+ 0,8976 + 12,0384 + 6,3232 + 5,2224 + 2,9184 = 40,28;$$

$$K_{xy} = M(XY) - M(X) M(Y) = 40,28 - 9,7 \cdot 4,4 = 40,28 - 42,68 = -2,4.$$

Оскільки $K_{xy} < 0$, то між відповідними величинами існує кореляційний зв'язок. Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-2,4}{4,15 \cdot 1,55} \approx -0,37.$$

Остаточно маємо:

$$p(2,4 \leq Y < 6,4; 5,2 < X \leq 15,2) = 0,2 + 0,02 + 0,09 + 0,18 = 0,31.$$