Лекція 10. Функція розподілу ймовірностей. Щільність імовірностей

План

1. ***Функція розподілу***
2. ***Щільність імовірностей***

1. Функція розподілу

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, яка придатна і для дискретних, і для неперервних випадкових величин, а саме: як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$, так звану інтегральну функцію.

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

$$F(x) = P(X < x) \tag{10.1}$$

Цю функцію можна тлумачити так: унаслідок експерименту випадкова величина може набути значення, меншого за x .

Наприклад, $F(5) = P(X < 5)$ означає, що в результаті експерименту випадкова величина X (дискретна чи неперервна) може набути значення, яке міститься ліворуч від $x = 5$, що ілюструє рис. 9.

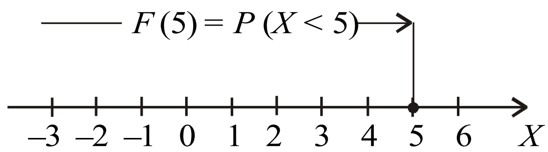

Рис. 9

Розглянемо властивості $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Ця властивість випливає з означення функції розподілу.

2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	– 4	– 1	2	6	9	13
$P(X=x_i)=p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$, дістаємо наведені далі співвідношення.

1) $F(– 4) = P(X < – 4) = 0$;

2) $F(–1) = P(X < –1) = P(X = – 4) = 0,1$;

3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = – 4) + P(X = –1) = 0,1 + 0,2 = 0,3$;

4) $F(6) = P(X < 6) = P(X = – 4) + P(X = –1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4$;

5) $F(9) = P(X < 9) = P(X = – 4) + P(X = –1) + P(X = 2) + P(X = 6) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,7$;

6) $F(12) = P(X < 13) = P(X = – 4) + P(X = –1) + P(X = 2) + P(X = 9) = 0,1 + 0,2 +0,1 + 0,3 + 0,1 = 0,8$;

7) $F(x)|_{x>13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) + P(X = 13)$ $= 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,1 + 0,2 = 1.$

Компактно $F(x)$ можна записати в такій формі:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0,1, & -4 < x \le -1; \\ 0,3, & -1 < x \le 2; \\ 0,4, & 2 < x \le 6; \\ 0,7, & 6 < x \le 9; \\ 0,8, & 9 < x \le 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 10.

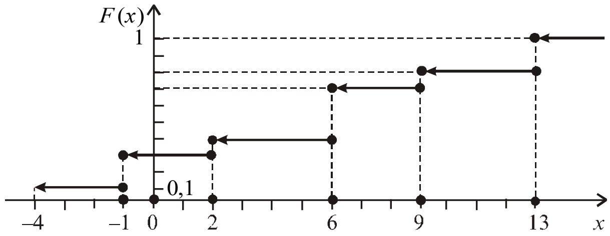

Рис. 10

2. Щільність імовірностей

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $p(x)$.

Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$.

Геометрично на графіку щільності ймовірності $p(x)\,dx$ відповідає площа прямокутника з основою dx і висотою $p\,(x)$ (рис. 11).

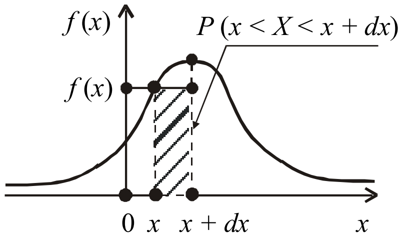

рис.11

Властивості $p\,(x)$:

1. $p(x) \ge 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\alpha x = 1.$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha; \beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx.$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx.$$

Приклад 2. Закон неперервної випадкової величини *X* задано у вигляді:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}\sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $p(x)$, $F(x)$. Обчислити $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Згідно 4 властивості маємо:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{1}{2}\sin dx = \frac{1}{2}\int_0^x \sin dx = \frac{1}{2}(-\cos x\,|_0^x) = \frac{1}{2}(-\cos x + 1) =$$
$$= \frac{1-\cos x}{2}.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0 < x \le \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Графіки функцій $p(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рис. 12 і 13.

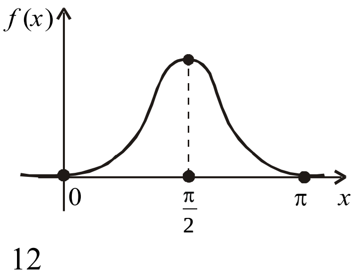

Рис. 12

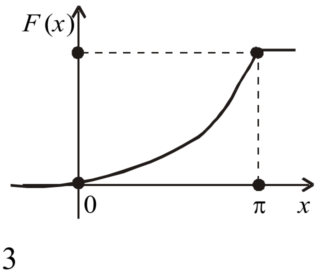

Рис. 13

Імовірність події $\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}$ можна обчислити згідно 3 властивості:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$