Лекція 8. Інтегральна теорема. Використання інтегральної теореми

План

1. Інтегральна теорема
2. Використання інтегральної теореми

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p(0 < p < 1)$, то для великих значень n імовірність появи випадкової події від m_i до m_j раз обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m_n \le m \le m_j) \approx \Phi(x_j) - \Phi(x_i) \qquad (8.1)$$

де $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}}$, $x_i = \dfrac{m_i - mp}{\sqrt{npq}}$, а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}$ є функцією Лапласа, значення якої наведено в дод. 2.

Властивості функції Лапласа:

1. $\Phi(x)$ визначена на всій осі абсцис.
2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, отже, $\Phi(x)$ є непарною функцією.
3. $\Phi(0) = 0$.
4. $\Phi(\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0{,}5$, оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ є інтегралом Пуассона.
5. $\Phi(-\infty) = -0{,}5$, як непарна функція.
6. $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, отже, $\Phi(x)$ є функцією неспадною.
7. $\Phi''(0) = 0$; $\Phi''(x)\big|_{x<0} > 0$; $\Phi''(x)\big|_{x<0} < 0$.

Таким чином, $x = 0$ є точкою перегину.

Графік функції $\Phi(x)$ зображено на рис. 5

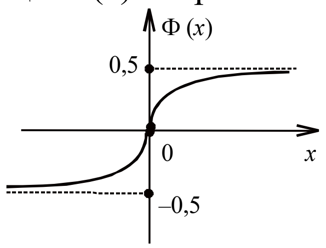

Рис. 5

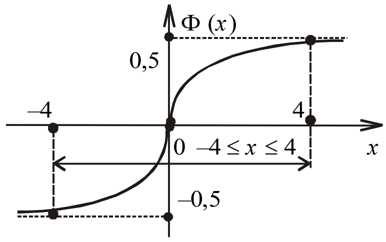

Рис. 6

Розв'язуючи задачі, додержують такого правила:
$\Phi(x)\big|_{x\ge 4} \approx 0{,}5$, $\Phi(x)\big|_{x\le -4} \approx 0{,}5$.

Отже, практично функція Лапласа застосовується для значень $x \in [-4; 4]$, що ілюструє рис. 6.

Приклад 1. Верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Імовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є величиною сталою і дорівнює 0,95. За зміну верстатом було виготовлено 800 деталей. Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде: 1) від 720 до 780 шт.; 2) від 740 до 790 шт.?

Розв'язання. За умовою задачі:

$n=800$; $p=0{,}95$; $q=0{,}05$; $720\le m\le 780$; $740\le m\le 780$;

$\sqrt{npq}=\sqrt{800\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05}=\sqrt{38}\approx 6{,}2,\ \ np=800\cdot 0{,}95=760$.

1) $x_j=\dfrac{m_j-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{780-760}{6{,}2}=\dfrac{20}{6{,}2}\approx 3{,}23$;

$x_i=\dfrac{m_i-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{720-760}{6{,}2}=-\dfrac{40}{6{,}2}\approx -6{,}5$;

$P_{800}(720\le m\le 780)\approx \Phi(3{,}23)-\Phi(-6{,}5)=\Phi(3{,}23)+\Phi(6{,}5)=$

$=0{,}49931+0{,}5=0{,}99931;$

2) $x_j=\dfrac{m_j-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{790-760}{6{,}2}\approx 4{,}84$;

$x_i=\dfrac{m_i-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{740-760}{6{,}2}=-\dfrac{20}{6{,}2}\approx -3{,}23$;

$P_{800}=(740\le m\le 790)\approx \Phi(4{,}84)-\Phi(-3{,}23)=\Phi(4{,}84)+\Phi(3{,}23)=$

$=0{,}5+0{,}499\cdot 31=0{,}99931.$

2. Використання інтегральної теореми

За допомогою (8.1) можна оцінити близькість відносної частоти $W(A)$ до ймовірності p випадкової події A. Нехай p — імовірність появи випадкової події A в кожному експерименті за схемою Бернуллі й $W(A)$ — відносна частота появи цієї події при n експериментах.

Необхідно оцінити ймовірність події $|W(A)-p|<\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ і є малою величиною). Якщо n набуває великих значень, то можна за формулою (8.1) дістати:

$$P(|W(A)-p|<\varepsilon)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (8.2)$$

Приклад 2. Імовірність виходу з ладу виробу під час проведення експерименту, який має на меті виявити надійність виробу в роботі, дорівнює 0,2. Було перевірено 400 виробів. Чому дорівнює ймовірність такої події: абсолютна величина відхилення відносної частоти виходу із ладу виробів від імовірності $p=0{,}2$ становить $\varepsilon=0{,}01$?

Розв'язання. За умовою задачі: $n=400$; $p=0{,}2$; $q=0{,}8$; $\varepsilon=0{,}01$. Підставивши ці значення в (24), дістанемо:

$$P(|W(A)-0{,}2|<0{,}01)\approx 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{400}{0{,}2\cdot 0{,}8}}\right)=2\Phi(0{,}5)=2\cdot 0{,}1915=0{,}383.$$