

Лекція 6. Повторювання випробувань. Формула Бернуллі.

План

1. Формула Бернуллі

2. Найімовірніше число появи випадкової події

Якщо кожний експеримент має лише два несумісні наслідки (події) зі сталими ймовірностями p і q , то їх називають експериментами за схемою Бернуллі. У кожному експерименті випадкова подія з імовірністю p відбувається, а з імовірністю q – не відбувається, тобто $p + q = 1$.

Простір елементарних подій для одного експерименту містить дві елементарні події, а для n експериментів за схемою Бернуллі — 2^n елементарних подій.

1. Формула Бернуллі

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A з'явиться m раз, подається у вигляді

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad (6.1)$$

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія A з'явиться від m_i до m_j раз, обчислюється так:

$$P_n(m_i \leq m \leq m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_i}^{m_j} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad (6.2)$$

Оскільки

$$P_n(0 \leq m \leq n) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1 \quad (6.3)$$

Дістанемо

$$P(0 \leq m \leq m_i) = 1 - \sum_{m=m_i+1}^n C_n^m p^m q^{n-m} \quad (6.4)$$

$$P(m_i \leq m \leq n) = 1 - \sum_{m=0}^{m_i-1} C_n^m p^m q^{n-m} \quad (6.5)$$

Приклад 1. Імовірність того, що електролампочка не перегорить при увімкненні її в електромережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9.

Обчислити ймовірність того, що з п'яти електролампочок, увімкнених у електромережу за схемою, наведеною на рис. 14, не перегорять: 1) дві; 2) не більш як дві; 3) не менш як дві.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $p = 0,9$; $q = 0,1$; $n = 5$; $m = 2$. Згідно з (6.1), (6.4), (6.5) дістанемо:

$$1) P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2! 3!} (0,9)^2 (0,1)^3 = 10 \cdot 0,81 \cdot 0,001 = 0,0081;$$

$$2) P_5(0 \leq m \leq 2) = \sum_{m=0}^2 C_5^m p^m q^{5-m} = C_5^0 p^0 q^5 + C_5^1 p q^4 + C_5^2 p^2 q^3 =$$

$$\begin{aligned}
&= q^5 + 5p q^4 + 10p^2 q^3 = (0,1)^5 + 5 \cdot 0,9 (0,1)^4 + 10 (0,9)^2 (0,1)^3 = \\
&= 0,00001 + 5 \cdot 0,9 \cdot 0,0001 + 10 \cdot 0,81 \cdot 0,001 = \\
&= 0,00001 + 0,00045 + 0,0081 = 0,00856;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) P_5 (2 \leq m \leq 5) &= \sum_{m=2}^5 C_5^m p^m q^{5-m} = 1 - \sum_{m=0}^1 C_5^m p^m q^{5-m} = \\
&= 1 - C_5^0 p^0 q^5 - C_5^1 p^1 q^4 = 1 - (0,00001 + 0,00045) = 1 - 0,00046 = 0,99954.
\end{aligned}$$

2. Найімовірніше число появи випадкової події

Найімовірнішим числом появи випадкової події A в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі називається таке число m_0 , для якого ймовірність $P_n(m_0)$ перевищує або в усякому разі є не меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків експериментів.

$$n p - q \leq m_0 \leq n p + p \quad (6.6)$$

Число m_0 називають також *модю*.

Приклад 2. Імовірність того, що студент складе іспит з математики, є величиною сталою і дорівнює в середньому 0,8. Нехай є група з восьми студентів. Знайти найімовірнішу кількість членів цієї групи котрі складуть іспит з математики, і обчислити відповідну ймовірність.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 8$; $p = 0,8$; $q = 0,2$.

$$\begin{aligned}
&np - q \leq m_0 \leq np + p \rightarrow \\
\rightarrow 8 \cdot 0,8 - 0,2 &\leq m_0 \leq 8 \cdot 0,8 + 0,8 \rightarrow \\
\rightarrow 6,2 &\leq m_0 \leq 7,2.
\end{aligned}$$

Отже, $m_0 = 7$; $P_8(7) = C_8^7 p^7 q = 8 (0,8)^7 0,2 = 1,6 (0,8)^7 = 0,524288$.

Висновок: найімовірніша кількість студентів, які складуть екзамен, $m_0 = 7$. Відповідна ймовірність дорівнює 0,524288.