

## Лекція 20. Визначений інтеграл

### План

1. *Означення визначеного інтеграла*
2. *Властивості визначеного інтеграла*
3. *Інтеграл зі змінною верхньою межею*
4. *Формула Ньютона-Лейбніца*
5. *Метод заміни змінної у визначеному інтегралі*
6. *Метод інтегрування частинами*

### 1. Означення визначеного інтеграла

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена на відрізку  $[a; b]$ ,  $a < b$ . Розіб'ємо відрізок  $[a; b]$  на  $n$  довільних частин так, щоб

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сукупність точок  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  назовемо  $T$ -розбиттям відрізка  $[a; b]$  на частини. Для кожного з частинних відрізків визначимо його довжину  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) та значення функції  $f(\xi_i)$  у довільній точці  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ . Позначимо через  $\lambda$  – найбільшу довжину серед довжин частинних відрізків, тобто  $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$ . Утворимо суму  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ , яка називається *інтегральною сумою* функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[a; b]$ .

**Означення 1.** Якщо існує скінченна границя інтегральних сум  $\sigma_n$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , яка не залежить ні від способу розбиття відрізка  $[a; b]$  на частини  $\Delta x_i$ , ні від вибору точок  $\xi_i$  у кожному з частинних відрізків, то вона називається *визначеним інтегралом* функції  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$  і позначається символом

$\int_a^b f(x) dx$ . Отже, згідно з означенням,

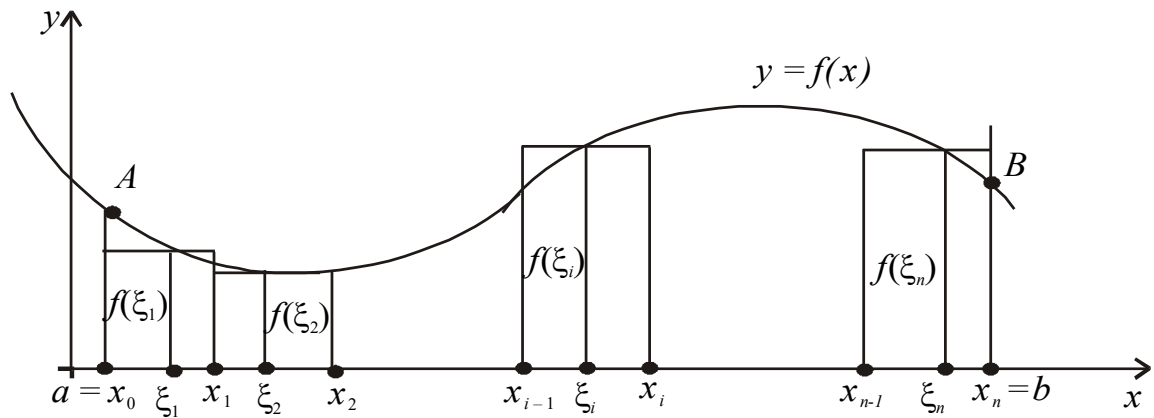
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Числа  $a$  і  $b$  називають відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування; функція  $f(x)$  – підінтегральна функція;  $f(x) dx$  – підінтегральний вираз;  $dx$  – диференціал змінної інтегрування.

**Означення 2.** Функція, для якої на  $[a; b]$  існує визначений інтеграл

$\int_a^b f(x) dx$  називається *інтегрованою на цьому проміжку*.

*Геометричний зміст визначеного інтеграла* полягає в тому, що визначений інтеграл від невід'ємної та інтегрованої на відрізку  $[a; b]$  функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції  $y = f(x)$ , відрізками прямих  $x = a$ ,  $x = b$  та віссю  $Ox$ :



Необхідною умовою існування визначеного інтеграла є обмеженість функції  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$ .

Достатньою умовою існування визначеного інтеграла є неперервність функції  $f(x)$  на цьому ж відрізку.

## 2. Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо  $f(x) = c = \text{const}$ , то  $\int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a)$ .

II. Сталій множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто  $\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx$ .

III. Якщо  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$  інтегровні на  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) \, dx = \int_a^b f_1(x) \, dx \pm \int_a^b f_2(x) \, dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx.$$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю  $\int_a^a f(x) \, dx = 0$ .

VI. Якщо  $f(x)$  — інтегровна в будь-якому із проміжків:  $[a; b]$ ,  $[a; c]$ ,  $[c; b]$ , то  $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$ .

VII. Якщо  $f(x) \geq 0$  і інтегровна для  $x \in [a, b]$ ,  $b > a$ , то  $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$ .

VIII. Якщо  $f(x)$ ,  $g(x)$  – інтегровні та  $f(x) \geq g(x)$  для  $x \in [a, b]$ ,  $b > a$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

IX. Якщо  $f(x)$  – інтегровна та  $m \leq f(x) \leq M$  для  $x \in [a, b]$ ,  $b > a$ , то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

X. **Теорема (про середнє):** Якщо функція  $f(x)$  – неперервна для  $x \in [a, b]$ ,  $b > a$ , то знайдеться така точка  $x = c \in [a, b]$ , що:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

### 3. Інтеграл зі змінною верхньою межею

Нехай функція  $f(x)$  інтегровна на відрізку  $[a; b]$ . Тоді вона інтегровна і на будь-якому відрізку  $[a; x]$ , де  $a \leq x \leq b$ , тобто для будь-якого  $x \in [a; b]$  має

зміст інтеграл  $\int_a^x f(t) dt$ .

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Ця функція визначена на відрізку  $[a; b]$  і називається *інтегралом зі змінною верхньою межею*.

**Теорема 1.** Похідна інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, що дорівнює верхній межі, тобто

$$\Phi'(x) = \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

### 4. Формула Ньютона-Лейбніца

**Теорема 2. (Основна теорема інтегрального числення).** Нехай функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a; b]$ . Якщо функція  $F(x)$  є довільною її первісною на цьому відрізку, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ця формула називається *формулою Ньютона-Лейбніца*.

**Приклад.**

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

### 5. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

**Теорема.** Якщо: 1)  $f(x)$  – неперервна для  $x \in [a; b]$ ; 2)  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ; 3)  $\varphi(t)$  та  $\varphi'(t)$  – неперервні для  $t \in [\alpha; \beta]$ ; 4) при  $t \in [\alpha; \beta] \Rightarrow x \in [a; b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$
$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t) dt; \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{x}{t} \Big|_a^b \\ \frac{a}{\alpha} \Big|_{\alpha}^{\beta} \end{array}$$

**Зауваження.** При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

**Приклад.**  $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \left. \begin{array}{l} x = t^2, \quad dx = 2t dt \\ \frac{x}{t} \Big|_4^9 \\ \frac{2}{2} \Big|_2^3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2t dt}{t+1} = 2 \int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1} dt =$

$$= 2 \int_2^3 \left( 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2 \left( t - \ln|t+1| \right) \Big|_2^3 = 2(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)) = 2 \left( 1 + \ln \frac{3}{4} \right).$$

### 6. Метод інтегрування частинами

**Теорема.** Якщо функції  $u(x)$  та  $v(x)$  мають неперервні похідні для  $x \in [a; b]$ , то

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

**Приклад.**

$$\int_1^e \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = e - x \Big|_1^e = 1.$$