

Тема 7. Криві поверхні. Утворення поверхонь. Взаємний перетин криволінійних поверхонь

Багато з того, що оточує нас у житті, якщо дивитись з позицій геометрії, - це криві поверхні простих і складних форм. Зверніть увагу хоча б на оболонку курячого яйця. Геометрична досконалість надає їй чималу міцність, незважаючи на малу товщину стінок. Крило та тулуб птаха також мають досконало відпрацьовані природою поверхні. Сукупність таких поверхонь мають прекрасні аеродинамічні та інші характеристики.

Корпуси автомобілів, літаків, кораблів, оболонки наземних і підземних споруд – це комплекси відсіків поверхонь, досить складних за законами утворення. Про деякі часткові види кривих поверхонь буде вестися мова нижче.

7.1 Способи утворення кривих поверхонь і їх систематизація

Крива поверхня визначається як неперервна двопараметрична множина точок або однопараметрична множина ліній. Точки або лінії цих множин називаються відповідно точками або лініями каркаса поверхні (рис. 8.1). Оскільки на рисунку неможливо зобразити всі точки або лінії каркаса поверхні, їх зображують з певним інтервалом.

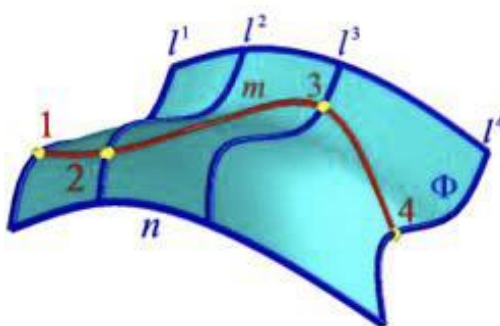


Рисунок 7.1 – Каркас поверхні

Сукупність ліній, які мають спільний закон утворення та пов'язані між собою певною залежністю, називається лінійним каркасом поверхні. Форма і

положення конкретної лінії каркаса на поверхні визначаються параметром каркаса.

Творення криволінійної поверхні можна розглядати на основі звільнення одного параметра заданої лінії. В результаті утворюється однопараметрична множина ліній каркаса поверхні. Як правило, параметр звільнюється за допомогою надання закону руху лінії в просторі.

На рис. 7.2 в площині xOz задано конкретну параболу a , яка не має вільних параметрів. Звільнення одного параметра положення дає змогу параболі рухатись за визначеним законом, наприклад, поступально вздовж лінії b . Усі положення параболі в просторі утворюють неперервний каркас поверхні. В нарисній геометрії такий прийом називається кінематичним способом утворення поверхні, лінія a каркаса – твірною поверхні, а лінія b руху точок лінії – напрямною.

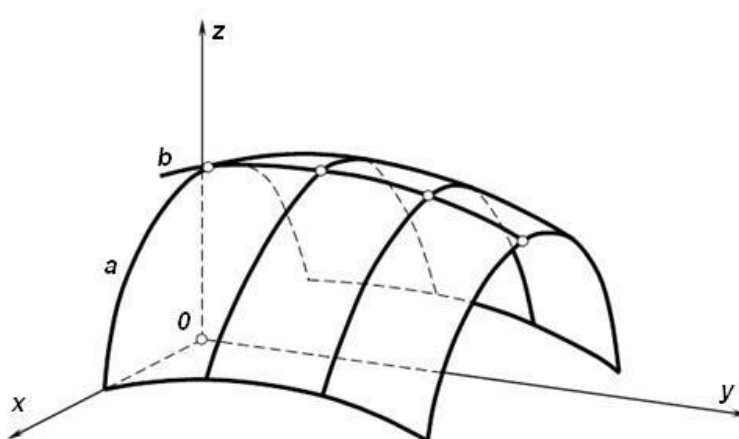


Рисунок 7.2 – Парабола

Поверхні, утворені рухом твірної певної форми, називаються кінематичними поверхнями з твірною постійної форми.

З параметром положення лінії каркаса можуть бути зв'язані і параметри її форми. За параметр каркаса можна прийняти будь-який з цих параметрів. При цьому незалежним (вільним) є тільки один параметр каркаса, а решта змінних параметрів визначається як залежні від першого. Поверхня, що утворюється

таким чином, називається кінематичною поверхнею з твірною змінної форми. Як приклад можна розглянути поверхню, зображену на рис. 7.3.

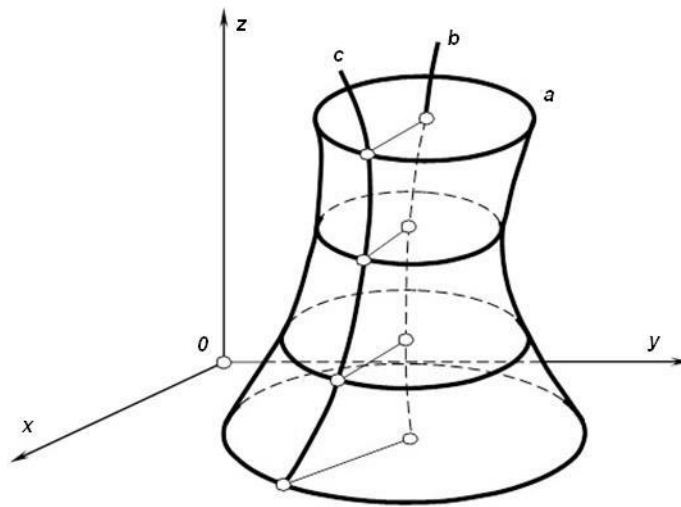


Рисунок 7.3 – Крива поверхня

Твірне коло рухається у просторі таким чином, що його центр переміщується вздовж напрямної b , а площина кола весь час залишається паралельною площині xOy . Зміна радіуса в процесі переміщення задається лінією c . Змінюються два параметри кола: положення площини кола та радіус, проте незалежним є тільки один.

Поверхня вважається заданою, якщо за однією проекцією точки, що належить поверхні, можна визначити другу проекцію. Сукупність умов, необхідних і достатніх для задання поверхні, називається визначником поверхні. Останній складається з геометричної та алгоритмічної частин. Геометричною частиною визначника поверхні є геометричні фігури, зображені на рисунку, за допомогою яких зв'язуються параметри множини ліній простору. Алгоритмічна частина визначника – це сукупність правил застосування геометричної частини визначника для утворення поверхні. Наприклад, геометричною частиною визначника поверхні, зображеної на рис. 8.3, є лінії a, b, c та площина xOy . До алгоритмічної частини визначника цієї поверхні відносяться умови:

- 1) коло a є лінією каркаса поверхні;

- 2) центр кола повинен належати лінії b ;
- 3) усі лінії каркаса поверхні повинні перетинати лінію c .

Серед множини різноманітних поверхонь можна виділити їх групи з однаковими елементами визначника або деякими спільними властивостями. Визначення груп дає змогу досконало вивчати властивості поверхонь, створювати узагальнені алгоритми побудови їх каркасів, розв'язувати різноманітні задачі.

В нарисній геометрії поверхні, утворені неперервним каркасом, систематизують за виглядом його ліній і законом формування каркаса. Найпоширеніші в інженерній практиці є поверхні з найпростішими лініями каркаса – прямими та колами, які відповідно називаються лінійчатими та циклічними.

Існують поверхні, які можна віднести і до лінійчатих, і до циклічних. Наприклад, на поверхні циліндра обертання можна визначити як лінійчатий (множина прямолінійних твірних, паралельних осі), так і циклічний (множина кіл в площинах, перпендикулярних до осі) каркас. В основу систематизації поверхонь за законом каркаса може бути покладено вигляд руху твірної у просторі, якщо каркас поверхні утворюється при звільненні одного параметра твірної.

Найпростіші види руху – обертальний, поступальний та гвинтовий.

Поверхні, утворені обертанням твірної лінії навколо нерухомої осі, називаються поверхнями обертання (рис. 7.4). Найпростішими прикладами таких поверхонь є циліндр, конус обертання та сфера. Всі поверхні обертання можна віднести до циклічних поверхонь. Визначник поверхні обертання має вигляд $D = (a, i)$

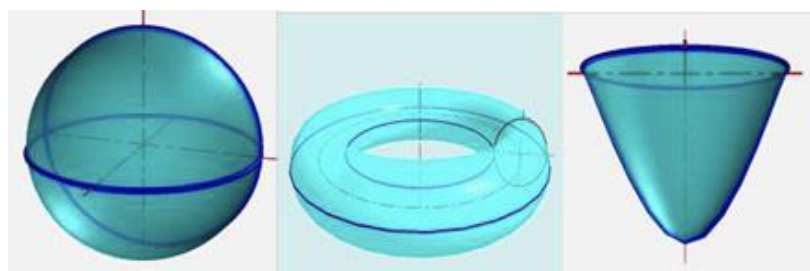


Рисунок 7.4 – Поверхні обертання

На рис. 7.5 показані проєкції поверхні обертання, заданої проєкціями ліній визначника.

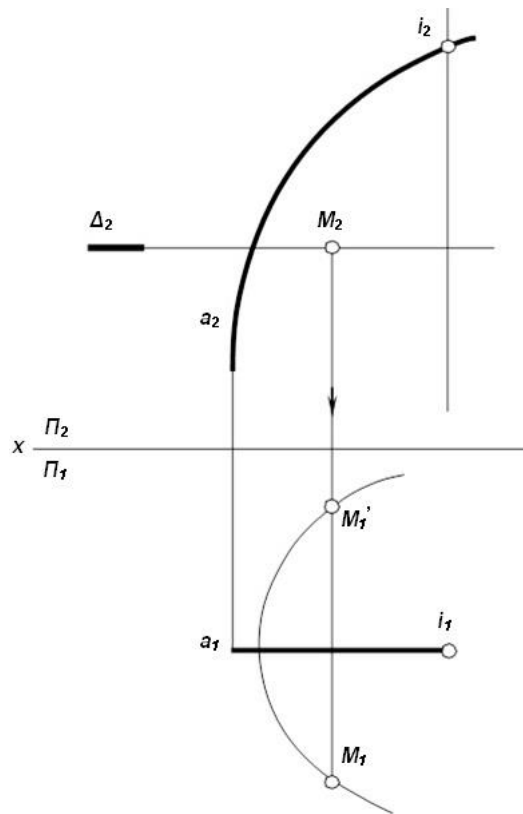


Рисунок 7.5 – проєкції поверхні обертання, заданої проєкціями ліній визначника

Поверхні, утворені поступальним рухом твірної, називаються поверхнями паралельного переносу.

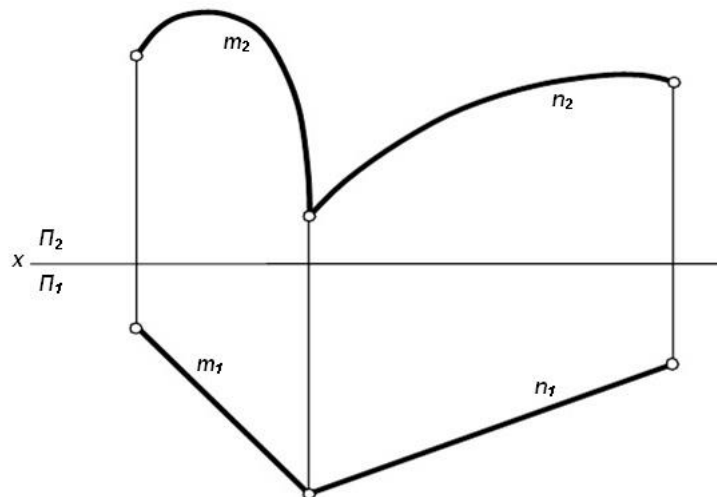


Рисунок 7.6 – Проєкції поверхні паралельного переносу

Визначник такої поверхні можна записати у вигляді $D = (m, n)$.

На рис. 7.6 показано проєкції поверхні паралельного переносу.

Поверхні, утворені гвинтовим рухом (обертальним + поступальним) твірної навколо осі, називаються гвинтовими (рис. 7.7).

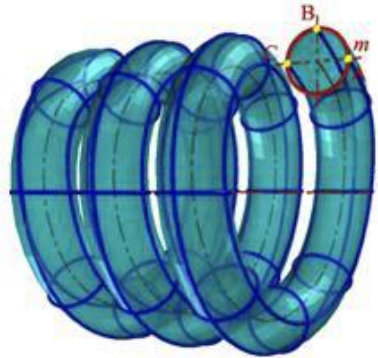


Рисунок 7.7 – Гвинтова поверхня

Визначник поверхні має вигляд $D = (b, i)$.

На рис. 7.8 показано побудову проєкцій найпоширенішої в інженерній практиці поверхні прямого гелікоїда. Лінії каркаса поверхні паралельні горизонтальній площині і перетинають напрямну лінію і вісь обертання.

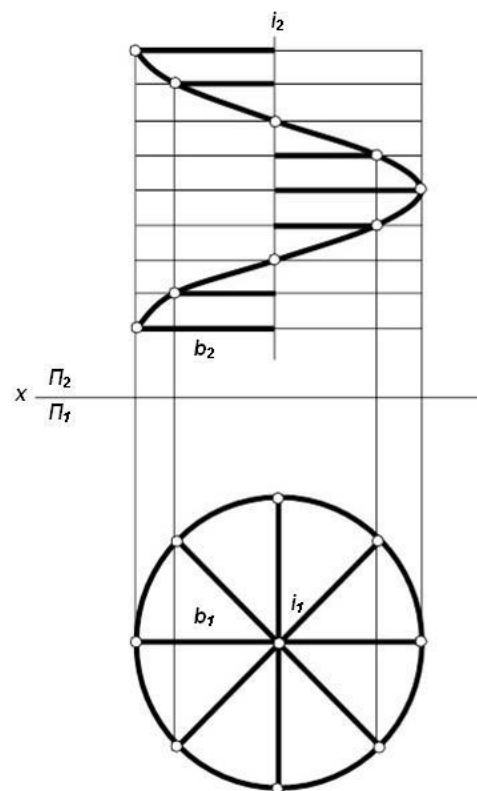


Рисунок 7.8 – Прямий гелікоїд

Лінійчаті поверхні

Лінійчата поверхня може бути визначена як нескінченна множина прямих (твірних), кожна з яких перетинає три фіксовані у просторі напрямні лінії.

Належність лінійчатої поверхні до певного виду визначається числом невластних напрямних ліній.

У загальному випадку дві нескінченно близькі твірні лінійчатої поверхні є мимобіжними прямими. Такі поверхні називають косими.

Поверхня, у якій прямі лінії каркаса перетинають три задані мимобіжні прямі, називається однопорожнинним гіперболоїдом (рис. 7.9).

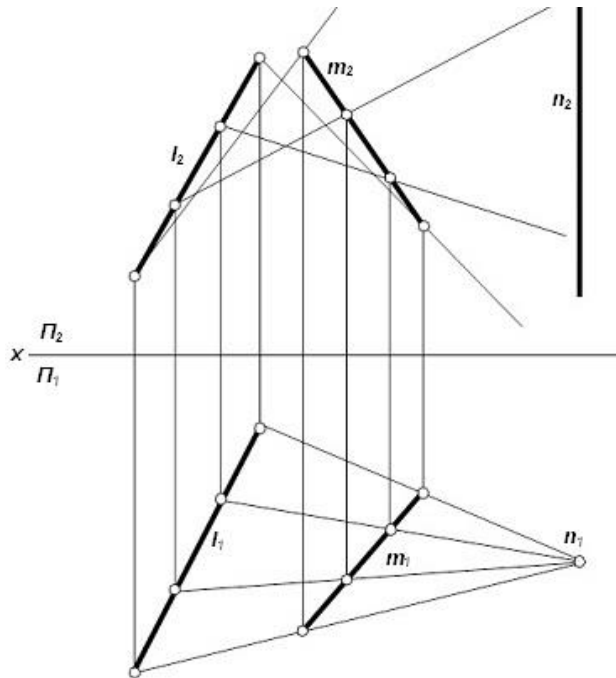


Рисунок 7.9 – Однопорожнинний гіперболоїд

Лінійчаті поверхні з невластною прямою напрямною, яка замінюється площиною паралелізму, називаються поверхнями Каталана. До поверхонь Каталана належать коноїд, циліндроїд і гіперболічний параболоїд (він же – гіпар або коса площина).

Коноїд – це поверхня, яка має дві власні напрямні – пряму і криву (рис. 7.10).

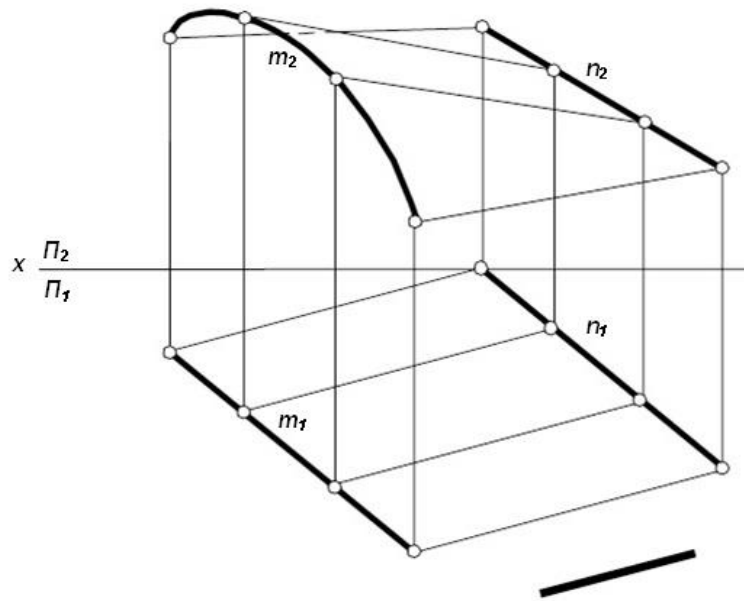


Рисунок 7.10 – Коніоїд

Циліндроїд – дві власні напрямні криві (рис. 7.11).

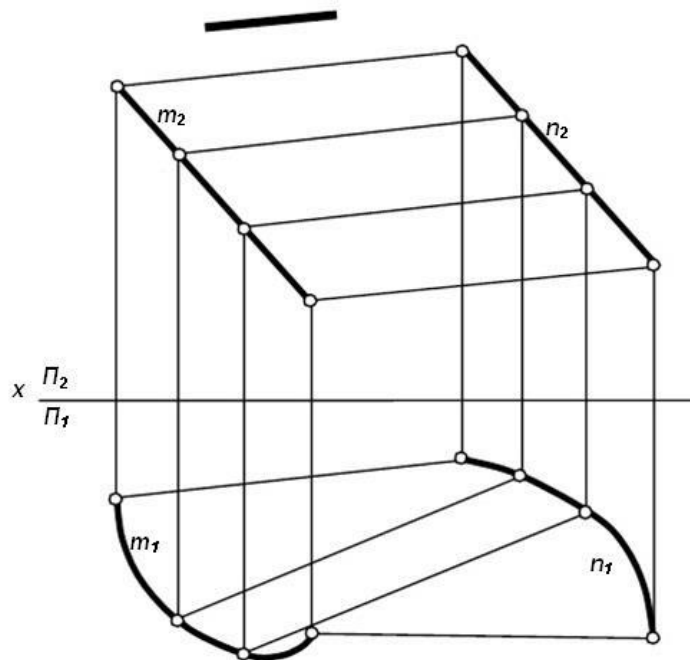


Рисунок 7.11 – Циліндроїд

Гіперболічний параболоїд має дві власні напрямні прями лінії (рис. 7.12).

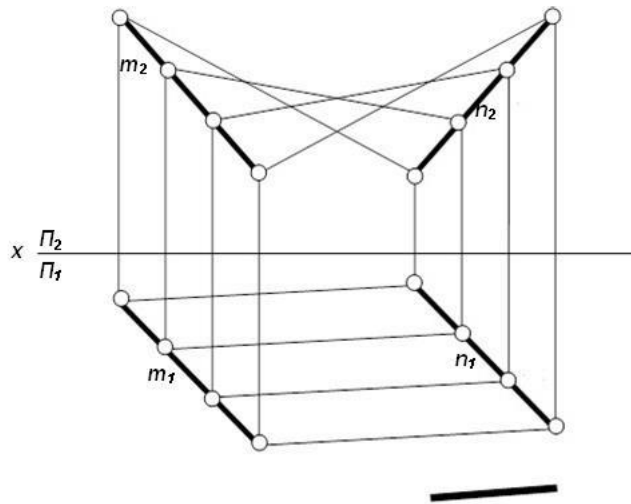


Рисунок 7.12 – Гіперболічний параболоїд

Циліндроїди, коноїди та гіпари широко використовуються в архітектурній практиці як поверхні покриття споруд, оскільки несуть на собі лінійні каркаси. Якщо площина паралелізму ліній каркаса поверхні замінює нескінченно віддалену пряму напрямну, то нескінченно віддалена крива напрямна замінюється напрямним конусом.

На рис. 7.13 показана поверхня з напрямним конусом, яка називається косим гелікоїдом і крім напрямного конуса має ще дві власні напрямні – гвинтову лінію і вісь гвинтової лінії. Прямі лінії каркаса гелікоїда перетинають власні напрямні та паралельні відповідним твірним напрямного конуса.

На відміну від косих поверхонь, у яких кожна пара нескінченно близьких ліній каркаса є мимобіжною, у розгорнутих поверхонь вони перетинаються.

Розгорнуту лінійчату поверхню можна уявити собі як граничний стан багатогранної поверхні з гранями, ширина яких наближається до нуля. Тому таку поверхню можна отримати розгортанням багатогранника на площину.

У загальному вигляді розгорнута поверхня утворюється як неперервна однопараметрична множина дотичних до просторової кривої лінії m і називається торсом (рис. 7.14). Просторова крива лінія при цьому називається ребром звороту. Якщо ребро звороту перетворюється в точку – отримаємо конічну поверхню з вершиною в даній точці. Якщо вершина конічної поверхні віддалена в нескінченність, – маємо циліндричну поверхню.

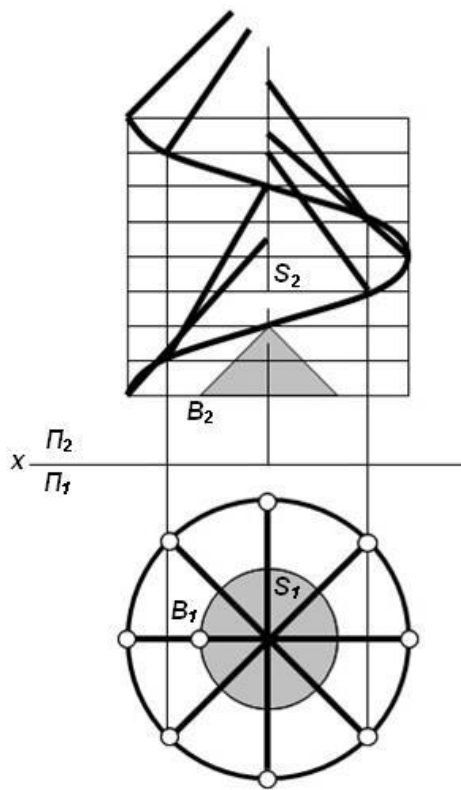


Рисунок 7.13

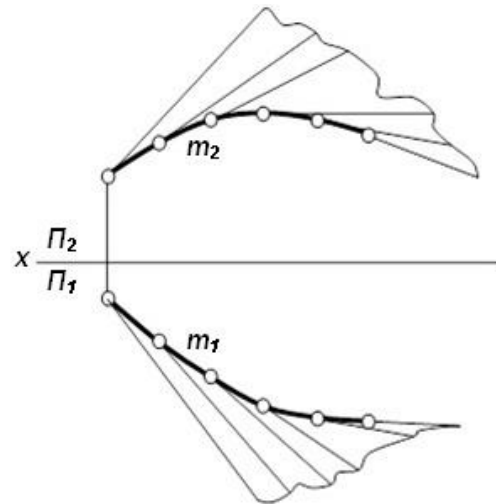


Рисунок 7.14

7.3 Дискретизація та інтерполяція поверхонь

В практиці конструювання архітектурних та технічних форм виникає потреба представлення поверхні як неперервним, так і дискретним каркасом. У зв'язку з цим виникають задачі перезадання каркаса поверхні.

Виявлення на поверхні дискретної множини ліній або точок, положення яких відповідає заданим умовам, називається дискретизацією поверхні. Прикладом дискретизації може бути розділення поверхонь збірного просторового покриття на збірні елементи або нанесення сітки кінцевих елементів на поверхню оболонки для її розрахунку на міцність та стійкість.

Задача, протилежна дискретизації, називається інтерполяцією. В практиці проектування часто як вихідну форму представлення поверхні приймають її дискретний каркас. Але таке представлення не є способом її задання, оскільки в цьому випадку неможливо визначити положення довільної точки, яка належить поверхні. Отже, виникає задача відновлення поверхні за її дискретним каркасом.

Багато задач потребують наближеної заміни складної поверхні більш простими, що мають певні властивості. Наприклад, для побудови наближеної розгортки нерозгортної поверхні її заміняють відсіками конусів або циліндрів, для яких і будують розгортку. Така наближена заміна однієї поверхні іншими називається апроксимацією і виконується як дві послідовні операції дискретизації та інтерполяції.

7.4 Перетин кривих поверхонь площиною та прямою лінією

При перерізах поверхонь площиною утворюється плоска крива лінія, кожна точка якої є точкою перетину лінії каркаса поверхні з січною площиною. Для побудови точок перерізу можуть бути застосовані способи допоміжних січних площин або спосіб заміни площин проєкцій. Допоміжні січні площини в більшості випадків обираються проєціюючими, що дає змогу визначити множину точок перетину плоских ліній каркаса поверхні з заданою площиною. Спосіб заміни площин проєкцій дозволяє перевести площину чи поверхню, що перетинаються, в проєціююче положення і спростити розв'язання задачі. Отже, обидва способи ґрунтуються на алгоритмах побудови перерізу поверхні проєціюючою площиною.

Перетин поверхонь проєціюючою площиною

На рис. 7.15 показано побудову перерізу сфери проєціюючою площиною Γ .

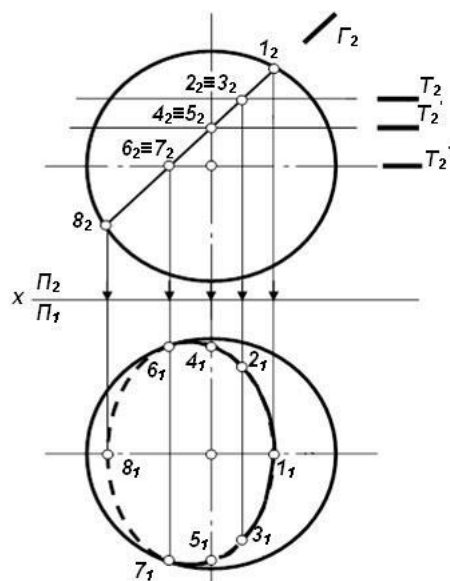


Рисунок 7.15 – Переріз сфери проєціюючою площиною

Така площина на площині проєкцій, до якої вона перпендикулярна, зображується прямою лінією. Ця проєкція називається виродженою. Одна з проєкцій лінії перерізу поверхні завжди збігається з виродженою проєкцією проєціюючої січної площини. Отже, побудова лінії перерізу зводиться до знаходження її другої відсутньої проєкції або до визначення другої проєкції множини точок, що належать поверхні. Друга проєкція точки, що належить будь-якій лінії, будується просто за відповідністю, тому для побудови другої проєкції лінії перерізу досить задати поверхню у вигляді множини простих ліній каркаса, фронтальну проєкцію яких можна накреслити інструментально без додаткових побудов. Горизонтальна проєкція кожної точки лінії перерізу визначається як проєкція точки, що належить відповідній лінії каркаса.

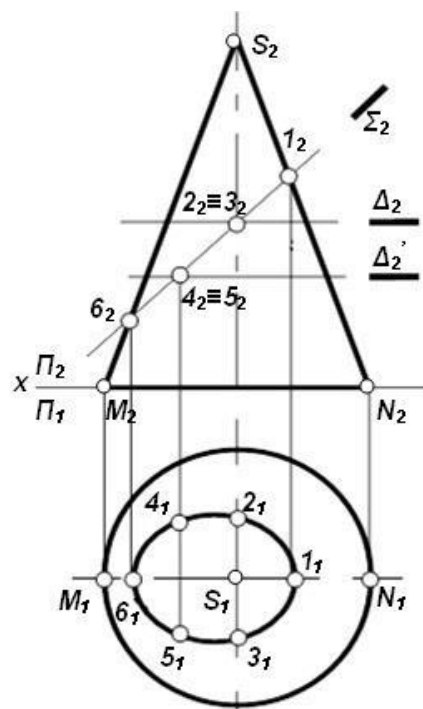


Рисунок 7.16 – Переріз конуса обертання фронтально-проєціюючою площиною

На рис. 7.16 показано переріз конуса обертання фронтально-проєціюючою площиною. Фронтальна проєкція перерізу збігається з проєкцією площини Σ_2 . Точки горизонтальної проєкції будуються за відповідністю як проєкції точок, що належать лініям каркаса конуса. Це можуть бути кола горизонтальних перерізів

чи прямолінійні твірні. На рис. 7.16 точки 1 і 6 знайдені як результат перетину площини з твірними SM і SN. Для побудови точок 4,5 і 2,3 проведені допоміжні горизонтальні площини.

Конічні перерізи

При перетині конуса обертання площинами утворюються криві другого порядку (рис. 7.17) (еліпс, парабола, гіпербола, коло), які ще називають коніками.

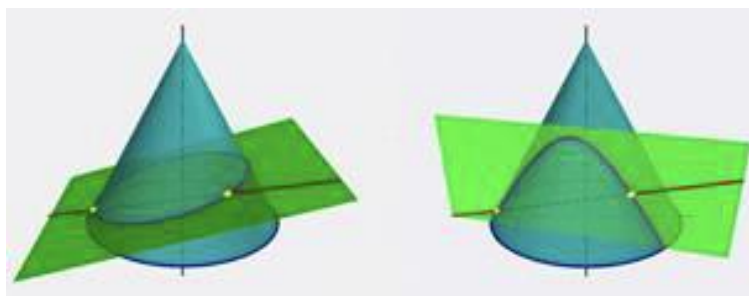


Рисунок 7.17 – Перетин конуса обертання площинами

На рис. 7.18 показано переріз конуса обертання різними проєціюючими площинами. Якщо січна площина паралельна двом прямолінійним прямим конуса, то вона перетинає його по гіперболі, якщо площина - паралельна одній твірній, то вона перетинає конус по параболі, якщо площина не паралельна жодній твірній - то вона перетинає конус обертання по еліпсу, і нарешті, якщо площина перпендикулярна осі конуса, то вона перетне його по колу.

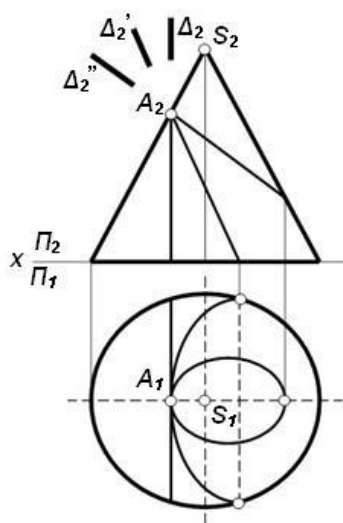


Рисунок 7.18 – Переріз конуса обертання різними проєціюючими площинами

Перетин кривих поверхонь площиною загального положення

На рис. 7.19 заданий прямий круговий конус і площина загального положення (слідами). Для знаходження проєкцій лінії перетину площини з поверхнею площину способом заміни площин проєкцій перетворюють у проєціююче положення.

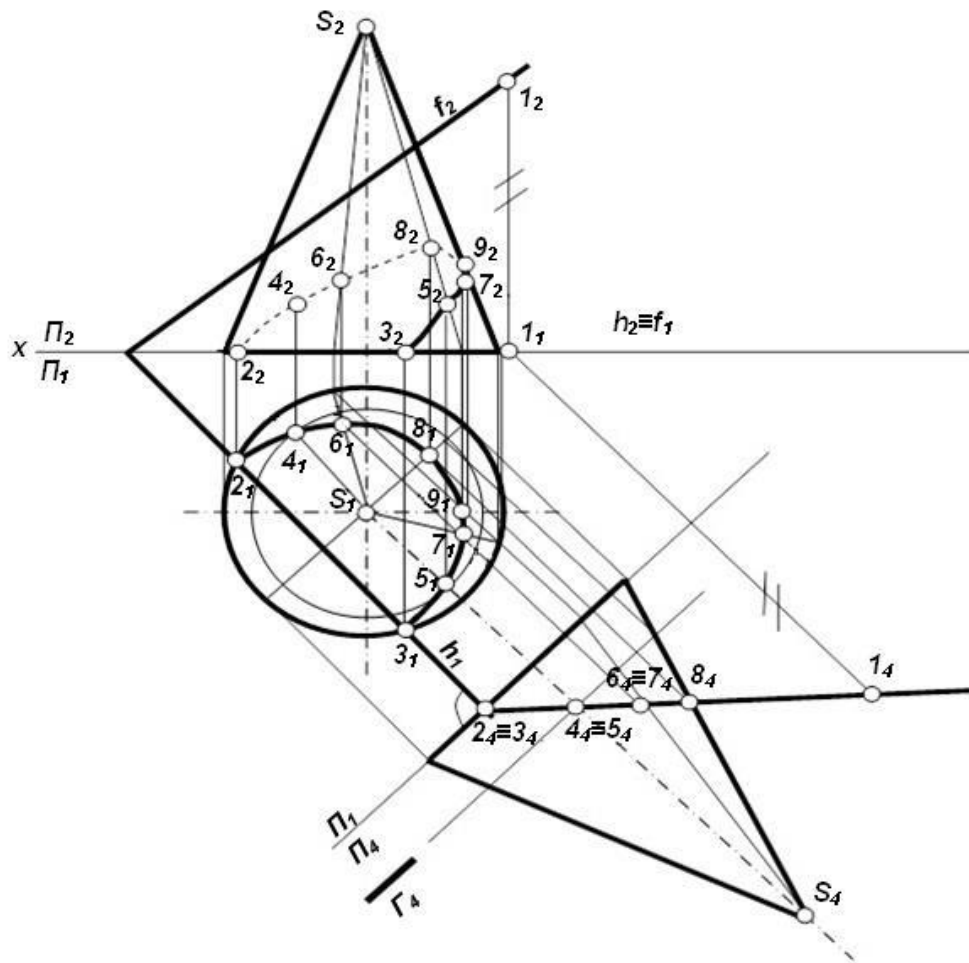


Рисунок 7.19 – Знаходження проєкцій лінії перетину площини з поверхнею площину способом заміни площин проєкцій

Точки лінії перетину 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 на проєкціях Π_1 і Π_2 знаходяться за відповідністю.

Перетин поверхонь другого порядку з прямою лінією

Пряма перетинає поверхню другого порядку в двох точках. Точки перетину прямої t з проєціюючим циліндром другого порядку (рис. 7.20) визначаються на виродженій проєкції циліндра як результат перетину двох ліній.

Друга проекція точок визначається за вертикальною відповідністю.

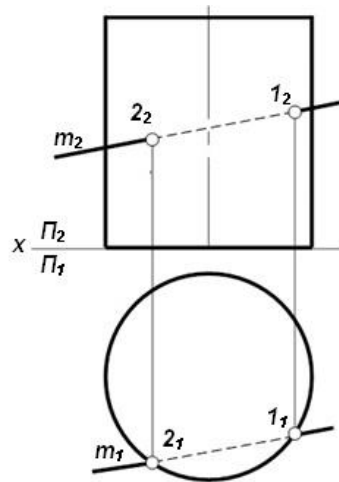


Рисунок 7.20 – Перетин прямої з проєціюючим циліндром другого порядку

Для побудови точок перетину прямої АВ з циліндром другого порядку загального положення (рис. 8.21) можна через пряму побудувати допоміжну січну площину, яка перетне циліндр по прямолінійних твірних.

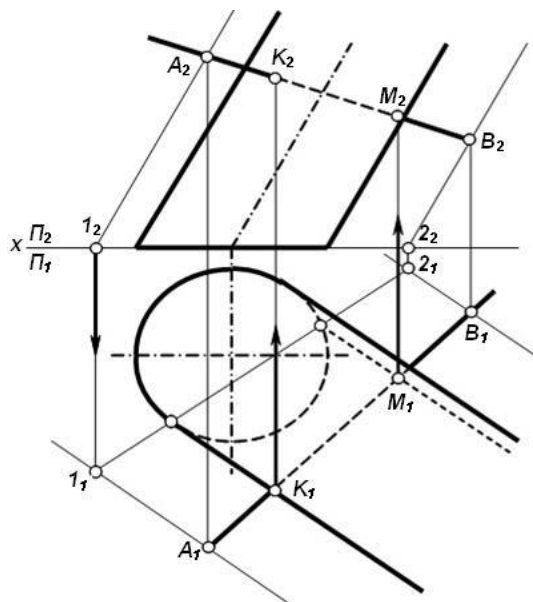


Рисунок 7.21 – Побудова точок перетину прямої з циліндром другого порядку

Точки перетину проєцій прямої К і М та знайдених твірних циліндра і будуть шуканими. Видимість точок перетину та ділянок прямої визначаються за

наступним правилом. Точка перетину на проєкціях вважається видимою, якщо вона належить видимій твірній циліндра, і, навпаки, – невидимою, якщо вона належить невидимій твірній.

Побудова точок перетину прямої з конічною поверхнею може бути виконана аналогічним чином (рис. 7.22).

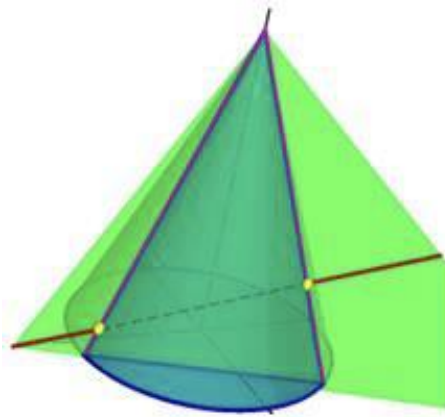


Рисунок 7.22 – Перетин прямої з конічною поверхнею

Але треба мати на увазі, що тільки та площина перетне конус по прямолінійних твірних, яка проходить через вершину конічної поверхні. Для цього через вершину конуса та точки прямої A і B проведемо допоміжну січну площину (рис. 7.23). Остання перетне конус по прямолінійних твірних S_13_1 та S_14_1 . Точки перетину проєкцій прямої та знайдених твірних будуть шуканими. Видимість точок перетину K і M визначається за правилом, наведеним вище.

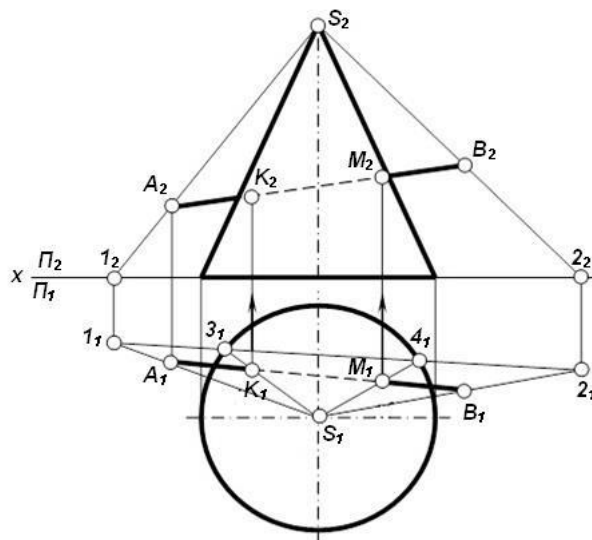


Рисунок 7.23 – Побудова точок перетину прямої з конічною поверхнею

7.5 Взаємний перетин криволінійних поверхонь

В задачах конструювання складних форм машинобудівних виробів або інженерних конструкцій виникає необхідність у побудові ліній перетину простих поверхонь, які утворюють ці складні форми. Лінія, яка утворюється як множина спільних точок двох поверхонь, що перетинаються, називається лінією перетину. Лінію перетину поверхонь будують по точках зустрічі ліній однієї поверхні з іншою або по точках перетину ліній каркасів двох поверхонь.

Для побудови точок лінії взаємного перетину двох поверхонь застосовуються два способи: заміни площин проекцій та допоміжних перерізів.

Побудова лінії взаємного перетину двох поверхонь, одна з яких проеціююча

Найпростіший випадок взаємного перетину двох кривих поверхонь – коли одна з поверхонь займає проеціююче положення.

Проеціюючою може бути тільки циліндрична поверхня. Відповідно до властивостей проеціюючих фігур одна проекція перетину двох поверхонь збігається з виродженою проекцією проеціюючої поверхні і задача зводиться до побудови другої проекції лінії перетину за принципом належності геометричній фігурі.

На рис. 7.24 показано побудову лінії взаємного перетину фронтально проеціюючого циліндра обертання з прямим конусом. Фронтальна проекція лінії перетину збігається з виродженою проекцією циліндра. Тому безпосередньо на фронтальній проекції можна визначити точки перетину твірних конуса з поверхнею циліндра. Горизонтальні проекції цих точок визначають за відповідністю на горизонтальних проекціях твірних конуса.

Характерними точками лінії перетину є точки $1 \equiv 2$ та $3 \equiv 4$ на контурних твірних циліндра. Вони відділяють видиму частину лінії перетину від невидимої. Тому для побудови горизонтальних проекцій цих точок через їх відомі фронтальні проекції проведені твірні SK та SM конуса. Невидима частина шуканої лінії належить невидимій частині поверхні циліндра.

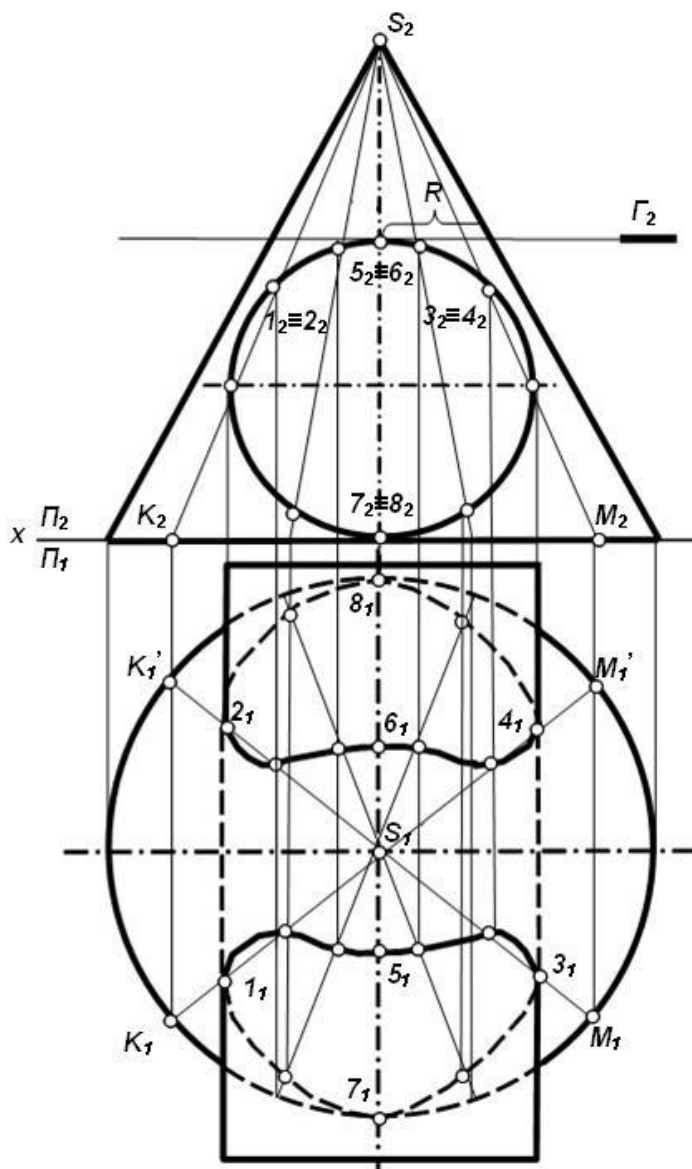


Рисунок 7.24 – Побудова лінії взаємного перетину фронтально проєціюючого циліндра обертання з прямим конусом

Спосіб допоміжних перерізів

Для визначення лінії взаємного перетину двох поверхонь способом допоміжних перерізів їх перетинають третьою поверхнею T – посередником (рис. 7.25). Лінії t та n перетину допоміжної поверхні T двома даними поверхнями, перетинаючись між собою, дають точки шуканої лінії перетину. Виконуючи таку операцію кілька разів, можна одержати необхідну кількість точок для проведення кривої взаємного перетину.

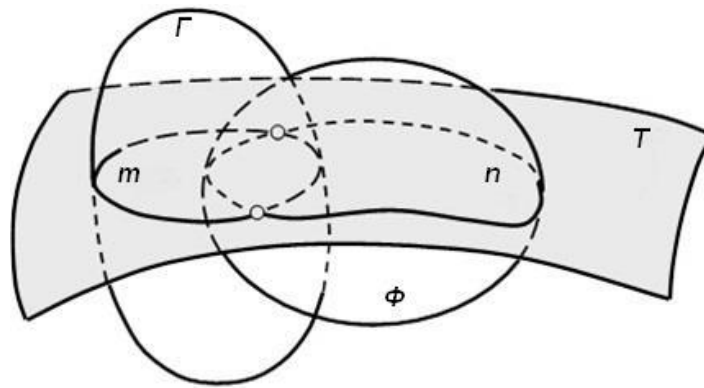


Рисунок 7.25 – Визначення лінії взаємного перетину двох поверхонь

Допоміжні січні поверхні слід вибрати так, щоб лінії m та n були прямими або колами і не потребували додаткових побудов. Найчастіше за січні поверхні приймають площини та сфери.

В цих випадках спосіб допоміжних перерізів називають відповідно способом допоміжних січних площин або способом допоміжних січних сфер.

Спосіб допоміжних січних площин часткового положення

Спосіб січних площин часткового положення доцільний тоді, коли в результаті перерізу кривих поверхонь площинами утворюються на проєкціях прямі лінії або кола.

На рис. 7.26 показано визначення лінії взаємного перетину двох прямих кругових конусів. Для визначення точок, які належать лінії взаємного перетину двох поверхонь, доцільно скористатись множиною горизонтальних допоміжних січних площин, кожна з яких перетинає конуси по колах певних радіусів.

На початку визначимо проєкції вищої точки 1 лінії перетину. Для цього поворотом конуса з вершиною T поставимо конуси на одну вісь симетрії. Точка M буде задавати на фронтальній проєкції рівень найвищої точки лінії перетину, а точка 1 буде шуканою.

Виберемо тепер декілька горизонтальних січних площин Γ і K нижче точки 1 . Вони будуть перетинати конуси по колах з радіусами R і R^1 та R^{11} і R^{111} . Пари кіл, що належать одній січній площині, перетинаючись між собою, дають точки шуканої лінії. Видимими точками лінії перетину вважаються ті, які одночасно належать двом видимим твірним конусів, що перетинаються.

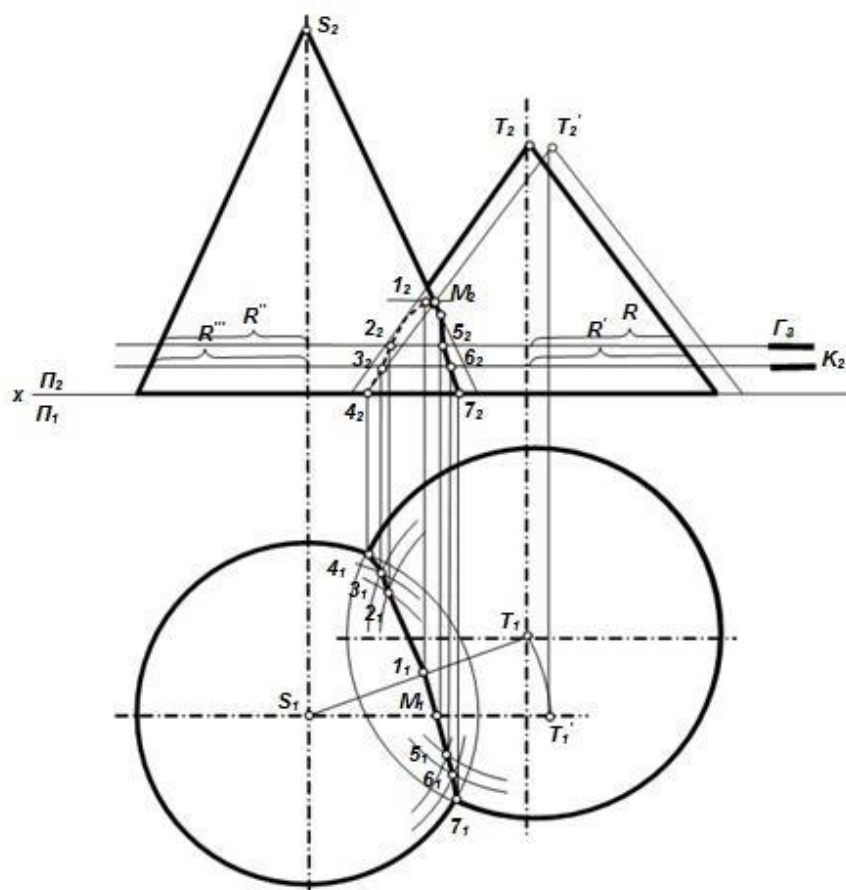


Рисунок 7.26 – Визначення лінії взаємного перетину двох прямих кругових конусів

Спосіб січних сфер

Спосіб січних сфер поділяється на метод концентричних січних сфер, коли осі сфер мають спільний центр, та ексцентричних січних сфер (їх центри не суміщаються).

Концентричні січні сфери застосовуються в особливому випадку, коли:

- перетинаються дві поверхні обертання;
- осі поверхонь перетинаються;
- осі поверхонь, що перетинаються, паралельні одній з площин проєкцій.

Цей спосіб ґрунтується на тому, що поверхня обертання, вісь якої проходить через центр сфери, перетинається із сферою по колах. Якщо вісь поверхні обертання розміщена паралельно одній з площин проєкцій, то ці кола зображуються прямими лініями. На рис. 7.27 показано побудову лінії перетину

циліндра обертання з фронтальною віссю та поверхні обертання з горизонтально проєціюючою віссю.

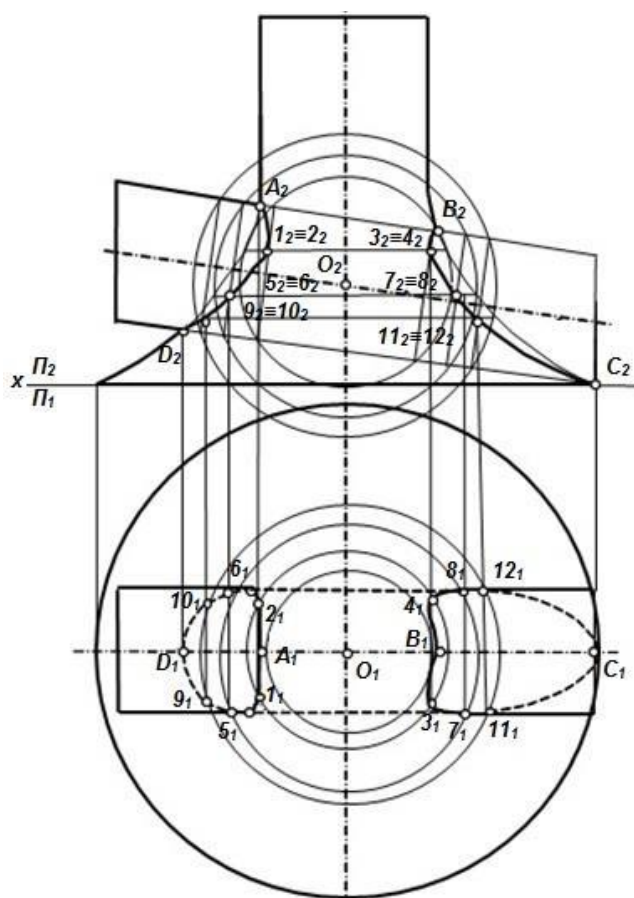


Рисунок 7.27 – Побудова лінії перетину циліндра обертання з фронтальною віссю та поверхні обертання з горизонтально проєціюючою віссю

Чотири точки А,В,С,Д знаходяться безпосередньо в результаті перетину контурних твірних обох поверхонь. Для визначення проєкцій будь-яких проміжних точок проведено допоміжну січну сферу а центром в точці О перетину осей. Сфера перетинається з поверхнями по колах. Точки перетину кіл належать шуканій лінії. Для визначення горизонтальних проєкцій точок лінії перетину спочатку будують горизонтальні проєкції кіл, по яких сфери перетинають тор, а потім за відповідністю визначають проєкції її точок.

Ексцентричні січні сфери застосовуються тоді, коли:

- одна з поверхонь є поверхнею обертання, а друга має кругові перерізи;
- обидві поверхні мають загальну площину симетрії;

– її площина симетрії паралельна одній із площин проєкцій.

На рис. 7.28 наведено приклад застосування способу січних ексцентричних сфер. Перетинаються відсік тору та конус обертання.

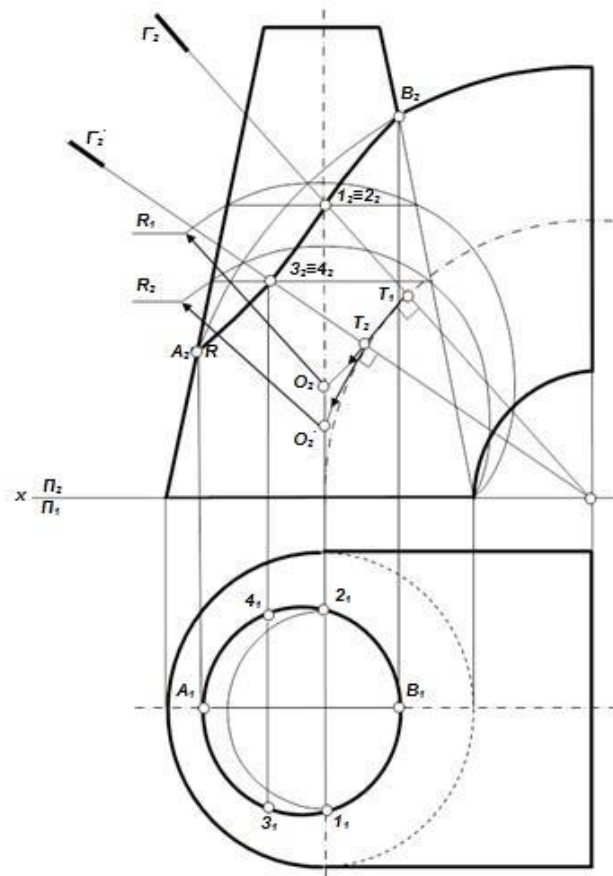


Рисунок 7.28 – Приклад застосування способу січних ексцентричних сфер

Вісь тора перетинається з віссю обертання конуса, обидві осі належать одній фронтальній площині.

Точки А та В знаходяться безпосередньо в результаті перетину контурних твірних поверхонь.

Для знаходження інших точок через прямолінійну вісь тора у зоні орієнтованого перетину поверхонь проводять січні площини Γ , які перетинають тор по колах з центрами Т. На осі конуса визначають положення центрів О січних сфер. Ці сфери перетинають конус по горизонтальних колах. Перше коло перетинається з перерізом тора в точках $1 \equiv 2$, а друге – у точках $3 \equiv 4$.

Горизонтальні проекції точок шукаються як такі, що належать круговим перерізам кінчної поверхні.

Особливі випадки перетину поверхонь другого порядку

Порядок лінії перетину двох алгебраїчних поверхонь визначається як добуток порядків цих поверхонь. Отже, дві поверхні другого порядку в загальному випадку перетинаються по просторовій кривій четвертого порядку.

Просторові криві четвертого порядку можуть приймати різноманітну форму. Види перетину поверхонь другого порядку систематизують за видом лінії перетину.

1. Якщо лінія перетину має одну замкнену вітку, без особливих точок – перетин поверхонь називається частковим врізуванням.
2. Повне проникнення – це випадок перетину, коли просторова крива має дві замкнені вітки (рис. 7.29).

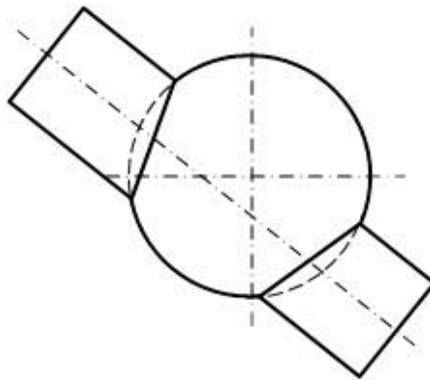


Рисунок 7.29 – Повне проникнення

1. Однобічне внутрішнє стикання спостерігається, коли поверхні, що перетинаються, мають в одній точці M спільну площину дотику. Крива лінія в цьому випадку перетинає сама себе в точці дотику (рис. 7.30).
2. Подвійне стикання – це особливий випадок перетину поверхонь, які мають дві спільні дотичні площини. У цьому випадку просторова крива четвертого порядку розпадається на дві плоскі криві другого порядку, які перетинаються в точках дотику M та N (рис. 7.31).

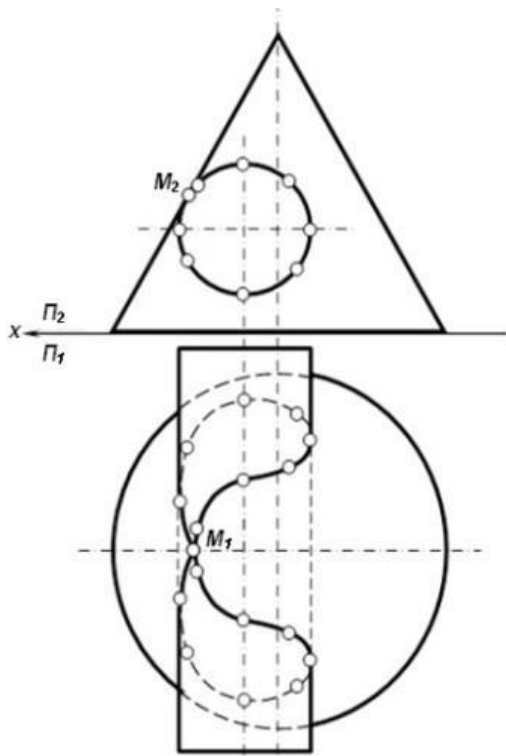


Рисунок 7.30 – Однобічне внутрішнє стикання

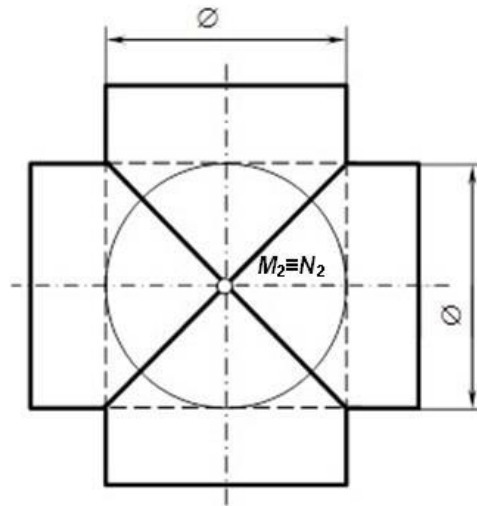


Рисунок 7.31 – Подвійне стикання

Загальний випадок, коли просторова крива четвертого порядку розпадається на дві плоскі криві другого порядку, визначає теорема Монжа: якщо дві поверхні другого порядку вписати або описати навколо третьої поверхні другого порядку, то перші дві перетинаються по двох плоских кривих другого порядку.