Тема 6. Криві лінії. Спряження. Багатогранники

Існують різні визначення кривої лінії, які відповідають способам їх утворення. Криву лінію можна розглядати як траєкторію точки, що рухається за певним законом, або як наслідок перетину кривих поверхонь. Відповідно до способу утворення кривих розрізняються їх аналітичні вирази і засоби графічної побудови.

Криві лінії систематизуються за різноманітними ознаками.

Існують плоскі та просторові криві лінії.

Плоскою називають криву, всі точки якої належать одній площині. Точки просторової кривої не належать одній площині.

6.1 Плоскі криві. Лекальні криві. Спряження

Залежно від вигляду аналітичного рівняння в декартових координатах криві лінії розподіляються на алгебраїчні та трансцендентні. Алгебраїчна крива лінія, аналітичне рівняння якої в декартових координатах має другий степінь, називається кривою другого порядку. Криві другого порядку широко застосовуються при конструюванні виробів криволінійної форми, що пояснюється простотою їх побудови і аналітичного виразу. Такі криві називаються конічними перерізами, оскільки вони можуть бути одержані як переріз конуса другого порядку (зокрема, конуса обертання) площиною. При цьому можуть отримуватись: коло, еліпс, гіпербола та парабола. Ознакою кривої лінії другого порядку є ще й те, що пряма лінія перетинає її у двох точках. Криві які будуються за допомогою лекала на знайденій множині точок називаються лекальними кривими.

1) побудова еліпса

Із центра еліпса проводять два кола, діаметри яких відповідно дорівнюють великій і малій осям еліпса (рис. 6.1). Далі з центра еліпса проводять пучок променів до перетину з колами. З точок проводять прямі, паралельні малій та великій осям еліпса. Перетин відповідних пар цих прямих визначає ряд точок.

Коли сполучити ці точки плавною кривою за допомогою лекала, матимемо заданий еліпс.

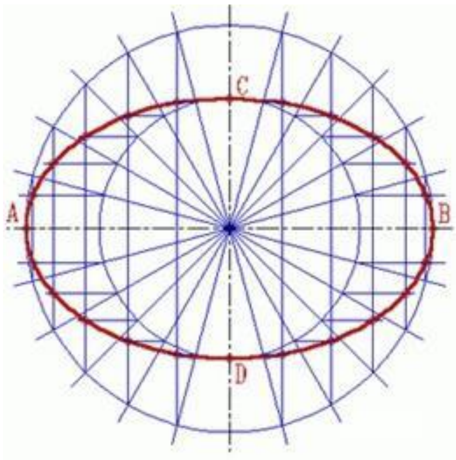


Рисунок 6.1 – Побудова еліпса

2) побудова параболи

Через фокус параболи (рис. 6.2) проводять її вісь перпендикулярно до директриси. Поділивши відрізок FK навпіл, визначають вершину параболи O. На осі від точки O у напрямі фокуса позначають ряд довільних точок на відстані, яку поступово збільшують. Через ці точки проводять прямі, паралельні директрисі. Із фокуса, як із центра, проводять дуги кіл радіусами, що дорівнюють відстані між відповідними вертикальними прямими і директрисою. В перетині дуг кіл з відповідними вертикальними прямими матимемо точки, які належать параболі. Сполучають ці точки плавною кривою і дістають параболу.

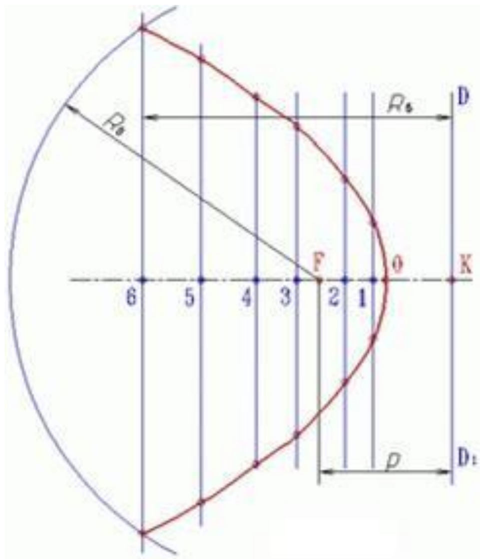


Рисунок 6.2 – Побудова параболи

3) побудова гіперболи

Із середини фокусної відстані F1F – точки O – в обидва боки відкладають довільні рівні відрізки, що визначають вершини гіперболи A і B (рис. 6.3). Вліво від точки F на дійсній осі позначають довільні точки 1, 2, 3... так, щоб відстані між ними збільшувались з віддаленням від фокуса.

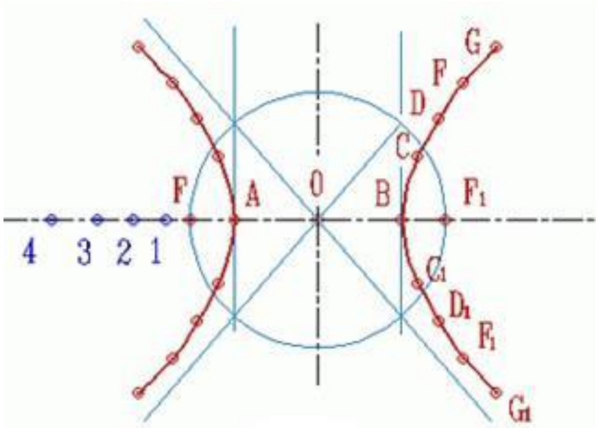


Рисунок 6.3 – Побудова гіперболи

Із фокусів F1 і F радіусами рівними відстаням від вершин гіперболи до намічених точок проводять дуги кіл, і в їх перетині отримують точки гіперболи. Симетричні точки отримують перетином дуг тих же радіусів.

До трансцендентних кривих можна віднести: циклоїду, евольвенту кола, спіраль Архімеда, синусоїду або косинусоїду.

4) побудова циклоїди

Циклоїдою називається крива, утворена точкою кола, яке котиться без ковзання по прямій лінії. На рис. 6.4 показано побудову циклоїди як траєкторії точки A кола радіуса r, яке котиться по прямій.

За один оберт точка A зіткнеться з прямою у точці A_{12}. Щоб визначити цю точку, треба на прямій відкласти відрізок AA_{12}, що дорівнює довжині кола 2пR. Коло і відрізок – AA_{12} ділять на довільну кількість рівних частин (наприклад, на 12). З точок поділу відрізка AA_{12} проводять вертикальні прямі до перетину з прямою, проведеною з точки O паралельно прямій. Точки 01, 02, 03... є центрами кола, що котиться. З точок поділу кола проводять прямі, паралельні прямій.

Перетин цих прямих з відповідними дугами кіл радіуса r, проведених із центрів 01, 02, 03... визначить точки циклоїди.

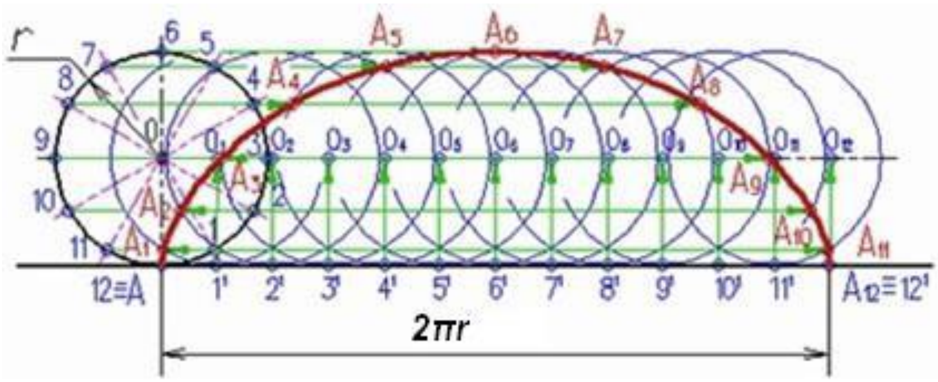


Рисунок 6.4 – Побудова циклоїди

5) побудова евольвенти

Евольвентою називається траєкторія, що описується кожною точкою прямої лінії, яка котиться по колу без ковзання (рис. 6.5).

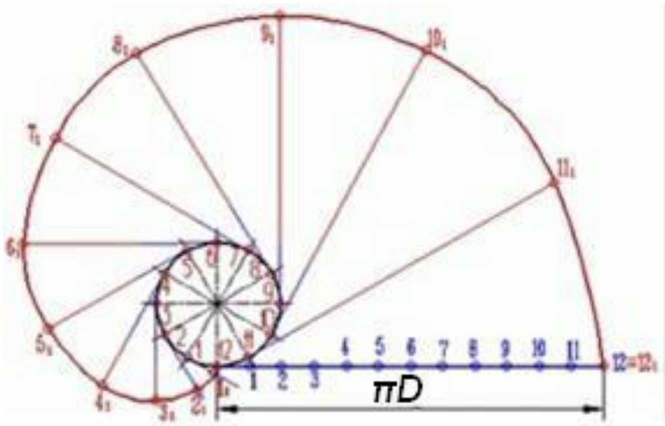


Рисунок 6.5 – Побудова евольвенти

Для побудови евольвенти коло заданого діаметра D ділять на декілька рівних частин, наприклад на 1_2. З точок ділення 1, 2, 3, 4 і т.д. проводять дотичні до кола, направлені в одну сторону. На дотичній 12, проведеній через останню точку поділу, відкладають відрізок, рівний довжині кола, і ділять його також на 12 рівних частин.

Відкладаючи на першій дотичній одну частину, на другій – дві, на третій – три і т. д., одержують точки, які потім сполучають і обводять по лекалу плавною кривою.

6) побудова спіралі Архімеда

Спіраль Архімеда – траєкторія точки, що рухається з постійною швидкістю від центра кола по радіусу, який рівномірно обертається навколо центра O (рис. 6.6). Коло і його радіус ON ділять на декілька рівних частин, наприклад на 8. З центра кола O радіусами 01, 02, 03 і т.д. проводять дуги кіл до перетину з відповідними радіус-векторами. Точки перетину їх I, II, III і т. д., що належать спіралі Архімеда, сполучають плавною кривою під лекало.

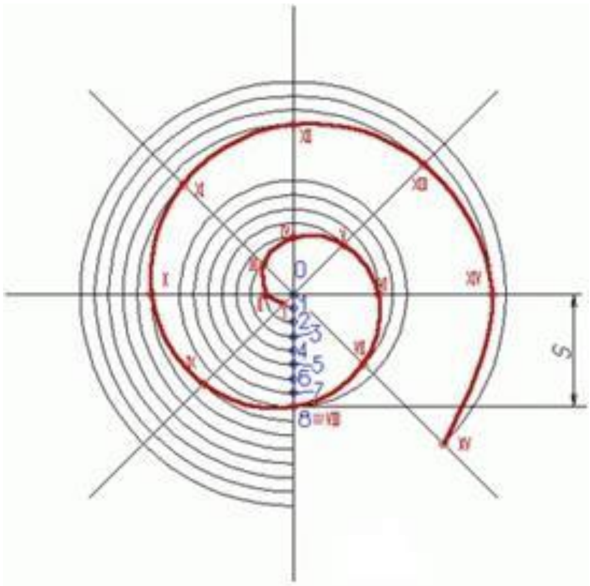


Рисунок 6.6 – Побудова спіралі Архімеда

7) побудова синусоїди

Синусоїда – крива, що зображає зміну синуса залежно від центрального кута.

Для побудови синусоїди (рис. 6.7) через центр твірного круга проводять горизонтальну лінію – вісь X. Від початку координат A вправо відкладають відрізок AB, рівний довжині кола – 2πr. Коло і відрізок AB ділять на декілька рівних частин, наприклад на 12. Через точки поділу 1, 2, 3 і т.д. проводять прямі, паралельні осі OX, до перетину їх з відповідними вертикальними прямими.

Одержані точки а, що належать синусоїді, сполучають плавною кривою під лекало.

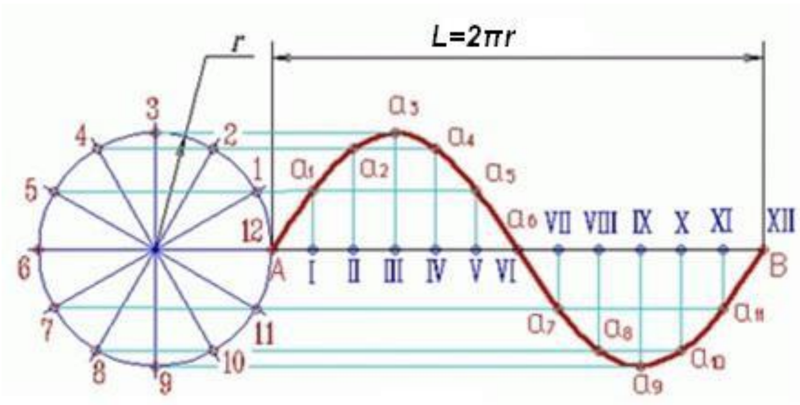


Рисунок 6.7 – Побудова синусоїди

Плавна опукла крива лінія, що складається з дуг кіл різних радіусів, називається коробовою кривою. До коробових кривих належать овали і завитки. Овали широко застосовуються у техніці під час проектування контурів окреслень машинобудівних деталей: фланців, кришок, кулачків у кулачкових механізмах і т.д.

Овал – це фігура, що складається з двох опорних кіл, які внутрішньо спряжені дугами.

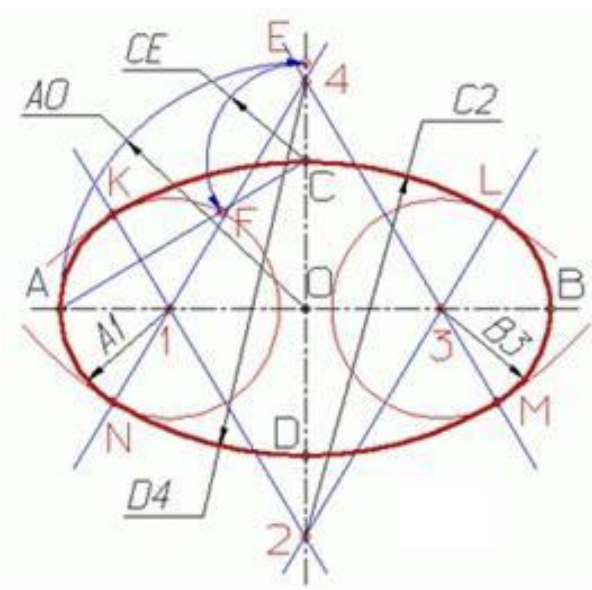


Рисунок 6.8 – Побудова овалу

Побудова овалу за двома заданими осями AB і CD (рис. 2.8). На вертикальній осі відкладають відрізок OE, що дорівнює половині великої осі AB. З точки C, як із центра, проводять дугу радіусом CE до перетину з прямою AC у точці F. До середини відрізка AF встановлюють перпендикуляр і позначають точки його перетину з осями овалу 1 і 2. Будують точки 3 і 4, відповідно симетричні точкам 1 і 2 відносно осей CD і AB. Точки 1 і 3 будуть центрами опорних кіл радіуса B3, а точки 2 і 4 – центрами дуг спряження радіуса D4.

Плавний перехід від однієї лінії до іншої називається спряженням. З усієї різноманітності спряжень різних ліній ми розглянемо такі основні види спряжень: спряження прямої з дугою кола; спряження двох, довільно розміщених прямих, за допомогою дуги кола; спряження дуг двох кіл за допомогою прямої і спряження дуг двох кіл за допомогою третьої дуги.

8) спряження прямих ліній, що перетинаються за допомогою дуги

Щоб побудувати спряження двох прямих, що перетинаються дугою заданого радіуса R (рис. 6.9), треба визначити геометричне місце центрів кіл, віддалених від прямих на відстані R. Для цього на відстані R проводять прямі, паралельні даним, до перетину у точці O. Дуга радіуса R, проведена з точки O, як із центра, і буде дугою спряження. Основи перпендикулярів, опущених з точки O на прямі, будуть точками спряження.

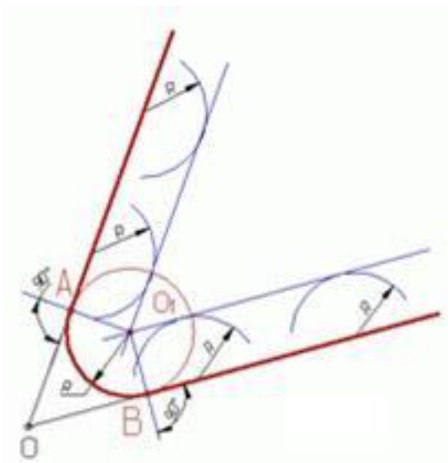


Рисунок 6.9 – Спряження прямих ліній, що перетинаються за допомогою дуги

9) **спряження дуги кола і прямої за допомогою дуги заданого радіуса**

Спряження дуги кола радіуса R і прямої (рис. 6.10) виконують так. Спочатку визначають геометричне місце центрів дуги спряження радіусом r. Для цього на відстані r від прямої проводять паралельну їй пряму, а із центра O радіусом R+r – дугу концентричного кола. Точка 0_1 буде центром дуги спряження. Точку спряження D матимемо на перпендикулярі, проведеному до прямої з точки O1, а точку E – на прямій, яка сполучає точки O_1 і O.

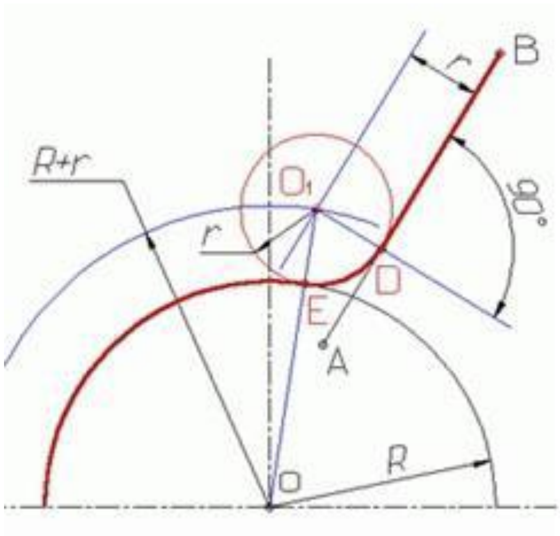


Рисунок 6.10 – Спряження дуги кола і прямої

10) **спряження дуг двох кіл за допомогою прямої**

Таке спряження зводиться до побудови зовнішньої або внутрішньої дотичної, яка спрягає два кола радіусів R і r (рис. 6.11). Спочатку сполучають центри цих кіл. Потім відрізок OO_1 поділяють точкою O_2 навпіл, а з точки O проводять коло радіусом, що дорівнює різниці радіусів заданих кіл R-r. На цьому колі позначають точку M. Продовжують відрізок OM до перетину з колом радіуса R і дістають точку спряження 1. Сполучають точку M з центром O_1. З точки 1 паралельно прямій MO1 проводять пряму, що спрягає два кола.

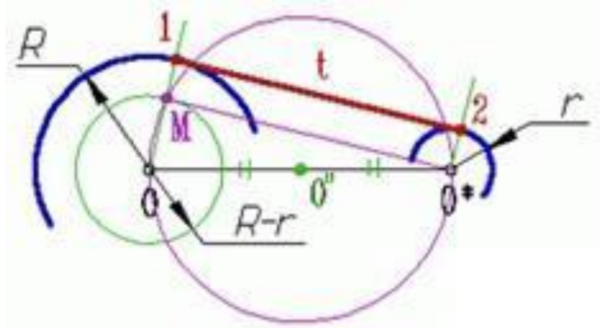


Рисунок 6.11 – Спряження дуг двох кіл за допомогою прямої

11) побудова спряження дуг двох кіл дугою заданого радіуса

Таке спряження може бути зовнішнім, внутрішнім і змішаним. На рис. 6.12 наведено приклад побудови внутрішнього спряження дуг двох кіл радіусів R_2 і R_1 за допомогою дуги радіуса R.

Із центра O_2 проводять дугу, радіус якої дорівнює R-R_2, а із центра O_1 – дугу радіусом, що дорівнює $R - R_1$. У перетині цих дуг матимемо точку O – центр дуги спряження. Точки спряження A і B лежать на прямих, які сполучають точку O з центрами заданих кіл O_2 і O_1.

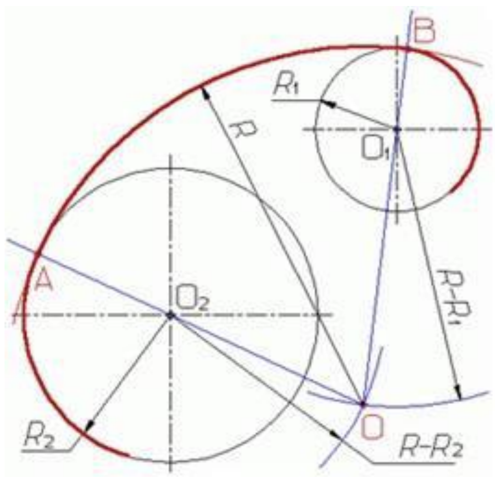


Рисунок 6.12 – Спряження дуг двох кіл дугою

6.2 Просторові криві

Просторову криву лінію можна уявити собі як траєкторію рухомої точки у просторі.

З просторових кривих найбільший практичний інтерес представляють циліндричні та конічні гвинтові лінії (рис. 6.13).

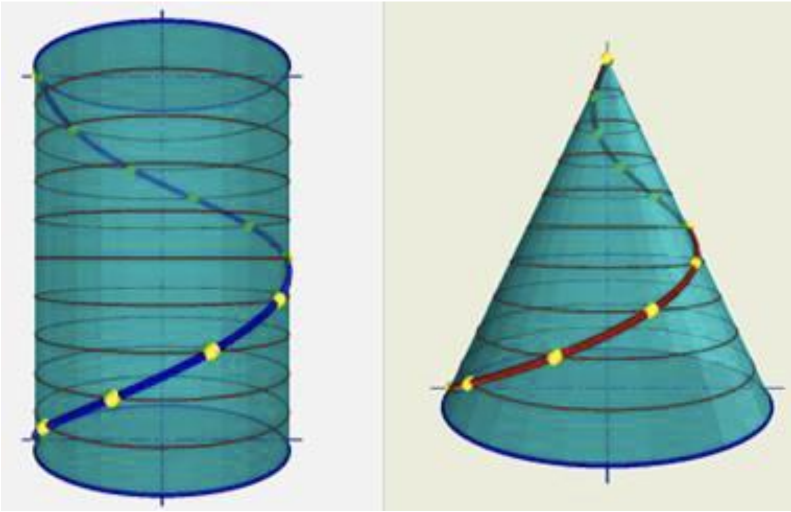


Рисунок 6.13 – Циліндрична та конічна гвинтові лінії

Циліндрична – крива, розміщена на поверхні циліндра обертання та утворена рівномірним рухом точки по твірній, що рівномірно обертається навколо осі циліндра. Висота циліндра, на поверхні якого точка здійснює один поворот навколо осі, називається кроком гвинтової лінії (рис. 6.14а). Враховуючи рівномірність руху точки, можна зробити висновок, що при повороті на 360/n точка переміщується вздовж твірної на 1/n кроку. На основі цього на рис. 6.14а показано побудову проекцій циліндричної гвинтової лінії. Число n прийнято на рисунку рівним 8. На фронтальній проекції крок розділено на 8 частин, на горизонтальній – на стільки ж розділено повний кут повороту (360°). На фронтальній проекції гвинтова лінія зображується синусоїдою.

Конічною гвинтовою лінією називається просторова крива, розташована на поверхні конуса обертання та утворена рівномірним рухом точки по твірній, що рівномірно обертається навколо осі.

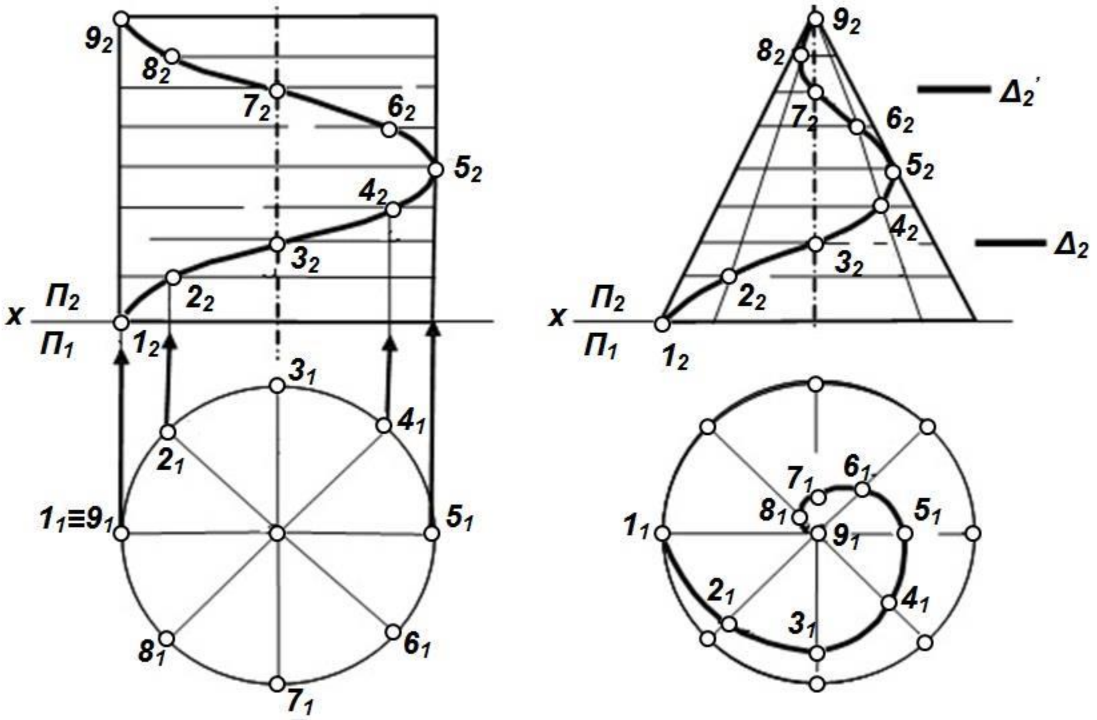
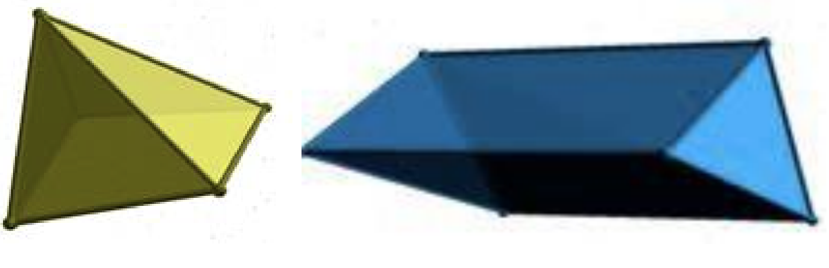


Рисунок 6.14 – Побудова циліндричної та конічної гвинтових ліній

Побудову конічної гвинтової лінії показано на рис. 6.14б. Поверхня конуса на інтервалі кроку n гвинтової лінії горизонтальними площинами поділена на 8 рівних частин. Проекції гвинтової лінії одержані за точками перетину твірних конуса з його відповідними горизонтальними перерізами. Фронтальна проекція конічної гвинтової лінії є синусоїдою з затухаючою амплітудою, а горизонтальна – спіраллю Архімеда.

6.3 Багатогранники

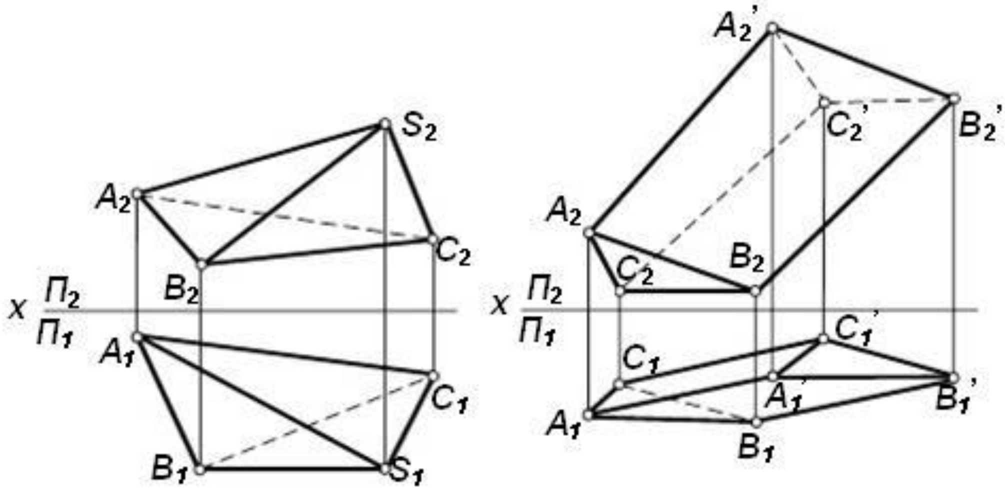
У техніці, зокрема машинобудуванні, широко застосовуються прості багатогранники.



а) б)

Рисунок 6.15 – Тіла Платона: піраміда та призма

З усіх простих багатогранників практичне значення мають піраміди, призми та правильні багатогранники (тіла Платона).



а) б)

Рисунок 6.16 – Проекції тіл Платона: піраміди та призми

Пірамідою називають багатогранник, всі грані якого, крім однієї, мають спільну вершину (рис. 6.15а). Піраміду можна одержати, якщо перетнути багатогранний кут площиною, що не проходить через вершину. Вона перетинає всі ребра цієї поверхні та утворює основу. Оскільки всі бічні грані піраміди – трикутники, – піраміда цілком визначається заданням її основи та вершини (рис. 6.16а).

Призма – багатогранник, обмежений призматичною поверхнею та двома паралельними площинами, не паралельними ребрам призми (рис. 6.15б). Ці дві грані називаються основами призми, грані призматичної поверхні – бічними гранями, а її ребра – ребрами призми. В основі призми лежать рівні багатокутники, бічні ребра призми дорівнюють одне одному (рис. 6.16б). Якщо основи не паралельні між собою, – призму називають зрізаною; коли основами призми є перпендикулярні перерізи призматичної поверхні, призму називають прямою; якщо ця умова не виконується – похилою. Призми розрізняються за числом бічних граней, що дорівнюють числу сторін багатокутника основи. Якщо в основі названих геометричних тіл лежить правильний многокутник, призми та піраміди називаються правильними.

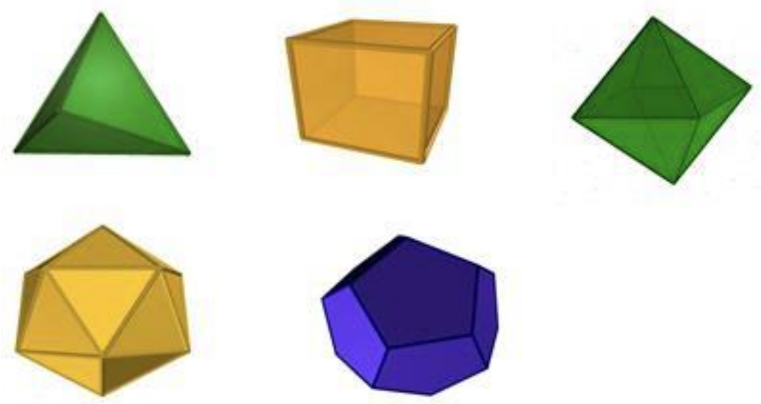


Рисунок 6.17 – Правильні опуклі багатогранники (тіла Платона)

У таких багатогранників всі ребра, грані, плоскі двогранні та просторові кути дорівнюють один одному. Існує п’ять правильних багатогранників або тіл (рис. 6.17):

– тетраедр (чотиригранник), гранями якого є чотири рівнобічних трикутники;
– гексаедр (шестигранник) або куб, гранями якого е шість квадратів;
– октаедр (восьмигранник), гранями якого є вісім рівнобічних трикутників;
– ікосаедр (двадцятигранник), утворений з двадцяти рівнобічних трикутників
– – додекаедр (дванадцятигранник), утворений з дванадцяти правильних п’ятикутників.

6.3.1 Перетин багатогранників площинами та прямими лініями

При перетині багатогранників площиною утворюється плоский багатокутник, кожна вершина якого є точкою перетину ребра багатогранника з площиною, а сторона багатокутника є лінією перетину грані багатогранника з заданою площиною (рис. 16.18). Такий багатокутник називають перерізом.

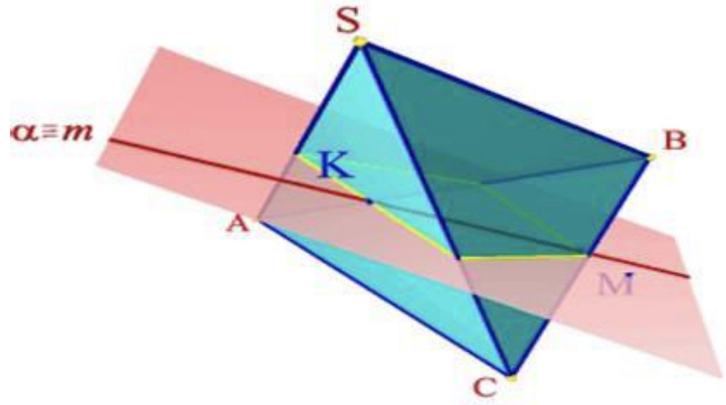


Рисунок 16.18 – Перетин піраміди площиною

Тобто для знаходження перерізу багатогранника площиною необхідне розв'язання декількох перших або других позиційних задач.

Задачі такого типу можна легко розв'язати, виконавши перетворення січної площини в проеціююче положення (у пряму) разом із багатогранником. На рис. 16.19 методом заміни площин проекцій площину трикутника загального положення переводять на площину проекцій $П_4$ в проеціююче положення.

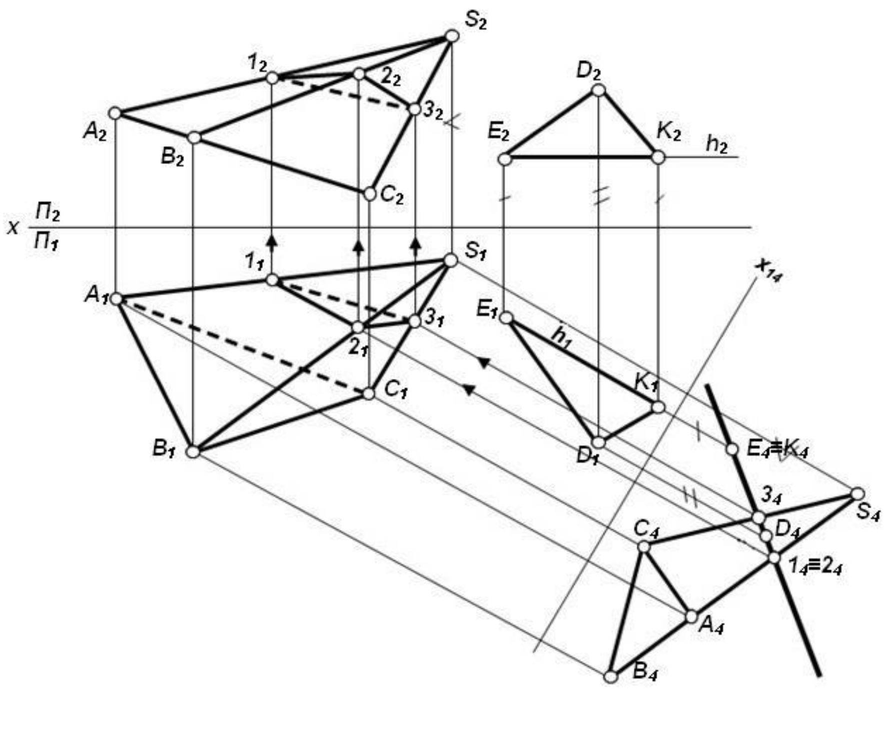


Рисунок 16.19 – Знаходження перерізу багатогранника площиною

На $П_4$ проеціюється також піраміда SABC. Лінія перетину $1_4,2_4,3_4$ визначається зразу. Проекції лінії перетину на $П_1$ та $П_2$ визначаються за відповідністю.

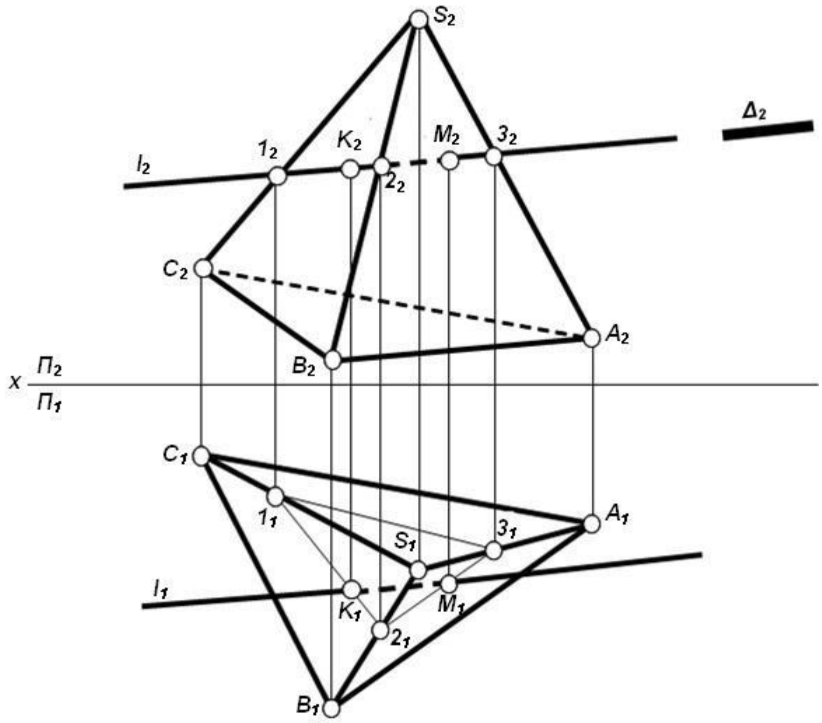


Рисунок 6.20 – Знаходження точок перетину прямої з багатогранником

Для знаходження точок перетину прямої з багатогранником використовують допоміжні проеціюючі площини. На рис. 6.20 пряму l заключають у фронтально-проеціюючу площину Δ. Переріз допоміжної площини з багатогранником дасть ламану лінію 123, в площині якої знаходиться пряма. Точки перетину К і М прямої з лінією 123 будуть шуканими. Видимою точкою перетину вважається та, яка належить видимій грані багатогранника.

6.3.2 Взаємний перетин багатогранників

Задачу на знаходження лінії перетину двох багатогранників можна розв'язати, знайшовши точки перетину ребер одного багатогранника з гранями другого і ребер другого з гранями першого (тобто розв'язуючи декілька разів першу позиційну задачу), або ж знаходити лінії пертину граней одного багатогранника з гранями іншого (тобто розв’язуючи декілька разів другу позиційну задачу) (рис. 6.21).

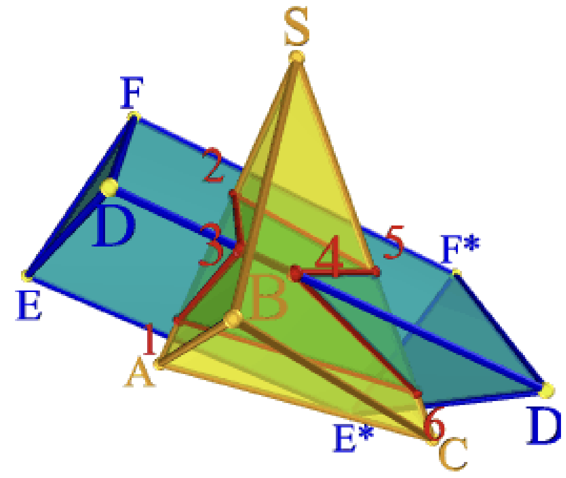


Рисунок 6.21 – Перетин багатогранників

На рис. 6.22 показано знаходження проекцій лінії перетину піраміди та призми. Точки 1, 8, 2≡3,4≡5 – це точки перетину ребер піраміди з гранями призми. Точки 6≡7, 9≡10 – точки перетину ребер призми з гранями піраміди.

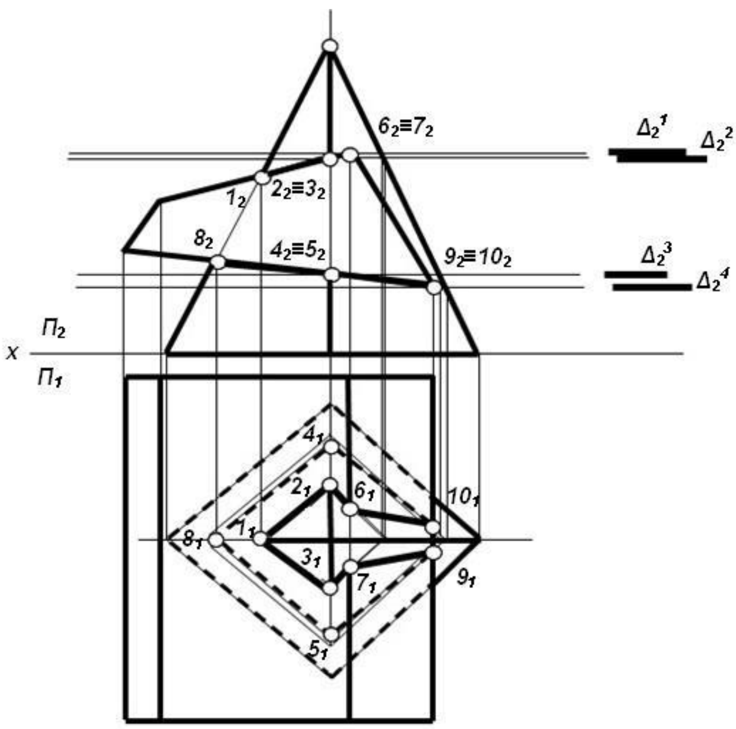


Рисунок 6.22 – Знаходження проекцій лінії перетину піраміди та призми