

Тема 1. Предмет нарисної геометрії. Прямокутні проєкції. Епюр Монжа.

Проекція точки на площини

Мистецтво виконання зображень оточуючих предметів є одним із найдавніших. Людина почала виконувати зображення раніше ніж писати.

Нарисна геометрія – це наукова дисципліна, яка вивчає способи побудови точного зображення просторових форм на площині, розглядає графічні методи розв'язання геометричних задач і розкриває геометричні властивості просторових форм. Такі зображення прийнято називати кресленнями (креслениками). Кресленики мають велике значення в усіх галузях виробництва, а особливо в архітектурі, тому що за їх допомогою можна уявити не тільки форму предмета, але й усі його розміри, взаємне розміщення окремих частин і навіть матеріал, із якого він виготовлений.

За допомогою кресленика можна передати свої думки, ідеї та уявлення як про існуючі просторові форми, так і про нові, які виникають у процесі творчої праці архітектора, будівельника, інженера. Основні правила та методи побудови зображень і вивчає нарисна геометрія.

Предметом нарисної геометрії та архітектурної графіки є розробка методів побудови зображень та читання креслеників, способів розв'язання за допомогою креслеників геометричних задач, вивчення методів геометричного моделювання, тобто створення проєкцій предмета, який відповідав би наперед заданим геометричним та іншим вимогам, а також побудова зображень предметів та об'єктів деякої конкретної галузі інженерної діяльності.

Тому ціллю предмету нарисної геометрії та інженерної графіки є:

- розвиток просторової уяви;
- розвиток здібностей до аналізу та синтезу просторових форм;
- вироблення навичок, необхідних для виконання та читання будівельних та інших технічних креслеників;
- знайомство із засобами механізації та автоматизації графічних робіт.

Комп'ютеризація всіх форм діяльності, зокрема широке застосування ЕОМ, їх периферії, показала принципову можливість виконання креслеників і різного роду графічних побудов за допомогою електронних апаратів. В основі комп'ютерної графіки, за допомогою якої можуть виконуватись одноманітні, трудомісткі операції або складні розрахунки, лежать обчислювальна геометрія, системи алгоритмів, програм, використання графічних мов, пакетів тощо. Абсолютно очевидно, що комп'ютерна графіка як одна з підсистем САПР може розвиватись лише на основі широкого використання законів і правил нарисної геометрії та архітектурної (інженерної) графіки.

Для побудови зображення будь-якого об'єкта необхідно мати геометричний простір та формоутворюючі елементи простору. Геометричним простором сучасна геометрія називає сукупність однорідних об'єктів (фігур). Формоутворюючими елементами простору є геометричні фігури, які можна представляти будь-якими множинами точок. Геометричних фігур дуже багато, але до основних можна віднести лише три: точку, пряму і площину, з яких утворюються більш складні фігури.

В основу методу нарисної геометрії та архітектурної графіки покладений метод проєкцій, який дозволяє отримувати відображення просторових фігур на площині або поверхні. Згідно із цим методом кожній точці тривимірного простору ставиться у відповідність точка двовимірного простору (площини) (рис. 1.1).

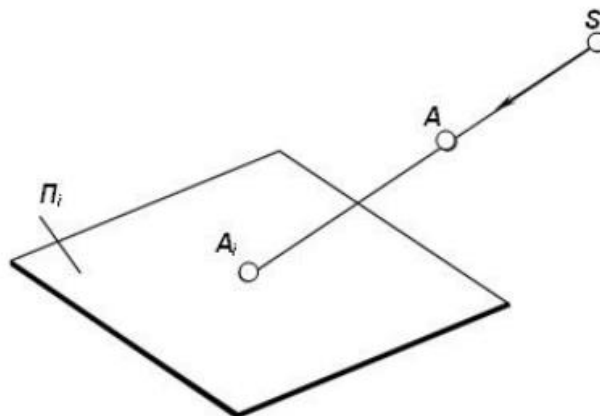


Рисунок 1.1 – Проєкція точки на площину

Точка S називається центром проєціювання, напрямок SA – проєціюючим променем, площина Π_i – площиною проєкцій і точка A_i – проєкцією точки A на площину проєкцій Π_i . Метод проєкцій включає два випадки: центральне та паралельне проєціювання.

1.1 Центральне проєціювання

При центральному проєціюванні проєціюючі промені (рис. 1.2) виходять із однієї точки – центру проєціювання S , який знаходиться на визначеній (заданій) відстані від площини проєкцій Π_i .

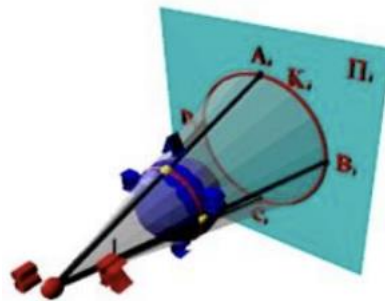


Рисунок 1.2 – Центральне проєціювання

Для побудови центральної проєкції ті кривої лінії m необхідно вибрати на цій лінії деяку кількість точок, побудувати їх проєкції і з'єднати відповідною лінією (рис. 1.3).

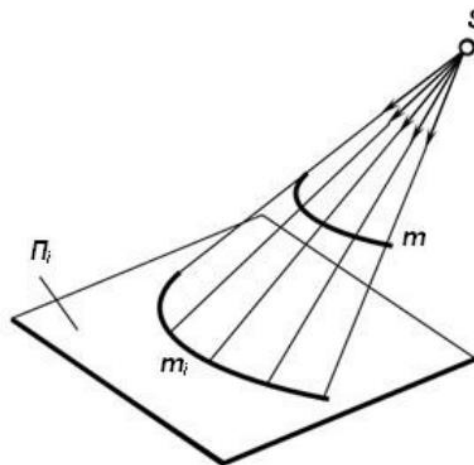


Рисунок 1.3 – Центральна проєкція кривої на площину

При центральному проєціюванні кривої лінії проєціюючі промені утворюють у просторі конічну поверхню, тому цей вид проєціювання і має іншу назву – конічне проєціювання.

Центральне проєціювання – найбільш загальний випадок проєціювання геометричних образів на площину. Основними і незмінними його властивостями (інваріантами) є наступні:

- проєкцією точки є точка;
- проєкцією прямої є пряма (в частковому випадку – точка);
- якщо точка належить прямій, то проєкція цієї точки належить проєкції прямої.

Однією із особливостей центрального проєціювання є його достатня наочність, оскільки воно відповідає природньому зоровому сприйняттю людиною навколишніх предметів, і тому найбільш широке застосування цей вид проєціювання одержав при виконанні перспективних зображень в архітектурі. Основний його недолік – складність у визначенні дійсних розмірів предмета за його зображенням.

1.2 Паралельне проєціювання

Паралельне проєціювання можна розглядати як частковий випадок центрального, коли центр проєціювання S знаходиться в нескінченності. При цьому проєціюючі промені паралельні між собою (рис. 1.4), і тому інша назва цього виду проєціювання – циліндричне проєціювання. Апарат паралельного проєціювання включає в себе площину проєкцій Π та напрямок проєціювання s , який задається кутом φ нахилу проєціюючого променя до площини проєкцій. Залежно від значення кута φ паралельне проєціювання може бути косокутним ($\varphi \neq 90^\circ$) або прямокутним ($\varphi = 90^\circ$).

Основні властивості паралельного проєціювання:

- проєкцією точки є точка;
- проєкцією прямої є пряма (в частковому випадку – точка);

- якщо точка належить прямій, то і проекція точки належить проекції прямої;
- якщо прямі паралельні, то і їх проекції паралельні між собою;
- відношення довжин відрізків прямої дорівнює відношенню довжин проекцій цих відрізків;
- відношення довжин відрізків паралельних прямих дорівнює відношенню довжин проекцій цих відрізків;
- проекція геометричної фігури не змінює своєї величини і форми при паралельному переміщенні площини проекцій;
- точка перетину проекцій прямих, що перетинаються, є проекцією точки перетину цих прямих.

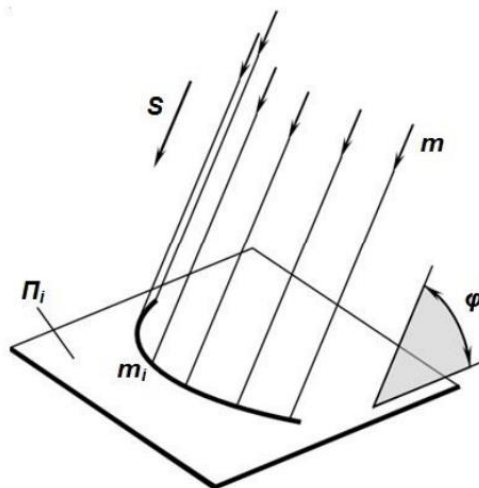


Рисунок 1.4 – Паралельна проекція кривої на площину

Прямокутне (або ортогональне) проєціювання, крім наведених вище, характеризується ще такими властивостями:

- проекція відрізка не може бути більше самого відрізка.

Частковий випадок. Якщо відрізок паралельний площині проєкцій, то він проєціюється на неї у натуральну величину.

1.3 Прямокутні проєкції. Еюр Монжа. Проеціювання точки на площину

Відомо, що проєкційні зображення, які використовуються в технічній документації, повинні відповідати наступним основним вимогам:

- бути оберненими (метрично визначеними), тобто такими, щоб по них можна було визначити форму і розміри зображеного предмета;
- бути наочними, тобто такими, щоб по них можна було уявити зображений предмет і його положення у просторі;
- бути відносно простими у графічному виконанні.

Розглянуті методи проєціювання на одну площину проєкцій дають можливість розв'язати пряму задачу: маючи предмет, знайти його проєкцію, але не дозволяє розв'язати обернену задачу: маючи проєкцію, визначити форму і розміри предмета. Наприклад, маючи проєкцію A_i (рис. 1.1), не можна визначити положення самої точки A в просторі, оскільки невідома її відстань від площини проєкцій Π_i .

Наявність лише однієї проєкції створює невизначеність зображення. Такі зображення повинні містити додаткові дані, щоб по них можна було визначити оригінал.

Розглянемо деякі способи доповнення зображень геометричних образів при центральному або паралельному проєціюванні.

На практиці найбільш широкое застосування знайшли наступні способи доповнення однопроєкційного зображення: проєкції з числовими відмітками; векторіальні (федоровські) проєкції; аксонометричні проєкції; перспективні проєкції; прямокутні проєкції.

Проєкції з числовими відмітками. Цей метод зображень ґрунтується на тому, що для кожної точки предмета на площині проєкцій додатково вказують величину її відстані (при визначених одиницях виміру) від заданої площини проєкцій. Цю відстань називають числовою відміткою точки. Кресленики з числовими відмітками використовують в основному у картографії, при проектуванні доріг і т. і.

Векторіальні (федоровські) проєкції названі в честь академіка Є.С. Федорова, який запропонував зображати висоти точок предмета при допомозі паралельних відрізків. Початок відрізка – в проєкції відповідної точки. Довжина відрізка дорівнює висоті точки. Цей метод зображення знаходить застосування в кристалографії, геології і т. п.

Перспективні проєкції. Перспектива - спосіб зображення предметів простору на площині або будь-якій іншій поверхні відповідно до законів центрального проєціювання і до тих уявних змін розмірів, геометрії їх форми і світлотіньових відчуттів, які глядач спостерігає в природі. Такий вид проєкцій активно застосовується в архітектурі, дизайні, будівництві, образотворчому мистецтві.

Прямокутні проєкції знайшли найбільш широке застосування при виконанні технічних креслеників, тому що в цьому випадку забезпечується простота графічних побудов і висока точність вимірів. Основний недолік цього методу – недостатня наочність зображення: для того щоб “побачити” (уявити) предмет, необхідно подумки поєднати його наявні “плоскі” зображення.

Метод прямокутних проєкцій ґрунтується на тому, що предмет за допомогою ортогонального (прямокутного) проєціювання одночасно зображають на декількох взаємоперпендикулярних площинах проєкцій, приєднаних до просторової прямокутної системи координат.

Розглянемо дві взаємно-перпендикулярні площини, які ділять простір на 4 частини, що називаються четвертями або квадрантами (рис. 1.5). Така модель називається двоплощинною. Відповідно площина Π_1 називається горизонтальною площиною проєкцій, а Π_2 – фронтальною площиною проєкцій.

При двох напрямках проєціювання, що прийняті в системі прямокутних проєкцій, довільна точка A зображується парою точок (A_1 – горизонтальна проєкція, A_2 – фронтальна проєкція). Неважко помітити, що точка простору віддалена від площин проєкцій Π_1 та Π_2 на відстань від осі відповідно до її фронтальної та горизонтальної проєкцій. Кресленик, що містить проєкції на двох полях проєкцій, позиційно повний та метрично визначений.

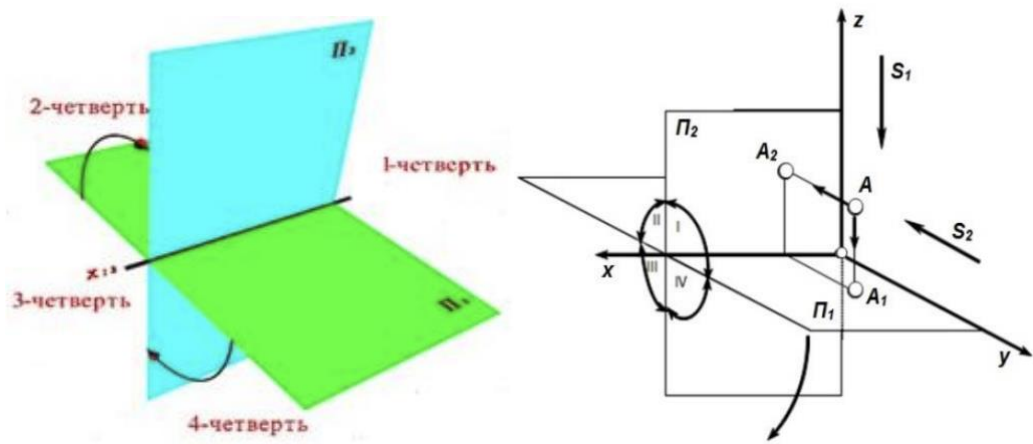


Рисунок 1.5 – Квадранти простору

Однак, завдяки тривимірності просторової фігури, а також у зв'язку із тим, що по двох зображеннях не завжди просто визначити конструкцію складного об'єкта, його комплексний кресленик стає зрозумілішим, коли крім двох основних проєкцій дано ще проєкцію на третю площину. У ролі третьої площини (поля проєкцій) найчастіше вибирають профільну площину проєкцій ПЗ, перпендикулярну до П1 та П2 (рис. 1.6), тому третя проєкція точки АЗ називається профільною. Така модель є триплощинною.

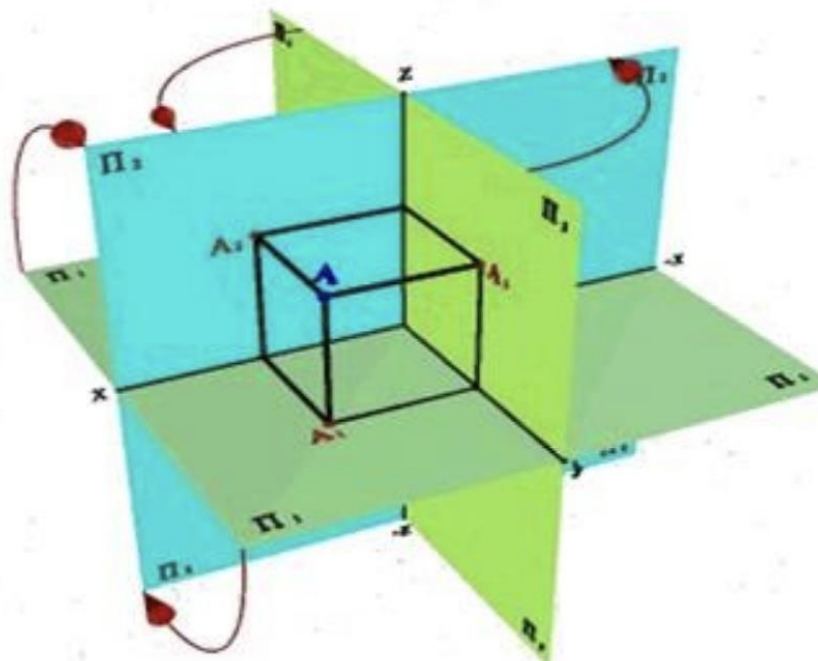


Рисунок 1.6 – Триплощинна модель

При побудові комплексного кресленника або епюра Монжа з трьох прямокутних проекцій площину Π_2 приймають нерухомою, а площини Π_1 та Π_3 суміщають з нею обертанням навколо осей x та z .

Площини (поля) проекцій Π_1 , Π_2 та Π_3 , перетинаючись по трьох лініях, задають просторову декартову систему координат (рис. 1.7). Точка O є початком координат, вісь x – віссю абсцис, вісь y – віссю ординат та вісь z – віссю аплікат. Неважко помітити, що проекції A_1 та A_2 лежать на одній вертикальній лінії, а проекції A_2 та A_3 – на одній горизонтальній лінії, які називаються лініями зв'язку.

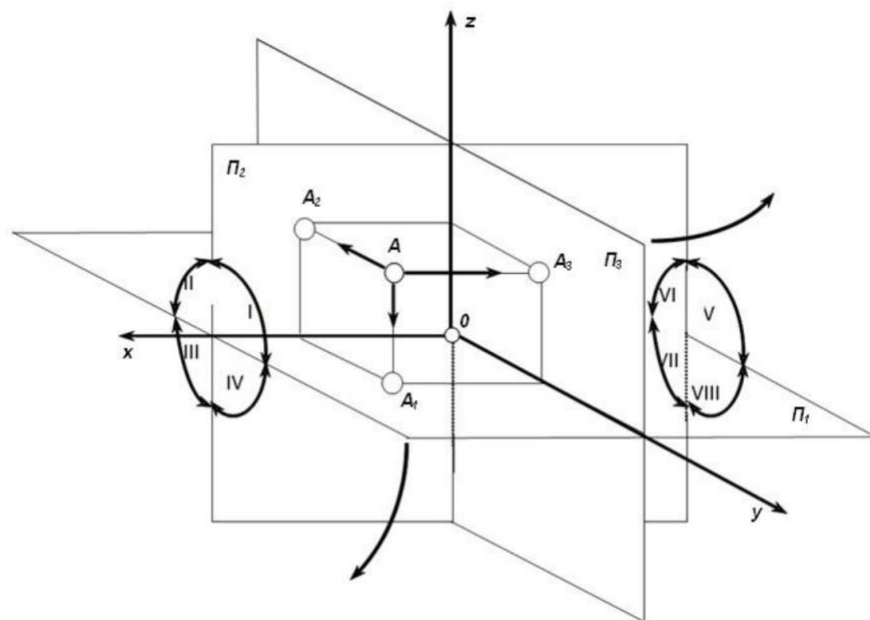


Рисунок 1.7 – Декартова система координат

Розглянемо, якою лінією зв'язку можна з'єднати проекції A_1 та A_3 .

Для цього розглянемо квадрат O, A_{31}, A_0, A_{13} (рис. 1.8). Діагональ цього квадрата - бісектриса кута $y(-z), O, y(-x)$. Лінія зв'язку, яка з'єднує проекції A_1 та A_3 – ламана, що складається з двох відрізків (горизонтального та вертикального) з вершиною на бісектрисі к кута $y(-z), O, y(-x)$. Частину цієї ламаної інколи замінюють дугою кола. Таким чином, між горизонтальною та профільною проекціями існує ламана горизонтально-вертикальна лінія зв'язку.

Бісектрису k , що є множиною вершин цих ламаних ліній, називають постійною прямою комплексного кресленика.

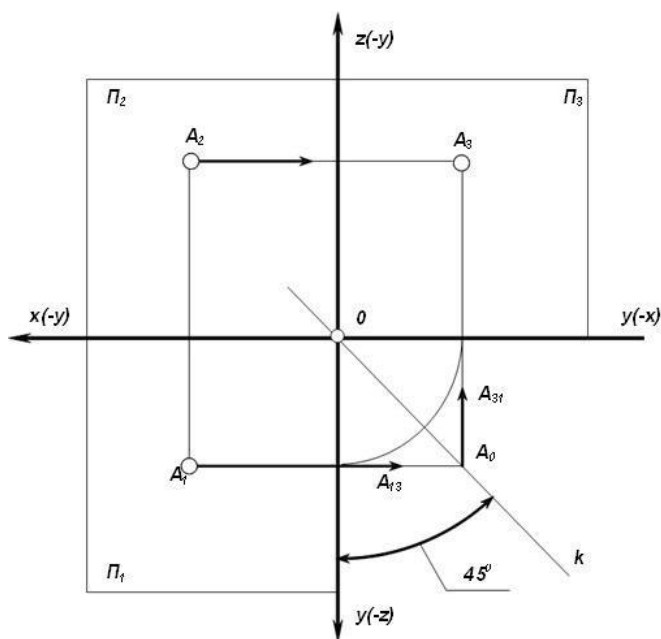


Рисунок 1.8 – Розгортка системи координат на площину

Площини проєкцій Π_1 , Π_2 та Π_3 ділять тривимірний простір на вісім частин, які називаються октантами. У тих випадках, коли точка задається координатами, можна будувати комплексний кресленик, керуючись величиною та знаками координат, навіть не визначаючи октант, у якому задана точка. Знаки координат, які відповідають тому чи іншому октанту, наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Знаки координат в октантах

Октанти	1	2	3	4	5	6	7	8
x	+	+	+	+	-	-	-	-
y	+	-	-	+	+	-	-	+
z	+	+	-	-	+	+	-	-

Якщо точка знаходиться в першій чверті (двоплощинна модель) або в першому (п'ятому) октанті (триплощинна модель) простору при закріплених площинах проєкцій, то її горизонтальна проєкція розміщується нижче, а фронтальна проєкція – вище x . По-іншому розміщуються проєкції точок, що

знаходяться в 2(6), 3(7) та 4(8) четвертях (октантах) простору. На рис. 1.9 показано розташування точок в різних четвертях простору. Якщо одна з проєкцій точки знаходиться на осі, то точка простору належить одній із площин проєкцій і розташована на границі четвертей.

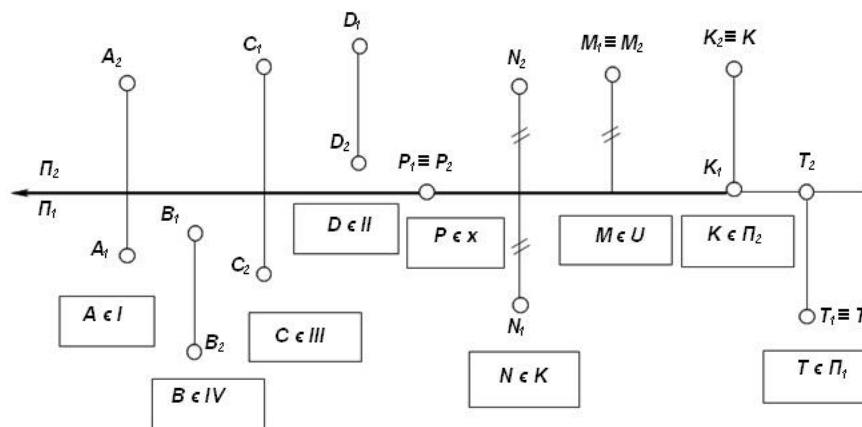


Рисунок 1.9 – Розташування точок в різних четвертях простору

Якщо відстані від проєкцій точок до осі рівні, то точка простору належить бісекторній площині. Бісекторна площина – це площина, яка ділить четверті навпіл. Площина, яка проходить через 1 і 3 чверті називається 1 бісекторною площиною і позначається буквою К, площина, яка проходить через 2 і 4 четверті – 2 бісекторною площиною і позначається буквою U.

Приклад. Побудувати комплексний кресленик точок

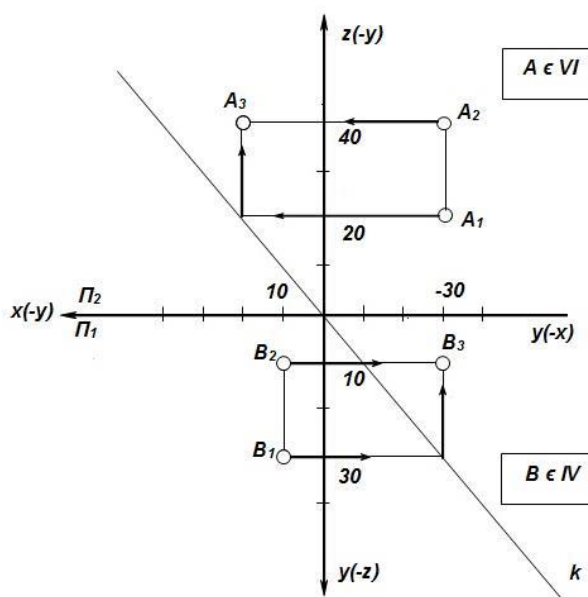


Рисунок 1.10 – Побудова проєкцій точок

$A(-30,-20,40)$ та $B(10,30,-10)$ і визначити октанти простору, у яких вони розташовані. Користуючись таблицею 1, легко визначити, що точка A задана в 6 октанті, а точка B – в 4. Комплексний кресленик точок наведений на рис. 1.10.