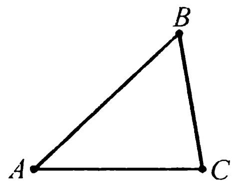
ГЕОМЕТРІЯ

Тема 29. Трикутник



Трикутником називають геометричну фігуру, яка складається із трьох точок, що не лежать на одній прямій, трьох відрізків, які сполучають ці точки, й обмеженої ними частини площини.

Точки A, B і C називають вершинами, а відрізки AB, BC, AC — сторонами трикутника. Трикутник називають і позначають за його вершинами. Трикутник, зображений на рисунку, позначають так: ΔABC (читають: *трикутник* ABC), або ΔBCA, або ΔCAB.

Кути ABC, BAC, ACB — кути трикутника ABC. Їх можна позначати й однією буквою: $\angle B$, $\angle A$, $\angle C$.

Сторони трикутника ABC можна позначати маленькими буквами a, b і c. При цьому дотримуються такого порядку: проти кута A лежить сторона a або BC; проти кута B лежить сторона b або AC; проти кута C лежить сторона c або AB.

Кут B називають кутом, протилежним до сторони AC, а кути A і C — прилеглими до цієї сторони.

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його *периметром*:

$$P = a + b + c.$$

Те, що периметр трикутника ABC дорівнює 36 см, коротко записують так: $P_{\Delta ABC} = 36$ см.

Види трикутників

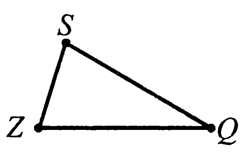
Залежно від довжин сторін трикутники поділяють на такі види: різносторонні, рівнобедрені, рівносторонні.

Трикутник, у якого всі сторони мають різні довжини, називають *різностороннім*.

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають *рівнобедреним*. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю його сторону — *основою*.

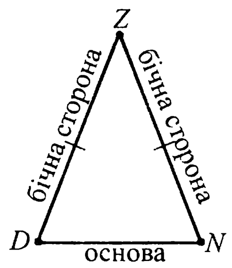
Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають *рівностороннім*.

Різносторонній



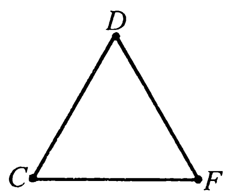
$ZS \neq SQ \neq ZQ$

Рівнобедрений



$ZD = ZN$

Рівносторонній



$CD = DF = CF$

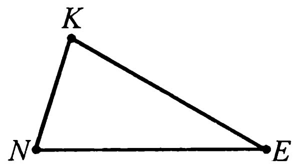
Залежно від міри кутів трикутники поділяють на такі види: гострокутні, прямокутні, тупокутні.

Гострокутним називають трикутник, у якого всі кути гострі.

Прямокутним називають трикутник, у якого один з кутів є прямим.

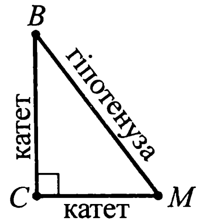
Тупокутним називають трикутник, у якого один з кутів є тупим.

Гострокутний



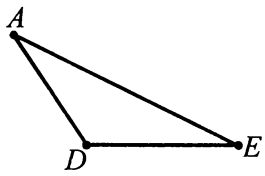
$\angle N < 90°$, $\angle K < 90°$, $\angle E < 90°$

Прямокутний



$\angle C = 90°$

Тупокутний

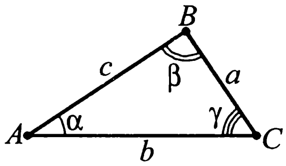


$\angle D > 90°$

Властивості сторін і кутів

Будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін і більша за їх різницю:

$$c - b < a < c + b, b < c.$$



Щоб перевірити, чи можна з трьох відрізків a, b і c утворити трикутник, досить перевірити, чи буде найдовший з цих відрізків меншим від суми двох інших.

Проти більшої сторони трикутника лежить більший кут: якщо $b > a$, то $\beta > \alpha$; і навпаки, якщо $\beta > \alpha$, то $b > a$; а також, якщо $a = b$, то $\alpha = \beta$.

Периметр трикутника: $P = a + b + c$.

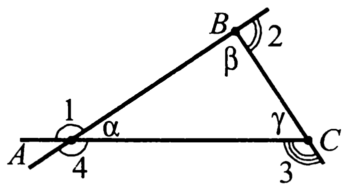
Теорема. *Сума кутів трикутника дорівнює 180°.*

З теореми про суму кутів трикутника випливають такі наслідки:

1) трикутник може мати лише один прямий або тупий кут. Якщо один з кутів трикутника прямий або тупий, то два інші кути — гострі;

2) сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Зовнішній кут



Кут, суміжний з кутом трикутника, називають *зовнішнім кутом* трикутника. При кожній вершині є два зовнішніх кути. Наприклад, при вершині A зовнішніми є кути 1 і 4.

Зовнішній кут трикутника більший від кожного кута трикутника, не суміжного з ним.

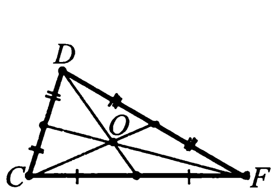
Сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$.

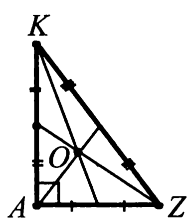
Теорема. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

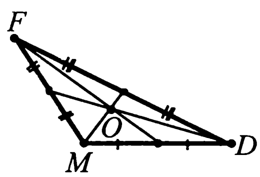
$\angle 1 = \gamma + \beta$. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$.

Медіани трикутника

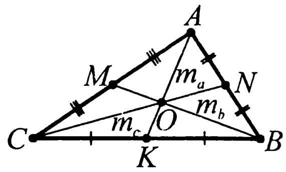
Медіаною трикутника називають відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. Кожен трикутник — гострокутний, прямокутний і тупокутний — має три медіани. Медіани будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, яка міститься усередині трикутника.







$CK = KB$, AK — медіана.



Медіану позначають буквою m. Те, що медіани проведені до сторін a, b і c, відповідно записують так: m_a, m_b і m_c.

Медіани точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

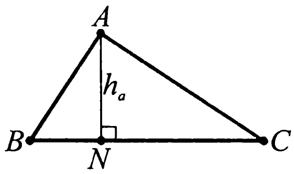
$AO : OK = BO : OM = CO : ON = 2 : 1.$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\,,\; m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}\,,\; m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}\,.$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Медіана ділить трикутник на два рівновеликі трикутники. *Рівновеликими* називають трикутники, які маю рівні площі.

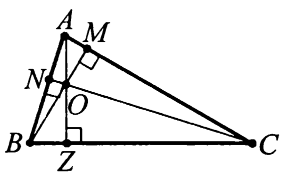
Висоти трикутника

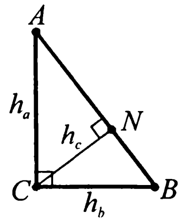


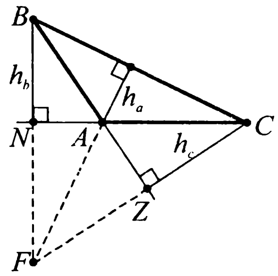
Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, яка містить його протилежну сторону. Кожен трикутник має три висоти.

$AN \perp BC$, AN — висота.

h_a — висота, проведена з вершини A. Висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці. У гострокутному трикутнику точка O перетину висот розміщена всередині трикутника; у прямокутному (точка C) — у вершині прямого кута; у тупокутному (точка F) — поза трикутником.





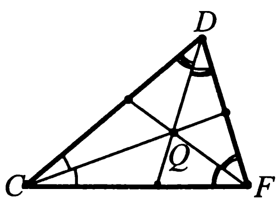


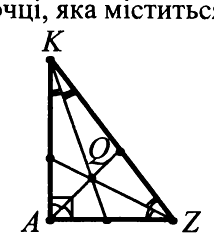
$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

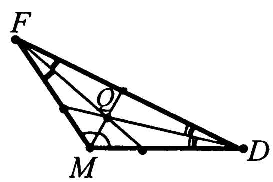
Будь-яку висоту трикутника можна знайти за формулами $h_a = c\sin\beta$, $h_a = \dfrac{2S}{a}$, де S — площа трикутника.

Бісектриси трикутника

Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає його вершину з точкою на протилежній стороні трикутника. Кожний трикутник має три бісектриси. Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, яка міститься усередині трикутника.

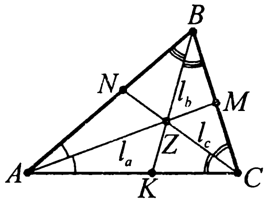




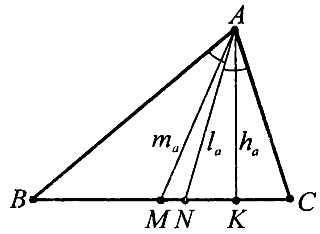


$\angle ABK = \angle CBK$, $AM = l_a$ — бісектриса кута A.

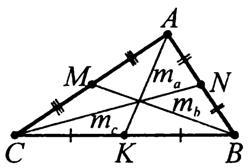
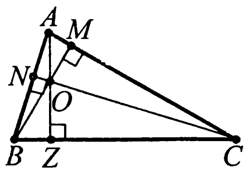
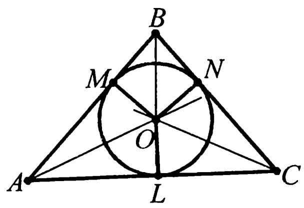
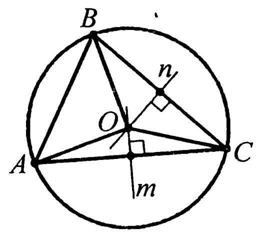
Властивість бісектриси трикутника. Бісектриса поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін: $\frac{AB}{BC} = \frac{KA}{KC}$.



У нерівнобедреному трикутнику кожна бісектриса лежить між медіаною і висотою, проведеними з цієї ж вершини: $h_a < l_a < m_a$.



Визначні точки трикутника

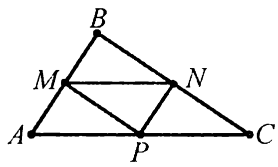
Точка перетину медіан (центр мас)	Точка перетину висот або їх продовжень (ортоцентр)	Точка перетину бісектрис (інцентр) — центр вписаного кола	Точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника — центр описаного кола
			

У будь-який трикутник можна вписати коло і навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Середня лінія трикутника

Середня лінія трикутника — це відрізок, який з'єднує середини двох його сторін.

У кожному трикутнику можна провести три середні лінії.



MN — середня лінія трикутника ABC.

Середня лінія трикутника паралельна до однієї з його сторін і дорівнює її половині. Наприклад, $MN = \frac{1}{2}AC$ і $MN \| AC$.

Середні лінії трикутника ділять його на 4 рівні трикутники. Наприклад, рівними є трикутники AMP, NPM, PNC і MBN.

Рівні трикутники

Два трикутники називають *рівними*, якщо при накладанні вони суміщаються.

У позначенні вершин рівних трикутників має значення порядок запису літер: літери, які відповідають рівним кутам, потрібно записувати в обох трикутниках на однакових місцях.

У рівних трикутників проти рівних сторін лежать рівні кути; проти рівних кутів — рівні сторони.

Ознаки рівності трикутників

Два трикутники рівні між собою, якщо в них відповідно рівні:

1) дві сторони та кут між ними;

2) сторона та прилеглі до неї кути;

3) три сторони.

Подібні трикутники

Два трикутники називають *подібними*, якщо в них відповідні кути рівні й відповідні сторони пропорційні.

Подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ коротко записують так: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Знак «~» замінює слово «подібний». Якщо коефіцієнт подібності відомий, то записують: $\Delta ABC \overset{k}{\sim} \Delta A_1B_1C_1$.

Для подібних трикутників має значення порядок запису вершин.

Щоб скласти відношення відповідних сторін подібних трикутників, потрібно:

1) визначити рівні кути трикутників;

2) з'ясувати, які сторони є відповідними;

3) записати відповідні рівності.

Ознаки подібності трикутників

Два трикутники подібні між собою ($\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$), якщо:

1) два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$;

2) дві сторони одного трикутника відповідно пропорційні до двох сторін іншого трикутника, а кути, утворені цими сторонами, рівні: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, $\angle A = \angle A_1$;

3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого трикутника: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$, де k — коефіцієнт подібності.

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін (коефіцієнту подібності): $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$. Відношення відповідних лінійних елементів (медіан, бісектрис, висот тощо) подібних трикутників теж дорівнює коефіцієнту подібності.

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату відношення відповідних сторін (квадрату коефіцієнта подібності): $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$.

Пряма, яка паралельна до сторони трикутника і перетинає дві інші його сторони, відтинає від нього подібний йому трикутник.

Співвідношення між сторонами та кутами трикутника

Теорема синусів: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Наслідок теореми синусів: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, де R — радіус описаного кола.

Терема косинусів: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$.

Площа трикутника

$S = \frac{1}{2}ah_a$.

$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр (формула Герона).

$S = \frac{abc}{4R}$, $S = pr$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Радіуси вписаного й описаного кіл

$R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2S}{a+b+c}$, де R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола.

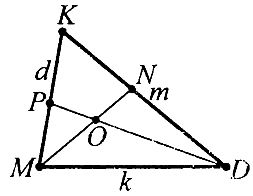
Приклад 1. Сторони трикутника дорівнюють 4 см і 8 см. Яке найменше ціле значення повинна мати третя сторона, щоб кут між двома даними сторонами був тупим?

А	Б	В	Г	Д
81 см	6 см	10 см	9 см	13 см

■ Якщо в трикутнику зі сторонами a, b і c справджується нерівність $a^2 + b^2 < c^2$, то кут, протилежний стороні c, тупий. Маємо: $4^2 + 8^2 < c^2$; $80 < c^2$; $c > 9$.

Відповідь. В. ■

Приклад 2. У трикутнику MKD $\angle K = 60°$. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 2 см. Скільки сантиметрів має радіус кола, описаного навколо трикутника MOD, де O — точка перетину бісектрис трикутника MKD?



■ Нехай MKD — заданий трикутник, у якого $MK = d$, $KD = m$, $MD = k$, $\angle K = 60°$, R — радіус описаного кола, $R = 2$ см, O — точка перетину бісектрис. За наслідком з теореми синусів $\frac{k}{\sin \angle K} = 2R$. Отримаємо: $k = 2R\sin\angle K = 2 \cdot 2\sin 60° = 2\sqrt{3}$ (см), тобто $MD = 2\sqrt{3}$ (см). Нехай $\angle M = 2x°$, $\angle D = 2y°$. За теоремою про суму кутів трикутника $\angle M + \angle D + \angle K = 180°$; $2x + 2y + 60° = 180°$; $2x + 2y = 120°$; $x + y = 60°$.

Оскільки MO і DO — бісектриси кутів M і D відповідно, то $\angle OMD = x°$, $\angle ODM = y°$.

Із трикутника MOD: $x + y + \angle MOD = 180°$; $\angle MOD = 180° - 60° = 120°$.

За наслідком з теореми синусів $\frac{MD}{\sin \angle MOD} = 2R_1$, де R_1 — радіус кола, описаного навколо трикутника MOD. $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120°} = 2R_1$, $R_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$ (см).

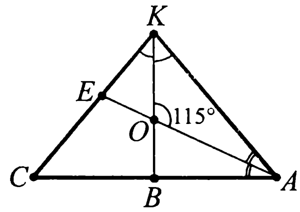
Відповідь. 2. ■

Приклад 3. Знайти найбільший кут трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 3 : 4 : 5.

■ Нехай одна частина становить $x°$, тоді $\angle 1 = 3x°$, $\angle 2 = 4x°$, $\angle 3 = 5x°$. Складемо і розв'яжемо рівняння: $3x + 4x + 5x = 180$; $12x = 180$; $x = 15$. Тоді $5x = 5 \cdot 15 = 75$.

Відповідь. 75°. ■

Приклад 4. У трикутнику CKA бісектриси кутів K і A при перетині утворюють кут 115°. Знайти кут C.



Оскільки KB й AE — бісектриси кутів K і A, то

$$\angle BKA = \frac{1}{2}\angle K, \angle EAK = \frac{1}{2}\angle A.$$

Із ΔOKA за теоремою про суму кутів трикутника:

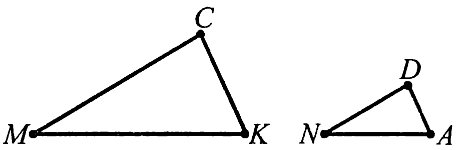
$$\frac{1}{2}\angle K + \frac{1}{2}\angle A + \angle KOA = 180°.$$

Звідси: $\frac{1}{2}\angle K + \frac{1}{2}\angle A = 180° - 115°$; $\frac{1}{2}(\angle K + \angle A) = 65°$, тоді $\angle K + \angle A = 65 \cdot 2 = 130°$.

Із трикутника CKA за теоремою про суму кутів трикутника: $\angle C + \angle K + \angle A = 180°$.

Звідси: $\angle C = 180° - 130° = 50°$.
Відповідь. 50°. ■

Приклад 5. Трикутники MCK і NDA подібні (див. рис.). Знайти сторону MK, якщо $MC = 32$ см, $ND = 16$ см, $NA = 10{,}5$ см.



■ Складемо відношення відповідних сторін: $\frac{MC}{ND} = \frac{MK}{NA}$. Підставимо в одержану рівність відомі довжини сторін. Одержимо пропорцію: $\frac{32}{16} = \frac{MK}{10{,}5}$. Маємо: $MK = \frac{32 \cdot 10{,}5}{16} = 21$ (см).

Відповідь. 21 см. ■

Завдання 29.1–29.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

29.1. У трикутнику ABC сторони AB і AC відповідно дорівнюють 6 см і 10 см. Указати всі можливі значення довжини сторони BC.

А	Б	В	Г	Д
$BC < 16$ см	6 см $< BC <$ 16 см	6 см $< BC <$ 10 см	4 см $< BC <$ 16 см	5 см $< BC <$ 15 см

29.2. Градусні міри кутів трикутника відносяться як 3 : 2 : 10. Знайти градусну міру найменшого кута трикутника.

А	Б	В	Г	Д
12°	20°	24°	36°	18°

29.3. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють 70° і 150°. Знайти внутрішній кут при третій вершині.

А	Б	В	Г	Д
40°	50°	60°	100°	140°

29.4. У трикутнику ABC $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. Визначити гострий кут, утворений бісектрисами даних кутів.

А	Б	В	Г	Д
25°	30°	55°	35°	60°

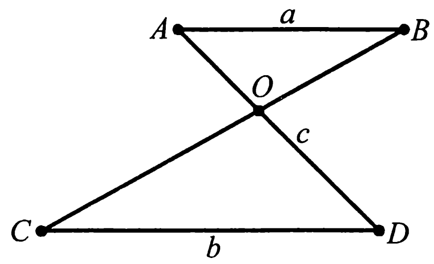
29.5. У трикутнику ABC $\angle A = 30°$ і $\angle B = 105°$. Знайти відношення $\frac{BC}{AB}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

29.6. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{3}$ см, $AC = 2$ см і $\angle A = 30°$. Знайти довжину медіани BM.

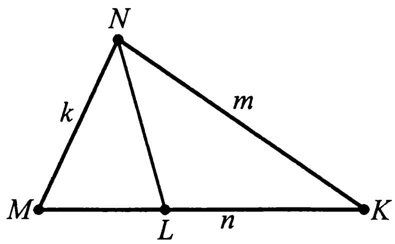
А	Б	В	Г	Д
7	$\sqrt{7}$	1	$\sqrt{13}$	$\sqrt{11}$

29.7. O — точка перетину відрізків AD і BC, відрізки AB і CD паралельні. $AB = a$, $CD = b$. Знайти AO, якщо $OD = c$.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{b}{ac}$	$\frac{bc}{a}$	$\frac{a}{bc}$	abc	$\frac{ac}{b}$

29.8. У трикутнику MNK $MN = k$, $NK = m$ і $MK = n$, NL — бісектриса трикутника. Знайти довжину відрізка ML.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{k}{k+m+n}$	kmn	$\frac{kn}{m}$	$\frac{kn}{k+m}$	$\frac{mn}{k+m}$

29.9. Відповідні сторони подібних трикутників дорівнюють 14 см і 21 см. Знайти площу меншого трикутника, якщо площа більшого трикутника дорівнює 180 см^2.

А	Б	В	Г	Д
80 см^2	120 см^2	60 см^2	100 см^2	90 см^2

29.10. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см. Знайти висоту, проведену до цієї сторони, якщо площа трикутника дорівнює 35 см^2.

А	Б	В	Г	Д
2,5 см	5 см	7,5 см	10 см	12,5 см

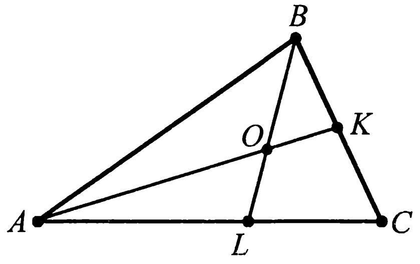
29.11. Два кути трикутника дорівнюють α і β, а радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R. Визначити площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$4R^2\sin(\alpha+\beta)$	$2R^2\sin(\alpha+\beta)$	$2R^2\sin\alpha\sin\beta$	$4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$	$2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$

29.12. Дві сторони трикутника дорівнюють 48 см і 28 см. Указати всі можливі значення периметра трикутника.

А	Б	В	Г	Д
20 см $< P <$ 76 см	76 см $< P <$ 152 см	20 см $< P <$ 152 см	96 см $< P <$ 152 см	76 см $< P <$ 96 см

29.13. O — точка перетину бісектрис AK і BL трикутника ABC. Знайти $\angle AOB$, якщо $\angle C = 50°$.



А	Б	В	Г	Д
100°	115°	120°	130°	135°

29.14. Градусні міри зовнішніх кутів трикутника ABC при вершинах A, B і C відносяться як 3 : 4 : 5. Як відносяться градусні міри внутрішніх кутів трикутника при вершинах A, B і C?

А	Б	В	Г	Д
3 : 4 : 5	5 : 4 : 3	3 : 2 : 1	7 : 8 : 9	9 : 8 : 7

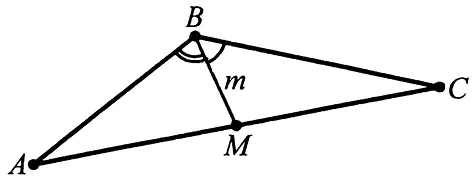
29.15. Кути трикутника відносяться як 1 : 2 : 3. Знайти відношення протилежних їм сторін.

А	Б	В	Г	Д
1 : 2 : 3	3 : 2 : 1	1 : 3 : 2	$1 : \sqrt{3} : 2$	$1 : \sqrt{2} : 2$

29.16. Сторони трикутника дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см. Знайти косинус найбільшого кута цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{29}{140}$	$\frac{23}{112}$	$\frac{19}{140}$	$\frac{13}{112}$	$\frac{13}{56}$

29.17. У трикутнику ABC BM — медіана, $\angle ABM = \alpha$, $\angle MBC = \beta$, $BM = m$. Визначити сторону AB.

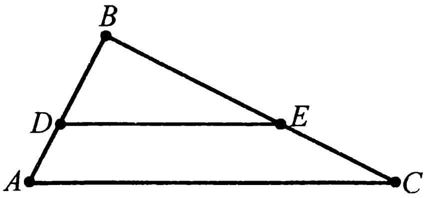


А	Б	В	Г	Д
$\frac{2m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$	$2m\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$	$\frac{2m\sin\beta}{\sin\alpha}$	$2m\sin\alpha\sin\beta$	$\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

29.18. Два трикутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 7 см, 12 см і 16 см, а сторони іншого — 40 см, 30 см та x см. Знайти x.

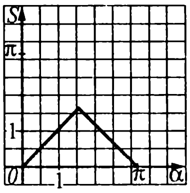
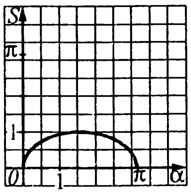
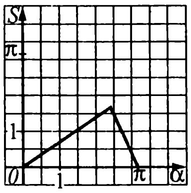
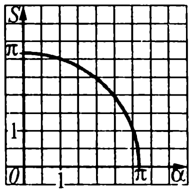
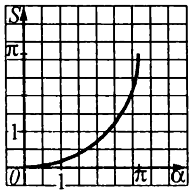
А	Б	В	Г	Д
18 см	17,5 см	20 см	24 см	18,5 см

29.19. У трикутнику ABC відрізок DE з кінцями на сторонах AB і BC паралельний до сторони AC. $S_{\Delta DBE} = 4$ см^2, $S_{ADEC} = 5$ см^2, $DE = 7$ см. Знайти довжину AC.

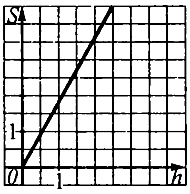
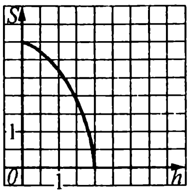
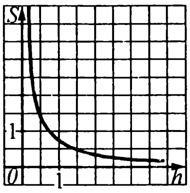
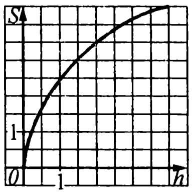
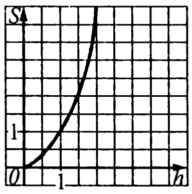


А	Б	В	Г	Д
9,5 см	$9\frac{2}{3}$ см	12 см	10,5 см	9 см

29.20. $S(\alpha)$ — площа трикутника з даними сторонами a і b та змінним кутом α між ними. Який з наведених графіків може бути графіком функції $S(\alpha)$?

А	Б	В	Г	Д
				

29.21. $S(h)$ — площа трикутника з даною стороною a і змінною висотою h, проведеною до неї. Який з наведених графіків може бути графіком функції $S(h)$?

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 29.22–29.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

29.22. Установити відповідність між елементами (1–4) рівностороннього трикутника зі стороною a та їхніми величинами (А–Д).

1 Висота
2 Радіус вписаного кола
3 Кут між медіанами
4 Радіус описаного кола

А $\frac{\sqrt{3}}{6}a$
Б $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
В 30°
Г 60°
Д $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

29.23. Установити відповідність між коефіцієнтами подібності (1–4) двох трикутників і відношенням їх площ (А–Д).

1 $k_1 = 2$	**А** 25
2 $k_2 = 3$	**Б** 9
3 $k_3 = 4$	**В** 16
4 $k_4 = 5$	**Г** 36
	Д 4

29.24. Установити відповідність між довжинами сторін (1–4), які лежать проти кута 30° у прямокутних трикутниках, і довжинами діаметрів (А–Д), описаних навколо трикутників кіл.

1 2 см	**А** 8
2 4 см	**Б** 20
3 10 см	**В** 4
4 15 см	**Г** 10
	Д 30

29.25. Установити відповідність між сторонами трикутників (1–4) та їх площами (А–Д).

1 4 см, 5 см, 3 см	**А** 96 см^2
2 8 см, 10 см, 6 см	**Б** 48 см^2
3 16 см, 20 см, 12 см	**В** 6 см^2
4 12 см, 15 см, 9 см	**Г** 54 см^2
	Д 24 см^2

Розв'яжіть завдання 29.26–29.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

29.26. Величини кутів трикутника ABC при вершинах A, B і C відносяться, як 5 : 6 : 7. Знайти в градусах величину кута між висотою CD і бісектрисою кута A трикутника.

29.27. Знайти площу S гострокутного трикутника у квадратних сантиметрах, якщо дві його сторони дорівнюють 2 см і 1 см, а квадрат косинуса кута між ними дорівнює $\frac{1}{4}$. У відповідь записати $\sqrt{3}S$.

29.28. У трикутнику ABC висота BK поділяє сторону AC на відрізки 1 і 3. Знайти квадрат медіани BM трикутника ABC, якщо $BK = 2$.

29.29. У трикутнику ABC проведено медіану AK, яка дорівнює $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ й утворює зі стороною AC кут 30°. Знайти BC, якщо $\angle BCA = 45°$.

29.30. Периметр трикутника дорівнює 50, а його бісектриса ділить протилежну сторону на відрізки завдовжки 15 і 5. Знайти меншу сторону трикутника.

29.31. Сторона трикутника дорівнює 10. Знайти квадрат довжини відрізка прямої, яка паралельна до цієї сторони та ділить площу трикутника навпіл.

29.32. Одна зі сторін трикутника дорівнює 2, а прилеглі до неї кути дорівнюють 30° і 45°. Знайти площу трикутника з точністю до 0,01.

29.33. Знайти площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 28 і 30, а медіана, яка проведена до третьої сторони, дорівнює 13.

29.34. На сторонах AB і AC трикутника ABC відповідно позначено такі точки M і K, що $\angle AMK = \angle C$, $AM = 4$, $MB = 2$ і $AK = 3$. Знайти довжину відрізка KC.

29.35. Відношення двох внутрішніх кутів трикутника дорівнює 2 : 3, а зовнішніх кутів при цих же вершинах 11 : 9. Знайти в градусах третій внутрішній кут трикутника.

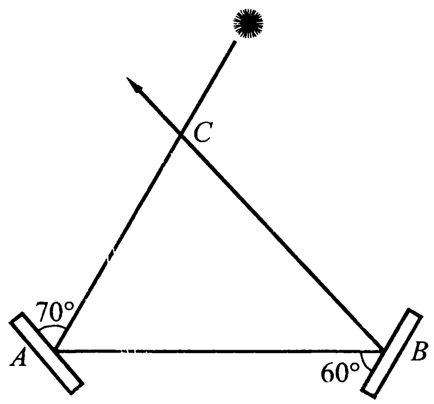
29.36. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 5 см і 6 см. Знайти з точністю до 0,01 см довжину медіани, проведеної до сторони завдовжки 5 см.

29.37. Одна зі сторін трикутника дорівнює 10, а медіани, що проведені до двох інших сторін, дорівнюють 9 і 12. Знайти площу трикутника.

29.38. Дві сторони трикутника дорівнюють b і c, а бісектриса кута між ними дорівнює l. Визначити третю сторону трикутника й обчислити її значення, якщо $b = 1$, $c = 4$, $l = 1{,}2$.

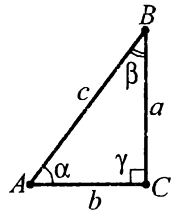
29.39. У трикутнику, дві сторони якого дорівнюють a і b, сума висот, опущених на ці сторони, дорівнює третій висоті. Визначити третю сторону й обчислити її значення, якщо $a = 4$, $b = 6$.

29.40. Промінь світла падає від ліхтарика на поверхню дзеркала A під кутом 70°, а відбитий від нього промінь падає на поверхню іншого дзеркала B під кутом 60° і відбивається від нього. Дзеркала розміщені так, що всі падаючі та відбиті промені лежать в одній площині (див. рис.). Знайти градусну міру найменшого внутрішнього кута утвореного променями трикутника ABC.



Тема 30. Прямокутний трикутник

Прямокутним називають трикутник, у якого один з кутів є прямим.



$\angle C = 90°$, трикутник ABC — прямокутний. a, b — катети, c — гіпотенуза.

Теорема Піфагора. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема, обернена до теореми Піфагора. Якщо квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін, то цей трикутник — прямокутний.

Властивості прямокутних трикутників

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

2. У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша від катета.

3. Катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи: якщо $\alpha = 30°$, то $a = \frac{1}{2}c$.

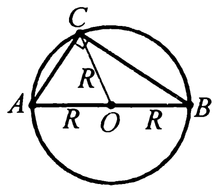
Справедливе й обернене твердження: якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, протилежний цьому катету, дорівнює 30°.

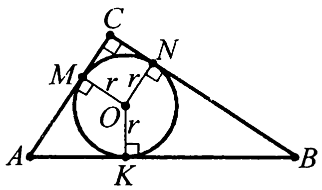
Описане та вписане кола

Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи: $AO = BO = CO = R = \frac{1}{2}AB$.

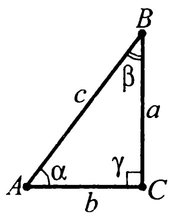
Радіус описаного кола: $R = \frac{1}{2}c$, $R = m_c$.

Радіус вписаного кола: $r = \frac{a+b-c}{2}$, $r = \frac{ab}{a+b+c}$.





Залежність між сторонами та кутами прямокутного трикутника



$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\alpha = b\,\mathrm{ctg}\beta$, $b = c\sin\beta = c\cos\alpha = a\,\mathrm{tg}\beta = a\,\mathrm{ctg}\alpha$.

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Висоти прямокутного трикутника

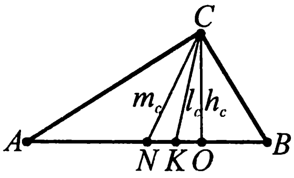
$h_a = b$, $h_b = a$, $h_c = \frac{ab}{c}$.

Висоти h_a і h_b збігаються з катетами b та a.

Медіани прямокутного трикутника

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2};\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2};\ m_c = \frac{1}{2}c = R;\ m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2.$$

Площа прямокутного трикутника



У прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута поділяє навпіл кут між висотою і медіаною, проведеними з цієї ж вершини: $\angle NCK = \angle OCK$.

$$S=\frac{1}{2}ab,\ S=\frac{1}{2}ch_c,\ S=\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\beta,\ S=\frac{1}{2}b^2\operatorname{tg}\alpha.$$

Ознаки рівності прямокутних трикутників.

1. Якщо катети одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

2. Якщо катет і гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

3. Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

4. Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й катету іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Ознаки подібності прямокутних трикутників.

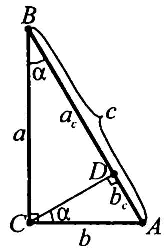
Два прямокутні трикутники подібні між собою, якщо:

1) гострий кут одного трикутника дорівнює гострому куту іншого трикутника;

2) катети одного трикутника пропорційні катетам іншого трикутника;

3) гіпотенуза та катет одного трикутника пропорційні гіпотенузі та катету іншого трикутника.

У прямокутному трикутнику:

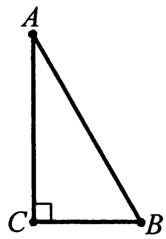


1) висота, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу;

2) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу.

Наприклад, у трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = b$, $BC = a$, $DB = a_c$, $CD = h_c$, $AD = b_c$. Тоді: 1) $h^2 = a_c \cdot b_c$; 2) $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$.

Приклад 1. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють 5 см і 12 см.



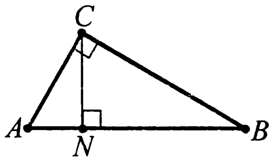
■ За теоремою Піфагора маємо: $AB^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$; $AB = \sqrt{169} = 13$.

Відповідь. 13 см. ■

Приклад 2. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює h, а гострий кут — β. Знайти гіпотенузу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{h}{\sin\beta}$	$h\operatorname{ctg}\beta$	$h\operatorname{tg}\beta$	$\frac{h}{\sin\beta\cos\beta}$	$\frac{h}{\cos\beta}$

■ Трикутник CNB — прямокутний. За співвідношеннями між елементами прямокутного трикутника маємо: $CB = \dfrac{CN}{\sin B}$, тобто $CB = \dfrac{h}{\sin\beta}$.



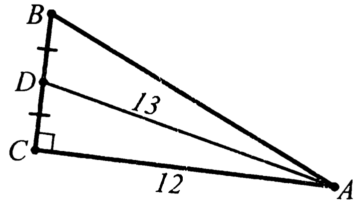
Із прямокутного трикутника ACB маємо: $AB = \dfrac{CB}{\cos B}$, тобто $AB = $
$= \dfrac{h}{\sin\beta\cos\beta}$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 3. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до іншого катета, — 13 см. Знайти гіпотенузу трикутника.

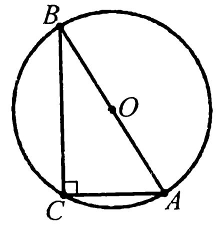
А	Б	В	Г	Д
5 см	$2\sqrt{61}$ см	25 см	22 см	26 см

■ Із трикутника ACD за теоремою Піфагора маємо:
$AD^2 = CD^2 + CA^2$, звідки $CD = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см).
$CB = 2CD = 2 \cdot 5 = 10$ (см).
Із трикутника ABC: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} =$
$= 2\sqrt{61}$ (см).



Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Навколо прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C описано коло (див. рис.). Знайти радіус кола, якщо $AC = 12$ см, $\angle B = 30°$.

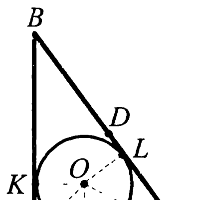


■ За властивістю катета, який лежить проти кута 30°, $AC = \dfrac{1}{2}AB$, звідси $AB = 2AC = 2 \cdot 12 = 24$ (см). $R = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \cdot 24 = 12$ (см).

Відповідь. 12 см. ■

Приклад 5. Знайти площу прямокутного трикутника у квадратних метрах, якщо радіуси вписаного в нього й описаного навколо нього кіл відповідно дорівнюють 2 м і 5 м.

■ Нехай трикутник ABC заданий. У нього: $\angle C = 90°$, r — радіус вписаного кола, $r = 2$ м, R — радіус описаного кола, $R = 5$ м. У прямокутному трикутнику центр описаного кола D є серединою гіпотенузи і його радіус дорівнює половині гіпотенузи. Отже, $DA = DB = R = 5$ м.



Нехай точка O — центр вписаного в трикутник кола; OK, OP, OL — радіуси, проведені в точки дотику кола зі сторонами трикутника. Тоді $OK \perp BC$, $OP \perp CA$, $\angle C = 90°$ і тому $CPOK$ — прямокутник. Звідки: $OK = CP = r = 2$ м; $OP = KC = r = 2$ м. За властивістю дотичних до кола відрізки дотичних, проведених з однієї точки до точок дотику, рівні. Тому $BK = BL$, $AP = AL$ і $CP = CK$. Знайдемо периметр трикутника ABC: $P = KB + BL + LA + AP + PC + CK = BL + BL + LA + LA + PC + PC = 2BL + 2LA + 2PC =$
$= 2(BL + LA) + 2PC = 2BA + 2PC = 2 \cdot 2R + 2r = 4R + 2r = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 24$ (м). Площу трикутника знайдемо з формули $S = \dfrac{1}{2}P \cdot r$, де P — периметр, r — радіус вписаного кола. Маємо: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 =$
$= 24$ (м^2).

Відповідь. 24. ■

Завдання 30.1–30.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

30.1. Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 18° більший від іншого. Знайти більший з цих кутів.

А	Б	В	Г	Д
66°	68°	36°	54°	48°

30.2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b ($a > b$). Визначити довжину медіани, проведеної до меншого катета.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$	$\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$	$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$	$\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$

30.3. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, що проведена до нього, дорівнює 8 см. Знайти інший катет трикутника.

А	Б	В	Г	Д
8 см	$2\sqrt{7}$ см	$4\sqrt{5}$ см	12 см	$8\sqrt{5}$ см

30.4. Один з катетів і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 5 см і 13 см. Знайти площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
65 см^2	32,5 см^2	30 см^2	60 см^2	130 см^2

30.5. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 60 см і 80 см. Знайти висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

А	Б	В	Г	Д
24 см	36 см	48 см	56 см	96 см

30.6. Катет та гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 10 см і 26 см. Знайти проекцію цього катета на гіпотенузу.

А	Б	В	Г	Д
8 см	5,2 см	$7\frac{8}{13}$ см	2,6 см	$3\frac{11}{13}$ см

30.7. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, у якого висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
12 см	18 см	24 см	28 см	32 см

30.8. Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Обчислити площу круга, описаного навколо трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{5}$	4π	$\frac{4\pi}{5}$	5π	π^2

30.9. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює b, а протилежний до нього кут — β. Визначити радіус кола, описаного навколо трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{b}{2\sin\beta}$	$\dfrac{b}{2\cos\beta}$	$\dfrac{b\sin\beta}{2}$	$\dfrac{2b}{\sin\beta}$	$\dfrac{2b}{\cos\beta}$

30.10. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α. Визначити катет, прилеглий до цього кута, якщо радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює r.

А	Б	В	Г	Д
$r\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$	$r\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$	$r\left(1+\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$	$r\left(1+\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$	$2r\,\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$

30.11. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

А	Б	В	Г	Д
4 см	2 см	8 см	8,5 см	6 см

30.12. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює α, а висота, що проведена до гіпотенузи, дорівнює h. Визначити площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{h^2}{2\sin\alpha}$	$2h^2\sin 2\alpha$	$h^2\sin 2\alpha$	$\dfrac{h^2}{2\sin 2\alpha}$	$\dfrac{h^2}{\sin 2\alpha}$

30.13. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 1 : 2. Знайти відношення протилежних їм катетів.

А	Б	В	Г	Д
1 : 2	1 : 3	$1 : \sqrt{2}$	$1 : \sqrt{3}$	$1 : \sqrt{5}$

30.14. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а гіпотенуза дорівнює 20 см. Знайти менший з відрізків, на які поділяє гіпотенузу бісектриса прямого кута.

А	Б	В	Г	Д
$8\dfrac{4}{7}$ см	$6\dfrac{5}{12}$ см	6 см	5 см	$4\dfrac{2}{7}$ см

30.15. Бісектриси двох кутів прямокутного трикутника утворюють при перетині кут 79°. Знайти менший гострий кут трикутника.

А	Б	В	Г	Д
11°	17°	22°	34°	44°

30.16. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 27°. Знайти кут між бісектрисою і висотою трикутника, проведеними з вершини прямого кута.

А	Б	В	Г	Д
8°	16°	32°	28°	18°

30.17. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 32°. Знайти кут між висотою і медіаною, проведеними з вершини прямого кута.

А	Б	В	Г	Д
32°	26°	36°	33°	23°

30.18. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки у відношенні 3 : 4. У якому відношенні ділить гіпотенузу висота?

А	Б	В	Г	Д
3 : 4	$\sqrt{3}$: 2	9 : 16	2 : 3	1 : 2

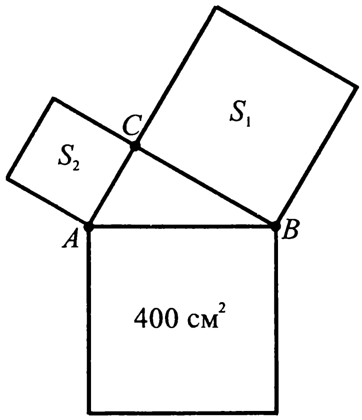
30.19. Знайти площу прямокутного трикутника, у якого бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 см і 8 см.

А	Б	В	Г	Д
32 см^2	16 см^2	57,6 см^2	28,8 см^2	14,4 см^2

30.20. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Якою найбільшою може бути площа трикутника?

А	Б	В	Г	Д
75 см^2	100 см^2	50 см^2	25 см^2	12,5 см^2

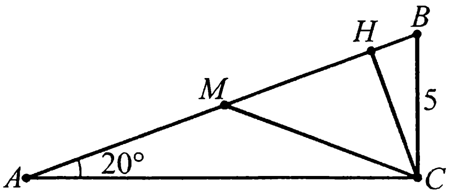
30.21. На сторонах прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) побудовані квадрати. Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює 400 см^2, а різниця площ квадратів, побудованих на катетах, дорівнює 112 см^2. Знайти площу трикутника.



А	Б	В	Г	Д
168 см^2	84 см^2	96 см^2	192 см^2	48 см^2

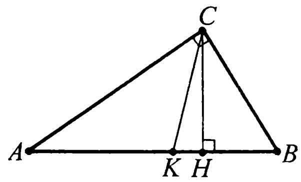
Завдання 30.22–30.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

30.22. На рисунку зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), його висоту CH, медіану CM і позначено величини деяких його елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



1 $\angle MCH$	**А** $\dfrac{5}{2\sin 20°}$
2 $\angle CMH$	**Б** $5\sin 20°$
3 CM	**В** $50°$
4 CH	**Г** $5\sin 70°$
	Д $40°$

30.23. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено бісектрису CK та висоту CH. Установити відповідність між значеннями кута при вершині A (1–4), розміщеній зі сторони бісектриси, і кутом KCH (А–Д).



1 $8°$	**А** $27°$
2 $32°$	**Б** $33°$
3 $28°$	**В** $37°$
4 $18°$	**Г** $13°$
	Д $17°$

30.24. Установити відповідність між катетами a й b (1–4) прямокутних трикутників і значеннями гострого кута, протилежного до катета a (А–Д).

1 2 см, 2 см	**А** $22{,}5°$
2 1 см, $\sqrt{3}$ см	**Б** $45°$
3 $\sqrt{3}$ см, 1 см	**В** $60°$
4 $2-\sqrt{2}$ см, $\sqrt{2}$ см	**Г** $90°$
	Д $30°$

30.25. Установити відповідність між довжинами гіпотенуз і катетів (1–4) прямокутних трикутників і їх площами (А–Д).

1 5 см, 3 см	**А** 84 см^2
2 13 см, 5 см	**Б** 6 см^2
3 10 см, 8 см	**В** 24 см^2
4 25 см, 7 см	**Г** 48 см^2
	Д 30 см^2

Розв'яжіть завдання 30.26–30.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

30.26. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника утворює з протилежною стороною кути, один з яких дорівнює 70°. Знайти у градусах менший гострий кут трикутника.

30.27. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 1, а гіпотенуза дорівнює $5\sqrt{5}$ см. Знайти у сантиметрах більший катет.

30.28. Катет прямокутного трикутника дорівнює 28 см, різниця двох інших його сторін дорівнює 8 см. Знайти у сантиметрах гіпотенузу.

30.29. У прямокутному трикутнику висота і медіана, проведені до гіпотенузи, відповідно дорівнюють 24 см і 25 см. Знайти у сантиметрах периметр трикутника.

30.30. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 12, а тангенс прилеглого кута дорівнює $\frac{5}{6}$. Знайти квадрат довжини гіпотенузи.

30.31. Проекції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу дорівнюють 4 см і 21 см. Знайти у сантиметрах менший катет.

30.32. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює $\sqrt{5}$ см, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 4 см. Знайти у сантиметрах гіпотенузу.

30.33. Точка дотику вписаного в прямокутний трикутник кола ділить гіпотенузу на відрізки 3 см і 10 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу трикутника.

30.34. Точка дотику вписаного в прямокутний трикутник кола ділить гіпотенузу на відрізки 4 см і 6 см. Знайти у сантиметрах радіус вписаного кола.

30.35. Знайти у квадратних сантиметрах площу прямокутного трикутника, якщо його висота ділить гіпотенузу на відрізки 18 см і 32 см.

30.36. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють m і n. Визначити висоту, проведену з вершини прямого кута й обчислити її значення, якщо $m = 3$, $n = 4$.

30.37. У прямокутному трикутнику висота і бісектриса, проведені з вершини прямого кута, відповідно дорівнюють h і l. Визначити площу трикутника й обчислити її значення, якщо $h = 0{,}5$, $l = 0{,}7$.

30.38. У прямокутний трикутник вписано коло радіуса r. Визначити синус меншого гострого кута трикутника, якщо довжина гіпотенузи $5r$.

30.39. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює h, а відстань від вершини прямого кута до точки перетину бісектриси меншого гострого кута з меншим катетом дорівнює d. Визначити довжину меншого катета й обчислити її значення, якщо $h = 7$, $d = 5$.

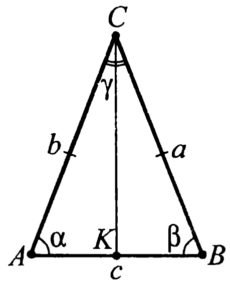
30.40. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 12, а гіпотенуза — 13. Знайти квадрат довжини бісектриси трикутника, проведеної з вершини меншого кута.

30.41. Від високої тополі падає тінь завдовжки 9 м, а від вертикальної жердини завдовжки 2 м — тінь завдовжки 1,2 м. Знайти висоту тополі.

Тема 31. Рівнобедрений трикутник

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають *рівнобедреним*. $AC = BC$, a, b — бічні сторони, c — основа.

У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB: $AC = BC$, $\alpha = \beta$.



$l_c = m_c = h_c$

Властивості рівнобедреного трикутника

1. Бісектриса, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є його медіаною і висотою. Наприклад, якщо трикутник ABC — рівнобедрений (див. рис.), $AC = BC$ і CK — його бісектриса, то CK — медіана та висота трикутника ABC.

2. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні. Наприклад, для рівнобедреного трикутника ABC (див. рис.) $AC = BC$. Тоді $\angle A = \angle B$.

3. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є одночасно його медіаною і бісектрисою.

4. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є одночасно його висотою і бісектрисою.

5. Медіани, бісектриси та висоти, проведені до бічних сторін рівнобедреного трикутника, рівні.

6. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника удвічі більший за кут при основі.

Ознаки рівнобедреного трикутника

Трикутник є рівнобедреним, якщо:

1) у нього є два рівні кути;

2) одна з медіан є висотою або бісектрисою;

3) одна з висот є бісектрисою або медіаною;

4) одна з бісектрис є медіаною або висотою;

5) дві медіани (висоти, бісектриси) рівні.

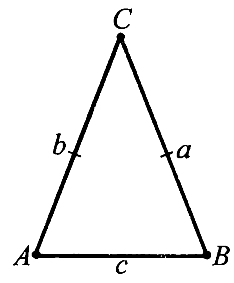
Подібність рівнобедрених трикутників

1. Рівнобедрені трикутники подібні, якщо вони мають по рівному куту: **а)** при основі; **б)** при вершині.

2. Усі рівнобедрені прямокутні трикутники подібні.

Основні співвідношення для рівнобедреного трикутника

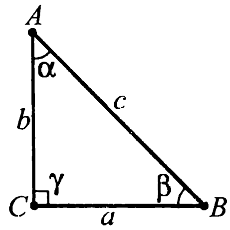
Для будь-якого рівнобедреного трикутника (див. рис.) мають місце такі співвідношення:



1) $h_a = h_b = \dfrac{2S}{a}$;

2) $h_c = m_c = l_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$.

Для прямокутного рівнобедреного трикутника (див. рис.) мають місце такі співвідношення:



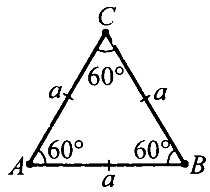
1) $a = b = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}$;

2) $\alpha = \beta = 45°, \gamma = 90°$;

3) $S = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{c^2}{4}$;

4) $m_a = m_b = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $m_c = h_c = l_c = \dfrac{c}{2}$.

Рівносторонній трикутник



$AB = BC = AC = a$, трикутник ABC — рівносторонній. $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

$h_a = m_a = l_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Властивості рівностороннього трикутника

1. Будь-який рівносторонній трикутник має усі властивості рівнобедреного трикутника.

2. Усі кути рівностороннього трикутника рівні.

3. Будь-яка бісектриса рівностороннього трикутника є його медіаною і висотою.

Радіус вписаного й описаного кіл для рівностороннього трикутника

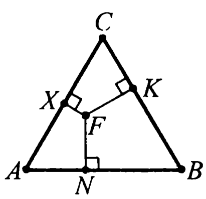
$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = 2r$, $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = 2r$.

Справедливими є такі властивості:

1. Центри вписаного й описаного кіл збігаються.

2. Сума радіусів описаного та вписаного кіл дорівнює висоті ($h = R + r$).

Площа рівностороннього трикутника. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Ортоцентр, центр мас, центр вписаного й описаного кіл у рівносторонньому трикутнику збігаються.

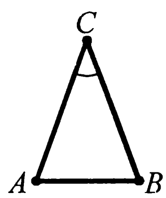
Усі рівносторонні трикутники подібні.

Сума відстаней від будь-якої точки рівностороннього трикутника до його сторін дорівнює висоті трикутника

$$FX + FN + FK = h.$$

Приклад 1. Кут при основі рівнобедреного трикутника учетверо більший від кута при вершині. Знайти кут при вершині.

А	Б	В	Г	Д
20°	40°	15°	140°	10°

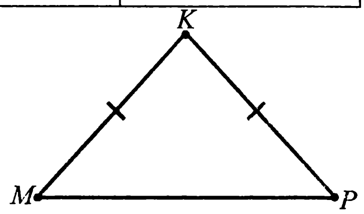


■ Нехай трикутник ABC — заданий. У ньому $AC = BC$, $\angle A = 4\angle C$. Оскільки $\angle A = \angle B$ і $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, то одержимо: $4\angle C + 4\angle C + \angle C = 180°$; $9\angle C = 180°$; $\angle C = 20°$.

Відповідь. А. ■

Приклад 2. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 82°. Знайти кут при основі трикутника.

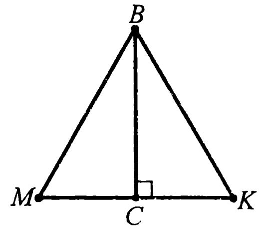
А	Б	В	Г	Д
82°	90°	49°	51°	98°



■ За теоремою про суму кутів трикутника $\angle K + \angle M + \angle P = 180°$. За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника $\angle M = \angle P$. Нехай $\angle M = \angle P = x°$. Складемо і розв'яжемо рівняння: $82 + x + x = 180$; $82 + 2x = 180$; $2x = 98$; $x = 49$. Отже, $\angle M = \angle P = 49°$.

Відповідь. **В.** ■

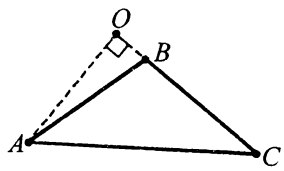
Приклад 3. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Знайти периметр трикутника, якщо його бісектриса, проведена до основи, дорівнює 8 см.



■ Оскільки трикутник MBK рівнобедрений, то BC — бісектриса, медіана та висота. Тому $MC = KC = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см); $BC \perp MK$ і трикутник MBC — прямокутний. За теоремою Піфагора $MB^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$; $MB = \sqrt{100} = 10$ (см). $KB = MB = 10$ см (як бічні сторони рівнобедреного трикутника). $P_{\Delta MBK} = 10 + 10 + 12 = 32$ (см).

Відповідь. 32 см. ■

Приклад 4. Кут, протилежний основі рівнобедреного трикутника, дорівнює 120°. Знайти основу трикутника, якщо висота, проведена до бічної сторони дорівнює 7 см.



■ Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC (рис. 195) AC — основа, AO — висота, тому $\angle AOB = 90°$ і трикутник AOB прямокутний.

Оскільки в прямокутному трикутнику AOC $\angle C = (180° - 120°) : 2 = 30°$, то за властивістю катета, який лежить проти кута 30°, $AO = \frac{1}{2}AC$, тоді $AC = 2 \cdot 7 = 14$ (см).

Відповідь. 14 см. ■

Приклад 5. Знайти кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його зовнішніх кутів дорівнює: **а)** 48°; **б)** 116°. Скільки розв'язків має задача?

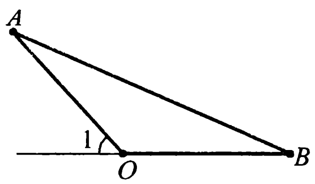


Рис. 1

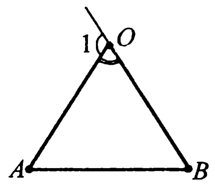


Рис. 2

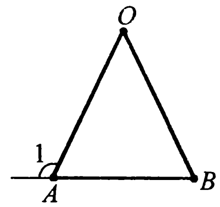


Рис. 3

Нехай $\angle 1$ — зовнішній кут трикутника.

а) Якщо зовнішній кут при деякій вершині трикутника гострий, то кут трикутника при цій вершині — тупий. Трикутник може мати лише один тупий кут. У рівнобедреному трикутнику це кут між бічними сторонами. На рис. 1 це кут O. $\angle 1$ і $\angle O$ — суміжні, тому $\angle 1 + \angle O = 180°$, $\angle O = 180° - 48° = 132°$. За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника $\angle A = \angle B$. За теоремою про зовнішній кут трикутника $\angle 1 = \angle A + \angle B$. Тому $\angle A = \angle B = 48° : 2 = 24°$. У цьому випадку задача має один розв'язок;

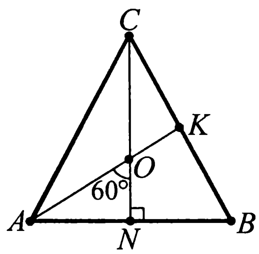
б) якщо зовнішній кут при деякій вершині трикутника тупий, то кут трикутника при цій вершині — гострий. У рівнобедреному трикутнику це може бути: 1) кут між бічними сторонами (рис. 2); 2) кут при основі (рис. 3). Маємо:

1) $\angle 1 + \angle O = 180°$, $\angle O = 180° - 116° = 64°$; $\angle A = \angle B = 116° : 2 = 58°$;

2) $\angle 1$ і $\angle A$ — суміжні, тому $\angle 1 + \angle A = 180°$, $\angle A = 180° - 116° = 64°$; $\angle B = \angle A = 64°$. $\angle 1 = \angle O + \angle B$, тому $\angle O = 116° - 64° = 52°$. У цьому випадку задача має два розв'язки.

Відповідь. **а)** Один розв'язок: 132°, 24°, 24°; **б)** два розв'язки: 64°, 58°, 58° або 64°, 64°, 52°.

Приклад 6. З вершини A рівнобедреного трикутника ABC з основою AB проведена медіана завдовжки 90 см. Ця медіана утворює з бісектрисою кута C кут 60°. Знайти в сантиметрах довжину бісектриси кута C.



■ Нехай трикутник ABC — заданий рівнобедрений трикутник з основою AB, $AC = CB$, AK — медіана, $AK = 90$ см, CN — бісектриса кута C, O — точка перетину AK і CN, $\angle AON = 60°$.

За властивістю бісектриси, проведеної до основи рівнобедреного трикутника, CN — медіана та висота. За властивістю медіан трикутника $AO : OK = 2 : 1$. $OK = \frac{1}{3}AK = \frac{1}{3}\cdot 90 = 30$ (см). $AO = 90 - 30 = 60$ (см).

У трикутнику AON $\angle ANO = 90°$, оскільки CN — висота, $\angle AON = 60°$, тоді $\angle OAN = 30°$. Маємо: $ON = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}\cdot 60 = 30$ (см). $CO = 2ON = 2\cdot 30 = 60$ (см). $CN = 3ON = 90$ (см).

Відповідь. 90. ■

Завдання 31.1–31.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

31.1. Знайти периметр рівнобедреного трикутника зі сторонами 3 см і 7 см.

А	Б	В	Г	Д
20 см	10 см	13 см	17 см	17 см або 13 см

31.2. У рівнобедреному трикутнику ABC кут C дорівнює 104°. Знайти кут B.

А	Б	В	Г	Д
66°	76°	38°	28°	48°

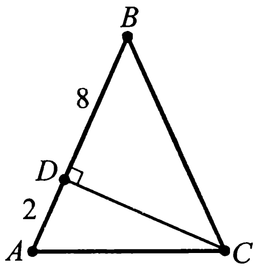
31.3. Знайти площу рівнобедреного трикутника, у якого бічна сторона дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а кут між бічними сторонами дорівнює 30°.

А	Б	В	Г	Д
$8\sqrt{2}$ см^2	$16\sqrt{3}$ см^2	$8\sqrt{3}$ см^2	16 см^2	8 см^2

31.4. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 10 см, а висота, що проведена до основи, — 6 см. Знайти площу трикутника.

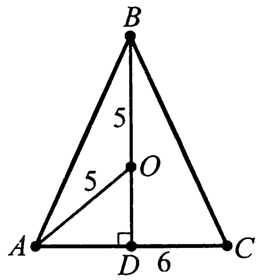
А	Б	В	Г	Д
48 см^2	24 см^2	96 см^2	30 см^2	60 см^2

31.5. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки 8 см і 2 см, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайти площу трикутника.



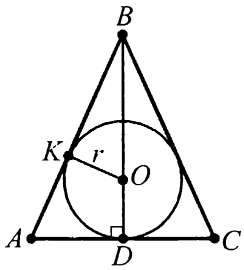
А	Б	В	Г	Д
78 см^2	64 см^2	60 см^2	30 см^2	32 см^2

31.6. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, — 5 см. Знайти висоту, проведену до основи.



А	Б	В	Г	Д
8 см	9 см	10 см	11 см	12 см

31.7. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α, а радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює *r*. Визначити бічну сторону трикутника.



А	Б	В	Г	Д
$r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$	$r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$	$\dfrac{r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$	$r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$	$\dfrac{r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$

31.8. Знайти площу рівностороннього трикутника зі стороною $2\sqrt{3}$ см.

А	Б	В	Г	Д
3 см^2	$\sqrt{3}$ см^2	$3\sqrt{3}$ см^2	$4\sqrt{3}$ см^2	$2\sqrt{3}$ см^2

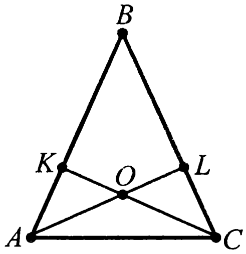
31.9. Радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайти сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
12 см	16 см	24 см	36 см	48 см

31.10. Сторона правильного трикутника дорівнює $20\sqrt{3}$ см. Знайти проекцію однієї медіани на іншу.

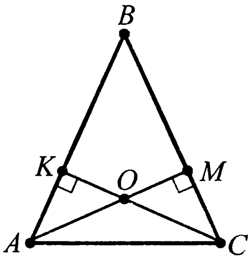
А	Б	В	Г	Д
15 см	20 см	30 см	40 см	$10\sqrt{3}$ см

31.11. У рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі утворюють при перетині кут 52°. Знайти кут між бічними сторонами трикутника.



А	Б	В	Г	Д
72°	74°	76°	78°	84°

31.12. O — точка перетину висот AM і CK рівнобедреного трикутника ABC з основою AC. Знайти кут B, якщо $\angle AOC = 110°$.



А	Б	В	Г	Д
70°	80°	60°	50°	35°

31.13. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 55 см, а висота, що проведена до основи, — 44 см. Знайти відношення відрізків, на які поділяє бічну сторону бісектриса кута при основі.

А	Б	В	Г	Д
2 : 3	3 : 4	4 : 5	5 : 6	6 : 7

31.14. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайти радіус кола, яке проходить через середини сторін трикутника.

А	Б	В	Г	Д
2 см	8 см	4 см	$4\sqrt{3}$ см	$2\sqrt{3}$ см

31.15. Знайти радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 160 см а висота, проведена до неї, — 60 см.

А	Б	В	Г	Д
$26\frac{2}{3}$ см	$13\frac{1}{3}$ см	40 см	$17\frac{1}{7}$ см	$8\frac{4}{7}$ см

31.16. Знайти відстань від точки перетину медіан до центра кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою 160 см і бічною стороною 100 см.

А	Б	В	Г	Д
$13\frac{1}{3}$ см	$3\frac{1}{3}$ см	$23\frac{6}{7}$ см	$6\frac{2}{3}$ см	$7\frac{2}{3}$ см

31.17. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, поділяє висоту, що проведена до основи, у відношенні 10 : 3. Знайти периметр трикутника, якщо бічна сторона дорівнює 20 см.

А	Б	В	Г	Д
64 см	49 см	43 см	46 см	52 см

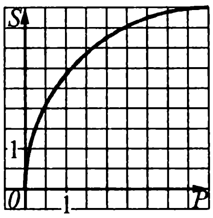
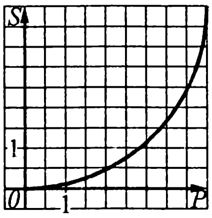
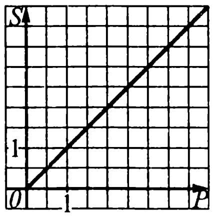
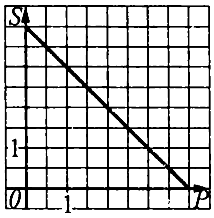
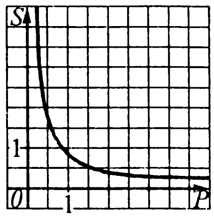
31.18. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють 16 см і 10 см. Знайти висоту трикутника, проведену до бічної сторони.

А	Б	В	Г	Д
34 см	6 см	8 см	9,6 см	4,8 см

31.19. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. За якого значення висоти, проведеної до основи, площа трикутника буде найбільшою?

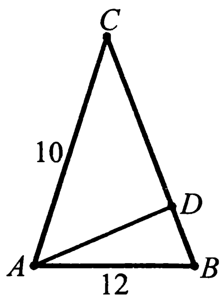
А	Б	В	Г	Д
24 см	$24\sqrt{2}$ см	$12\sqrt{2}$ см	$12\sqrt{3}$ см	$8\sqrt{3}$ см

31.20. S — площа рівностороннього трикутника. Серед наведених графіків указати графік залежності периметра P від S: $P = P(S)$.

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 31.21–31.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

31.21. На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC$), його висоту AD і позначено величини деяких елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



1 AD

2 $S_{\Delta ABC}$

3 Радіус вписаного кола

4 Радіус описаного кола

А 9,6

Б 6,25

В 3

Г 48

Д 32

31.22. Установити відповідність між заданими довжинами основ (1–4) рівнобедрених трикутників з кутами 120° при вершинах, протилежних до основ, та їх висотами (А–Д) до цих основ.

1 4 см	**А** 4 см
2 $8\sqrt{3}$ см	**Б** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см
3 10 см	**В** 6 см
4 $12\sqrt{3}$ см	**Г** 16 см
	Д $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см

31.23. Установити відповідність між довжинами бічних сторін рівнобедрених трикутників (1–4), кут між якими дорівнює 30°, та площами (А–Д) цих трикутників.

1 20 см	**А** 196 $см^2$
2 24 см	**Б** 100 $см^2$
3 28 см	**В** 256 $см^2$
4 32 см	**Г** 625 $см^2$
	Д 144 $см^2$

31.24. Установити відповідність між довжинами сторін рівнобедрених трикутників (1–4) та радіусами описаних навколо них кіл (А–Д).

1 29 см, 29 см, 42 см	**А** 21,025 см
2 30 см, 30 см, 48 см	**Б** 20 см
3 5 см, 5 см, 8 см	**В** 25 см
4 20 см, 20 см, 32 см	**Г** $\frac{25}{6}$ см
	Д $\frac{50}{3}$ см

Розв'яжіть завдання 31.25–31.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

31.25. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20. Знайти його основу, якщо вона на 2 більша від бічної сторони.

31.26. Кут при основі AB рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Висоти трикутника, проведені до бічних сторін, перетинаються в точці O. Знайти у градусах величину кута AOB.

31.27. У рівнобедреному трикутнику ABC основа AC дорівнює 18. Через точку O — середину висоти BD — проведено промені AO і CO, які перетинають бічні сторони в точках M і K. Знайти довжину відрізка MK.

31.28. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона відповідно дорівнюють 5 і 20. Знайти менший з відрізків, на які поділяє бічну сторону бісектриса кута при основі.

31.29. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 12 : 5, а бічна сторона дорівнює 60. Знайти периметр трикутника.

31.30. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 108 см, а основа — 30. Знайти радіус вписаного кола.

31.31. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12, а висота, що проведена до основи, –– 8. Знайти радіус кола, вписаного в цей трикутник.

31.32. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, радіус вписаного кола — r. Визначити бічну сторону трикутника й обчислити її значення, якщо $a = 6$, $r = 2$.

31.33. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a, висота, що проведена до основи, — h. Визначити відстань від середини основи до бічної сторони й обчислити її значення, якщо $a = 3$, $h = 2$.

31.34. Знайти у градусах кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо бісектриса кута при основі відтинає від нього трикутник подібний даному.

31.35. Знайти площу рівнобедреного трикутника з точністю до 0,01 см^2, якщо висота, яка проведена до бічної сторони, дорівнює 12 см, а інша висота — 9 см.

31.36. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, медіана, яка проведена до бічної сторони, дорівнює m. Визначити квадрат основи трикутника й обчислити його значення, якщо $m = 2{,}5$; $b = 3$.

31.37. У правильному трикутнику зі стороною 6 на одній зі сторін узято точку на відстані 1 від вершини. Знайти квадрат відстані від цієї точки до центра трикутника.