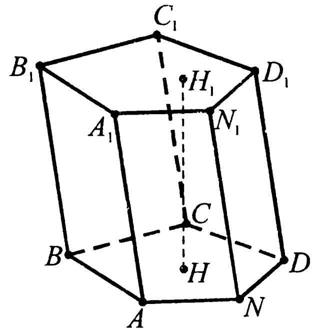
35.43. У правильній чотирикутній піраміді проведено площину через діагональ основи паралельно до бічного ребра. Сторона основи дорівнює $\sqrt{2}$, а бічне ребро — 5. Визначити площу утвореного перерізу.

35.44. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ через середини сторін AB і AD проведено площину, яка паралельна бічному ребру SA. Знайти площу утвореного перерізу, якщо сторона основи дорівнює $\sqrt{2}$, а бічне ребро — 5.

Тема 36. Призма



Многогранник, який складається із двох рівних плоских многокутників, які лежать у паралельних площинах, та бічної поверхні, утвореної паралелограмами, вершини яких є відповідними вершинами многокутників, називають *призмою*.

$ABCDN$, $A_1B_1C_1D_1N_1$ — основи призми.

AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, NN_1 — бічні ребра; $AA_1 || BB_1 || CC_1 || DD_1 || NN_1$; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = NN_1$.

ABB_1A_1, BCC_1B_1, DCC_1D_1, NDD_1N_1, ANN_1A_1 — бічні грані.

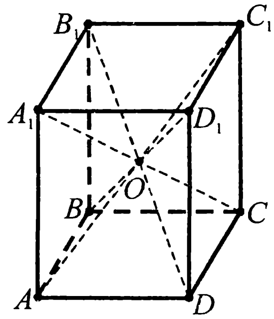
HH_1 — висота призми — відстань між площинами основ.

Відрізок, який сполучає дві вершини, які не належать одній грані, називають *діагоналлю* призми.

Пряма призма — призма, бічні ребра якої перпендикулярні до площин основи, *похила призма* — призма, бічні ребра якої не перпендикулярні до площин основи.

Правильна призма — пряма призма, основи якої — правильні многокутники.

Паралелепіпед — призма, в основі якої паралелограм.



Усі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й цією точкою діляться навпіл.

Прямокутний паралелепіпед — паралелепіпед, в основі якої — прямокутник.

У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів його вимірів: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Площа поверхні й об'єм

Пряма призма.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H$, де H — висота призми.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн}$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H$.

Похила призма.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{пер.} \cdot AA_1$, де $P_{пер.}$ — периметр перерізу, перпендикулярного до бічного ребра.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн}$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H$.

Прямокутний паралелепіпед.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H = 2(a + b)c$.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = 2(ab + bc + ac)$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H = abc$.

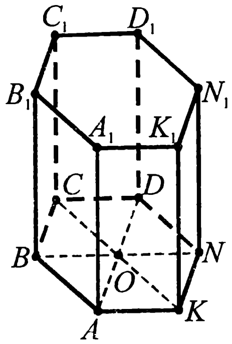
Куб.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H = 4a^2$.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = 6a^2$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H = a^3$.

Приклад 1. Знайти площу бічної поверхні й об'єм правильної шестикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює 8 см, а висота — 9 см.



■ $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H$, $P_{осн.} = 6a = 6 \cdot 8 = 48$ (см), $H = BB_1 = 9$ см.

$S_б = 48 \cdot 9 = 432$ (см^2). $V = S_{осн.} \cdot H$, $S_{осн.} = 6 \cdot S_{\Delta AOB}$.

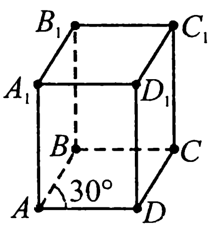
ΔAOB — рівносторонній, $S_{\Delta AOB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $a = 8$ см.

$S_{\Delta AOB} = \dfrac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$ (см^2). $S_{осн.} = 6 \cdot 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$ (см^2).

$V = 96\sqrt{3} \cdot 9 = 864\sqrt{3}$ (см^3).

Відповідь. 432 см^2, $864\sqrt{3}$ см^3. ■

Приклад 2. Основою прямої призми є паралелограм зі сторонами 9 см і 14 см і кутом між ними 30°. Висота призми — 15 см. Обчислити площу повної поверхні й об'єм призми.



■ $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.}$.

$S_{осн.} = 9 \cdot 14 \cdot \sin 30° = 9 \cdot 14 \cdot \dfrac{1}{2} = 63$ (см^2).

$P_{осн.} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (9 + 14) = 46$ (см).

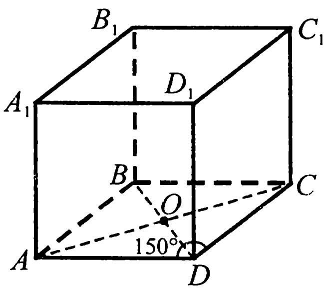
$S_{б.} = 46 \cdot 15 = 690$ (см^2).

$S_{п.} = 2 \cdot 63 + 690 = 126 + 690 = 816$ (см^2).

$V = S_{осн.} \cdot H = 63 \cdot 15 = 945$ (см^3).

Відповідь. 816 см^2, 945 см^3. ■

Приклад 3. Основою прямої призми є роомб з тупим кутом 150°. Площа бічної поверхні призми дорівнює 96 см^2, а площа її повної поверхні — 132 см^2. Знайти висоту призми.



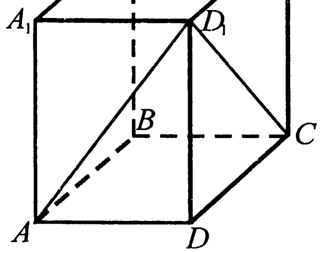
■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — пряма призма, $ABCD$ — ромб, $\angle ADC = 150°$, $S_{б.} = 96$ см^2, $S_{п.} = 132$ см^2. $S_{п.} - S_{б.} = 2S_{ABCD} = 132 - 96 = 36$ (см^2), звідки $S_{ABCD} = 18$ (см^2). Отже, $S_{ABCD} = AD^2 \cdot \sin\angle ADC$. Звідки

$$AD = \sqrt{\frac{S_{ABCD}}{\sin\angle ADC}} = \sqrt{\frac{18}{\sin 150°}} = 6 \text{ (см)}.$$

$S_{б.} = 4AD \cdot DD_1$, звідки $DD_1 = \dfrac{S_{б.}}{4AD} = \dfrac{96}{4 \cdot 6} = 4$ (см).

Відповідь. 4 см. ■

Приклад 4. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться як 1 : 7, довжини діагоналей бічних граней дорівнюють 13 см та 37 см. Визначити площу повної поверхні паралелепіпеда.



■ Оскільки протилежні грані прямокутного паралелепіпеда — рівні прямокутники, то в задачі заданими є довжини діагоналей суміжних бічних граней.

Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відрізки D_1A та D_1C — діагоналі суміжних бічних граней; $D_1A = 13$ см, $D_1C = 37$ см. Сторони основи DA і DC є ортогональними проекціями на площину основи діагоналей D_1A та D_1C відповідно. Оскільки довшій похилій відповідає довша проекція, то $AD < CD$ і згідно з умовою $AD : CD = 1 : 7$. Нехай $AD = k$ см, $CD = 7k$ см $(k > 0)$, $D_1D = H$ см. Тоді з ΔD_1DA $(\angle D = 90°)$ і ΔD_1DC $(\angle D = 90°)$ за теоремою Піфагора отримаємо: $\begin{cases} 13^2 = H^2 + k^2, \\ 37^2 = H^2 + 49k^2, \end{cases}$

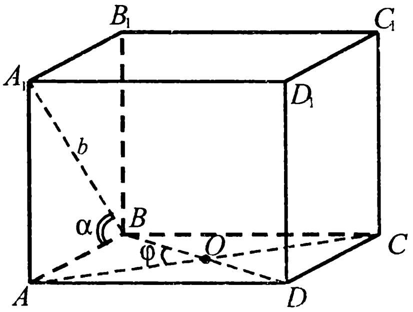
звідки $37^2 - 13^2 = 48k^2$, $k = 5$. Отже, $AD = 5$ см, $CD = 35$ см, $H = \sqrt{13^2 - k^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см). Тоді:

$S_{осн.} = AD \cdot CD = 5 \cdot 35 = 175$ (см^2); $P = 2(AD + CD) = 2(5 + 35) = 80$ (см);

$S_{б.} = P \cdot H = 80 \cdot 12 = 960$ (см^2); $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = 960 + 2 \cdot 175 = 1310$ (см^2).

Відповідь. 1310 см^2. ■

Приклад 5. В основі прямої призми лежить прямокутник, діагоналі якого утворюють між собою кут φ. Діагональ однієї з бічних граней дорівнює b й утворює з площиною основи кут α. Обчислити об'єм призми.

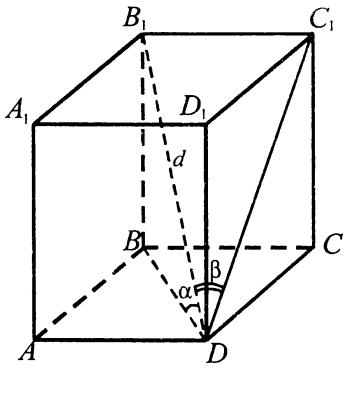


■ Нехай основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник $ABCD$, O — точка перетину діагоналей AC і BD основи, $\angle AOB = \varphi$. Протилежними бічними гранями призми є рівні прямокутники, діагоналі яких рівні. Вважатимемо спочатку, що задана діагональ A_1B грані AA_1B_1B. Оскільки $AA_1 \perp (ABC)$, то проекцією діагоналі A_1B на площину основи є сторона AB. Згідно з умовою задачі, $\angle A_1BA = \alpha$, $A_1B = b$.

З ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AB = A_1B\cos\alpha = b\cos\alpha$; $AA_1 = A_1B\sin\alpha = b\sin\alpha$. Діагоналі прямокутника рівні й точкою перетину діляться навпіл. Тому $OA = OB$ і $\angle ABO = \frac{180° - \varphi}{2} = 90° - \frac{\varphi}{2}$. З ΔBAD ($\angle A = 90°$): $AD = AB\text{tg}\angle ABD = b\cos\alpha \cdot \text{tg}\left(90° - \frac{\varphi}{2}\right) = b \cdot \cos\alpha \cdot \text{ctg}\frac{\varphi}{2}$. Тоді $V = AD \cdot AB \cdot AA_1 = b\cos\alpha \cdot \text{ctg}\frac{\varphi}{2} \cdot b\cos\alpha \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{b^3}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \text{ctg}\frac{\varphi}{2}$. Якщо вважати заданою діагональ A_1D грані AA_1D_1D, то з ΔA_1AD одержимо: $AD = b\cos\alpha$; $AA_1 = b\sin\alpha$. Тоді з ΔBAD: $AB = AD\text{ctg}\left(90° - \frac{\varphi}{2}\right) = b \cdot \cos\alpha \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2}$ і $V = \frac{b^3}{2}\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2}$.

Відповідь. $\frac{b^3}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \text{ctg}\frac{\varphi}{2}$ або $\frac{b^3}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \text{tg}\frac{\varphi}{2}$. ■

Приклад 6. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані — кут β. Знайти об'єм паралелепіпеда.



■ Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагональ $B_1D = d$. Оскільки $B_1B \perp (ABC)$, а $B_1C_1 \perp (D_1C_1C)$, то $\angle B_1DB$ і $\angle B_1DC_1$ — це кути, які діагональ B_1D утворює з площиною основи і з площиною бічної грані відповідно. Згідно з умовою, $\angle B_1DB = \alpha$, а $\angle B_1DC_1 = \beta$.

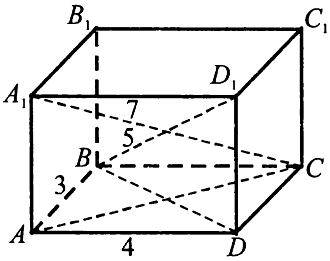
$V = S_{осн.} \cdot H$. З ΔB_1BD ($\angle B = 90°$): $B_1B = H = B_1D \cdot \sin\angle D = d\sin\alpha$; $BD = B_1D \cdot \cos\alpha = d\cos\alpha$. З ΔB_1C_1D ($\angle C_1 = 90°$): $B_1C_1 = BC = B_1D \cdot \sin\angle D = d\sin\beta$. З ΔBCD ($\angle C = 90°$): $BC^2 + CD^2 = BD^2$; $d^2\sin^2\beta + CD^2 = d^2\cos^2\alpha$; $CD = d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. Тепер знаходимо:

$S_{осн.} = BC \cdot CD = d\sin\beta \cdot d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = d\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

$V = d\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} \cdot d \cdot \sin\alpha = d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

Відповідь. $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. ■

Приклад 7. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, сторони якого дорівнюють 3 м і 4 м. Одна з діагоналей цього паралелепіпеда дорівнює 5 м, а інша — 7 м. Знайти об'єм паралелепіпеда.

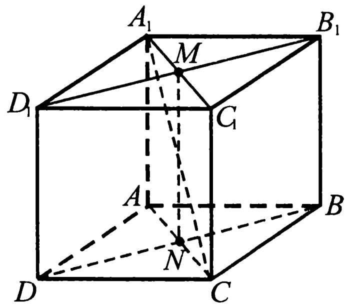


■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямий паралелепіпед, $ABCD$ — паралелограм, $AB = 3$ м, $AD = 4$ м, BD_1 і A_1C — діагоналі паралелепіпеда, $B_1D = 5$ м, $A_1C = 7$ м. Позначимо діагоналі основи $BD = d_1$, $AC = d_2$. Нехай $H = AA_1 = x$ м. Тоді з ΔD_1DB ($\angle D = 90°$): $BD^2 = BD_1^2 - DD_1^2$, тобто $d_1^2 = 25 - x^2$. З ΔA_1AC ($\angle A = 90°$): $AC^2 = AC_1^2 - AA_1^2$, тобто $d_2^2 = 49 - x^2$. За властивістю діагоналей паралелограма, $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, тобто $(25 - x^2) + (49 - x^2) = 2(9 + 16)$. Звідки $74 - 2x^2 = 50$; $2x^2 = 74 - 50$; $x^2 = 12$; $x = 2\sqrt{3}$ (м). Таким чином, $d_1^2 = BD = 25 - x^2 = 25 - 12 = 13$ (м), $d_1 = \sqrt{13}$ (м). З ΔABD за теоремою косинусів одержимо: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle A$. Звідки $\cos\angle A = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \dfrac{3^2 + 4^2 - 13}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$.

Тому $\angle A = 60°$. $S_{\text{осн.}} = AB \cdot AD\sin\angle A = 3 \cdot 4 \cdot \sin 60° = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (м). Отже, $V = S_{\text{осн.}} \cdot H = 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 36$ (м^3).

Відповідь. 36 м^3. ■

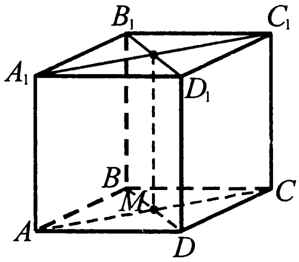
Приклад 8. Ребро куба дорівнює a. Знайти відстань від діагоналі куба до ребра, яке її не перетинає.



■ Нехай маємо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a. Розглянемо діагональ A_1C і ребро D_1D, яке її не перетинає. Потрібно знайти відстань l між мимобіжними прямими A_1C і D_1D. Ця відстань дорівнює відстані між паралельними площинами, що проходять через дані прямі, зокрема, відстані від деякої точки прямої D_1D до площини, що проходить через A_1C паралельно до DD_1. Оскільки $D_1D \| C_1C$, то площина A_1C_1C паралельна прямій D_1D і містить пряму A_1C. Тому l дорівнює відстані, наприклад, від точки D_1 до площини A_1C_1C. Нехай M — точка перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1 грані $A_1B_1C_1D_1$. Оскільки $(D_1A_1C_1) \perp (A_1C_1C)$ і $D_1M \perp A_1C_1$, то $D_1M \perp (A_1C_1C)$. Отже, D_1M — перпендикуляр до площини A_1C_1C, а тому $l = D_1M = \dfrac{1}{2} D_1B_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. ■

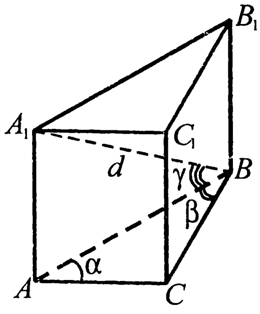
Приклад 9. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють S і Q. Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.



■ Нехай в основі прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежить ромб, ACC_1A_1 і BDD_1B_1 — діагональні перерізи цього паралелепіпеда, $S_{ACC_1A_1} = S$, $S_{BDD_1B_1} = Q$. Позначимо через H бічне ребро паралелепіпеда. Тоді $AC \cdot H = S$, $BD \cdot H = Q$, звідки $AC = \dfrac{S}{H}$, $BD = \dfrac{Q}{H}$. Діагоналі AC і BD ромба $ABCD$ взаємно перпендикулярні й точкою перетину M діляться навпіл. Тому з ΔMCD ($\angle M = 90°$, $MC = \dfrac{S}{2H}$, $MD = \dfrac{Q}{2H}$): $CD = \sqrt{MC^2 + MD^2} = \sqrt{\dfrac{S^2}{4H^2} + \dfrac{Q^2}{4H^2}} = \dfrac{\sqrt{S^2 + Q^2}}{2H}$. $S_{\text{б.}} = P \cdot H = 4CD \cdot H = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{S^2 + Q^2}}{2H} \cdot H = 2\sqrt{S^2 + Q^2}$.

Відповідь. $2\sqrt{S^2 + Q^2}$. ■

Приклад 10. В основі прямої призми лежить трикутник з кутами α і β. Діагональ бічної грані, що містить сторону, для якої дані кути є прилеглими, дорівнює d й утворює з площиною основи кут γ. Знайти об'єм призми.



■ Нехай в основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить трикутник ABC, у якому $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Тоді заданою є діагональ грані AA_1B_1B: $A_1B = d$. Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до площини ABC, то проекцією діагоналі A_1B на цю площину є сторона AB трикутника ABC. Тому за умовою задачі $\angle A_1BA = \gamma$.

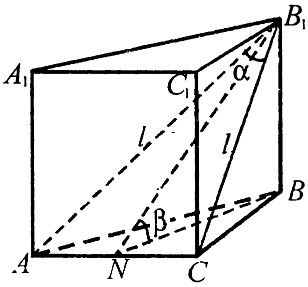
Об'єм призми $V = S_{осн.} \cdot H$. З ΔA_1BA $(\angle A = 90°)$: $H = AA_1 = d\sin\gamma$; $AB = d\cos\gamma$. За теоремою синусів для трикутника ABC маємо: $\dfrac{AB}{\sin\angle C} = \dfrac{AC}{\sin\angle B}$,

$AC = \dfrac{AB\sin\angle B}{\sin\angle C} = \dfrac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = \dfrac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Тоді: $S_{осн} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC\sin\alpha =$

$= \dfrac{1}{2}d\cos\gamma\dfrac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\alpha = \dfrac{d^2\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. $V = \dfrac{d^2\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}d\sin\gamma = \dfrac{d^3\cos^2\gamma\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Відповідь. $\dfrac{d^3\cos^2\gamma\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. ■

Приклад 11. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник. Дві діагоналі суміжних бічних граней, що мають спільну вершину, дорівнюють l і утворюють між собою кут α. Площина, що проходить через ці діагоналі, нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм призми.



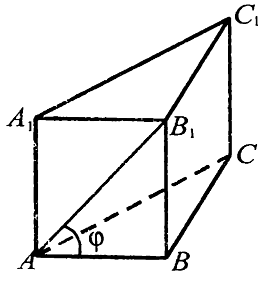
■ Нехай в основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить рівнобедрений трикутник ABC $(AB = BC)$. Бічними гранями прямої призми є прямокутники. Оскільки $AB = BC$, то прямокутники AA_1B_1B і CC_1B_1B рівні, а тому мають рівні діагоналі. Проведемо діагоналі AB_1 і CB_1. За умовою, $AB_1 = CB_1 = l$ і $\angle AB_1C = \alpha$. З точки B_1 проведемо перпендикуляр B_1N до сторони AC. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $BN \perp AC$. Тому $\angle B_1NB$ є лінійним кутом двогранного кута, утвореного площинами AB_1C та ABC, і, згідно з умовою задачі, $\angle B_1NB = \beta$.

Об'єм призми знайдемо за формулою: $V = S_{осн.} \cdot H$. Висота B_1N рівнобедреного трикутника AB_1C є його бісектрисою і медіаною. Тому $\angle AB_1N = \dfrac{\alpha}{2}$ і $AN = NC$. З ΔAB_1N $(\angle N = 90°)$: $B_1N =$ $= AB_1 \cdot \cos\angle AB_1N = l\cos\dfrac{\alpha}{2}$; $AN = l\sin\dfrac{\alpha}{2}$. З ΔNB_1B $(\angle B = 90°)$: $H = B_1B = B_1N \cdot \sin\beta = l\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\beta$; $BN = l\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta$. Тоді: $S_{осн.} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BN = AN \cdot BN = l\sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot l\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}l^2\sin\alpha\cos\beta$;

$V = \dfrac{1}{2}l^2\sin\alpha\cos\beta \cdot l\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{4}l^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin2\beta$.

Відповідь. $\dfrac{1}{4}l^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin2\beta$. ■

Приклад 12. У правильній трикутній призмі сума ребер, що виходять з однієї вершини, дорівнює 2 см. При якій величині кута, утвореного діагоналлю бічної грані з площиною основи призми, площа бічної поверхні буде найбільшою?



■ Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — правильна трикутна призма, у якої $AB = AC = BC = a$ см, $AA_1 = b$ см. За умовою $2a + b = 2$. Ребро основи AB є проекцією на площину основи ABC діагоналі AB_1 бічної грані ABB_1A_1. Отже, $\angle B_1AB$ — кут, утворений цією діагоналлю з площиною основи. Нехай $\angle B_1AB = \varphi$ $(0° < \varphi < 90°)$. Виразимо площу бічної поверхні через φ. З ΔABB_1 $(\angle B = 90°)$:

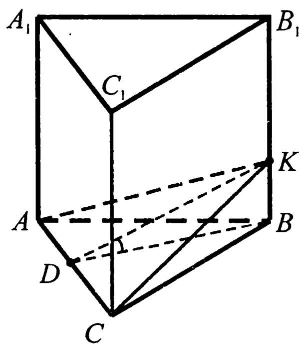
$BB_1 = b = AB\text{tg}\angle A = a\text{tg}\varphi$. Отже, $2a + a\cdot\text{tg}\varphi = 2$, звідки $a = \dfrac{2}{2+\text{tg}\,\varphi}$. $S_{б.} = 3ab = 3a^2\text{tg}\varphi = \dfrac{12\,\text{tg}\,\varphi}{(2+\text{tg}\,\varphi)^2}$.

Проведемо заміну змінної, поклавши $\text{tg}\varphi = x$. Оскільки $\varphi = \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $x \in (0; +\infty)$. Отже, задача звелася до знаходження значення змінної x, за якого функція $S(x) = \dfrac{12x}{(2+x)^2}$ набуває найбільшого значення на проміжку $(0; +\infty)$. Знаходимо критичні точки функції: $S'(x) = \dfrac{12(2+x)^2 - 12x\cdot 2(2+x)}{(2+x)^4} = \dfrac{12(2-x)}{(2+x)^3}$;

$S'(x) = 0$, якщо $x = 2$. Якщо $0 < x < 2$, то $S'(x) > 0$, а якщо $x > 2$, то $S'(x) < 0$. Тому точка $x_0 = 2$ — точка максимуму функції $S(x)$. Отже, бічна поверхня призми буде найбільшою, якщо $\text{tg}\varphi = x_0 = 2$, звідки $\varphi = \text{arctg}2$.

Відповідь. $\varphi = \text{arctg}2$. ■

Приклад 13. Сторона основи правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює $8\sqrt{3}$ см. На ребрі BB_1 позначено точку K так, що $BK : KB_1 = 3 : 5$. Знайти тангенс кута між площинами ABC і AKC, якщо відстань між прямими BC й A_1C_1 дорівнює 16 см.



■ Прямі BC і A_1C_1 — мимобіжні, CC_1 — їх спільний перпендикуляр, бо правильна призма є прямою і її бічне ребро перпендикулярне до площин основ, а отже, і до сторін основ BC і A_1C_1. Отже, $CC_1 = 16$ см. Тоді $BB_1 = CC_1 = 16$ см.

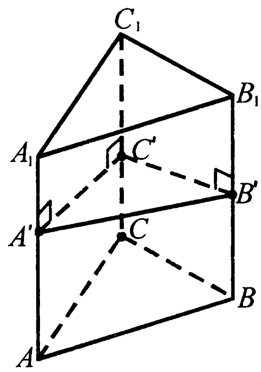
Нехай $BK = 3x$ см, тоді $KB_1 = 5x$ см. Звідки $3x + 5x = 16$; $x = 2$. $BK = 3x = 6$ (см). Позначимо точку D — середину сторони AC. Очевидно, що $BD \perp AC$, а значить, $KD \perp AC$ за теоремою про три перпендикуляри. Оскільки $KD \perp AC$ і $BD \perp AC$, то кут KDB — лінійний кут двогранного кута утвореного площинами ABC і AKC.

З рівностороннього трикутника ABC: $BD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8\sqrt{3} = 12$ (см).

Із прямокутного трикутника KBD: $\text{tg}\,\angle KDB = \dfrac{KB}{BD} = \dfrac{6}{12} = 0{,}5$. Отже, тангенс кута між площинами ABC й AKC дорівнює 0,5.

Відповідь. 0,5. ■

Приклад 14. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 6 см, дві бічні грані її взаємно перпендикулярні та їх площі дорівнюють 24 см^2 і 30 см^2. Знайти об'єм призми.

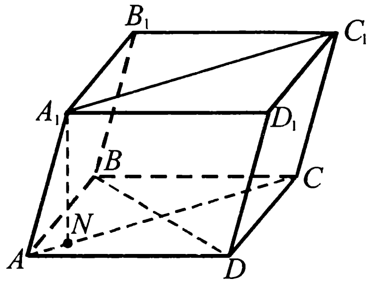


■ Нехай маємо похилу трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ з бічним ребром $A_1A = 6$ см, площини бічних граней ACC_1A_1 та BCC_1B_1 якої взаємно перпендикулярні, $S_{ACC_1A_1} = 24$ см^2, $S_{BCC_1B_1} = 30$ см^2. Проведемо перпендикулярний переріз $A'B'C'$. Тоді: $A_1A \cdot A'C' = S_{ACC_1A_1}$, $6A'C' = 24$, $A'C' = 4$ (см); $B_1B \cdot B'C' = S_{BCC_1B_1}$, $6B'C' = 30$, $B'C' = 5$ см. Оскільки $(A'B'C') \perp C_1C$ і площини A_1C_1C та B_1C_1C взаємноперпендикулярні, то $\angle A'C'B' = 90°$. Отже, $S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{1}{2}A'C' \cdot B'C' =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 5 = 10$ (см^2) і шуканий об'єм $V = S_{\Delta A'B'C'} \cdot A_1A = 10 \cdot 6 = 60$ (см)^3.

Відповідь. 60 см^3. ■

Приклад 15. Основою похилого паралелепіпеда є паралелограм $ABCD$, у якого $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм і $BD = 6$ дм. Діагональний переріз AA_1C_1C перпендикулярний до площини основи і його площа дорівнює 1 м^2. Обчислити об'єм паралелепіпеда.



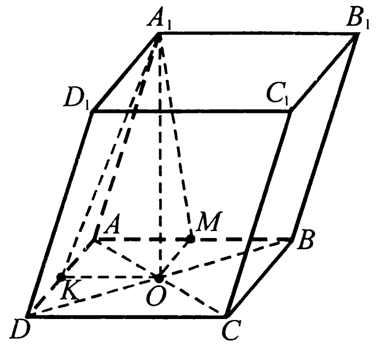
■ Нехай маємо похилий паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якому площина діагонального перерізу ACC_1A_1 перпендикулярна до площини основи. Крім того, за умовою, $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм, $BD = 6$ дм, $S_{ACC_1A_1} = 1$ м$^2 = 100$ дм^2. За властивістю сторін і діагоналей паралелограма $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, звідки: $AC^2 = 2(9 + 49) - 36 = 80$; $AC = 4\sqrt{5}$ (дм).

Проведемо висоту $A_1N = H$ паралелепіпеда ($N \in AC$) і визначимо її з паралелограма ACC_1A_1: $H = \dfrac{S_{ACC_1A_1}}{AC} = \dfrac{100}{4\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$ (дм). $S_{\text{осн.}} = 2S_{\Delta ABD}$.

Площу трикутника ABD знайдемо за формулою Герона: $p = \dfrac{1}{2}(3 + 7 + 6) = 8$ (дм); $S_{\Delta ABD} = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} = 4\sqrt{5}$ (дм^2). Тому $S_{\text{осн.}} = 8\sqrt{5}$ дм^2. $V = S_{\text{осн.}} \cdot H = 8\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5} = 200$ (дм^3) $= 0{,}2$ (м^3).

Відповідь. 0,2 м^3. ■

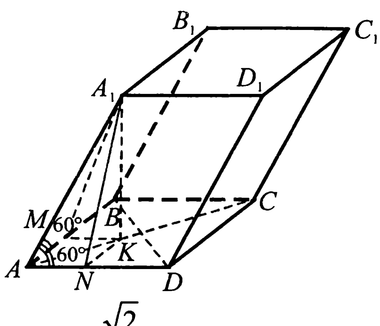
Приткладь 16. Основа похилого паралелепіпеда — квадрат зі стороною a. Одна з вершин другої основи проектується в центр цього квадрата. Висота паралелепіпеда дорівнює H. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.



■ Нехай основою похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат $ABCD$ зі стороною $AB = a$, O — центр цього квадрата, $A_1O = H$ — висота паралелепіпеда. Проведемо $OK \perp AD$, $OM \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $A_1K \perp AD$, $A_1M \perp AB$, тобто A_1K і A_1M — висоти бічних граней ADD_1A_1 та ABB_1A_1 відповідно. Прямокутні трикутники A_1OK та A_1OM рівні (A_1O — спільний катет і $OK = OM = \dfrac{a}{2}$), звідки $A_1K = A_1M$. Оскільки, крім того, $AD = AB$, то $S_{ABB_1A_1} = S_{ADD_1A_1}$. Тому $S_{б.} = 4\,S_{ABB_1A_1}$. З ΔA_1OM ($\angle O = 90°$): $A_1M = \sqrt{A_1O^2 + OM^2} = \sqrt{H^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$.

Отже, $S_{ABB_1A_1} = a \cdot \sqrt{H^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$ і $S_{б.} = 4\,S_{ABB_1A_1} = 2a\sqrt{4H^2 + a^2}$. Відповідь. $2a\sqrt{4H^2 + a^2}$. ■

Приклад 17. В основі похилого паралелепіпеда лежить прямокутник. Бічне ребро утворює із суміжними сторонами основи кути, кожний з яких дорівнює по 60°. Знайти кут, який утворює це бічне ребро з площиною основи паралелепіпеда.



■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — заданий похилий паралелепіпед, $ABCD$ — прямокутник, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60°$. A_1K — висота паралелепіпеда. Проведемо $KN \perp AD$ і $KM \perp AB$. У ΔA_1NA ($\angle N = 90°$): $\angle AA_1N = 90° - 60° = 30°$. Отже, $AN = \dfrac{1}{2}AA_1$. Аналогічно у ΔA_1MA $\angle AA_1M = 30°$, тому $AM = \dfrac{1}{2}AA_1$. Оскільки $AN = AM = \dfrac{1}{2}AA_1$, то $AMKN$ — квадрат і прямокутний трикутник ANK — рівнобедрений. Звідси $AK = \sqrt{2}AN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AA_1$. З ΔA_1KA ($\angle K = 90°$): $\cos\angle A_1AK = \dfrac{AK}{AA_1} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}AA_1}{AA_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, $\angle A_1AK = 45°$.

Відповідь. 45°.■

Завдання 36.1–36.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

36.1. Сторона куба дорівнює 10 см. Знайти площу поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
80 см^2	800 см^2	400 см^2	360 см^2	600 см^2

36.2. Діагональ грані куба дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайти об'єм куба.

А	Б	В	Г	Д
4 см^3	16 см^3	$12\sqrt{3}$ см^3	64 см^3	48 см^3

36.3. Обчислити довжину ребра куба, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{2}$	2

36.4. Знайти діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.

А	Б	В	Г	Д
5,5 см	49 см	36 см	11 см	7 см

36.5. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайти бічне ребро паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
6,5 см	13 см	12 см	8,5 см	9,5 см

36.6. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гіпотенузою 10 см і катетом 6 см. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
120 см^2	90 см^2	60 см^2	180 см^2	240 см^2

36.7. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см, а бічне ребро дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайти об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$96\sqrt{3}$ см^3	96 см^3	$24\sqrt{3}$ см^3	24 см^3	$12\sqrt{3}$ см^3

36.8. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12 см, а діагональ бічної грані дорівнює 13 см. Знайти бічну поверхню призми.

А	Б	В	Г	Д
60 см^2	195 см^2	360 см^2	180 см^2	468 см^2

36.9. Знайти площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює a, а висота — H.

А	Б	В	Г	Д
$4aH$	$3aH$	$4a(a + H)$	$a(a + 4H)$	$2a(a + 2H)$

36.10. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами 4 см і 10 см і бічною стороною 5 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см. Обчислити повну поверхню призми.

А	Б	В	Г	Д
170 см^2	176 см^2	186 см^2	190 см^2	296 см^2

36.11. Основою похилої призми є паралелограм зі сторонами 6 см і 3 см і гострим кутом 45°. Бічне ребро призми дорівнює 4 см і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайти об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$18\sqrt{6}$ см^3	$12\sqrt{6}$ см^3	$18\sqrt{2}$ см^3	$9\sqrt{2}$ см^3	$36\sqrt{2}$ см^3

36.12. Бічне ребро похилої чотирикутної призми дорівнює 12 см, а перпендикулярним перерізом є ромб зі стороною 5 см. Знайти площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
60 см^2	80 см^2	180 см^2	240 см^2	300 см^2

36.13. Куб з ребром 1 м поділили на кубики з ребром 1 см й усі ці кубики поставили в стовпець. Чому дорівнює висота стовпця?

А	Б	В	Г	Д
1 км	10 км	100 км	1000 км	10000 км

36.14. Площа діагонального перерізу куба дорівнює $4\sqrt{2}$ см^2. Знайти площу поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
$36\sqrt{2}$ см^2	16 см^2	24 см^2	192 см^2	32 см^2

36.15. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі його діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2. Визначити висоту паралелепіпеда, якщо його об'єм дорівнює V.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2S_1S_2}{V}$	$\frac{S_1S_2}{V}$	$\frac{S_1S_2}{2V}$	$\frac{V}{S_1S_2}$	$\frac{V}{2S_1S_2}$

36.16. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 13 см, а діагональ бічної грані дорівнює 12 см. Знайти площу основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{313}$ см^2	25 см^2	50 см^2	144 см^2	169 см^2

36.17. У правильній чотирикутній призмі площа діагонального перерізу дорівнює S. Визначити площу бічної поверхні.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{S}$	$\sqrt{2}S$	$2\sqrt{2}S$	$2S$	$2\sqrt{2S}$

36.18. Діагональним перерізом правильної чотирикутної призми є квадрат, площа якого дорівнює S. Визначити об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$S\sqrt{2S}$	$\frac{S\sqrt{S}}{\sqrt{2}}$	$2S\sqrt{S}$	$S\sqrt{S}$	$\frac{S\sqrt{S}}{2}$

36.19. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює S, а площі діагональних перерізів паралелепіпеда — S_1 і S_2. Визначити висоту паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{\frac{S_1S_2}{2S}}$	$\sqrt{\frac{2S_1S_2}{S}}$	$\sqrt{\frac{S_1S_2}{S}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_1S_2}{S}}$	$\sqrt{\frac{S}{2S_1S_2}}$

36.20. Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює Q, а її об'єм — V. Визначити сторону основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2V}{Q}$	$\frac{V}{2Q}$	$\frac{V}{4Q}$	$\frac{V}{Q}$	$\frac{4V}{Q}$

36.21. Розгорткою бічної поверхні правильної чотирикутної призми є квадрат зі стороною 8 дм. Знайти об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
16 дм^3	24 дм^3	32 дм^3	48 дм^3	64 дм^3

36.22. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2 і S_3. Визначити об'єм паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{S_1S_2S_3}$	$2\sqrt{S_1S_2S_3}$	$\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{2}$	$8\sqrt{S_1S_2S_3}$	$\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{8}$

Завдання 36.23–36.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

36.23. Установити відповідність між сторонами основи та діагоналями (1–4) бічних граней правильних трикутних призм та площами їх бічних поверхонь (А–Д).

1 3 см, 5 см
2 6 см, 10 см
3 5 см, 13 см
4 7 см, 25 см

А 180 см^2
Б 504 см^2
В 36 см^2
Г 144 см^2
Д 164 см^2

36.24. Установити відповідність між площами діагональних перерізів (1–4), які є квадратами у правильних чотирикутних призм, та об'ємами цих призм (А–Д).

1 64 см^2
2 16 см^2
3 36 см^2
4 4 см^2

А 32 см^3
Б 234 см^3
В 108 см^3
Г 256 см^3
Д 4 см^3

Розв'яжіть завдання 36.25–36.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

36.25. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12, а висота призми — 6. Знайти площу перерізу цієї призми площиною, яка проходить через сторону нижньої основи і протилежну вершину.

36.26. Діагональ правильної чотирикутної призми утворює з площиною основи кут 45°. Знайти у градусах кут, утворений цією діагоналлю з площиною бічної грані.

36.27. Основою паралелепіпеда є ромб. Діагоналі паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 5 см, а висота — 2 см. Знайти у сантиметрах сторону основи.

36.28. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда мають довжини 2, 2 і $2\sqrt{6}$. Визначити діагональ паралелепіпеда.

36.29. Визначити об'єм прямокутного паралелепіпеда, основою якого є прямокутник зі сторонами 3 і 4, а площа діагонального перерізу 20.

36.30. У прямому паралелепіпеді сторони основи 2 і 8, а кут між ними 30°. Бічна поверхня паралелепіпеда дорівнює 20. Визначити об'єм паралелепіпеда.

36.31. Периметри двох граней правильної трикутної призми дорівнюють 48 см і 30 см. Знайти об'єм V призми у кубічних сантиметрах. У відповідь записати $\frac{V}{\sqrt{3}}$.

36.32. Знайти у кубічних сантиметрах об'єм похилої трикутної призми, якщо відстані між її бічними ребрами дорівнюють 3,7 см, 1,3 см і 3 см, а площа бічної поверхні — 480 см^2.

36.33. Основою похилого паралелепіпеда є ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 60°. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 4 см й утворює з ребрами основи, які виходять з цієї ж вершини, кути 45°. Знайти об'єм паралелепіпеда у кубічних сантиметрах.

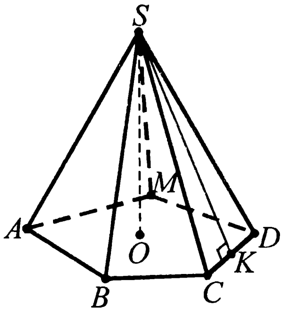
36.34. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює 5, а кут між діагоналями, проведеними з однієї вершини основи у двох суміжних бічних гранях, — 60°. Визначити площу бічної поверхні призми.

36.35. Основою призми є правильний трикутник зі стороною 4. Одна з бічних граней перпендикулярна до основи і є ромбом, діагональ якого дорівнює 6. Знайти об'єм V призми. У відповідь записати $\sqrt{21}V$.

36.36. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 4 і 6. Бічне ребро дорівнює 2 й утворює із суміжними сторонами основи кути в 60°. Знайти об'єм V паралелепіпеда. У відповідь записати $\sqrt{2}V$.

36.37. Для зберігання 1,8 м^3 води на присадибній ділянці виготовили резервуар у формі прямокутного паралелепіпеда з квадратним дном, сторона якого дорівнює 1,2 м. Обчислити висоту резервуару.

Тема 37. Піраміда



n-кутною *пірамідою* називають многогранник, одна з граней якого — довільний n-кутник, а решта граней — трикутники (бічні грані), що мають спільну вершину.

Спільну вершину бічних граней називають *вершиною* піраміди, а n-кутник — *основою* піраміди. Відрізки, які сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називають *бічними ребрами.*

На рисунку $ABCDM$ — основа піраміди, S — вершина, SA, SB, SC, SD, SM — бічні ребра, SO — висота, $SO \perp (ABC)$

Властивості

1. Якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під однаковим кутом, то вони рівні й вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.

2. Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під одинаком кутом α, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди, а площа основи піраміди дорівнює добутку площі бічної поверхні та косинуса кута α: $S_{осн.} = S_{б.} \cdot \cos\alpha$.

Правильна піраміда

Піраміду називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника. У правильній піраміді висота SK бічної грані, проведена з її вершини, — апофема.

Площа поверхні й об'єм

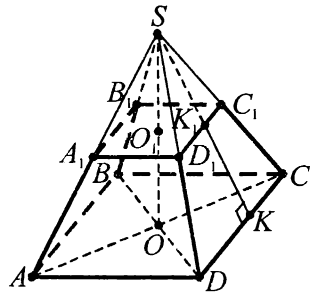
Площа бічної поверхні правильної піраміди: $S_{б.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot l$, де l — апофема. Площа повної поверхні: $S_{п.} = S_{б.} + S_{осн.}$

Об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$.

Зрізана піраміда

$ABCD$ — нижня основа, $A_1B_1C_1D_1$ — верхня основа. Висота OO_1 — відрізок прямої, перпендикулярної до основ й обмежений ними.

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{SO_1^2}{SO^2};\ \frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD}.$$



Правильна зрізана піраміда: основи — правильні многокутники; відрізок, який з'єднує центри основ, є висотою. Площа бічної поверхні: $S_{б.} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot m$, де P_1 і P_2 — периметри основ, m — апофема, $m = K_1K$.

Площа повної поверхні: $S_{п.} = S_{б.} + S_1 + S_2$, де $S_1 + S_2$ — площі основ.

Об'єм: $V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right) \cdot H$, де H — висота.

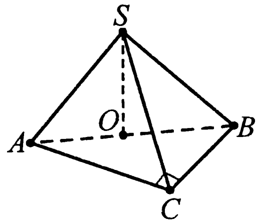
Приклад 1. Обчислити об'єм піраміди, в основі якої лежить ромб з діагоналями 8 см і 6 см, якщо висота піраміди дорівнює 16 см.

А	Б	В	Г	Д
128 см^3	32 см^3	256 см^3	64 см^3	512 см^3

■ В основі піраміди лежить ромб з діагоналями $d_1 = 8$ см і $d_2 = 6$ см. Обчислимо його площу: $S_{осн.} = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (см^2). Знайдемо об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 16 = 128$ (см^3).

Відповідь. А. ■

Приклад 2. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом 8 см. Основа висоти піраміди — центр описаного навколо трикутника основи кола радіуса 5 см. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 7 см.

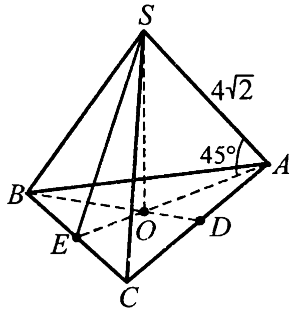


■ Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, — середина гіпотенузи. $AB = 2R$, $AB = 10$ см. Із прямокутного трикутника ABC одержимо: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).

$S_{осн.} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (см²). $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 7 = 56$ (см³).

Відповідь. 56 см³. ■

Приклад 3. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює $4\sqrt{2}$ см й утворює з площиною основи кут 45°. Знайти об'єм піраміди.

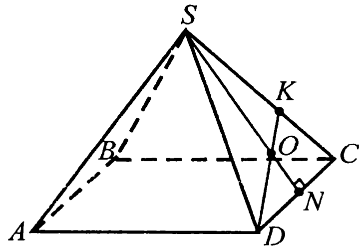


■ Нехай $SABC$ — правильна піраміда, $SA = 4\sqrt{2}$ см, $SO \perp (ABC)$, $\angle SAO = 45°$, SE — апофема. З ΔAOS ($\angle O = 90°$): $AO = SA\cos\angle SAO = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ (см); $SO = H = OA = 4$ (см). Проведемо $SE \perp BC$. Оскільки $SB = SC$, то $BE = EC$ і тому $AE \perp BC$. $AE = AO : 2 \cdot 3 = 4 : 2 \cdot 3 = 6$ (см). З ΔAEC ($\angle E = 90°$): $EC = AE \cdot \mathrm{tg}30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см). $BC = 2EC = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (см).

$S_{осн.} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$ (см²). Тоді об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{осн.} H = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$ (см³).

Відповідь. $16\sqrt{3}$ см³. ■

Приклад 4. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут β. Відрізок, що сполучає центр вписаного в бічну грань кола з вершиною основи цієї грані, дорівнює l. Визначити бічну поверхню піраміди.

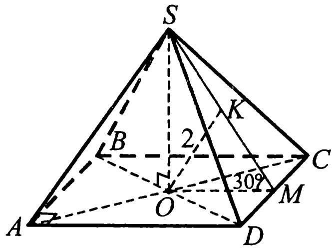


■ Нехай $SABCD$ — задана правильна піраміда. Проведемо бісектриси SN і DK трикутника SCD. Точка O перетину цих бісектрис є центром кола, вписаного в даний трикутник. За умовою задачі, $OD = l$, $\angle SDC = \beta$.

Бісектриса SN є одночасно висотою та медіаною трикутника SCD. Тому $\angle SND = 90°$ і $DN = NC$. З ΔOND $\left(\angle N = 90°, \angle D = \frac{\beta}{2}\right)$: $DN = OD \cdot \cos\angle D = l \cdot \cos\frac{\beta}{2}$. З ΔSND ($\angle N = 90°$): $SN = DN \cdot \mathrm{tg}\angle SDN = l\cos\frac{\beta}{2} \cdot \mathrm{tg}\beta$.

Враховуючи, що $DN = NC$, знаходимо: $S_{б.} = 4S_{\Delta DSC} = 4 \cdot \frac{1}{2} DC \cdot SN = 4 \cdot DN \cdot SN = 4l\cos\frac{\beta}{2} \cdot l\cos\frac{\beta}{2} \cdot \mathrm{tg}\beta = 4l^2\cos^2\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\beta$. Відповідь. $4l^2\cos^2\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\beta$. ■

Приклад 5. Двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди дорівнює 30°, а відрізок, який сполучає середину апофеми й основу висоти, — 2 дм. Знайти об'єм піраміди.



■ Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, SO — її висота. Проведемо $SM \perp DC$. За теоремою про три перпендикуляри, $OM \perp DC$. Тоді $\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при основі й $\angle SMO = 30°$. K — середина апофеми, $OK = 2$ дм. Оскільки OK — медіана прямокутного трикутника SOM ($\angle O = 90°$), то $OK = \frac{SM}{2}$. Отже, $SM = 2OK = 2 \cdot 2 = 4$ (дм).

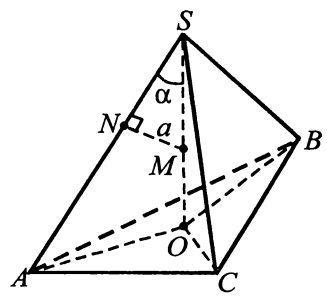
З ΔSOM ($\angle O = 90°$): $SO = SM\sin\angle SMO = 4 \cdot \sin 30° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ (дм). $OM = SM\cos 30° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (дм).

Сторона основи дорівнює: $AD = 2OM = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (дм).

$V = \frac{1}{3}S_{осн.}H = \frac{1}{3}AD^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot 2 = 32$ (дм^3).

Відповідь. 32 дм^3. ■

Приклад 6. У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут α. Визначити об'єм піраміди, якщо відстань від середини висоти до бічного ребра дорівнює a.



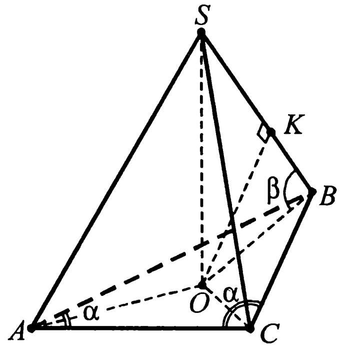
■ Нехай $SABC$ — задана правильна піраміда, SO — її висота, $\angle ASO = \alpha$, точка M — середина висоти. Проведемо з цієї точки перпендикуляр MN до ребра SA. Згідно з умовою задачі, $MN = a$.

Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot H$. З ΔSNM ($\angle N = 90°$): $SM = \frac{a}{\sin\alpha}$. Тоді $H = SO = 2SM = \frac{2a}{\sin\alpha}$. З ΔSOA ($\angle O = 90°$): $OA = SO\text{tg}\alpha = \frac{2a\,\text{tg}\,\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2a}{\cos\alpha}$. Оскільки точка O — центр правильного трикутника ABC, то відрізок OA є для цього трикутника радіусом описаного кола, а тому $S_{осн.} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot OA^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2a}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{\cos^2\alpha}$.

Тоді $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{2a}{\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}$.

Відповідь. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}$. ■

Приклад 7. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут β. Визначити об'єм піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічного ребра дорівнює d. У відповідь записати значення об'єму, якщо $d = 3$ см, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$.



■ Нехай $SABC$ — задана піраміда, основа якої — рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$), $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Проведемо висоту SO. OA, OB і OC — відповідно проекції ребер SA, SB і SC на площину основи. $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$. Прямокутні трикутники SOA, SOB і SOC мають спільний катет SO та рівні гострі кути. Тому $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$. У рівних трикутників відповідні елементи рівні, тому їх висоти, проведені до гіпотенуз, будуть рівними. Це означає, що відстані від точки O до бічних ребер будуть рівними. Проведемо $OK \perp SB$. За умовою, $OK = d$. З трикутника OKB ($\angle K = 90°$): $OB = \frac{OK}{\sin\beta} = \frac{d}{\sin\beta}$. Із трикутника SOB ($\angle O = 90°$): $H = SO = OB\text{tg}\angle B = \frac{d}{\sin\beta} \cdot \text{tg}\beta = \frac{d}{\cos\beta}$. Оскільки $OA = OB = OC$, то точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC, $OB = R$. За наслідком з теореми синусів для трикутника ABC: $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2OB$; $BC = 2OB\sin\alpha = \frac{2d\sin\alpha}{\sin\beta}$. Оскільки в трикутнику ABC $AB = BC$ і $\angle B = 180° - 2\alpha$, то

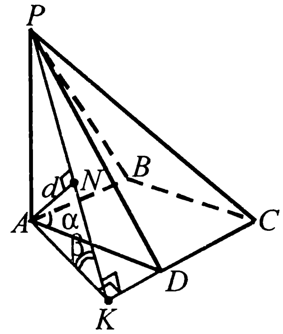
$$S_{осн.} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\frac{2d\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 \sin\left(180° - 2\alpha\right) =$$

$= \dfrac{2d^2 \sin^2\alpha \sin 2\alpha}{\sin^2\beta}$. $V = \dfrac{1}{3}S_{осн.} \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2d^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha}{\sin^2\beta} \cdot \dfrac{d}{\cos\beta} = \dfrac{2d^3\sin^2\alpha\sin 2\alpha}{3\sin^2\beta\cos\beta} = \dfrac{4d^3\sin^2\alpha\sin 2\alpha}{3\sin\beta\cos 2\beta}$.

Якщо $d = 3$ см, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, то $V = \dfrac{4 \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 1}{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 72.$

Відповідь. 72. ■

Приклад 8. Основа піраміди — ромб з гострим кутом α. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи. Дві інші бічні грані нахилені до неї під кутом β, а відстань від основи висоти піраміди до цих граней дорівнює d. Визначити об'єм піраміди.



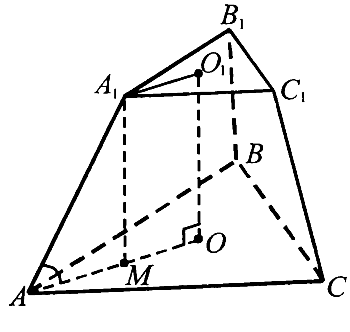
■ Нехай $PABCD$ — задана піраміда, $ABCD$ — ромб, $\angle DAB = \alpha < 90°$. Тоді, згідно з умовою задачі, перпендикулярними до площини основи є грані PAD і PAB, а отже, і пряма PA їх перетину. Тому відрізок PA — висота піраміди. Проведемо висоту PK грані PDC. За теоремою про три перпендикуляри $AK \perp CD$. Згідно з умовою задачі, $\angle PKA = \beta$. Проведемо з точки A перпендикуляр AN до грані PDC; $AN = d$.

Покажемо, що точка N належить висоті PK грані PDC. Справді, пряма CD перпендикулярна до висоти PK і її проекції AK на площину основи. Тому пряма CD перпендикулярна до площини PKA. Оскільки площина PDC містить пряму CD, то вона також перпендикулярна до площини PKA. Тоді перпендикуляр AN до площини PDC лежить у площині PKA, а тому його основа N належить висоті PK.

З ΔANK ($\angle N = 90°$): $AK = \dfrac{d}{\sin\beta}$. З ΔPAK ($\angle A = 90°$): $H = PA = AK \cdot \mathrm{tg}\beta = \dfrac{d}{\sin\beta} \cdot \mathrm{tg}\beta = \dfrac{d}{\cos\beta}$. Оскільки $AB \| CD$, то $\angle ADK = \alpha$. З ΔAKD ($\angle K = 90°$): $AD = \dfrac{AK}{\sin\alpha} = \dfrac{d}{\sin\beta\sin\alpha}$. Тоді $S_{осн.} = AD^2 \cdot \sin\alpha = \dfrac{d^2}{\sin^2\beta\sin\alpha}$. Отже, $V = \dfrac{1}{3}S_{осн.} \cdot \mathrm{H} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{d^2}{\sin^2\beta\sin\alpha} \cdot \dfrac{d}{\cos\beta} = \dfrac{d^3}{3\sin^2\beta\cos\beta\sin\alpha}$.

Відповідь. $\dfrac{d^3}{3\sin^2\beta\cos\beta\sin\alpha}$. ■

Приклад 9. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди відносяться як $1 : 2$, висота піраміди дорівнює 3 см, бічне ребро утворює з більшою основою кут 45°. Знайти площі основ піраміди.



■ Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — задана правильна зрізана піраміда, $A_1C_1 : AC = 1 : 2$, O і O_1 — центри основ. Тоді O_1O — висота піраміди, $OO_1 = 3$ см. Площина AOO_1 проходить через вершину повної піраміди, а тому містить бічне ребро A_1A зрізаної піраміди, звідки випливає, що AA_1O_1O — плоский чотирикутник. Крім того, ця площина перетинає паралельні площини основ піраміди по прямих A_1O_1 та AO і містить її висоту, а тому $A_1O_1 \| AO$ і $AO \perp O_1O$. Таким чином, AA_1O_1O — прямокутна трапеція. Проведемо висоту A_1M цієї трапеції. Оскільки $A_1M \| O_1O$, то $A_1M \perp (ABC)$. Тоді відрізок MA є ортогональною проекцією бічного ребра A_1A на площину ABC. За умовою, $\angle A_1AM = 45°$.

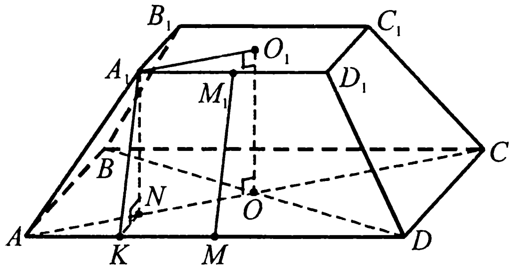
З ΔA_1MA ($\angle M = 90°$): $AM = A_1M = O_1O = 3$ см. Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні, а тому відношення радіусів O_1A_1 і OA кіл, описаних навколо цих трикутників, дорівнює відношенню сторін: $O_1A_1 : OA = 1 : 2$; $OA = 2 \cdot O_1A_1$. З цієї рівності, урахувавши, що $O_1A_1 = OM$, маємо: $OA = 2 \cdot OM$. Отже, точка M — середина відрізка OA. Тому $OA = 2AM = 6$ см.

Знаходимо площу більшої основи через радіус OA описаного кола: $S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} OA^2 =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 27\sqrt{3}$ (см²). Оскільки $A_1C_1 : AC = 1 : 2$, то $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ (см²).

Відповідь. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ см² і $27\sqrt{3}$ см². ■

Приклад 10. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 см і 2 см, а гострий кут бічної грані — 60°. Знайти висоту зрізаної піраміди.



■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — задана правильна зрізана піраміда, $AD = 4$ см, $A_1D_1 = 2$ см, $\angle A_1AD = 60°$, O_1 і O — центри основ. Тоді O_1O — висота піраміди. Проведемо висоту A_1N прямокутної трапеції AA_1O_1O. Оскільки $A_1N \| O_1O$, то $A_1N \perp (ABC)$, тобто A_1N — також висота зрізаної піраміди. У рівнобічній трапеції AA_1D_1D проведемо висоту A_1K та апофему M_1M піраміди. Тоді: $A_1M_1 = \frac{1}{2} A_1D_1 = 1$ см, $AM = \frac{1}{2} AD = 2$ см, $AK = AM - KM = AM - A_1M_1 =$ $= 1$ см.

З ΔA_1KA ($\angle K = 90°$): $A_1K = AK \cdot \text{tg}60° = \sqrt{3}$ см. Відрізок NK є ортогональною проекцією похилої A_1K на площину ABC. Тому, оскільки $A_1K \perp AD$, то $NK \perp AD$. З ΔAKN ($\angle K = 90°$, $\angle A = 45°$): $KN = AK \cdot \text{tg}45° = 1$ см. З ΔA_1NK: $A_1N = \sqrt{A_1K^2 - KN^2} = \sqrt{2}$ (см).

Відповідь. $\sqrt{2}$ см. ■

Завдання 37.1–37.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

37.1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $b\sqrt{3}$, а висота піраміди — H. Визначити бічне ребро піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3b^2 - H^2}$	$\sqrt{b^2 + H^2}$	$\sqrt{3b^2 + H^2}$	$\frac{\sqrt{b^2 + 4H^2}}{2}$	$\sqrt{b^2 - H^2}$

37.2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Визначити апофему піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a}{2\sin\beta}$	$\frac{a}{2\,\text{tg}\beta}$	$\frac{a\cos\beta}{2}$	$\frac{a\sin\beta}{2}$	$\frac{a}{2\cos\beta}$

37.3. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро — 5см. Знайти бічну поверхню піраміди.

А	Б	В	Г	Д
30 см²	12 см²	36 см²	72 см²	45 см²

37.4. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 6 см. Знайти об'єм піраміди з основою BDD_1 і вершиною C.

А	Б	В	Г	Д
36 см^3	48 см^3	$24\sqrt{2}$ см^3	$36\sqrt{2}$ см^3	$108\sqrt{2}$ см^3

37.5. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, апофема піраміди — 10 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу перерізу піраміди, проведеного через середину висоти паралельно до площини основи.

А	Б	В	Г	Д
24 см^2	72 см^2	48 см^2	9 см^2	36 см^2

37.6. Висота та бічне ребро правильної чотирикутної піраміди відповідно дорівнюють 3 см і 5см. Знайти об'єм піраміди.

А	Б	В	Г	Д
48 см^3	128 см^3	64 см^3	96 см^3	32 см^3

37.7. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см. Знайти висоту піраміди, якщо бічні грані нахилені до площини основи під кутом 45°.

А	Б	В	Г	Д
1 см	4 см	2 см	$2\sqrt{2}$ см	$4\sqrt{2}$ см

37.8. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см. Знайти висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра рівні та дорівнюють 13 см.

А	Б	В	Г	Д
12 см	9 см	10 см	11 см	8 см

37.9. Основа піраміди — квадрат зі стороною a. Висота піраміди дорівнює H і проходить через одну з вершин основи. Визначити площу бічної поверхні піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$2aH$	$4aH$	$2a(H+\sqrt{a^2+H^2})$	$a(H+\sqrt{a^2+H^2})$	$a(H+\sqrt{a^2-H^2})$

37.10. Висота піраміди поділена на 4 рівні частини і через точки поділу проведено перерізи, паралельні до основи. Знайти площу найбільшого перерізу, якщо площа основи дорівнює 800 см^2.

А	Б	В	Г	Д
600 см^2	400 см^2	450 см^2	350 см^2	150 см^2

37.11. Знайти висоту правильної чотирикутної зрізаної піраміди, у якої сторони основ дорівнюють a і b ($a > b$), а кут нахилу бічного ребра до більшої основи дорівнює α.

А	Б	В	Г	Д
$(a-b)\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{a-b}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{a-b}{\sqrt{2}}\sin\alpha$	$\frac{a-b}{\sqrt{2}}\cos\alpha$	$(a-b)\sin\alpha$

37.12. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторони основи a і b ($a > b$), двогранний кут при більшій основі — β. Знайти висоту піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\beta$	$(a-b)\operatorname{tg}\beta$	$(a-b)\sin\beta$	$\frac{a-b}{2}\sin\beta$	$(a-b)\cos\beta$

37.13. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Визначити об'єм тетраедра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$	$\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

37.14. У правильній трикутній піраміді бічне ребро нахилено до площини основи під кутом 60°. Під яким кутом нахилена до площини основи бічна грань?

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{arctg}\sqrt{3}$	$\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)$	$\arcsin\sqrt{3}$	$\arcsin(2\sqrt{3})$	$\arccos\sqrt{3}$

37.15. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює 45°. Під яким кутом нахилено до площини основи бічне ребро?

А	Б	В	Г	Д
45°	$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$	$\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$

37.16. Площа основи правильної трикутної піраміди дорівнює S, а площа бічної поверхні — Q. Визначити двогранний кут при основі.

А	Б	В	Г	Д
$\arcsin\frac{S}{Q}$	$\arccos\frac{S}{Q}$	$\arccos\frac{S}{Q}$	$\arccos\frac{Q}{S}$	$\arcsin\frac{S}{Q}$

37.17. Повна поверхня правильної чотирикутної піраміди дорівнює S. Двогранний кут при ребрі основи — 60°. Визначити бічну поверхню піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{9}S$	$\frac{1}{2}S$	$\frac{5}{6}S$	$\frac{3}{4}S$	$\frac{2}{3}S$

37.18. Діагональним перерізом правильної чотирикутної піраміди є прямокутний трикутник, площа якого дорівнює Q. Знайти площу основи піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$2Q$	$4Q$	Q	$\frac{Q}{2}$	$\frac{Q}{4}$

37.19. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а площа перерізу піраміди площиною, яка проходить через бічне ребро і перпендикулярна до основи, дорівнює Q. Знайти об'єм піраміди.

А	Б	В	Г	Д
Qa	$2Q\cdot\frac{a}{3}$	$3Qa$	$Q\cdot\frac{a}{4}$	$4Qa$

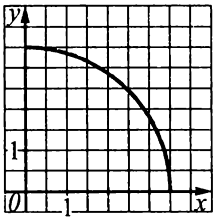
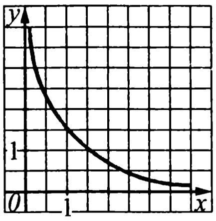
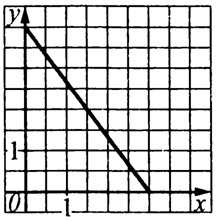
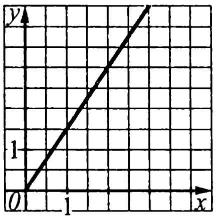
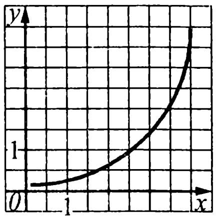
37.20. Усередині призми з об'ємом V взято довільну точку O й побудовано дві піраміди з вершиною O, що мають основами основи призми. Знайти суму об'ємів цих пірамід.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{9}V$	$\frac{1}{4}V$	$\frac{2}{3}V$	$\frac{1}{6}V$	$\frac{1}{3}V$

37.21. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні й дорівнюють a, b і c. Визначити об'єм піраміди.

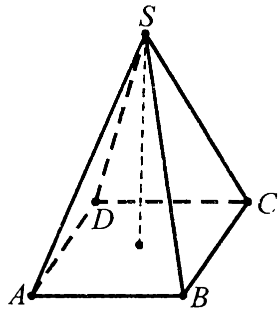
А	Б	В	Г	Д
$6abc$	abc	$\frac{1}{12}abc$	$\frac{1}{6}abc$	$\frac{1}{3}abc$

37.22. $S(x)$ — площа перерізу правильної чотирикутної піраміди, проведеного паралельно до основи на відстані x від неї. Який з наведених графіків може бути графіком функції $S(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 37.23–37.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

37.23. На рисунку зображено правильну піраміду $SABCD$, висота якої дорівнює діагоналі основи. Установити відповідність між кутами (1–4) та їхніми градусними мірами (А–Д).



1 Кут нахилу бічного ребра до площини основи
2 Кут нахилу апофеми до площини основи
3 Кут між прямими SA і DC
4 $\angle ASC$

А $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$

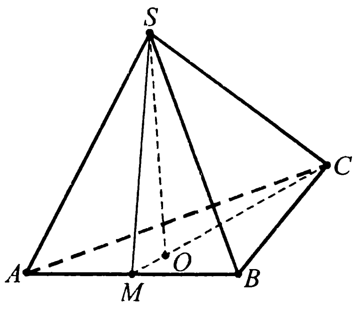
Б $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{10}$

В $\operatorname{arctg}2$

Г $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$

Д $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

37.24. На рисунку зображено правильну трикутну піраміду $SABC$, у якої: SO — висота; SM — апофема; сторона основи дорівнює a; бічна грань нахилена до площини основи під кутом α. Установити відповідність між елементами піраміди (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



1 SM

2 SB

3 SO

4 OC

А $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

Б $\frac{\sqrt{3}a}{6\cos\alpha}$

В $\frac{a}{2\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$

Г $\frac{\sqrt{3}}{2}a\sin\alpha$

Д $\frac{\sqrt{3}}{6}a\,\mathrm{tg}\,\alpha$

37.25. Установити відповідність між пірамідами (1–4) та ортогональними проекціями їх вершин на площину основи (А–Д).

1 Усі бічні грані піраміди рівнонахилені до площини основи

2 Усі бічні ребра піраміди рівнонахилені до площини основи

3 Дві сусідні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи

4 Піраміда, в основі якої рівносторонній трикутник. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші рівнонахилені до неї

А Вершина многокутника основи

Б Середина сторони основи

В Точка перетину діагоналей основи

Г Центр кола, вписаного в многокутник основи

Д Центр кола, описаного навколо многокутника основи

37.26. Установити відповідність між довжиною ребра (1–4) тетраедра та його об'ємом (А–Д).

1 6 см

2 12 см

3 18 см

4 24 см

А $144\sqrt{2}$ см^3

Б $1152\sqrt{2}$ см^3

В $18\sqrt{2}$ см^3

Г $26\sqrt{2}$ см^3

Д $486\sqrt{2}$ см^3

37.27. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює S і є прямокутним трикутником. Установити відповідність між площею перерізу (1–4) та площею бічної поверхні (А–Д) піраміди.

1 4 см^2

2 8 см^2

3 $2\sqrt{3}$ см^2

4 5 см^2

А $16\sqrt{3}$ см^2

Б 12 см^2

В $10\sqrt{3}$ см^2

Г $14\sqrt{3}$ см^2

Д $8\sqrt{3}$ см^2

Розв'яжіть завдання 37.28–37.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

37.28. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з висотою 9 см й основою 6 см. Кожне з бічних ребер піраміди дорівнює 13 см. Знайти у сантиметрах висоту піраміди.

37.29. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут 30°. Відрізок, що сполучає основу висоти з серединою бічного ребра, дорівнює $\sqrt{3}$. Знайти об'єм піраміди.

37.30. Площа основи піраміди дорівнює 72 см^2. Площі двох перерізів, які паралельні до основи, дорівнюють 18 см^2 і 50 см^2. Знайти у сантиметрах висоту піраміди, якщо відстань між перерізами дорівнює 8 см.

37.31. Сторони основи правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 2 см і 5 см, бічне ребро — 2 см. Знайти у сантиметрах висоту піраміди.

37.32. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 1 і нахилена до площини основи під кутом 60°. Визначити повну поверхню піраміди.

37.33. У правильній піраміді площа основи становить $\frac{1}{3}$ площі повної поверхні. Знайти у градусах двогранний кут при основі піраміди.

37.34. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 2, одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють із площиною основи кут 45°. Визначити об'єм піраміди.

37.35. У правильній чотирикутній піраміді відстань від центра основи до бічної грані дорівнює 3. Бічні грані нахилені до основи під кутом 60°. Визначити об'єм піраміди.

37.36. Основою піраміди є ромб зі стороною $\sqrt{3}$ і кутом 30°. Бічні грані, що проходять через сторони гострого кута ромба, перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом 60°. Знайти об'єм піраміди.

37.37. Бічні ребра правильної трикутної піраміди взаємно перпендикулярні й дорівнюють $7\sqrt{2}$. Знайти відстань між мимобіжними ребрами піраміди.

37.38. У правильній чотирикутній піраміді $PABCD$ з вершиною P проведено переріз через сторону AB і середину бічного ребра PC. У якому відношенні цей переріз поділяє об'єм піраміди?

37.39. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною $\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$. Одна з бічних граней є рівностороннім трикутником і перпендикулярна до площини основи. Визначити бічну поверхню піраміди.

37.40. У трикутній піраміді всі чотири грані — рівні рівнобедрені трикутники з основою $\sqrt{14}$ й бічною стороною 4. Визначити об'єм піраміди.

37.41. Основою піраміди є прямокутник, площа якого дорівнює 9. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутами 30° і 60°. Визначити об'єм піраміди.