Тема 24. Похідна функції, її геометричний і механічний зміст

Границя функції

Розглянемо функцію $f(x) = x - 1$ і точку $x_0 = 1$. Якщо значення аргументу x прямують до числа 1 (позначають $x \to 1$), то відповідні їм значення функції $f(x)$ прямують до числа 0 (позначають $f(x) \to 0$). По-іншому: якщо значення аргументу усе ближче знаходяться до числа 1, то відповідні їх значення функції $f(x)$ усе менше відрізняються від числа 0. У цьому випадку кажуть, що число 0 є границею функції $f(x)$ у точці 1, і відповідно записують $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$. Для границь функції справедливими є всі твердження для границь послідовностей.

Наприклад: $\lim\limits_{x\to 3} 8 = 8$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2\right) = 3\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 3\cdot 2^2 = 12$; $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2 - 3x + 2\right) = \lim\limits_{x\to 3} x^2 - 3\lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 2 =$ $= 3^2 - 3\cdot 3 + 2 = 2$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)} = \dfrac{2+2}{2-1} = 4$.

Неперервність функції

Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною* у точці x_0, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і при $x \to x_0$ границя функції дорівнює значенню функції у цій точці, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в кожній точці деякої множини $M \subset R$, то кажуть, що вона неперервна на всій множині M. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $D(f)$, то таку функцію називають неперервною.

Справедливою є *теорема*: Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є й функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)\cdot g(x)$ і $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (якщо $g(x) \neq 0$).

Похідна функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 — фіксована точка з області визначення функції f. Якщо x — довільна точка області визначення функції $y = f(x)$ така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають *приростом аргументу функції* $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають Δx (читають «*дельта ікс*»). Отже, $\Delta x = x - x_0$, звідки $x = x_0 + \Delta x$. Кажуть, що *аргумент одержав приріст* Δx *у точці* x_0. Якщо аргумент одержав приріст Δx у точці x_0, то значення функції змінилося на величину $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Цю величину називають *приростом функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 і позначають Δf.

Наприклад, знайти приріст функції $y = x^3$ у точці x_0, який відповідає приросту аргументу Δx. Одержимо: $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції $\Delta f(x)$ до приросту аргументу Δx, якщо приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідну функції позначають y' або $f'(x)$. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну, то функцію називають *диференційованою*. Відшукання похідної функції f називають *диференціюванням*.

Наприклад, користуючись означенням, знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$. Маємо: $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Таблиця похідних елементарних функцій

1. $(C)' = 0$, C — константа.
2. $(x)' = 1$.
3. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
5. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
7. $\left(e^x\right)' = e^x$.
8. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
11. $(\sin x)' = \cos x$.
12. $(\cos x)' = -\sin x$.
13. $(\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
14. $(\text{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Правила диференціювання

Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ диференційовані, C — деяка константа, то диференційованими будуть також функції $y = Cf(x)$, $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, до того ж справедливими є рівності:

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Наприклад: а) $\left(3x^4\right)' = 3 \cdot \left(x^4\right)' = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3$; б) $\left(2x + \sqrt{x}\right)' = (2x)' + \left(\sqrt{x}\right)' = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot x^2 = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$;

г) $\left(\frac{3x+1}{4x^2-3}\right)' = \frac{(3x+1)'\left(4x^2-3\right) - \left(4x^2-3\right)'(3x+1)}{\left(4x^2-3\right)^2} = \frac{3\left(4x^2-3\right) - 8x(3x+1)}{\left(4x^2-3\right)^2} = \frac{12x^2 - 9 - 24x^2 - 8x}{\left(4x^2-3\right)^2} =$

$= \frac{-12x^2 - 8x - 9}{\left(4x^2-3\right)^2}$.

Похідна складеної функції

Якщо значенням аргументу функції f є значення функції g, то кажуть, що задано складену функцію $y = f(g(x))$. Наприклад, нехай задано функції $f(t) = 3t + 1$, $t(x) = \cos x$, тоді $f(t) = f(t(x)) = 3t(x) + 1 = 3 \cdot \cos x + 1$. Отже, можна сказати, що $y = 3\cos x + 1$ задає складену функцію $y = f(g(x))$.

Похідну складеної функції обчислюють за формулою

$$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x).$$

Наприклад, знайти похідну функції $\left((2x+1)^4\right)' = 4(2x+1)^3\cdot(2x+1)' = 4(2x+1)^3\cdot 2 = 8(2x+1)^3$.

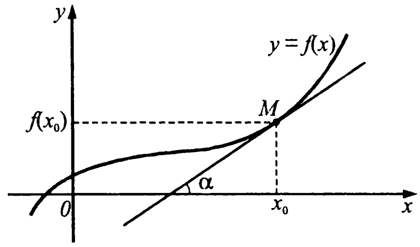
Фізичний зміст похідної

Похідна функції $y=f(x)$ у точці x_0 виражає швидкість зміни функції або процесу, який ця функція описує, у цій точці. Так, якщо функція $S=S(t)$ описує рух матеріальної точки, тобто залежність пройденої відстані s від часу t, то її похідна задає залежність швидкості v матеріальної точки від часу t: $S'(t)=v(t)$; похідна швидкості $v=v(t)$ за часом є прискоренням: $v'(t)=a(t)$.

Геометричний зміст похідної

Значення похідної функції $y=f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в цій точці:

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$$



Рівняння дотичної до графіка функції

Нехай функція $y=f(x)$ диференційована в точці x_0. Тоді до графіка функції у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну (див. рис.). Рівняння невертикальної прямої має вигляд $y=kx+b$. Виходячи з геометричного змісту похідної, одержимо: $k=f'(x_0)$. Тоді $y=f'(x_0)\cdot x+b$. Ця пряма проходить через точку $M(x_0;f(x_0))$, тому $f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b$, звідки $b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$. Тоді рівняння дотичної має вигляд: $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$.

Наприклад, скласти рівняння дотичної до графіка функції $y=x^2+3x-4$ у точці з абсцисою $x_0=2$. Маємо: $f(x_0)=f(2)=2^2+3\cdot 2-4=6$; $f'(x)=2x+3$; $f'(x_0)=f'(2)=2\cdot 2+3=7$. Підставивши знайдені числові значення у рівняння дотичної, одержимо: $y=7(x-2)+6$; $y=7x-8$.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	–1	3	–3

■

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{x-2-1}=\lim_{x\to3}\left(\sqrt{x-2}+1\right)=\sqrt{3-2}+1=2.$$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Яка з послідовностей не має границі?

А	Б	В	Г	Д
$x_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$x_n=0{,}99^n$	$x_n=\frac{2n-1}{2n}$	$x_n=\left(\sqrt{3}\right)^n$	усі послідовності мають границі

■ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}3^n}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}99)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\frac{100}{99}}\right)^n=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1\frac{1}{99}\right)^n}=0$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1{,}73...)^n$ — члени послідовності можуть стати як завгодно великими. Отже, послідовність границі немає.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 3. Знайти похідну функції $f(x)=\mathrm{tg}\frac{x}{4}$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\frac{1}{4}\mathrm{tg}\,x$	-1	$\frac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}}$

■ $f'(x)=\left(\mathrm{tg}\frac{x}{4}\right)'=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)'=\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}}$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 4. Знайти похідні: **а)** $\left(5x^3+8x-11\right)'$; **б)** $\left(x^2\cos x\right)'$; **в)** $\left(\sin\left(3x^2\right)\right)'$; **г)** $\left(\sqrt{6x^4+1}\right)'$.

■ **а)** $\left(5x^3+8x-11\right)'=\left(5x^3\right)'+\left(8x\right)'-11'=5\left(x^3\right)'+8\left(x\right)'-0=15x^2+8$;

б) $\left(x^2\cos x\right)'=\left(x^2\right)'\cos x+\left(\cos x\right)'x^2=2x\cos x+(-\sin x)x^2=2x\cos x-x^2\sin x$;

в) $\left(\sin\left(3x^2\right)\right)'=\cos\left(3x^2\right)\cdot\left(3x^2\right)'=\cos\left(3x^2\right)\cdot 6x=6x\cos\left(3x^2\right)$.

г) $\left(\sqrt{6x^4+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{6x^4+1}}\cdot\left(6x^4+1\right)'=\frac{1}{2\sqrt{6x^4+1}}\cdot 24x^3=\frac{12x^3}{\sqrt{6x^4+1}}$. ■

Приклад 5. Знайти $f'(3)$, якщо $f(x)=(2x+1)^3$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
300	294	280	264	147

■ $f'(x)=\left((2x+1)^3\right)'=3(2x+1)^2\cdot(2x+1)'=3(2x+1)^2\cdot 2=6(2x+1)^2$. Якщо $x=3$, то: $f'(3)=6(2\cdot 3+)^2=$
$=6\cdot 7^2=6\cdot 49=294$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Знайти $f'(0{,}75)$, якщо $f(x)=5e^{4x-3}-8$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$20e$	20	10	7	5

■ $f'(x)=(5e^{4x-3}-8)'=5(e^{4x-3})'=5\cdot e^{4x-3}\cdot(4x-3)'=5\cdot e^{4x-3}\cdot 4=20e^{4x-3}$. Якщо $x=0{,}75$, то $f'(0{,}75)=20e^{4\cdot 0{,}75-3}=20e^0=20$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 7. Знайти $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x)=4\cos\frac{5x}{2}-7x+3$.

А	Б	В	Г	Д
–2	–3	3	4	2

■ $f'(x)=\left(4\cos\frac{5x}{2}-7x+3\right)'=-4\sin\frac{5x}{2}\cdot\left(\frac{5x}{2}\right)'-7=-4\sin\frac{5x}{2}\cdot\frac{5}{2}-7=-10\sin\frac{5x}{2}-7.$

$f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-10\sin\left(\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)-7=10\sin\frac{5\pi}{6}-7=10\cdot\frac{1}{2}-7=-2.$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 8. Вказати функцію, для якої рівняння $3x-y-2=0$ є рівнянням дотичної до її графіка в точці $A(1;\ 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$y=x^3$	$y=\sin x$	$y=\frac{2}{x-1}$	$y=x^2$	$y=(x-1)^2$

■ Функції $y=\sin x$, $y=\frac{2}{x-1}$, $y=(x-1)^2$ не проходять через точку $A(1;\ 1)$, тому вони не можуть мати дотичної у цій точці. Для функції $y=x^3$ маємо: $y'=3x^2$; $y'(1)=3$. За формулою дотичної $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ отримаємо: $y-1=3(x-1)$; $3x-y-2=0$ — рівняння дотичної. Для функції $y=x^2$: $y'=2x$; $y'(1)=2$. Кутовий коефіцієнт дотичної $k=2$ не збігається з кутовим коефіцієнтом прямої $y=3x-2$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 9. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, яку проведено до графіка функції $y=5x^2-3x+2$ в точці з абсцисою $x_0=2$.

А	Б	В	Г	Д
16	інша відповідь	0,3	0	19

■ Скористаємося властивістю, що $k=y'(x_0)$. Отримуємо: $y'=(5x^2-3x+2)'=10x-3$. $k=y'(2)=10\cdot2-3=17$.

Серед числових значень запропонованих відповідей відповіді 17 немає, тому правильною є відповідь, позначена літерою **Б** — «Інша відповідь».

Приклад 10. Обчислити тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x)=x-\frac{1}{3x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=\frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
19	4	$1\frac{2}{9}$	–17	0,5

■ $f'(x)=\left(x-\frac{1}{3x^2}\right)'=\left(x-\frac{1}{3}x^{-2}\right)'=1+\frac{2}{3}x^{-3}=1+\frac{2}{3x^3}$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha=f'\left(\frac{1}{3}\right)=1+\frac{2}{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3}=1+\frac{2\cdot27}{3\cdot1}=1+18=19.$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 11. Обчислити ординату точки графіка функції $y = 2x^2 - 3x + 1$, у якій дотична до цього графіка паралельна до прямої $y = 3x + 7$.

А	Б	В	Г	Д
–1	1,5	1	3	10

■ Оскільки дотична до графіка функції паралельна до прямої $y = 3x + 7$, то кутові коефіцієнти дотичної $y = k_1x + b_1$ і функції $y = 3x + 7$ рівні, тобто $k_1 = 3$. Отже, $f'(x_0) = k_1 = 3$. Знайдемо $f'(x) = (2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3$; $f'(x_0) = 4x_0 - 3$; $4x_0 - 3 = 3$; $x_0 = 1{,}5$. Знайдемо y_0 — ординату точки графіка функції $y = 2x^2 - 3x + 1$: $y_0 = 2 \cdot (1{,}5)^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 1 = 4{,}5 - 4{,}5 + 1 = 1$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 12. Знайти, у який момент часу прискорення рухомої точки дорівнюватиме 2 см/с^2, якщо точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 3t^2 + 9\ln t + 7$, де $x(t)$ — шлях у сантиметрах, t — час у секундах.

А	Б	В	Г	Д
1 с	1,5 с	2 с	2,5 с	5 с

■ Знайдемо похідну функції $x(t)$: $x'(t) = (3t^2 + 9\ln t + 7)' = 6t + 9 \cdot \frac{1}{t} = 6t + \frac{9}{t}$. Отже, $v(t) = 6t + \frac{9}{t}$.

Знайдемо прискорення $a(t) = v'(t) = \left(6t + \frac{9}{t}\right)' = 6 - \frac{9}{t^2}$. За умовою, $a(t) = 2$ см/с^2. Маємо рівняння:

$6 - \frac{9}{t^2} = 2$; $4t^2 = 9$; $t^2 = \frac{9}{4}$. Врахувавши, що $t > 0$, маємо: $t = 1{,}5$ (с).

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 13. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^2 + t + 4$, де S — відстань у метрах, t — час у секундах. Знайти: 1) початкову швидкість тіла; 2) швидкість тіла через 3 с після початку руху; 3) прискорення тіла.

■ $v(t) = S'(t) = \left(t^2 + t + 4\right)' = 2t + 1$.

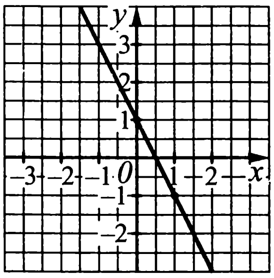
1) Початкова швидкість — це швидкість, якщо $t = 0$ с. Тому $v_0 = v(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ (м/с).

2) $v(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ (м/с).

3) $a(t) = v'(t) = (2t + 1)' = 2$. Отже, прискорення, з яким рухається тіло, дорівнює 2 м/с^2. ■

Приклад 14. Вказати функцію, дотичну до графіка якої у точці $x = 1$ зображено на рисунку.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3x - 4$	$y = x^2 - 2$	$y = x^3 - 2x$	$y = x^2 - 2x$	$y = -x^2$



■ Графік дотичної $y = kx + b$ проходить через точки (0; 1) і (1; –1). Знайдемо значення k та b: $\begin{cases} 1 = k \cdot 0 + b; \\ -1 = k \cdot 1 + b; \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1; \\ k = -2. \end{cases}$ Рівняння дотичної має вигляд: $y = -2x + 1$. З іншого боку, $k = f'(t)$, тобто $f'(1) = -2$. Знайдемо $f'(1)$ для кожної із запропонованих функцій:

А $y' = (3x - 4)' = 3; y'(1) = 3$

Б $y' = (x^2 - 2)' = 2x; y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

В $y' = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2; y'(1) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$

Г $y' = (x^2 - 2x)' = 2x - 2; y'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

Д $y' = (-x^2)' = -2x; y'(1) = -2 \cdot 1 = -2$

Отже, $f'(1) = -2$ відповідає функція $y = -x^2$. $y(1) = -1^2 = -1$. Рівняння дотичної до функції $y = -x^2$ має вигляд: $y + 1 = -2(x - 1); y = -2x + 1$.

Відповідь. Д. ■

Завдання 24.1–24.27 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

24.1. $(x^6 + 3x^2 - x + 3)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^7}{7} + x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$	$6x^5 + 6x$	$6x^5 + 6x - 1$	$6x^5 + 6x - 3$	$\frac{x^7}{7} + x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + 1$

24.2. $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{3x^2} + 2\sqrt{x}$	$\frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2}$

24.3. $\left(\frac{1}{8}\cos x - 3\operatorname{tg} x\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-8\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{8}\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{8}\sin x - \frac{3}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{8}\sin x - 3\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{8}\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$

24.4. Знайти похідну функції $y = 5\sin 7x - 7x^2 + 7$.

А	Б	В	Г	Д
$5\cos 7x - 14x$	$35\cos 7x - 7x$	$35\cos 7x - 14x$	$7\cos 7x - 7x + 7$	$5\cos 7x - 7x$

24.5. Знайти похідну функції $y = \ln(2x) + 2x^3 - 3$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{x} + 6x^2 - 3x$	$\frac{1}{2x} + 6x^2 - 3$	$\frac{1}{2x} + 6x^2$	$\frac{1}{x} + 6x^2$	$\frac{2}{x} + 6x^2$

24.6. $\left(x^5 \cdot 7^x\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$5x^4 \cdot 7^x + x^5 \cdot 7^x \lg 7$	$5x^4 \cdot 7^x \ln 7$	$5x^4 \cdot 7^x \lg 7$	$5x^4 \cdot 7^x + x^5 7^x \cdot \ln 7$	$5x^4 + 7^x \ln 7$

24.7. $\left(\frac{\ln x}{x^4}\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\frac{1}{x}x^4 - 4x^3\ln x}{x^8}$	$\frac{\frac{1}{x}}{4x^3}$	$\frac{\ln x}{4x^3}$	$\frac{\frac{1}{x}x^4 - 4x^3\ln x}{x^4}$	$\frac{\frac{1}{x}x^4 - 4x^3\ln x}{4x^3}$

24.8. $\left(e^{3x+5}\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}e^{3x+5}$	$3e^x$	$(3x+5)e^{3x+5}$	$3e^{3x+5}$	e^{3x+5}

24.9. Знайти похідну функції $y = \cos 3x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{18}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

24.10. Знайти кут, який утворює з додатним напрямом осі x дотична до графіка функції $y = \frac{1}{4}x^4$ у точці $x_0 = -1$.

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	120°	135°	150°

24.11. Рівняння дотичної до кривої $y = 2x^2 - 4x - 1$ має вигляд: $y = 8x - 19$. Визначити абсцису точки дотику.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	–4	8

24.12. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці (2; 8).

А	Б	В	Г	Д
$y + 8 = 12(x + 2)$	$y - 8 = \frac{1}{12}(x - 2)$	$y - 8 = x - 2$	$y - 8 = 8(x - 2)$	$y - 8 = 12(x - 2)$

24.13. На кривій $f(x) = x^2 - x + 1$ Знайти точку, в якій дотична до кривої паралельна до прямої $3x - y - 1 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
(2; 3)	(0; 3)	(0; 1)	2	3

24.14. Знайти усі значення параметра a, за яких числа x_1, $\sqrt{a^2 + 3}$, x_2 утворюють геометричну прогресію, якщо x_1 та x_2 — абсциси точок графіка функції $f(x) = x^3 + 7x^2 + (2 - 9a)x$, у яких дотичні до графіка нахилені до осі абсцис під кутом 135°.

А	Б	В	Г	Д
–1	1	0	0; 1	–1; 0

24.15. Знайти миттєву швидкість точки, яка рухається за законом $s(t)=\frac{1}{3}t^3+4t+1$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах) через 3 с після початку руху.

А	Б	В	Г	Д
12 м/с	13 м/с	14 м/с	15 м/с	16 м/с

24.16. Тіло рухається за законом $s(t)=t^2-4\sqrt{t}$. Знайти швидкість тіла в момент $t_0=4$.

А	Б	В	Г	Д
5	4,75	12	7	7,875

24.17. Обчислити $f'(x)$, якщо $f(x)=\sin 5+e^3$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 5+3e^2$	$\sin 5+e^3$	$\cos 5$	0	$3e^2$

24.18. Обчислити $f'(x)$, якщо $f(x)=\ln\cos x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$-2x\operatorname{tg}x^2$	$-\operatorname{tg}x^2$	$\frac{2x}{\cos x^2}$	$-2\operatorname{tg}x^2$	$2x\operatorname{tg}x^2$

24.19. Обчислити $f'(x)$, якщо $f(x)=\sin^2(2x+0,5)$.

А	Б	В	Г	Д
$2(2x+0,5)\cos^2x\times$ $\times(2x+0,5)$	$2\cos(4x+1)$	$-2\cos(4x+1)$	$2\sin(4x+1)$	$-2\sin(4x+1)$

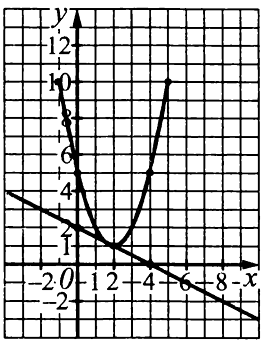
24.20. Обчислити значення похідної функції $y=(3x+1)^3\cdot\cos^3(x^2+2x+1)+\pi^3$ у точці $x_0=-1$.

А	Б	В	Г	Д
36	12	–12	0	$36+\pi^3$

24.21. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t)=2,5t^2-15t$, s — шлях у метрах, t — час у секундах. Через який час від початку руху ця точка зупинилася?

А	Б	В	Г	Д
1 с	2 с	3 с	3,5 с	4 с

24.22. На рисунку зображено графік функції і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0. Знайти значення $f'(x_0)$.



А	Б	В	Г	Д
5	–2	2	0,5	–0,5

24.23. Дано функцію $y = |3x + 2|$. У якій точці функція не має похідної?

А	Б	В	Г	Д
2	–2	$-\dfrac{2}{3}$	$-\dfrac{3}{2}$	похідна існує в будь-якій точці $x_0 \in R$

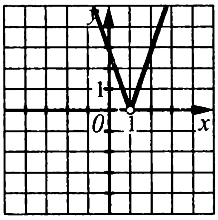
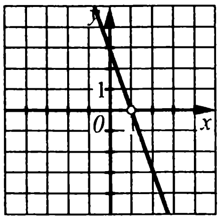
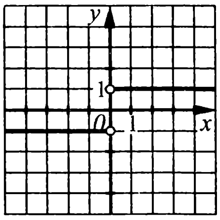
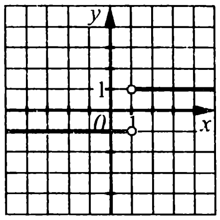
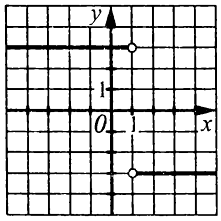
24.24. Обчислити похідну функції $y = |2x - 5|$ на проміжку $(-\infty; 0]$.

А	Б	В	Г	Д
2,5	5	–5	2	–2

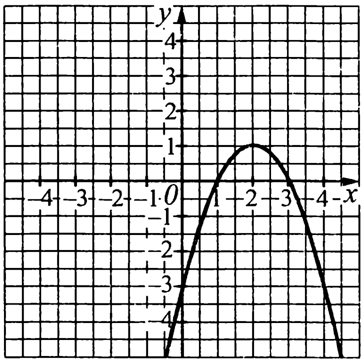
24.25. $f(x) = x(x - 1)(x - 2)...(x - 19)(x - 20)$. Знайти $f'(0)$.

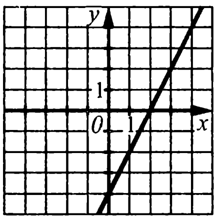
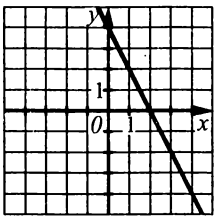
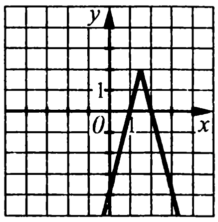
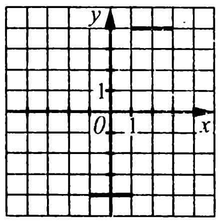
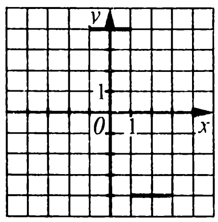
А	Б	В	Г	Д
–20!	20!	0	1	20

24.26. На якому з рисунків побудовано графік похідної функції $y = |1 - x|$?

А	Б	В	Г	Д
				

24.27. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Серед наведених графіків вказати графік функції $y = f'(x)$.



А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 24.28–24.38 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

24.28. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1 $f(x)=\sin(2x+3)$
2 $f(x)=2\cos(x+3)$
3 $f(x)=\sin^2(x+3)$
4 $f(x)=\operatorname{tg}2x$

А $f'(x)=-2\sin(x+3)$
Б $f'(x)=\sin 2(x+3)$
В $f'(x)=2\sin(2x+3)$
Г $f'(x)=2\cos(2x+3)$
Д $f'(x)=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$

24.29. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1 $f(x)=2\sin^2(3x-4)+\cos x$
2 $f(x)=2\sin(3x-4)\cdot\cos x$
3 $f(x)=\dfrac{2\sin(3x-4)}{\cos x}$
4 $f(x)=\operatorname{tg}(3x-4)\cdot\cos x$

А $f'(x)=\dfrac{3\cos x-0,5\sin(6x-8)\cdot\sin x}{\cos^2(3x-4)}$
Б $f'(x)=6\sin(6x-8)-\sin x$
В $f'(x)=\dfrac{6\cos(3x-4)\cdot\cos x+2\sin(3x-4)\cdot\sin x}{\cos^2 x}$
Г $f'(x)=-2\cos(3x-4)\cdot\sin x$
Д $f'(x)=6\cos(3x-4)\cdot\cos x-2\sin(3x-4)\cdot\sin x$

24.30. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1 $y=\dfrac{x}{3}+5$
2 $y=5-\dfrac{x}{3}$
3 $y=3+5x$
4 $y=5-3x$

А $y'=-3$
Б $y'=5$
В $y'=-\dfrac{1}{3}$
Г $y'=-5$
Д $y'=\dfrac{1}{3}$

24.31. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1 $y=\sin5+e^5$
2 $y=\sin5x+e^5$
3 $y=\sin5+e^{5x}$
4 $y=\sin5x+e^{5x}$

А $y'=5(\cos5x+e^{5x})$
Б $y'=\cos5x$
В $y'=5e^{5x}$
Г $y'=5\cos5x$
Д $y'=0$

24.32. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1 $y=4x^4-\dfrac{2}{x^2}$
2 $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{1}{2x^2}$
3 $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2}{x^2}$
4 $y=4x^4-\dfrac{1}{2x^2}$

А $y'=x^3+\dfrac{1}{x^3}$
Б $y'=x^3-\dfrac{4}{x^3}$
В $y'=16x^3+\dfrac{4}{x^3}$
Г $y'=16x^3+\dfrac{1}{x^3}$
Д $y'=x^3+\dfrac{4}{x^3}$

24.33. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх похідними (А–Д).

1 $y = \cos x \cos 7x - \sin x \sin 7x$
2 $y = \cos x \cos 7x + \sin x \sin 7x$
3 $y = \sin 7x \cos x - \sin x \cos 7x$
4 $y = \sin 7x \cos x + \sin x \cos 7x$

А $y' = 8\cos 8x$
Б $y' = 6\cos 6x$
В $y' = 8\sin 8x$
Г $y' = -8\sin 8x$
Д $y' = -6\sin 6x$

24.34. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх похідними (А–Д).

1 $y = x\sin 3$
2 $y = 3\sin x$
3 $y = \sin x^3$
4 $y = \sin^3 x$

А $y' = 3\sin^2 x \cos x$
Б $y' = \cos 3$
В $y' = 3x^2 \cos x^3$
Г $y' = \sin 3$
Д $y' = 3\cos x$

24.35. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх похідними в точці π (А–Д).

1 $y = \sin\frac{x}{3}$
2 $y = \sin 3x$
3 $y = \frac{\sin x}{3}$
4 $y = \frac{\cos x}{3}$

А -3
Б $-\frac{1}{3}$
В 0
Г $\frac{1}{6}$
Д 1

24.36. Установити відповідність між залежностями відстані S від часу t руху матеріальних тіл (1–4) та їх швидкостями в момент часу $t = 1$ (А–Д).

1 $S(t) = 8\frac{1}{3}t^3 + 5t$
2 $S(t) = 4t + 1$
3 $S(t) = \frac{t^2}{3} + 5t$
4 $S(t) = 2t^2 + t$

А 4
Б 5
В $5\frac{1}{3}$
Г $5\frac{2}{3}$
Д 30

24.37. Установити відповідність між залежностями відстані S від часу t руху матеріальних тіл (1–4) та часом від початку руху до зупинки тіла (А–Д).

1 $S(t) = \frac{t^3}{3} - t$
2 $S(t) = \frac{t^4}{4} - t^3 + 2$
3 $S(t) = \frac{t^5}{5} - t^3 + 4$
4 $S(t) = t^2 - t$

А $\frac{1}{2}$
Б 1
В $\sqrt{3}$
Г 3
Д 4

24.38. Установити відповідність між функціями (1–4) та тангенсами кутів, які утворюють дотичні, проведені до графіків функцій у точці з абсцисою $x = 0$ з додатним напрямком осі x (А–Д).

1 $y = e^{2x}$	**А** 0
2 $y = 2\sin 4x$	**Б** 1
3 $y = 8\cos x$	**В** 2
4 $y = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	**Г** 4
	Д 8

Розв'яжіть завдання 24.39–24.51. Відповідь запишіть десятковим дробом.

24.39. Обчислити значення похідної функції $y = \sqrt{\operatorname{tg} 6x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{24}$.

24.40. Обчислити значення похідної функції $y = (2x^2 - 1)\ln^2 x$ у точці $x_0 = 1$.

24.41. Знати похідну функції $y = \sqrt[4]{1 + \cos^3 x}$ у точці $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

24.42. Знати похідну функції $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ у точці $x_0 = 1$.

24.43. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = 5x^2 - 2x$, яка утворює з додатним напрямом осі x кут 135°. У відповідь записати абсцису точки дотику.

24.44. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{5x+1}$, яка паралельна до прямої $y = 5x - 8$. У відповідь записати абсцису точки дотику.

24.45. За яких від'ємних значень a пряма $y = ax - 5$ дотикається до кривої $y = 3x^2 - 4x - 2$?

24.46. Пряма $y = -\frac{3}{4}x + C$ є дотичною до лінії, заданої рівнянням $y = 0{,}5x^4 - x$. Знайти абсцису точки дотику.

24.47. Знайти тангенс додатного кута, під якими парабола $y = x^2 + 2x - 8$ перетинає вісь абсцис.

24.48. Обчислити площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$. У відповідь записати наближене значення площі з точністю до 0,01.

24.49. Знати похідну функції $y = \sqrt{6 + 6\cos^2 x^2}$ у точці $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. У відповідь записати $\frac{f'(x_0)}{\sqrt{\pi}}$.

24.50. Скласти рівняння прямої, не паралельної до осі абсцис, яка проходить через точку $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ і дотикається до графіка функції $y = 2 - \frac{x^2}{2}$. У відповідь записати абсцису точки дотику.

24.51. За якого значення параметра a пряма $y = \frac{x}{2}$ дотикається до кривої $y = \sqrt{x} - a$?

Тема 25. Застосування похідної для дослідження функцій

Якщо для всіх x з проміжку $(a;\ b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то на цьому проміжку функція *зростає*. Якщо ж для всіх x з проміжку $(a;\ b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то на цьому проміжку функція *спадає*. Проміжки зростання та спадання функції називають *проміжками монотонності*.

Щоб *дослідити функцію $f(x)$ на монотонність*, слід:

1) знайти її похідну $f'(x)$;

2) знайти критичні точки функції ($f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує);

3) визначити знак похідної функції на кожному з проміжків, на які критичні точки розбивають область визначення функції;

4) визначити проміжки зростання та спадання функції (якщо $f'(x) > 0$, то на проміжку функція зростає, якщо ж $f'(x) < 0$ — спадає).

Наприклад, з'ясувати, чи зростає функція $f(x) = 4\sqrt{x} + 6x$ на проміжку $(0;\ +\infty)$. Знайдемо похідну функції: $f'(x) = \left(4\sqrt{x} + 6x\right)' = \frac{2}{\sqrt{x}} + 6$. Оскільки ОДЗ — $x \in (0;\ +\infty)$ і $\frac{2}{\sqrt{x}} + 6 > 0$, то функція $f(x)$ зростає на проміжку $(0;\ +\infty)$.

Максимуми й мінімуми функції

Кажуть, що функція $y = f(x)$ має в точці x_0 *максимум* (*мінімум*), якщо існує такий δ-окіл точки x_0 $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, що для всіх x з цього околу, відмінних від x_0, виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Точки максимуму й мінімуму називають *точками екстремуму*. Значення функції в точках максимуму й мінімуму називають *екстремумами* (максимами й мінімумами) функції.

Точки області визначення, у яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називають *критичними*.

Достатня умова екстремуму. Якщо похідна функції $y = f(x)$ перетворюється в нуль у точці x_0 і при переході через цю точку у напрямку зростання x змінює знак з «+» («–») на «–» («+»), то в точці x_0 функція має максимум (мінімум). Якщо ж при переході через точку x_0 похідна функції не змінює знака, то в цій точці функція $y = f(x)$ екстремуму не має (має перегин).

Наприклад, задано функцію $y = x^2$. Тоді $y' = (x^2)' = 2x$. У точці $x = 0$ дана функція має мінімум, оскільки $f'(0) = 0$ і похідна змінює знак з «–» на «+».

Щоб *дослідити функцію на екстремум*, потрібно:

1) знайти критичні точки функції;

2) перевірити, чи змінює знак похідна функції при переході через критичну точку;

3) обчислити значення максимуму y_{max} або мінімуму y_{min}.

Наприклад, знайти точки екстремуму функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18$. Обчислимо похідну функції: $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 18)' = 3x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки функції: $f'(x) = 0$; $3x^2 - 6x = 0$; $x(3x - 6) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Дослідимо знак похідної в околах критичних точок.

Оскільки при переході через точку $x = 0$ похідна змінює знак з «+» на «–», то ця точка є точкою максимуму; при переході через точку $x = 2$ похідна змінює знак з «–» на «+», тому ця точка є точкою мінімуму.

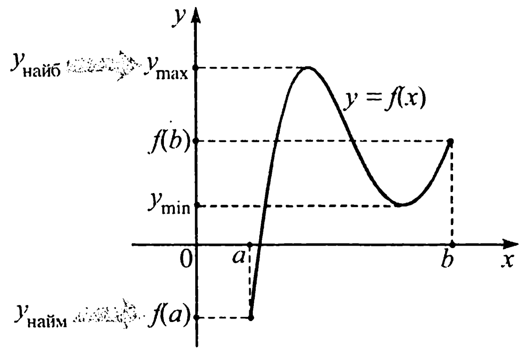
Відповідь. $x_{max} = 0$; $x_{min} = 2$.

Щоб *знайти найбільше та найменше значення* неперервної на відрізку $[a;\ b]$ функції, потрібно:

1) знайти всі критичні точки функції на інтервалі $(a;\ b)$;

2) обчислити значення функції у кожній критичній точці та на кінцях відрізка;

3) вибрати найбільше та найменше з отриманих чисел (див. рис.).



При дослідженні функцій поряд з першою похідною використовують другу похідну, за допомогою якої досліджують характер опуклості (вгнутості) функцій.

Якщо для всіх $x \in (a; b)$ виконується нерівність $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), то графік функції $f(x)$ є *вгнутим* (*опуклим*) на даному проміжку.

Асимптоти

Пряму $x = a$ називають *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Наприклад, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = \frac{1}{x}$, оскільки $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = \infty$.

Пряму $y = b$ називають *горизонтальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$. Наприклад, пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, оскільки $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$.

Дослідження функції

Повне дослідження функції на побудову на її основі графіка функції можна виконувати за такою схемою:

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.
3. Знайти проміжки зростання, спадання та екстремуми функції.
4. Знайти асимптоти графіка функції.
5. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат та проміжки знакосталості функції.
6. Використовуючи результати дослідження й обчисливши ряд контрольних точок, будуємо графік функції.

Наприклад, побудувати графік функції $y = \frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6}$.

1. Область визначення функції $D(f) = R$.

2. Функція ні парна, ні непарна, бо $y(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 + 1,5(-x)^2 + 2(-x) - 3\frac{5}{6} =$ $= -\frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2 - 2x - 3\frac{5}{6} \neq -y(x) \neq y(-x)$. Функція неперіодична.

3. $y' = \left(\frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6}\right)' = x^2 + 3x + 2$. $x^2 + 3x + 2 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = -1$. На проміжках $(-\infty; -2)$ і $(-1; +\infty)$ функція зростає, бо $y' > 0$; а на проміжку $(-2; -1)$ функція спадає, бо $y' < 0$. Оскільки в точці

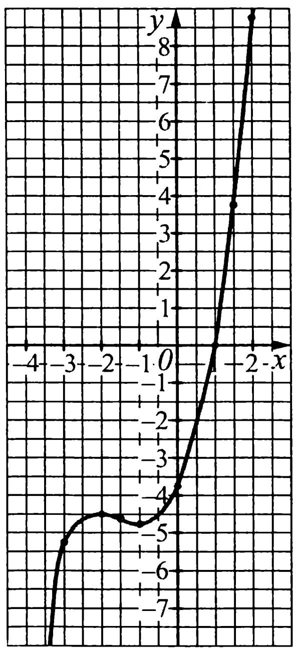
$x = -2$ похідна змінює знак з «+» на «–», тому точка $x = -2$ — точка максимуму, $y_{\max} = -4\frac{1}{2}$; в точці $x = -1$ похідна змінює знак з «–» на «+», то точка $x = -1$ — точка мінімуму, $y_{\min} = -4\frac{2}{3}$.

4. $y'' = (x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3$. Тоді на проміжку $(-1,5; +\infty)$ $y'' > 0$, тому графік на цьому проміжку вгнутий, а на проміжку $(-\infty; -1,5)$ $y'' < 0$, тому графік на цьому проміжку опуклий. Точка $\left(-\frac{3}{2}; -4\frac{7}{12}\right)$ є точкою перегину.

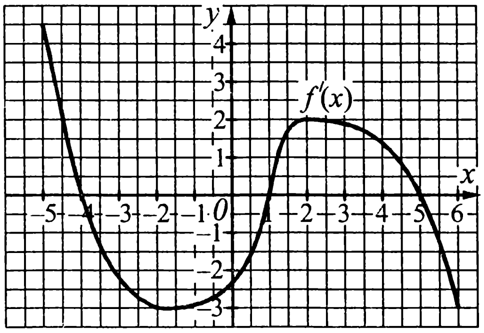
5. Асимптот функція не має.

6. Графік перетинає вісь y в точці $\left(0; -3\frac{5}{6}\right)$, бо $f(0) = \frac{1}{3}\cdot 0^3 + 1,5\cdot 0^2 + 2\cdot 0 - 3\frac{5}{6} = -3\frac{5}{6}$. Підбором встановлюємо, що $x = 1$ — корінь рівняння $\frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6} = 0$. Тоді $\frac{1}{3}x^3 + 1,5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6} =$ $= (x-1)\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{23}{6}\right)$, звідки одержуємо, що це єдиний корінь. Отже, графік перетинає вісь x у точці (1; 0). На проміжку $(-\infty; 1)$ функція $f(x) < 0$, а на проміжку $(1; +\infty)$ — $f(x) > 0$.

7. Будуємо графік функції.



Приклад 1. На рисунку зображено графік похідної функції $f(x)$, яка диференційована на R. Указати проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.



■ З графіка маємо, що $f'(x) > 0$ на проміжках $(-\infty; -4)$ та $(1; 5)$. Отже, функція $f(x)$ зростає на кожному з цих проміжків. Оскільки на проміжках $(-4; 1)$ та $(5; +\infty)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то на цих проміжках функція $f(x)$ спадає.

Відповідь. Зростає на проміжках $(-\infty; -4)$ та $(1; 5)$ і спадає на проміжках $(-4; 1)$ та $(5; +\infty)$. ■

Приклад 2. Яка з указаних функцій є зростаючою на всій області визначення?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 0{,}4^x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$	$f(x) = 3$	зростаючої функції немає

■ $f(x) = 0{,}4^x$, $0 < 0{,}4 < 1$, функція спадна; $f(x) = x^2$, функція спадна, якщо $x \le 0$; $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$, $\sqrt{3} > 1$, функція зростаюча; $f(x) = 3$ — ні зростаюча, ні спадна.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 3. Дослідити на монотонність та екстремум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5$.

■ $y' = \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5\right)' = x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до нуля: $y' = 0$; $x^2 - 6x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 6$. Критичні точки — 0 та 6 — розбивають область визначення на три проміжки: $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$, $(6; +\infty)$. Визначимо, який знак має похідна функції на кожному з проміжків. Для цього виберемо довільне число з проміжку $(-\infty; 0)$, наприклад, -10, і обчислимо відповідне значення похідної функції: $y'(-10) = (-10)^2 - 6 \cdot (-10) = 160 > 0$. Тобто на проміжку $(-\infty; 0)$ похідна функції набуває лише додатних значень. Виконавши аналогічні обчислення, визначимо знак похідної на інших проміжках. Результати обчислень подамо таблицею:

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 6)$	$(6; +\infty)$
y'	+	–	+

Оскільки на проміжках $(-\infty; 0)$ та $(6; +\infty)$ похідна набуває додатних значень, то функція на цих проміжках зростає. На проміжку $(0; 6)$ похідна від'ємна, тому функція на ньому спадає.

Оскільки при переході через точку 0 похідна функції змінює знак з «+» на «–», то $x = 0$ — точка максимуму. Максимум функції дорівнює: $y_{\max} = y(0) = 5$. При переході через точку 6 похідна функції змінює знак з «–» на «+». Тому $x = 6$ — точка мінімуму. Мінімум функції дорівнює: $y_{\min} = y(6) = -31$. ■

Приклад 4. Знайти проміжки зростання (спадання) функції $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$.

■ Знайдемо область визначення функції: $x^2-x-2\ge 0$; $x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$. Похідна функції $f(x)$ дорівнює: $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$. Функція $f(x)$ зростає, якщо $f'(x)>0$, тому $\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}>0$, тобто $\begin{cases}2x-1>0;\\x^2-x-2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0{,}5;\\\left[\begin{array}{l}x<-1;\\x>2,\end{array}\right.\end{cases}$ $x>2$. Отже, функція зростає на проміжку $(2;+\infty)$.

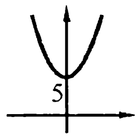
Аналогічно, функція спадає, якщо $f'(x)<0$, тому $\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}<0$, тобто $\begin{cases}2x-1<0;\\x^2-x-2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<0{,}5;\\\left[\begin{array}{l}x<-1;\\x>2,\end{array}\right.\end{cases}$ $x<-1$. Отже, функція спадає на проміжку $(-\infty;-1)$.

Слід зазначити, що в точках $x=-1$ і $x=2$ функція $f(x)$ неперервна, але не диференційована. ■

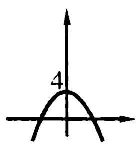
Приклад 5. Яка з указаних функцій має максимум у точці $x_0=0$?

А	Б	В	Г	Д
$y=7x^2+5$	$y=2x^3-7$	$y=-3x^2+4$	$y=\dfrac{2x}{x+2}$	$y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

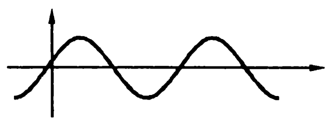
■ **а)** Функція $y=7x^2+5$ — не має максимуму взагалі (рис. а); **б)** $y=2x^3-7$ — не має максимуму взагалі; **в)** $y=-3x^2+4$ — має максимум у точці $x_0=0$, бо $y'=-6x$; $y'=0$; $-6x=0$; $x=0$ (рис. в); **г)** $y=\dfrac{2x}{x+2}$ — не має максимуму взагалі; **д)** $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ — не має екстремуму в точці $x_0=0$ (рис. д).



а)



в)



д)

Відповідь. **В**. ■

Приклад 6. Знайти найбільше значення функції $f(x)=\dfrac{x^2+8}{x-1}$ на відрізку $[-3;0]$.

■ $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+8}{x-1}\right)'=\dfrac{(x^2+8)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot(x^2+8)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x\cdot(x-1)-1\cdot(x^2+8)}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-2x-x^2-8}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$. $f'(x)=0$; $\dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}=0$; $x^2-2x-8=0$; $x_1=-2$; $x_2=4$. Порівняємо значення $f(-3), f(-2), f(0)$. $f(-3)=\dfrac{(-3)^2+8}{-3-1}=\dfrac{17}{-4}=-4\dfrac{1}{4}$; $f(-2)=\dfrac{(-2)^2+8}{-2-1}=\dfrac{12}{-3}=-4$; $f(0)=\dfrac{0^2+8}{0-1}=\dfrac{8}{-1}=-8$.

Найбільше значення $f(-2)=-4$. ■

Приклад 7. Побудувати графік функції $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

1. Область визначення функції $D(f)=R$.

2. Функція непарна, бо $y(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+1}=\dfrac{-2x^3}{x^2+1}=-\dfrac{2x^3}{x^2+1}=-y(x)$, неперіодична. Звідси маємо, що дослідження функції достатньо провести для $x\ge 0$.

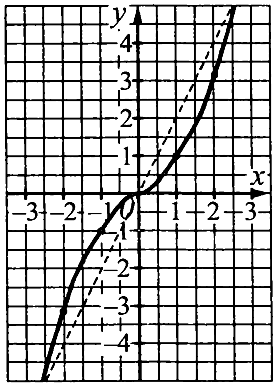
3. $y' = \dfrac{6x^2\left(x^2+1\right)-2x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{6x^4+6x^2-4x^4}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2x^4+6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$. Якщо $x > 0$, то $y' > 0$. Отже, на проміжку $(0; +\infty)$ функція зростає.

4. Графік проходить через початок координат, бо $y(0) = 0$.

5. Знайдемо кілька точок, які належать графіку:

x	–2	–1	0	1	2
y	–3,2	–1	0	1	3,2

6. Будуємо графік функції на проміжку $[0; +\infty)$. Використавши симетрію відносно початку координат, будуємо графік на проміжку $(-\infty; 0)$.



Завдання 25.1–25.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

25.1. Визначити проміжок зростання функції $y = x^2 - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; 0]$

25.2. Знайти проміжки зростання функції $y = f(x)$, якщо $f'(x) = (x-1)(x-5)$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5]\cup[1; +\infty)$	$[-5; -1]$	$[1; -5]$	$(-\infty; 1]\cup[5; +\infty)$	$(-\infty; -5]$

25.3. Знайти проміжки спадання функції $y = \varphi(x)$, якщо $\varphi'(x) = (x+2)(x-1)^2(x-3)$.

А	Б	В	Г	Д
$[-3; 2]$	$(-\infty; -3]$ і $[-1; 2]$	$(-\infty; -2]$ і $[1; 3]$	$(-\infty; -2]$ і $[3; +\infty)$	$[-2; 3]$

25.4. Знайти проміжки зростання функції $y = x^2e^x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; -2]$ і $[0; +\infty)$	$[-2; 0]$	$(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty)$	$[0; 2]$

25.5. Знайти проміжки спадання функції $y = \sin^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi+\pi n\right]$, $n \in Z$	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n\right]$, $n \in Z$	$[\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n]$, $n \in Z$	$\left[\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, $n \in Z$	$(-\infty; +\infty)$

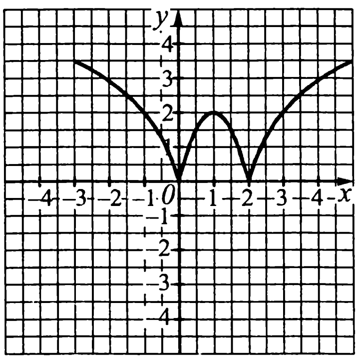
25.6. Серед наведених функцій вибрати ту, яка є зростаючою на множині дійсних чисел.

А	Б	В	Г	Д
$y = -x^7$	$y = \cos^2 x$	$y = \ln(x^2 + 1)$	$y = e^{x^3} z$	$y = e^{\lvert x \rvert}$

25.7. Серед наведених функцій вибрати ту, в якої проміжком спадання є проміжок $[0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x^2+1}$	$y = xe^x$	$y = \ln(x^3 + 1)$	$y = e^{x^5}$	$y = e^{x^2}$

25.8. Скільки критичних точок має функція $y = f(x)$, зображена на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
Одну	дві	три	чотири	більше, ніж чотири

25.9. Знайти критичні точки функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

А	Б	В	Г	Д
0	-3 і -1	-3 і 1	1 і 3	-1 і 3

25.10. Вказати критичні точки функції $y = x(x - 4)^3$.

А	Б	В	Г	Д
0; 4	4	1; 4	3	1

25.11. Знайти критичну точку функції $y = 2x^2 - 4x$.

А	Б	В	Г	Д
-1	1	4	0	2

25.5. Знайти проміжки спадання функції $y = \sin^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi+\pi n\right]$, $n \in Z$	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n\right]$, $n \in Z$	$[\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n]$, $n \in Z$	$\left[\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, $n \in Z$	$(-\infty; +\infty)$

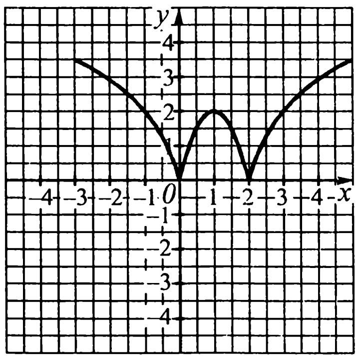
25.6. Серед наведених функцій вибрати ту, яка є зростаючою на множині дійсних чисел.

А	Б	В	Г	Д
$y = -x^7$	$y = \cos^2 x$	$y = \ln(x^2 + 1)$	$y = e^{x^3} z$	$y = e^{\lvert x \rvert}$

25.7. Серед наведених функцій вибрати ту, в якої проміжком спадання є проміжок $[0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x^2+1}$	$y = xe^x$	$y = \ln(x^3 + 1)$	$y = e^{x^5}$	$y = e^{x^2}$

25.8. Скільки критичних точок має функція $y = f(x)$, зображена на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
Одну	дві	три	чотири	більше, ніж чотири

25.9. Знайти критичні точки функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

А	Б	В	Г	Д
0	–3 і –1	–3 і 1	1 і 3	–1 і 3

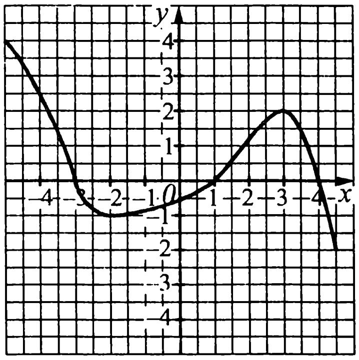
25.10. Вказати критичні точки функції $y = x(x - 4)^3$.

А	Б	В	Г	Д
0; 4	4	1; 4	3	1

25.11. Знайти критичну точку функції $y = 2x^2 - 4x$.

А	Б	В	Г	Д
–1	1	4	0	2

25.17. Вказати проміжки зростання функції $y = \varphi(x)$ на відрізку $[-5; 5]$, якщо на рисунку зображено графік функції $y = \varphi'(x)$.

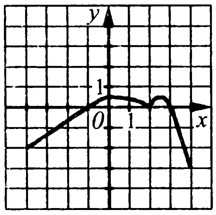
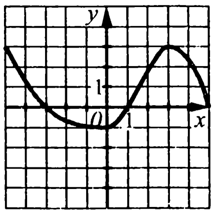
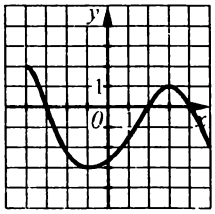
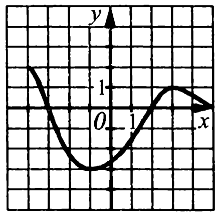
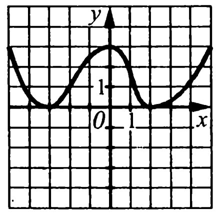


А	Б	В	Г	Д
$[-2; 3]$	$[-1; 2]$	$[-2; 1]$ і $[4; 5]$	$[1; 3]$	$[-5; -3]$ і $[1; 4]$

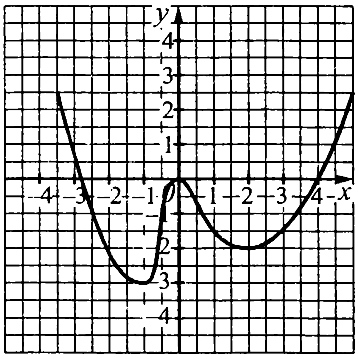
25.18. Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел; -3 і 2 — нулі функції. Зміну знаків похідної функції подано в таблиці.

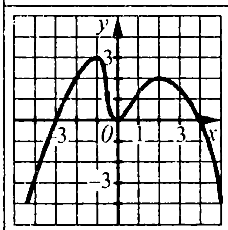
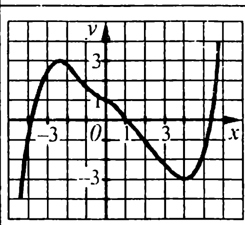
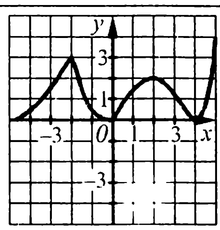
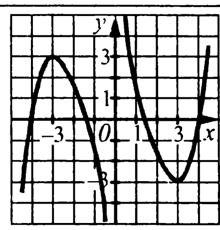
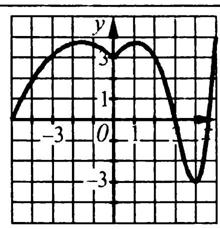
$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(-1) = 0$	$f'(x) > 0$	$f'(3) = 0$	$f'(x) < 0$

Який з наведених графіків може бути графіком функції $y = f(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

25.19. На рисунку зображено графік функції $y = f'(x)$. Який з наведених графіків може бути графіком функції $y = f(x)$?



А	Б	В	Г	Д
				

25.20. Знайти точку, в якій функція $y = x\ln x$ набуває найменшого значення.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2

25.21. Знайти точку максимуму функції $y = \frac{\ln x}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	1	e	e^2

25.22. За яких значень a функція $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + ax$ має критичні точки, але не має точок екстремумів?

А	Б	В	Г	Д
–1	–1 і 1	1	–4 і 4	4

25.23. За яких значень a точка 5 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо $f'(x) = (x - 5)(x - a)$?

А	Б	В	Г	Д
$a \geq 5$	$a = 5$	$a > 5$	$a \leq 5$	$a < 5$

25.24. За яких значень a точка 3 є точкою максимуму функції $y = \frac{x^3}{3} - \frac{a+3}{2}x^2 + 3ax$?

А	Б	В	Г	Д
$a = 3$	$a \geq 3$	$a \leq 3$	$a < 3$	$a > 3$

Завдання 25.25–25.35 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

25.25. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми властивостями (А–Д).

1 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

2 $y = 2^{|x|} + 2$

3 $y = 2^x + 2$

4 $y = -3x^2 + 7x - 14$

А зростаюча на всій області визначення

Б спадна на всій області визначення

В має максимальне значення

Г має найменше значення

Д періодична

25.26. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–4) та проміжками спадання відповідних їм функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = (x + 1)(x - 5)$

2 $f'(x) = (x + 1)(5 - x)$

3 $f'(x) = (x + 1)^2(x - 5)$

4 $f'(x) = (x + 1)(x - 5)^2$

А $(-\infty; -1]$

Б $(-\infty; 5]$

В $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$

Г $[-5; 1]$

Д $[-1; 5]$

25.27. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–4) та проміжками зростання відповідних їм функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = (x + 3)(x - 4)$
2 $f'(x) = (x + 3)(4 - x)$
3 $f'(x) = (x + 3)^2(x - 4)$
4 $f'(x) = (x + 3)(x - 4)^2$

А $[4; +\infty)$
Б $[-3; +\infty)$
В $(-\infty; -3]\cup[4; +\infty)$
Г $[-3; 4]$
Д $[-4; 3]$

25.28. Установити відповідність між функціями (1–4) та проміжками спадання цих функцій (А–Д).

1 $y = -3x^5 - 4x$
2 $y = x^4 - 2x^2$
3 $y = e^{x^2-2x+3}$
4 $y = e^x - x$

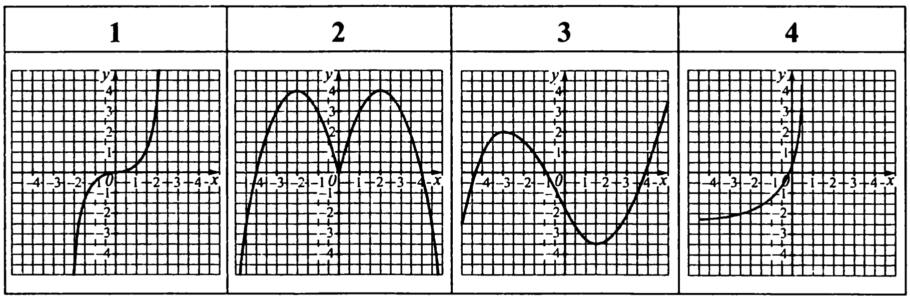
А $(-\infty; 1]$
Б $(-\infty; 0]$
В $(-\infty; -1]\cup[0; 1]$
Г $[0; +\infty)$
Д $(-\infty; +\infty)$

25.29. Установити відповідність між функціями (1–4) та проміжками зростання цих функцій (А–Д).

1 $y = 3x - x^2$
2 $y = \sqrt{1 - x^2}$
3 $y = x - \ln x$
4 $y = e^x + x - 1$

А $(-\infty; +\infty)$
Б $[-1; 0]$
В $(-\infty; 0]\cup[1; +\infty)$
Г $[1; +\infty)$
Д $(-\infty; 1{,}5]$

25.30. Установити відповідність між ескізами графіків функцій (1–4) та кількістю критичних точок цих функцій (А–Д).



А	Б	В	Г	Д
Жодної	одна	дві	три	чотири

25.31. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх критичними точками (А–Д).

1 $y = x^5 - 5x$
2 $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$
3 $y = e^{x^2+2x}$
4 $y = \sqrt{1 - x^2}$

А 1
Б –1
В 0
Г 0; 2
Д –1; 1

25.32. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–4) та точками максимуму функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = x(x+2)(x-4)$
2 $f'(x) = x^2(x+2)(x-4)$
3 $f'(x) = x(x+2)(4-x)$
4 $f'(x) = x^2(x+2)(4-x)$

А –2
Б 4
В –2; 4
Г –4
Д 0

25.33. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–4) та точками мінімуму функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = (x+3)(x-1)(x-5)$
2 $f'(x) = (x+3)(x-1)^2(x-5)$
3 $f'(x) = (x+3)(x-1)(5-x)$
4 $f'(x) = (x+3)(x-1)^2(5-x)$

А 5
Б 1
В –3
Г –1
Д –3; 5

25.34. Установити відповідність між функціями (1–4) та точками максимуму цих функцій (А–Д).

1 $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$
2 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$
3 $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$
4 $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$

А 0
Б 1
В –1
Г –1; 0
Д –1; 1

25.35. Установити відповідність між функціями (1–4) та точками мінімуму цих функцій (А–Д).

1 $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$
2 $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$
3 $y = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$
4 $y = -\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3}$

А 0
Б 2
В –2; 2
Г –2; 0
Д –2

Розв'яжіть завдання 25.36–25.45. Відповідь запишіть десятковим дробом.

25.36. Знайти проміжки спадання функції $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5$. У відповідь записати додатну абсцису середини одного з проміжків спадання.

25.37. Знайти проміжки спадання функції $y = \frac{3x + x^2}{x-1}$. У відповідь записати додатну абсцису середини одного з проміжків спадання.

25.38. Знайти найбільше значення функції $y = -2x^3 + 6x^2 + 9$ на відрізку [0; 3].

25.39. Число 64 подати у вигляді добутку двох додатних множників так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою. У відповідь записати найменшу суму квадратів знайдених множників.

25.40. Прямокутну ділянку землі, яка прилягає до стіни будинку, потрібно обгородити парканом завдовжки 160 метрів. Знайти довжину прямокутника в метрах, за якої площа ділянки буде найбільшою.

25.41. Визначити висоту в метрах відкритого басейну із квадратним дном, об'єм якого дорівнює 32 м^3, такого, щоб на облицювання його стін і дна витрати на матеріал, були найменшими.

25.42. За якого найменшого цілого значення a функція $y = x^3 + 3x^2 + ax - 1$ не має критичних точок?

25.43. За якого від'ємного значення b один із екстремумів функції $y = 2x^3 - 3x^2 + b$ дорівнює -1?

25.44. За якого найбільшого значення a функція $y = xe^x$ є спадною на проміжку $[a - 5; a + 3]$?

25.45. Знайти, за яких значень параметра a сума кубів коренів рівняння $6x^2 + 6(a - 1)x - 5a + 2a^2 = 0$ буде найбільшою.