Тема 3. Цілі вирази

Степінь числа а з натуральним показником n (n > 1)

Степенем числа a з натуральним показником n ($n > 1$) називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}.$$

Наприклад: $2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ множників}} = 32$; $(-3)^4 = \underbrace{-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}_{4 \text{ множники}} = 81$; $(-5)^3 = \underbrace{-5 \cdot (-5) \cdot (-5)}_{3 \text{ множники}} = -125$.

Вважають, що $a^1 = a$. Наприклад, $7^1 = 7$; $(-8)^1 = -8$.
Легко помітити, що $0^n = 0$; $1^n = 1$.

Будь-який степінь додатного числа є додатним числом. Наприклад, $2^{10} = 1024 > 0$; $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} > 0$.

Парний степінь від'ємного числа є додатним числом. Наприклад, $(-8)^2 = 64 > 0$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} > 0$.

Непарний степінь від'ємного числа є від'ємним числом. Наприклад, $(-5)^3 = -125 < 0$; $(-0{,}1)^5 = -0{,}00001 < 0$.

Степінь з цілим показником

Якщо $a \neq 0$ і n — натуральне число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Наприклад, $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$; $(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = -\frac{1}{216}$; $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$. Очевидно, що $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Вважають, що $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$. Наприклад, $3^0 = 1$; $(-2)^0 = 1$.

Основні властивості степенів:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Наприклад, $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$;

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Наприклад, $\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4 = 81$;

3. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$. Наприклад, $\left(4^2\right)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096$;

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Наприклад, $20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$;

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Наприклад, $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$.

Одночленами називають числа, змінні, їхні степені з натуральними показниками та добутки. Наприклад, 5; x; $\frac{2}{5}a^7$; $5m^2n \cdot (-3)m^4$. Одночлен, який містить єдиний числовий множник, записаний першим (*коефіцієнт*), та степені різних змінних, називають *одночленом стандартного вигляду*. Наприклад, щоб подати одночлен $5m^2n \cdot (-3)m^4$ у стандартному вигляді, слід помножити 5 і -3 та m^2 і m^4: $5m^2n \cdot (-3)m^4 = -15m^6n$. Коефіцієнт цього одночлена — число -15.

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, які входять до нього. Якщо одночлен містить лише число, то його степінь дорівнює нулю. Наприклад, $-15m^6n$ — одночлен сьомого степеня, $10x$ — одночлен першого степеня, 78 — одночлен нульового степеня.

Многочленом називають суму кількох одночленів. Доданки многочлена, які відрізняються лише коефіцієнтом, називають *подібними членами* (доданками) многочлена. Наприклад, у тричлені $3x^2 - 9x^5 \cdot 2y^2z - x^2$ подібними доданками є $3x^2$ та $-x^2$.

Многочлен, який містить лише одночлени стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів, називають *многочленом стандартного вигляду*. Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких складається даний многочлен.

Формули скороченого множення

1. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Наприклад, $(a-3)(a+3)=a^2-3^2=a^2-9$;

2. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$. Наприклад, $(2a-5)^2=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 5+5^2=4a^2-20a+25$;

3. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$. Наприклад, $(5+2x)^3=5^3+3\cdot 5^2\cdot 2x+3\cdot 5\cdot (2x)^2+(2x)^3=$ $=125+150x+60x^2+8x^3$;

4. $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$. Наприклад, $(2-x)(4+2x+x^2)=2^3-x^3=8-x^3$;

5. $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{n-1}a_n$. Наприклад, $(m-x+3c)^2=m^2+x^2+9c^2-2mx+6mc-6xc$.

Розкладання многочлена на множники

1. Винесення спільного множника за дужки. Наприклад, $12a^5-30a^3b+6a^3=6a^3\cdot 2a^2+6a^3\cdot(-5b)+6a^3\cdot 1=$ $=6a^3\cdot(2a^2-5b+1)$.

2. Використання формул скороченого множення. Наприклад, $100x^2-y^8=(10x)^2-(y^4)^2=$ $=(10x-y^4)(10x+y^4)$.

3. Групування. Наприклад, $6x^2y^2+8y+3x^2y+4=(6x^2y^2+3x^2y)+(8y+4)=$ $=3x^2y\cdot(2y+1)+4\cdot(2y+1)=(2y+1)(3x^2y+4)$.

Дії над многочленами

Щоб додати (відняти) многочлени, досить розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+» або «–», та звести подібні доданки, якщо вони є. Якщо перед дужками стоїть знак «+», то при розкриванні дужок знаки всіх одночленів, які були в дужках, не змінюються; якщо знак «–» — то знаки змінюються на протилежні. Наприклад, $(3+5x)+(7x-4)=3+5x+7x-4=12x-1$; $(-4+3x)-(3-5x)=$ $=-4+3x-3+5x=8x-7$.

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на кожен член многочлена й отримані добутки додати. Наприклад, $3x\cdot(2x+5)=3x\cdot 2x+3x\cdot 5=6x^2+15x$.

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожен член одного многочлена помножити на кожен член іншого многочлена й отримані добутки додати. Наприклад, $(3+5x)(7x-4)=3\cdot 7x+$ $+3\cdot(-4)+5x\cdot 7x+5x\cdot(-4)=21x-12+35x^2-20x=35x^2+x-12$.

Щоб поділити многочлен на одночлен, досить кожен член многочлена розділити на цей одночлен і одержані результати додати. Наприклад, $(15x^4-9x^3+24x^2-6x):(3x)=5x^3-3x^2+8x-2$.

Ділення многочлена на многочлен

Якщо для двох многочленів $A(x)$ і $B(x)$ можна знайти такий многочлен $Q(x)$, що $A(x)=B(x)\cdot Q(x)$, то кажуть, що многочлен $A(x)$ *ділиться на многочлен* $B(x)$. Наприклад, оскільки $x^2-9=(x-3)(x+3)$, то многочлен $A(x)=x^2-9$ ділиться на многочлен $B(x)=x+3$, тоді $Q(x)=x-3$ — частка.

Ділення многочлена на многочлен за правилом кута.

Щоб поділити многочлен на многочлен за правилом кута, потрібно:

1. Упорядкувати члени многочленів за спаданням степенів змінної.
2. Поділити старший член діленого на старший член дільника.
3. Одержаний результат помножити на дільник й одержаний добуток відняти від діленого.
4. З одержаною різницею повторити кроки 1–3 доки не залишиться в остачі нуль або степінь остачі не стане меншим від степеня дільника.

Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2-18x-40 & x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & \overline{x^2+x-20} \\ x^2-18x & \\ -\,\underline{x^2+2x} & \\ -20x-40 & \\ -\,\underline{-20x-40} & \\ 0 & \end{array}$$

Многочлен від однієї змінної можна записати так: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$, де $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ — числа, до того ж $a_0 \neq 0$, x — змінна.

Число d називають коренем многочлена, якщо $P(d) = 0$. Наприклад, число 5 — корінь многочлена $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$, бо $P(5) = 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 - 5 = 125 - 100 - 20 - 5 = 0$.

Схема Горнера ділення многочленів

Виконання ділення многочленів можна виконувати за допомогою схеми Горнера. Нехай потрібно поділити многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ на двочлен $x - a$. Тоді ділення можна записати за допомогою таблиці:

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_2
a	a_0	$b_1 = a \cdot a_0 + a_1$	$b_2 = a \cdot b_1 + a_2$	...	$b_{n-1} = a \cdot b_{n-2} + a_{n-1}$	$b_n = a \cdot b_{n-1} + a_n$
	коефіцієнти многочлена (n – 1) степеня					остача

Наприклад, $(2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18) : (x - 1)$.

	2	–9	4	21	–18
1	2	–7	–3	18	0

Отже, можна записати: $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = (x - 1)(2x^3 - 7x^2 - 3x + 18)$.

Теорема Безу

Остача від ділення многочлена $P(x)$ на лінійний двочлен $x - d$ дорівнює значенню цього многочлена, якщо $x = d$, тобто $P(d)$.

Наприклад, остача від ділення многочлена $2x^3 - 3x^2 + 4x + 9$ на двочлен $x + 1$ ($x + 1 = x - (-1)$, остача дорівнює –1) дорівнює $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 9 = -2 - 3 - 4 + 9 = 0$, тобто $P(x)$ ділиться на $x + 1$ націло.

Розклад на множники квадратного тричлена і деяких многочленів

Вираз $ax^2 + bx + c$, де a, b і c — деякі числа ($a \neq 0$), x — змінна, називають *квадратним тричленом*. Його корені x_1 та x_2 можна обчислити за формулою $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, де $D = b^2 - 4ac$ — дискримінант.

Якщо x_1 та x_2 — корені квадратного тричлена, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Наприклад, тричлен $2x^2 + x - 3$ має два корені: –1,5 і 1, тоді $2x^2 + x - 3 = 2(x - 1)(x + 1{,}5)$.

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Наприклад: а) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$; б) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Якщо $n \in N$ і $n = 2k + 1$ — непарне число, то $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$. Наприклад, $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Степінь двочлена (біном Ньютона)

$(a + b)^n = a^n + \beta_1a^{n-1}b + \beta_2a^{n-2}b^2 + ... + \beta_{n-2}a^2b^{n-2} + \beta_{n-1}ab^{n-1} + b^n$. Коефіцієнти цього розкладу 1; β_1, β_2, ...; β_{n-2}; β_{n-1}; 1 можна взяти з таблиці, яку називають трикутником Паскаля.

степінь	*коефіцієнти розкладу*
$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
....	....

У таблиці в кожному рядку по краях розміщені 1, а кожне з решти чисел дорівнює сумі двох чисел, які містяться над ним ліворуч і праворуч. Наприклад, $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Приклад 1. Спростити вираз $(a^4)^{12} : a^8$.

А	Б	В	Г	Д
a^2	a^6	a^{40}	a^8	a

■ $(a^4)^{12} : a^8 = a^{4\cdot12} : a^8 = a^{48} : a^8 = a^{48-8} = a^{40}$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. Записати в порядку спадання числа 4^{30}; 3^{40}; 2^{50}.

А	Б	В	Г	Д
2^{50}; 4^{30}; 3^{40}	3^{40}; 4^{30}; 2^{50}	2^{50}; 3^{40}; 4^{30}	4^{30}; 3^{40}; 2^{50}	3^{40}; 2^{50}; 4^{30}

■ $4^{30} = 4^{3\cdot10} = (4^3)^{10} = 64^{10}$; $3^{40} = 3^{4\cdot10} = (3^4)^{10} = 81^{10}$; $2^{50} = 2^{5\cdot10} = (2^5)^{10} = 32^{10}$. Оскільки основи степенів більші за 1, то при однаковому показнику степеня більшим є те число, основа якого більша. Отже, числа слід впорядкувати так: 81^{10}; 64^{10}; 32^{10} або 3^{40}; 4^{30}; 2^{50}.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 3. Обчислити: $21^8 \cdot 14^{-7} \cdot 6^9 \cdot 3^{-16}$.

А	Б	В	Г	Д
$4\frac{2}{3}$	42	56	84	$9\frac{1}{3}$

■ $21^8 \cdot 14^{-7} \cdot 6^9 \cdot 3^{-16} = (3\cdot7)^8 \cdot (2\cdot7)^{-7} \cdot (3\cdot2)^9 \cdot 3^{-16} = 3^8 \cdot 7^8 \cdot 2^{-7} \cdot 7^{-7} \cdot 3^9 \cdot 2^9 \cdot 3^{-16} =$

$$= \frac{3^8\cdot7^8\cdot3^9\cdot2^9}{2^7\cdot7^7\cdot3^{16}} = \frac{3^{8+9}\cdot\cancel{7^8}\cdot\cancel{2^9}^{\,2}}{\cancel{2^7}\cdot\cancel{7^7}\cdot3^{16}} = \frac{3^{17}\cdot7\cdot2^2}{3^{16}} = 3\cdot7\cdot4 = 84.$$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 4. Подати многочлен $3x^2 - 9x^5\cdot2y^2z - x^2$ у стандартному вигляді й визначити його степінь.

■ $3x^2 - 9x^5\cdot2y^2z - x^2 = 3x^2 - x^2 - 18x^5y^2z = 2x^2 - 18x^5y^2z$. Даний многочлен є многочленом восьмого степеня. ■

Приклад 5. Виконати дії: $3ab^4\cdot\left(a^2b - 8a\right)$.

■ $3ab^4\cdot\left(a^2b-8a\right) = 3ab^4\cdot a^2b + 3ab^4\cdot(-8a) = 3a^3b^5 - 24a^2b^4$. ■

Приклад 6. Спростити вираз $(3b - 2a)(2a + 3b)(9b^2 + 4a^2)$.

А	Б	В	Г	Д
$81b^4 + 16a^4$	$81b^4 - 16a^4$	$-81b^4 + 16a^4$	$9b^4 - 2ab + a^4$	$9b^4 - 2ab - a^4$

■ $(3b-2a)(2a+3b)(9b^2+4a^2)=((3b)^2-(2a)^2)(9b^2+4a^2)=(9b^2-4a^2)(9b^2+4a^2)=(9b)^2+(4a)^2=$ $=81b^4-16a^4$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 7. Знайти суму лінійних множників, на які розкладається многочлен $x^4+5x^3-x^2-17x+12$.

А	Б	В	Г	Д
$4x-5$	$4x+7$	$4x+5$	$4x-3$	$4x+3$

■ Знайдемо корені многочлена $x^4+5x^3-x^2-17x+12$. $x^4+5x^3-x^2-17x+12=0$. Випишемо дільники вільного члена: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$.

Обчислимо, що $P(1)=1+5-1-17+12=0$. За схемою Горнера виконаємо ділення:

	1	5	–1	–17	12
1	1	6	5	–12	0

Отже, можна записати: $x^4+5x^3-x^2-17x+12=(x-1)(x^3+6x^2+5x-12)$.

Виконаємо аналогічні дії з многочленом $x^3+6x^2+5x-12$. Цілі дільники числа -12: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$.

Знайдемо, що $P(1)=1+6+5-12=0$. За схемою Горнера виконаємо ділення:

	1	6	5	–12
1	1	7	12	0

Отже, можна записати: $x^3+6x^2+5x-12=(x-1)(x^2+7x+12)$.

Розкладемо двочлен $x^2+7x+12$ на множники: $x^2+7x+12=0$; $D=7^2-4\cdot1\cdot12=1$; $x_1=\frac{-7+1}{2}=-3$; $x_2=\frac{-7-1}{2}=-4$. $x^2+7x+12=(x-(-3))(x-(-4))=(x+3)(x+4)$.

Тоді заданий многочлен можна записати у вигляді: $x^4+5x^3-x^2-17x+12=(x-1)^2(x+3)(x+4)$. Сума лінійних множників: $(x-1)+(x-1)+(x+3)+(x+4)=x-1+x-1+x+3+x+4=4x+5$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 8. Виконати дії: $\left(x^2-7\right)(3x-5)$.

■ $\left(x^2-7\right)(3x-5)=x^2\cdot3x+x^2\cdot(-5)+(-7)\cdot3x+(-7)\cdot(-5)=3x^3-5x^2-21x+35$. ■

Приклад 9. Розкласти на множники многочлен c^3+c^2-4c-4.

А	Б	В	Г	Д
$(c^2+1)(c-4)$	$(c^2+4)(c-1)$	$(c+1)(c-4)(c+4)$	$(c+1)(c-2)(c+2)$	$c(c^2+c-4)$

■ $c^3+c^2-4c-4=(c^3+c^2)-(4c+4)=c^2(c+1)-4(c+1)=(c+1)(c^2-4)=(c+1)(c-2)(c+2)$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 10. Вказати значення, якого може набувати вираз $a^2+10a+25$, якщо $a\in N$.

А	Б	В	Г	Д
1	49	16	25	48

■ $a^2+10a+25=a^2+2\cdot a\cdot5+5^2=(a+5)^2$. За натуральних значень a вираз $a+5$ теж є натуральним числом. Отже, $(a+5)^2$ — квадрат натурального числа. Із запропонованих чисел квадратом натурального числа, більшого за 5, є лише число 49.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 11. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $(2a-3)(3a+2)$ **А** $9+12a+4a^2$
2 $(2a-3)^2$ **Б** $6a^2-5a-6$
3 $(3-2a)(3+2a)$ **В** $4a^2-6a+9$
4 $(3+2a)^2$ **Г** $9-12a+4a^2$
Д $9-4a^2$

1. $(2a-3)(3a+2)=2a\cdot 3a+2a\cdot 2-3\cdot 3a-3\cdot 2=6a^2+4a-9a-6=6a^2-5a-6\rightarrow$ **Б**
2. $(2a-3)^2=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3+3^2=4a^2-12a+9=9-12a+4a^2\rightarrow$ **Г**
3. $(3-2a)(3+2a)=3^2-(2a)^2=9-4a^2\rightarrow$ **Д**
4. $(3+2a)^2=3^2+2\cdot 3\cdot 2a+(2a)^2=9+12a+4a^2\rightarrow$ **А**

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1		X			
2				X	
3					X
4	X				

■

Приклад 12. Знайти значення виразу $x+y$, якщо $|x-y|+|4-x|=0$.

А	Б	В	Г	Д
4	інша відповідь	0	6	8

■ Значення виразів $|x-y|$ і $|4-x|$ — невід'ємні. Сума двох невід'ємних виразів дорівнює нулю лише тоді, коли кожен з них дорівнює нулю. Знайдемо, за яких значень x та y це відбудеться.
$\begin{cases}|4-x|=0,\\|x-y|=0;\end{cases}$ $\begin{cases}4-x=0,\\x-y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=4.\end{cases}$ Якщо $x=4, y=4$, то $x+y=4+4=8$.

Відповідь. Д. ■

Завдання 3.1–3.23 мають по п'five варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

3.1. Обчислити: $9999\cdot 1001+1001$.

А	Б	В	Г	Д
1010000	10100	101001	101000	10010000

3.2. Обчислити: $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{2008}$.

А	Б	В	Г	Д
2008	–2008	0	1	–1

3.3. Обчислити: $\dfrac{9^5\cdot 4^3}{27^4\cdot 2^5}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{9}$	1	2	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{9}$

3.4. Обчислити: $\dfrac{4\cdot 3^{32}+9\cdot 3^{30}}{9^{16}}$.

А	Б	В	Г	Д
$4\cdot 3^{16}$	15	13	$4\cdot 3^{14}$	5

3.5. Знайти значення виразу $\dfrac{5^{3n+2} \cdot 2^{3n+1}}{1000^n}$.

А	Б	В	Г	Д
2	10^n	5	50	10^{n+2}

3.6. На скільки $\dfrac{4^{a+1} - 2^{2a-1}}{2^{2a}}$ менше від 9?

А	Б	В	Г	Д
3,5	3	4,5	5,5	7

3.7. Подати у вигляді многочлена вираз $\overline{abc} + \overline{cab}$.

А	Б	В	Г	Д
$110a + 11b + 101c$	$2a + 2b + 2c$	$200a + 20b + 2c$	$200a + 2b + 20c$	$111a + 11b + c$

3.8. Відомо, що $a + b = 1$, $b + c = 2$, $a + c = 3$. Знайти $3(a + b + c)$.

А	Б	В	Г	Д
6	9	12	15	18

3.9. Спростити вираз $(a - 1)(a^9 + a^8 + a^7 + ... + a^2 + a + 1) + 1$.

А	Б	В	Г	Д
$a^{10} + a^9$	$a^{10} + a$	$a^{10} - 1$	a^{10}	a^9

3.10. Спростити вираз $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) \cdot ... \cdot (2^{32} + 1) + 1$.

А	Б	В	Г	Д
2^{34}	2^{64}	$2^{64} + 2$	$2^{34} + 2$	$2^{34} - 2$

3.11. Розкласти на множники вираз $4(x + y)^2 - 9(x - y)^2$.

А	Б	В	Г	Д
$-(13x - 5y) \times$ $\times (13x + 5y)$	$(13x - 5y) \times$ $\times (13x - 5y)$	$-(5x - y) \times$ $\times (5x + y)$	$(5x - y) \times$ $\times (5x + y)$	$(5x - y) \times$ $\times (5y - x)$

3.12. Подати многочлен $0,25x^2 + y^2 - xy - t^2$ у вигляді добутку.

А	Б	В	Г	Д
$(0,25x - y - t)\times$ $\times(0,25x + y + t)$	$(0,25x - y - t)\times$ $\times(0,25x - y + t)$	$(0,05x - y - t)\times$ $\times(0,05x - y + t)$	$(0,5x - y - t)\times$ $\times(0,5x - y + t)$	$(0,5x - y + t)\times$ $\times(0,5x + y + t)$

3.13. Розкласти многочлен $x^4 + x^2 + 1$ на множники і знайти суму вільних членів многочленів розкладу.

А	Б	В	Г	Д
2	4	0	1	–1

3.14. Знайти $(a - b)^2$, якщо $(a + b)^2 = 36$, $a^2 - b^2 = 24$.

А	Б	В	Г	Д
2	4	8	16	32

3.15. Знайти $(a+b)^4$, якщо $(ab)^3 = 125$, $a^2 + b^2 = 15$.

А	Б	В	Г	Д
25	225	400	500	625

3.16. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + 2007 - 2008 = ...$

А	Б	В	Г	Д
2008	–2008	1004	–1004	0

3.17. $(200 + 1)(200 - 2)(200 + 3)(200 - 4) ... (200 + 2007)(200 - 2008) = ...$

А	Б	В	Г	Д
2008000	–2008000	1004000	–1004000	0

3.18. Знайти x, якщо $222222x = 111111 + 222222 + 333333 + 444444$.

А	Б	В	Г	Д
1	4	5	10	12

3.19. Обчислити: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 + 101^2$.

А	Б	В	Г	Д
–500	4949	$101^2 - 1$	–50	5151

3.20. Спростити вираз: $70 \cdot (71^9 + 71^8 + 71^7 + ... + 71^2 + 71) + 71$.

А	Б	В	Г	Д
70^{10}	$71^{10} - 1$	71^{10}	$71^{10} + 1$	$70^{10} + 1$

3.21. Якою цифрою закінчується значення виразу $11^6 + 14^6 - 13^3$?

А	Б	В	Г	Д
0	2	3	5	7

3.22. Знайти частку від ділення многочленів $x^4 - x^2 + x + 1$ та $x^3 - x^2 + 1$.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 - 1$	x	$x - 1$	$x + 1$	$x^2 + 1$

3.23. Знайти остачу від ділення многочлена $x^3 + 5x^2 - x - 4$ на двочлен $x - 1$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	–1	–2

Завдання 3.24–3.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

3.24. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $x^2 - (x - 1)(x + 3)$
2 $x^2 - (x + 1)(x + 3)$
3 $x^2 - (x - 1)(x - 3)$
4 $x^2 - (x + 1)(x - 3)$

А $2x + 3$
Б $4x - 3$
В $-4x - 3$
Г $-4x + 3$
Д $-2x + 3$

3.25. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $(a-2b)^2-(a-b)(a+b)$

2 $(2a+b)(b-2a)-(a-b)^2$

3 $(-2a-b)^2-(a-b)^2$

4 $-(2a-b)^2-(a-b)(a+b)$

А $2ab-5a^2$

Б $2ab-5b^2$

В $-4ab+5b^2$

Г $4ab-5a^2$

Д $6ab+3a^2$

3.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх розкладами на множники (А–Д).

1 $ax-ay-by+bx$

2 $ax+ay-bx-by$

3 $-ax+ay+bx-by$

4 $ax-ay-bx+by$

А $(a+b)(y-x)$

Б $(a+b)(x-y)$

В $(a-b)(x-y)$

Г $(a-b)(y-x)$

Д $(a-b)(x+y)$

3.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх розкладами на множники (А–Д).

1 $4(x-y)^2-9y^2$

2 $4(x-y)^2-9x^2$

3 $9(x-y)^2-4y^2$

4 $9(y-x)^2-4x^2$

А $(x+3y)(5x-3y)$

Б $(x-3y)(5x-3y)$

В $(x+2y)(2y-5x)$

Г $(2x+y)(2x-5y)$

Д $(3x-5y)(3x-y)$

3.28. Установити відповідність між сумами (1–4) та їх записами у вигляді многочленів (А–Д).

1 $\overline{abc}+\overline{bac}$

2 $\overline{abc}+\overline{cba}$

3 $\overline{abc}+\overline{acb}$

4 $\overline{bac}+\overline{cab}$

А $2a+110b+110c$

Б $20a+101b+101c$

В $101a+20b+101c$

Г $110a+110b+2c$

Д $200a+11b+11c$

Розв'яжіть завдання 3.29–3.34. Відповідь запишіть десятковим дробом.

3.29. Знайти значення виразу $\dfrac{2^{21}\cdot 27^3+15\cdot 4^{10}\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}$.

3.30. Знайти частку від ділення 16^5+2^{15} на 33 у вигляді степеня числа 2. У відповідь записати показник степеня.

3.31. Виконати ділення многочлена $2x^3-3x^2-11x+6$ на двочлен $x-3$ і знайти значення отриманої частки, якщо $x=-2$.

3.32. Якою цифрою закінчується значення виразу $15^9+26^9+39^9$?

3.33. Якою цифрою закінчується число 99^{99^9}?

3.34. Знайти, за яких значень a і b многочлен $x^4+6x^3+3x^2+ax+b$ ділиться без остачі на многочлен x^2+4x+3. У відповідь записати суму a_0+b_0 знайдених значень a та b.

Тема 4. Дробово-раціональні вирази

Вирази, які можуть містити додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня чисел та змінних, називають ***раціональними***. Якщо раціональний вираз не містить ділення на вираз зі змінною, то його називають цілим, а інакше — дробовим. Наприклад, вирази $2+a^2$; $\frac{6(a+b)}{7}$ — цілі раціональні, а вирази $\frac{4k+y}{3m-c}$; $x^2+x+\frac{1}{x}$ — дробові раціональні.

Два вирази називають *тотожно рівними*, якщо для всіх допустимих значень змінних їхні відповідні значення рівні. Наприклад, тотожно рівними є вирази $2x^2-18$ та $(2x+6)\cdot(x-3)$.

Раціональним дробом називають вираз виду $\frac{A}{B}$, де A і B — многочлени.

Допустимими значеннями змінних у виразі називають такі значення змінних, за яких вираз має числове значення. Іншими словами, за допустимих значень змінних можна виконувати всі дії, які містить даний вираз. Наприклад, для виразу a^3+b-2 всі значення змінних a та b є допустимими, оскільки зазначені дії можна виконати за будь-яких значень a та b. Для виразу $\frac{m-2}{m}$ допустимими є всі значення m, крім $m=0$ (на 0 ділити не можна).

Множину всіх допустимих значень змінних для даного виразу називають *областю допустимих значень* виразу (ОДЗ). Наприклад, для виразу $x^{-3}+\frac{2}{x-5}$ областю допустимих значень є всі числа, крім $x=0$ та $x=5$, бо якщо $x=0$, то значення виразу $x^{-3}=\frac{1}{x^3}$ не існує, а якщо $x=5$, то не існує значення виразу $\frac{2}{x-5}$.

Застосування основної властивості дробу

1. ***Скорочення дробу*** — ділення чисельника і знаменника на спільний множник. Щоб скоротити раціональний дріб, слід спочатку чисельник і знаменник розкласти на множники.

Наприклад: скоротити дріб $\frac{12-3x^2}{15x+30}$. Одержимо: $\frac{12-3x^2}{15x+30}=\frac{3\left(4-x^2\right)}{15(x+2)}=\frac{3(2-x)(2+x)}{15(2+x)}=\frac{2-x}{5}$.

2. ***Зміна знаків членів дробу.*** Якщо чисельник і знаменник дробу $\frac{A}{B}$ помножити на -1, то одержимо: $\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}$, тобто значення дробу не зміниться, якщо одночасно змінити знаки чисельника та знаменника. Якщо ж змінити знак тільки чисельника або тільки знаменника, то й дріб змінить свій знак: $\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}$. Також правильно: $\frac{A}{B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$.

3. ***Зведення дробів до спільного знаменника***. Щоб звести дроби до спільного знаменника, потрібно:

1) розкласти на множники знаменники дробів;

2) скласти спільний знаменник, внісши до нього усі різні множники в найвищих степенях, в яких вони входять у розклади знаменників;

3) знайти додатковий множник для кожного дробу (для цього спільний знаменник потрібно поділити на знаменник дробу);

4) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник.

4. ***Додавання і віднімання раціональних дробів***. Щоб додати чи відняти дроби з різними знаменниками, слід спочатку звести їх до спільного знаменника.

Наприклад: знайти різницю дробів $\frac{a^2-2b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}$. Одержимо:

$$\frac{a^2-2b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}=\frac{a^2-2b}{(a-b)(a+b)}-\frac{a}{a+b}=\frac{a^2-2b}{(a-b)(a+b)}-\frac{a(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2-2b-a^2+ab}{(a-b)(a+b)}=\frac{-2b+ab}{a^2-b^2}.$$

5. *Множення раціональних дробів*. Добутком двох раціональних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників.

Наприклад: знайти добуток дробів $\frac{2a^2}{x}\cdot\frac{y}{6ab}$. Маємо: $\frac{2a^2}{x}\cdot\frac{y}{6ab}=\frac{2a^2\cdot y}{x\cdot 6ab}=\frac{ay}{3xb}$.

6. *Ділення раціональних дробів:* $\frac{A_1}{B_1}:\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_1\cdot B_2}{B_1\cdot A_2}$.

Наприклад: знайти частку дробів $\frac{16x^3}{a+7}:\frac{12xy}{a^2-49}$. Тоді:

$$\frac{16x^3}{a+7}:\frac{12xy}{a^2-49}=\frac{16x^3\cdot\left(a^2-49\right)}{(a+7)\cdot 12xy}=\frac{16x^3\cdot(a-7)(a+7)}{(a+7)\cdot 12xy}=\frac{4x^2(a-7)}{3y}.$$

7. *Піднесення раціонального дробу до степеня з цілим показником:* $\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$.

Наприклад: $\left(\frac{5mn^2}{3x^4}\right)^3=\frac{\left(5mn^2\right)^3}{\left(3x^4\right)^3}=\frac{5^3\cdot m^3\cdot n^6}{3^3\cdot x^{12}}=\frac{125m^3n^6}{27x^{12}}$.

Умова рівності дробу нулю

Дріб $\frac{A}{B}$ дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, тобто $\frac{A}{B}=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0;\\ B\neq 0.\end{cases}$

Наприклад: знайти значення змінної, за яких дріб $\frac{x^2-9}{x+3}$ дорівнює нулю. Одержимо:

$\frac{x^2-9}{x+3}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-9=0;\\ x+3\neq 0;\end{cases}\begin{cases}(x-3)(x+3)=0;\\ x+3\neq 0;\end{cases}\begin{cases}x=3 \text{ або } x=-3;\\ x\neq -3.\end{cases}$ Отже, дріб $\frac{x^2-9}{x+3}$ дорівнює нулю, якщо $x=3$.

Приклад 1. Скоротити дріб $\frac{12y^3-8y^2}{28y^2-36y^4}$.

■ $\frac{12y^3-8y^2}{28y^2-36y^4}=\frac{4y^2(3y-2)}{4y^2(7-9y^2)}=\frac{3y-2}{7-9y^2}$. ■

Приклад 2. Вказати допустимі значення змінної у виразі $\frac{3}{x^2+1}+\frac{x-5}{x^2-1}$.

■ Знайдемо значення змінної x, за яких знаменник кожного з дробів дорівнює нулю:

$x^2+1=0;\ x^2=-1;\ x\in\varnothing;$

$x^2-1=0;\ x^2=1;\ x=\pm 1.$

Відповідь. Усі числа, крім ± 1. ■

Приклад 3. Скоротити дріб $\dfrac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$.

А	Б	В	Г	Д
a^2	$a-1$	$\dfrac{a-1}{a+1}$	$\dfrac{a^3}{2}$	a^2-1

■ $\dfrac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}=\dfrac{a^2(a+1)-(a+1)}{(a+1)^2}=\dfrac{(a+1)(a^2-1)}{(a+1)^2}=\dfrac{(a+1)(a+1)(a-1)}{(a+1)^2}=\dfrac{(a+1)^2(a-1)}{(a+1)^2}=a-1.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Записати дробом вираз $\dfrac{x-1}{5-x}+\dfrac{x+3}{2x-10}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{2}{3}$

■ $\dfrac{x-1}{5-x}+\dfrac{x+3}{2x-10}=-\dfrac{x-1}{x-5}^{\backslash 2}+\dfrac{x+3}{2(x-5)}=\dfrac{-2(x-1)+(x+3)}{2(x-5)}=\dfrac{-2x+2+x+3}{2(x-5)}=-\dfrac{-x+5}{2(x-5)}=\dfrac{-(x-5)}{2(x-5)}=-\dfrac{1}{2}.$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 5. Якому з виразів тотожно рівний вираз $\dfrac{-4x^3\cdot x^2}{5(y-2)}$?

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{4x^5}{5(2-y)}$	$\dfrac{4x^5}{5(2-y)}$	$\dfrac{4x^6}{5(2-y)}$	$-\dfrac{4}{5(2-y)}$	$\dfrac{4x^5}{5(y-2)}$

■ $\dfrac{-4x^3\cdot x^2}{5(y-2)}=-\dfrac{4x^5}{5(y-2)}=\dfrac{4x^5}{5(2-y)}.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Визначити, за яких натуральних значень змінної n вираз $\dfrac{2n+12}{2n}$ набуває цілих значень. У відповідь записати їх добуток.

■ Перетворимо заданий вираз: $\dfrac{2n+12}{2n}=\dfrac{2n}{2n}+\dfrac{12}{2n}=1+\dfrac{6}{n}$. 1 — ціле число, щоб дріб $\dfrac{6}{n}$ був цілим числом, необхідно, щоб n було дільником числа 6, тобто щоб: $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=6$. Добуток цих чисел дорівнює: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 6=36$.

Відповідь. 36. ■

Приклад 7. Відомо, що $\dfrac{x}{y}=5$. Знайти значення виразу $\dfrac{2y-x}{x}$.

■ Перетворимо заданий вираз: $\dfrac{2y-x}{x}=\dfrac{2y}{x}-\dfrac{x}{x}=2\cdot\dfrac{y}{x}-1$. Якщо $\dfrac{x}{y}=5$, то $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{5}$. Отже, одержимо: $2\cdot\dfrac{y}{x}-1=2\cdot\dfrac{1}{5}-1=\dfrac{2}{5}-1=-0{,}6$.

Відповідь. –0,6. ■

Приклад 8. Знайти найбільше значення дробу $\frac{52}{|x|+13}$ і відповідне йому значення змінної. У відповідь записати добуток цих чисел.

■ Дріб, у якому чисельник — число (52), набуде свого найбільшого значення, якщо знаменник, зменшуючись, набуде свого найменшого значення. Відомо, що $|x| \geq 0$, тому найменше значення, якого може набути $|x|$, дорівнює 0. $0 + 13 = 13$; $\frac{52}{13} = 4$. Для всіх інших значень змінної x $|x| > 0$, і тоді $|x| + 13 > 13$, а дріб $\frac{52}{|x|+13} < 4$. Отже, якщо $x = 0$, то найбільше значення дробу $\frac{52}{|x|+13}$ дорівнює 4. Тоді добуток цих значень дорівнює $0 \cdot 4 = 0$.

Відповідь. 0. ■

Приклад 9. Відомо, що $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$. Знайти значення виразу $x - \frac{1}{x}$. Якщо таких значень кілька, то у відповідь записати їх суму.

■ Піднесемо вираз $x - \frac{1}{x}$ до квадрата: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 =$ $= 3 - 2 = 1$. Отже, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$, тоді $x - \frac{1}{x} = 1$ або $x - \frac{1}{x} = -1$. Їх сума: $1 + (-1) = 0$.

Відповідь. 0. ■

Завдання 4.1–4.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

4.1. $\frac{8}{5a-2} + \frac{3}{2-5a} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{11}{2-5a}$	$\frac{11}{5a-2}$	$\frac{5}{2-5a}$	$\frac{5}{5a-2}$	$\frac{24}{5a-2}$

4.2. $\frac{c^2}{c^2-4} - \frac{c}{c-2} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2c}{4-c^2}$	$\frac{2c}{c^2-4}$	$\frac{c^2}{c^2-4}$	$\frac{c^2}{4-c^2}$	$\frac{c^2-c}{c^2-4}$

4.3. $\frac{a^2-14a+49}{a^2} \cdot \frac{a^6}{a^2-49} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$a^4(a-7)$	$\frac{a^3(a-7)}{a+7}$	$\frac{a^4(a-7)}{a+7}$	$-14a^5$	$\frac{a^4(a+7)}{a-7}$

4.4. $(b+20) : \frac{b^2+20b}{3} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{b^2}{3}$	$\frac{b(b+20)^2}{3}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{3}{b}$	$\frac{3}{b^2}$

4.5. $\dfrac{7}{ab}-\dfrac{3a+6}{a}\cdot\dfrac{5}{a+2}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{7-15a}{ab}$	$\dfrac{7-15b}{ab}$	$\dfrac{7+15b}{ab}$	$\dfrac{7+15a}{ab}$	$\dfrac{7b-15}{ab}$

4.6. $\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a}\right):(2a+1)=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{(2a+1)^2}$	$\dfrac{a(a+1)}{(2a+1)^2}$	$\dfrac{(2a+1)^2}{a(a+1)}$	a^2+a	$\dfrac{1}{a^2+a}$

4.7. $a+\dfrac{81}{a-9}+9=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{a-9}{a^2}$	$\dfrac{a^2}{a-9}$	$\dfrac{a+90}{a-9}$	$\dfrac{a-9}{a+90}$	$\dfrac{81}{a^2-81}$

4.8. $\dfrac{a^3+8}{a^3-4a}\cdot\dfrac{7a-14}{a^2-2a+4}+\dfrac{a}{7}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{2a}{7}$	$\dfrac{7a}{a+7}$	$\dfrac{a+7}{7a}$	$\dfrac{a^2+49}{7a}$	$\dfrac{7a}{a^2+49}$

4.9. $(a^2-b^2):(a^{-1}+b^{-1})=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$ab(a-b)$	$\dfrac{1}{ab(a-b)}$	$\dfrac{ab}{a-b}$	$\dfrac{a-b}{ab}$	$ab(a+b)$

4.10. $\dfrac{a^6+a^{13}}{a^{-6}+a^{-13}}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{a^{19}}$	$\dfrac{1}{a^{78}}$	a^{78}	a^{19}	$\dfrac{1}{a^7}$

4.11. $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)^{-1}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{a}{b}$	$\dfrac{(ab+1)^2}{ab}$	$\dfrac{a+b}{ab}$	$\dfrac{ab}{a+b}$

4.12. Якщо $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}$, то $c=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$a-b$	$\dfrac{ab}{b-a}$	$\dfrac{a-b}{ab}$	$\dfrac{ab}{a-b}$	ab

4.13. $\frac{a+b}{b}=4$. Знайти значення виразу $\frac{b}{a}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	4	3	$\frac{1}{3}$	5

4.14. $a+a^{-1}=b$. Знайти значення виразу a^2+a^{-2}.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{b^2-2}$	$\frac{1}{b^2}$	b^2-2	$2b-1$	b^2+2

4.15. Якщо $y=\frac{x^2}{z}$ $(x\neq 0, z\neq 0)$, то $\frac{1}{x^2}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{zy}$	$\frac{z}{y}$	$\frac{y}{z}$	yz	$\frac{1}{yz}$

4.16. $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+a}}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a+3}{2}$	$\frac{2a+3}{a+2}$	$\frac{2a+1}{a+2}$	$\frac{a+2}{2a+1}$	$\frac{2a+1}{2a+2}$

4.17. $\frac{a+a^2+\ldots+a^{2007}}{a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-2007}}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
a^{2007}	a^{2008}	$\frac{1}{a^{2008}}$	$\frac{1}{a^{2006}}$	a^{2006}

4.18. $\frac{3}{1-a^3}+\frac{3}{1+a^3}+\frac{6}{1+a^6}+\frac{12}{1+a^{12}}+\frac{24}{1+a^{24}}+\frac{48}{1+a^{48}}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{96}{1-a^{96}}$	$\frac{1-a^{96}}{96}$	$\frac{96}{1+a^{48}}$	$\frac{96}{1+a^{96}}$	$\frac{48}{1-a^{48}}$

4.19. $\frac{a}{b}=2$. Знайти значення виразу $\frac{4b^2+a^2}{a^2-ab}$.

А	Б	В	Г	Д
-16	8	4	-8	-4

4.20. Обчислити: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{8}$

Завдання 4.21–4.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

4.21. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\cdot(a-b)$

2 $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}-\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

3 $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}+3ab$

4 $4a^2+4a$

А 0

Б $(a+b)^2$

В $4a^3$

Г $(2a+1)^2-1$

Д $a^2-2ab+b^2$

4.22. Установити відповідність між дробовими виразами (1–4) та тотожно рівними їх нескоротними дробами (А–Д).

1 $\dfrac{ay-ax}{by-bx}$

2 $\dfrac{ax-bx}{a^2-ab}$

3 $\dfrac{bx-by}{ay-ax}$

4 $\dfrac{a^2-ab}{bx-ax}$

А $-\dfrac{a}{b}$

Б $-\dfrac{b}{a}$

В $\dfrac{a}{b}$

Г $\dfrac{x}{a}$

Д $-\dfrac{a}{x}$

4.23. Установити відповідність між різницями (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}$

2 $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}$

3 $\dfrac{a}{b-a}-\dfrac{b}{a+b}$

4 $\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}$

А $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

Б $\dfrac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$

В $\dfrac{b^2+2ab-a^2}{a^2-b^2}$

Г $\dfrac{b^2-2ab-a^2}{a^2-b^2}$

Д $\dfrac{a^2-2ab-b^2}{a^2-b^2}$

4.24. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $a^2-\dfrac{1}{a}$

2 $1-\dfrac{1}{a^2}$

3 $\dfrac{1}{a^2}-1$

4 $\dfrac{1}{a}-a$

А $\dfrac{1-a^2}{a}$

Б $\dfrac{1-a^2}{a^2}$

В $\dfrac{1-a^3}{a}$

Г $\dfrac{a^2-1}{a}$

Д $\dfrac{a^3-1}{a}$

4.25. Установити відповідність між частками (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right):\frac{2}{a-1}$

2 $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{2}{a+1}$

3 $\left(a+\frac{a}{a-1}\right):a^2$

4 $\left(a-\frac{a}{a+1}\right):\frac{a^2}{a^2+2a+1}$

А $a+1$

Б $a-1$

В $\frac{1}{a+1}$

Г $\frac{1}{a-1}$

Д $\frac{1}{1-a}$

4.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$

2 $\frac{1}{1+\frac{1}{2a+1}}$

3 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}$

4 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}$

А $\frac{2a+1}{2(a+1)}$

Б $\frac{2a+1}{a+1}$

В $\frac{a+1}{2a+1}$

Г $\frac{a}{a+1}$

Д $\frac{a+1}{a+2}$

Розв'яжіть завдання 4.27–4.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

4.27. Спростити вираз $\left(\frac{b}{9a-a^3}-\frac{1}{a^2+3a}+\frac{3}{a^2b-9b}\right):\frac{b^2-6b+9}{a^3b-9ab}$ і знайти його значення, якщо $a=3$, $b=2$.

4.28. Спростити вираз $\left(1-\frac{1}{1-a}\right):\left(1-\frac{1-2a^2}{1-a}+a\right)$ і знайти його значення, якщо $a=2$.

4.29. Спростити вираз $\frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b}:\frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$.

4.30. Спростити вираз $\left(\frac{6}{a^2+5a+4}-\frac{2}{a^2+3a+2}+\frac{a}{a^2+6a+8}\right)^2\cdot\frac{a^2+4a+4}{2}$.

4.31. Спростити вираз $\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right):\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\right)$ і знайти його значення, якщо $a=5$.

4.32. Спростити вираз $\frac{\left(ab^{-1}+a^{-1}b+1\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)}$ і знайти його значення, якщо $a=4$, $b=5$.

4.33. Спростити вираз $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^3}{a^4-1}$ і знайти його значення, якщо $a=\frac{3}{2}$.

4.34. Спростити вираз $\left(1-\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}\right)^{-2}$ і знайти його значення, якщо $a=0$, $b=3\dfrac{7}{9}$.

4.35. Спростити вираз $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

4.36. Спростити вираз $1-\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}}$ і знайти його значення, якщо $a=8$.

4.37. Спростити вираз $\dfrac{(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(b+c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$.

4.38. Спростити вираз $\dfrac{1}{a(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+6)}+\dfrac{1}{(a+6)(a+9)}+\dfrac{1}{(a+9)(a+12)}+\dfrac{1}{(a+12)(a+15)}$ і знайти його значення, якщо $a=5$.

4.39. Спростити вираз $\dfrac{x^3y-xy^3+y^3z-yz^3+z^3x-zx^3}{x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2}$ і знайти його значення, якщо $x=1$, $y=0{,}1$, $z=0{,}01$.

4.40. Знайти значення виразу $\dfrac{x^{3333}+x^{333}+x^{33}+x^3+1996}{100\cdot\left(x^2+x\right)}$, якщо $x^2+x+1=0$.

Тема 5. Ірраціональні вирази

Квадратним коренем з числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a. Наприклад, для числа 100 квадратними коренями є числа 10 та –10, бо $10^2 = 100$ і $(-10)^2 = 100$.

Арифметичним квадратним коренем з числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a, і позначають $\sqrt{a}$. Вираз $\sqrt{a}$ має зміст, якщо $a \geq 0$. Наприклад, арифметичним квадратним коренем з числа 36 є $\sqrt{36} = 6$. Вираз $\sqrt{-100}$ не існує.

Справедливі рівності:

1. $\sqrt{a} = b$, якщо $b^2 = a$, $b \geq 0$. Наприклад, $\sqrt{25} = 5$, бо $5^2 = 25$ і $25 \geq 0$.

2. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \geq 0$. Наприклад, $\left(\sqrt{36}\right)^2 = 36$.

3. $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in R$. Наприклад, $\sqrt{7^2} = |7| = 7$, $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$.

Властивості арифметичного квадратного кореня.

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, якщо $a \geq 0,\ b \geq 0$. Наприклад, $\sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{16} = 5 \cdot 4 = 20$.

2. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, якщо $a \geq 0,\ b > 0$. Наприклад, $\sqrt{\dfrac{144}{25}} = \dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$.

3. $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$. Наприклад, $\sqrt{3^4} = |3^2| = 9$.

4. *Винесення множника з-під знака кореня.* $\sqrt{b^2 a} = |b|\sqrt{a} = \begin{cases} b\sqrt{a}, \text{ якщо } b \geq 0; \\ -b\sqrt{a}, \text{ якщо } b < 0. \end{cases}$ Наприклад,
$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = |3|\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt{(-5)^2 \cdot 3} = |-5|\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

5. *Внесення множника під знак кореня.* $b\sqrt{a} = \begin{cases} \sqrt{b^2 a}, \text{ якщо } b \geq 0; \\ -\sqrt{b^2 a}, \text{ якщо } b < 0. \end{cases}$ Наприклад,
$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$; $-4\sqrt{2} = -\sqrt{4^2 \cdot 2} = -\sqrt{16 \cdot 2} = -\sqrt{32}$.

Корінь n-го степеня

Коренем n-го степеня, де $n \in N$, $n > 1$ з числа a називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a. Корінь другого степеня прийнято називати квадратним коренем, а корінь третього степеня — ***кубічним коренем***. Наприклад, коренями четвертого степеня з числа 625 є числа –5 та 5 (бо $(-5)^4 = 625$ і $5^4 = 625$); кубічним коренем з числа –27 є число –3 (бо $(-3)^3 = -27$). Якщо n — непарне натуральне число ($n > 1$), то існує єдиний корінь n-го степеня з довільного числа a.

$\sqrt[n]{a}$ — корінь, n — показник, a — підкореневий вираз. Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, оскільки $2^5 = 32$; $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$; $\sqrt[3]{-125} = -5$, бо $(-5)^3 = -125$.

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a, і позначають $\sqrt[n]{a}$. Якщо число n непарне, то запис $\sqrt[n]{a}$ використовують і для від'ємних значень a і він означає корінь n-го степеня з числа a (але не арифметичний). Наприклад, $\sqrt[6]{729} = 3$ — арифметичний корінь; $\sqrt[5]{-243} = -3$ — не арифметичний корінь.

Показники коренів виду $n = 2k + 1$ (n — непарне число) використовують для позначення будь-яких коренів. Корені $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, ..., $\sqrt[2k+1]{a}$ існують для будь-яких значень a ($a \in R$). Показники коренів виду $n = 2k$ (n — парне число) використовують для позначення арифметичних коренів. Корені $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ..., $\sqrt[2k]{a}$ існують лише для $a \geq 0$. Показником кореня може бути будь-яке натуральне число більше за 1.

Властивості арифметичних коренів n-го степеня.

1. $\sqrt[n]{0}=0$. Наприклад, $\sqrt[6]{0}=0$; $\sqrt[26]{0}=0$.

2. $\sqrt[n]{1}=1$. Наприклад, $\sqrt[5]{1}=1$; $\sqrt[8]{1}=1$.

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, до того ж, $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=a$ для будь-яких значень a, $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k}=a$ лише для $a\ge 0$. Наприклад, $\left(\sqrt[4]{3}\right)^4=3$; $\left(\sqrt[5]{-3}\right)^5=-3$.

- $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$. Наприклад, $\sqrt[7]{2^7}=2$; $\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$;
- $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$. Наприклад, $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$;
- $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|=\begin{cases} a, \text{ якщо } a\ge 0; \\ -a, \text{ якщо } a<0. \end{cases}$ Наприклад, $\sqrt[6]{2^6}=|2|=2$; $\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=3$.

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ для всіх значень a з області визначення виразу $\sqrt[n]{a}$, m — ціле, n — натуральне. Наприклад, $\left(\sqrt[7]{2}\right)^5=\sqrt[7]{2^5}=\sqrt[7]{32}$.

5. Для кореня непарного степеня (a та b — довільні): $\sqrt[2k+1]{ab}=\sqrt[2k+1]{a}\cdot\sqrt[2k+1]{b}$. Наприклад, $\sqrt[3]{8000}=$ $=\sqrt[3]{64\cdot 125}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{125}=4\cdot 5=20$. Звідси можна одержати: $\sqrt[2k+1]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[2k+1]{a}}{\sqrt[2k+1]{b}}$, якщо $b\ne 0$. Наприклад, $\sqrt[3]{\dfrac{-64}{125}}=\dfrac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{125}}=\dfrac{-4}{5}=-\dfrac{4}{5}$.

6. Для кореня парного степеня: $\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|}$. Наприклад, $\sqrt[4]{1296}=\sqrt[4]{16\cdot 81}=$ $=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{81}=2\cdot 3=6$; $\sqrt[4]{(-16)\cdot(-81)}=\sqrt[4]{|-16|}\cdot\sqrt[4]{|-81|}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{81}=2\cdot 3=6$; $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}=$ $=\sqrt{\left|1-\sqrt{2}\right|}\cdot\sqrt{\left|1-\sqrt{5}\right|}=\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$.

7. Винесення множника з-під знака кореня.

- для кореня непарного степеня: $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b}=a\cdot\sqrt[2k+1]{b}$. Наприклад, $\sqrt[3]{(-5)^3\cdot 2}=-5\cdot\sqrt[3]{2}$;
  $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{3}\right)^5\cdot 7}=\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[5]{7}$;
- для кореня парного степеня: $\sqrt[2k]{a^{2k}b}=|a|\cdot\sqrt[2k]{b}$. Наприклад, $\sqrt[6]{(-2)^6\cdot 5}=|-2|\cdot\sqrt[6]{5}=2\sqrt[6]{5}$;
  $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^4\cdot 3}=\left|1-\sqrt{2}\right|\cdot\sqrt[4]{3}=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt[4]{3}$.

8. Внесення множника під знак кореня:

- для кореня непарного степеня: $a\sqrt[2k+1]{b}=\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b}$. Наприклад, $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$;
  $\left(1-\sqrt{7}\right)\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{7}\right)^3\cdot 5}$;
- для кореня парного степеня: $a\cdot\sqrt[2k]{b}=\begin{cases} \sqrt[2k]{a^{2k}b}, \text{ якщо } a\ge 0; \\ -\sqrt[2k]{a^{2k}b}, \text{ якщо } a<0, \end{cases}$ де $b\ge 0$. Наприклад,
  $2\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{2^4\cdot 5}=\sqrt[4]{80}$; $\left(1-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt[6]{7}=-\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{5}\right)^6\cdot 7}$.

9. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ для всіх значень a з області визначення виразу $\sqrt[nk]{a}$. Наприклад, $\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}$.

10. Якщо $a\ge 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$.

Степенем додатного числа a з раціональним показником $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне ($n > 1$), називають корінь n-го степеня з числа a^m:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

11. Якщо $a > 0$, то $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Наприклад, $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$.

- $a \geq 0, n \in N, n \geq 2$: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Наприклад, $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$; $5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{5}$; $(-8)^{\frac{1}{3}}$ — не визначений;
- $a > 0, n \in N, n \geq 2, m \in Z$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Наприклад, $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{(2^3)^4} = 2^3 = 8$;

  $5^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{25}}$; $(-4)^{\frac{3}{5}}$ — не визначений.

Приклад 1. Спростити вираз $15\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{160}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}$	11	$-2\sqrt{5}$	$-37\sqrt{2}$

■ $15\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{160} = \sqrt{\frac{15^2 \cdot 2}{5}} - \sqrt{16 \cdot 10} = \sqrt{90} - 4\sqrt{10} = \sqrt{9 \cdot 10} - 4\sqrt{10} = 3\sqrt{10} - 4\sqrt{10} = -\sqrt{10}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Спростити вираз $\sqrt[3]{18z^4} \cdot \sqrt[3]{12z^5}$.

■ $\sqrt[3]{18z^4} \cdot \sqrt[3]{12z^5} = \sqrt[3]{18z^4 \cdot 12z^5} = \sqrt[3]{216z^9} = \sqrt[3]{(6z^3)^3} = 6z^3$. ■

Приклад 3. Обчислити значення виразу $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[10]{64}$.

■ $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[10]{64} = \sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[10]{2^6} = \sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{2^5} = 2$. ■

Приклад 4. Винести множник за знак кореня: **а)** $\sqrt[3]{54}$; **б)** $\sqrt{3a^9}$; **в)** $\sqrt[6]{5x^6y}$, якщо $x < 0$.

■ **а)** $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 27} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$;

б) $\sqrt{3a^9} = \sqrt{3a \cdot (a^4)^2} = a^4 \cdot \sqrt{3a}$;

в) якщо $x < 0$, то $\sqrt[6]{5x^6y} = |x| \cdot \sqrt[6]{5y} = -x \cdot \sqrt[6]{5y}$. ■

Приклад 5. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу: **а)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$; **б)** $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$; **в)** $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$.

■ **а)** $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

б) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{4}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1 \cdot (\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3) \cdot (\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$. ■

Приклад 6. Знайти x із пропорції $\sqrt{a\sqrt[6]{a}} : \sqrt[6]{\sqrt{a}} = \left(\sqrt{a^{-3}}\right)^{-1} : x$.

А	Б	В	Г	Д
a^2	a	$\frac{1}{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt[6]{\sqrt{a}}$

■ $$x = \frac{\sqrt[6]{\sqrt{a}} \cdot \left(\sqrt{a^{-3}}\right)^{-1}}{\sqrt{a\sqrt[6]{a}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\left(a^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\sqrt{\sqrt[6]{a^7}}} = \frac{a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\left(a^{\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{12}+\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{12}}} = a^{\frac{1}{12}+\frac{3}{2}-\frac{7}{12}} = a^{\frac{1+18-7}{12}} = a.$$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 7. Спростити вираз $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$.

А	Б	В	Г	Д
$7\sqrt{2}$	$2\sqrt{7}$	$\sqrt{14}$	$-2{,}8$	$-1{,}8$

■ $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right) - \sqrt{7}\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)} = \frac{2+\sqrt{14}-\sqrt{14}+7}{2-7} = \frac{9}{-5} = -1{,}8.$$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 8. Знайти значення виразу $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}$.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{7}-5$	$5-2\sqrt{7}$	$1+2\sqrt{7}$	1	5

■ $$\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2} = \left|2-\sqrt{7}\right| + \left|3-\sqrt{7}\right| = \sqrt{7}-2+3-\sqrt{7} = 1.$$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 9. Спростити вираз $\left(\frac{81x^{-4}y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{8}{3}}}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{8}{27}x^3yz^2$	$\frac{3}{2}x^3z^2$	$\frac{27}{8}x^3yz^2$	$\frac{3}{2x^3y}$	$\frac{81}{16}xyz^2$

■ $$\left(\frac{81x^{-4}y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{8}{3}}}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} = \frac{\left(3^4\right)^{-\frac{3}{4}} x^{-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} y^{-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} z^{-\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}}{\left(2^4\right)^{-\frac{3}{4}}} = \frac{3^{-3}x^3yz^2}{2^{-3}} = \frac{2^3x^3yz^2}{3^3} = \frac{8}{27}x^3yz^2.$$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 10. Спростити вираз $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{5+2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}+1$

■ $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{8+1+2\cdot 2\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1+1^2}}=\sqrt{2+\sqrt{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}}=$

$=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1.$

Відповідь. Д. ■

Приклад 11. Виконати дії: $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}+3}{\sqrt[4]{a}-3}+\dfrac{\sqrt[4]{a}-3}{\sqrt[4]{a}+3}\right):\dfrac{3\sqrt{a}+27}{9-\sqrt{a}}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}$	$\dfrac{-2\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}$

■ $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}+3}{\sqrt[4]{a}-3}+\dfrac{\sqrt[4]{a}-3}{\sqrt[4]{a}+3}\right):\dfrac{3\sqrt{a}+27}{9-\sqrt{a}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+3\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-3\right)^2}{\left(\sqrt[4]{a}-3\right)\left(\sqrt[4]{a}+3\right)}\cdot\dfrac{9-\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2+2\sqrt[4]{a}\cdot 3+3^2+\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-2\sqrt[4]{a}\cdot 3+3^2}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-3^2}\times$

$\times\dfrac{9-\sqrt{a}}{3\left(\sqrt{a}+9\right)}=\dfrac{2\sqrt{a}+18}{\sqrt{a}-9}\cdot\dfrac{-\left(\sqrt{a}-9\right)}{3\left(\sqrt{a}+9\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{a}+9\right)\cdot(-1)}{3\left(\sqrt{a}+9\right)}=-\dfrac{2}{3}.$

Відповідь. А. ■

Приклад 12. Спростити вираз $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$1-\sqrt[8]{a}$	інша відповідь	$1+\sqrt[93]{a}$	$1-a$	$1-\sqrt[64]{a}$

■ $\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)=1-\sqrt[16]{a}$; $\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1-\sqrt[16]{a}\right)=1-\sqrt[8]{a}$; $\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1-\sqrt[8]{a}\right)=1-\sqrt[4]{a}$; $\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)=1-\sqrt{a}$; $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)=1-a.$

Відповідь. Г. ■

Приклад 13. Установити відповідність між числами (1–4) та проміжками (А–Д), до яких вони належать.

1	$3\sqrt{5}$	**А**	[4; 5]
2	$2\sqrt{8}$	**Б**	[7; 8]
3	$5\sqrt{2}$	**В**	[5; 6]
4	$2\sqrt{6}$	**Г**	[6; 7]
		Д	[8; 9]

■ 1) $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$; $\sqrt{36}<\sqrt{45}<\sqrt{49}$; $6<\sqrt{45}<7$; $\sqrt{45}\in[6;7]$. Отже, $1\to$ **Г**;

2) $2\sqrt{8}=\sqrt{2^2\cdot 8}=\sqrt{32}$; $\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}$; $5<\sqrt{32}<6$; $\sqrt{32}\in[5;\,6]$. Отже, $2\to$ **В**;

3) $5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot 2}=\sqrt{50}$; $\sqrt{49}<\sqrt{50}<\sqrt{64}$; $7<\sqrt{50}<8$; $\sqrt{50}\in[7;\,8]$. Отже, $3\to$ **Б**;

4) $2\sqrt{6}=\sqrt{2^2\cdot 6}=\sqrt{24}$; $\sqrt{16}<\sqrt{24}<\sqrt{25}$; $4<\sqrt{24}<5$; $\sqrt{24}\in[4;\,5]$. Отже, $4\to$ **А**.

Відповідь.

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1				X	
2			X		
3		X			
4	X				

■

Завдання 5.1–5.25 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

5.1. Обчислити: $\sqrt{6400}+\sqrt{49}+\sqrt{0{,}04}+\sqrt{0{,}0025}$.

А	Б	В	Г	Д
807,025	870,25	87,0205	87,25	870,025

5.2. Обчислити: $\sqrt{1\frac{1}{36}}\cdot\sqrt{1\frac{12}{37}}+\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
$26\frac{1}{6}$	$26\frac{13}{36}$	$5\frac{1}{6}$	$5\frac{5}{6}$	$6\frac{1}{6}$

5.3. Знайти значення виразу $\sqrt{15^2}+\sqrt{(-13)^2}+\left(\sqrt{3}\right)^2$.

А	Б	В	Г	Д
5	31	37	32	42

5.4. Спростити вираз $10\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{50}$.

А	Б	В	Г	Д
$17\sqrt{2}$	$39\sqrt{2}$	$37\sqrt{2}$	$19\sqrt{2}$	$24\sqrt{2}$

5.5. Знайти значення виразу $\sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}-\sqrt{7}$.

А	Б	В	Г	Д
-3	$3-2\sqrt{7}$	$2-\sqrt{7}$	3	$-3-2\sqrt{7}$

5.6. Обчислити: $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{16}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

5.7. Вказати правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{18}$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{11}}=\sqrt[8]{11}$	$\left(\sqrt[3]{10}\right)^5=\sqrt[15]{10}$	$\sqrt[10]{(-2)^{10}}=-2$	$\sqrt[9]{(-3)^9}=-3$

4* Капіносов А. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО

5.8. Обчислити: $16^{\frac{3}{4}} + 25^{\frac{1}{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
9	12	13	15	31

5.9. Обчислити: $9^{\frac{3}{2}} + 64^{-\frac{1}{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
27,25	31	278	27	$-7\frac{5}{6}$

5.10. Обчислити: $\sqrt[3]{5^6 \cdot 2^9}$.

А	Б	В	Г	Д
200	8000	1600	400	800

5.11. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{3}{\sqrt{7}-1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{7}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{7}-2}{2}$	$2\left(\sqrt{7}+1\right)$	$3\left(\sqrt{7}+1\right)$	$\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

5.12. Внести множники під знаки коренів: $a\sqrt{-a} + b\sqrt{b}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}$	$\sqrt{-a^3} + \sqrt{-b^3}$	$-\sqrt{-a^3} - \sqrt{b^3}$	$\sqrt{-a^3} + \sqrt{b^3}$	$-\sqrt{-a^3} + \sqrt{b^3}$

5.13. $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[9]{a^8}$	$\sqrt[8]{a}$	$\sqrt[8]{a^3}$	$\sqrt[3]{a^2}$

5.14. Спростити вираз $\sqrt[3]{\frac{a^4\sqrt[3]{b^9}}{a^{-2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
$-a^2b$	$-ab$	a^2b	a^2b^2	ab^2

5.15. Спростити вираз $\sqrt[3]{\frac{x^9y^6z^3}{4\cdot(-2)^4}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^3y^2z}{2}$	$\frac{x^6y^3}{4}$	$\frac{x^3y^2z}{4}$	$\frac{x^6y^3}{2}$	$\frac{x^3y^2}{4z}$

5.16. Знайти x, якщо $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} = 2^x$.

А	Б	В	Г	Д
–1,125	–0,875	–0,625	–0,375	–0,125

5.17. $\sqrt{\left(-2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
0	4	–4	$4+2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$

5.18. Знайти значення виразу $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[4]{(x-7,5)^4}$, якщо $x=\sqrt{10}$.

А	Б	В	Г	Д
–4,5	$2\sqrt{10}-10,5$	$2x-10,5$	4,5	3,5

5.19. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{10}$	$3,5+\sqrt{10}$	$\sqrt{3}+2$	$\sqrt{2}+\sqrt{5}$	$1+\sqrt{6}$

5.20. Звільнитись від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{2}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$

5.21. Обчислити: $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}-\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
7	$3\sqrt{5}$	$\frac{13+3\sqrt{5}}{4}$	3,5	$-1-1,5\sqrt{5}$

5.22. Знайти значення виразу $\sqrt{71-16\sqrt{7}}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

А	Б	В	Г	Д
$10-2\sqrt{7}$	–10	–6	10	6

5.23. Обчислити: $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

5.24. Обчислити: $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{4+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	$2\sqrt{2}$

5.25. Обчислити: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	3	5	8	9

Завдання 5.26–5.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

5.26. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}$	**А** $2+\sqrt{2}$
2 $\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-2\right)^3}$	**Б** $-2-\sqrt{2}$
3 $-\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}\right)^4$	**В** $2-\sqrt{2}$
4 $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$	**Г** $6-4\sqrt{2}$
	Д $\sqrt{2}-2$

5.27. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sqrt[4]{16a^4b^8}$, $a<0$	**А** $2\lvert a\rvert b^2$
2 $\sqrt[3]{16a^3b^6}$	**Б** $2a^2b^2$
3 $\sqrt{4a^4b^4}$	**В** $-2ab^2$
4 $\sqrt{4a^2b^4}$	**Г** $2ab^2$
	Д $2\sqrt[3]{2}ab^2$

5.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $(-27)^{\frac{1}{3}}$	**А** $-\frac{1}{3}$
2 $(-27)^{-\frac{1}{3}}$	**Б** $\frac{1}{3}$
3 $27^{-\frac{1}{3}}$	**В** -3
4 $27^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}$	**Г** 3
	Д 6

5.29. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{72}$	**А** $2\sqrt{2}$
2 $\sqrt{72}+\sqrt{50}-\sqrt{162}$	**Б** $3\sqrt{2}$
3 $\sqrt{200}-\sqrt{8}-\sqrt{50}$	**В** $4\sqrt{2}$
4 $\sqrt{128}+\sqrt{18}-\sqrt{98}$	**Г** $5\sqrt{2}$
	Д $6\sqrt{2}$

5.30. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sqrt{\left(-1-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}$	**А** 1
2 $\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(-1-\sqrt{5}\right)^2}$	**Б** $\sqrt{5}$
3 $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}$	**В** 4
4 $\sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2}$	**Г** $2\sqrt{5}$
	Д 5

5.31. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм степенями (А–Д).

1 $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$

2 $\sqrt{a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$

3 $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[4]{a}}}$

4 $\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

А $a^{\frac{7}{16}}$

Б $a^{\frac{9}{16}}$

В $a^{\frac{11}{16}}$

Г $a^{\frac{13}{16}}$

Д $a^{\frac{15}{16}}$

5.32. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

2 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$

3 $\sqrt{12-6\sqrt{3}}+\sqrt{3}$

4 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

А –2

Б –1

В 1

Г 2

Д 3

Розв'яжіть завдання 5.33–5.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

5.33. Обчислити: $\left(\sqrt[6]{27}+\sqrt[4]{64}\right)\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt[4]{64}\right)$.

5.34. Обчислити: $\left(\sqrt[6]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right)\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$.

5.35. Обчислити: $\dfrac{53}{8-\sqrt{11}}+\dfrac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}-\dfrac{9}{\sqrt{13}+2}$.

5.36. Спростити вираз $\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}-1}\right)$.

5.37. Спростити вираз $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}-2}+\dfrac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}+2}-\dfrac{16}{a-4}\right)^4$.

5.38. Обчислити: $\sqrt{27+2\sqrt{50}}\cdot\left(5-\sqrt{2}\right)$.

5.39. Спростити вираз $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}-a}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$ і знайти його значення, якщо $a=2\dfrac{1}{4}$, $b=25$.

5.40. Обчислити: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

5.41. Обчислити: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

5.42. Спростити вираз $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.