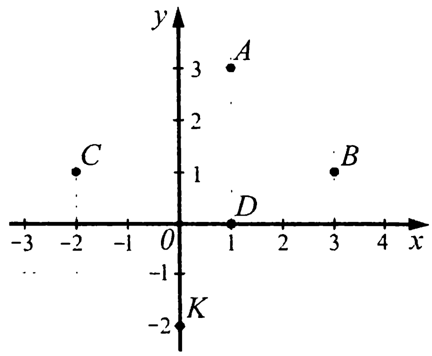
Тема 41. Координати

КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Координатна площина

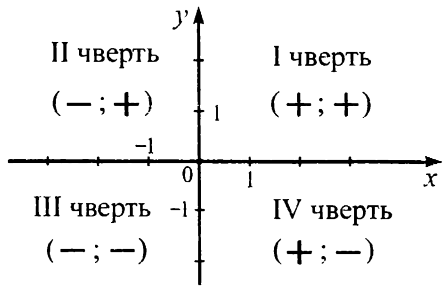
Координатна площина — площина, на якій уведена прямокутна система координат. Прямокутну систему координат утворюють дві взаємно перпендикулярні числові осі, які мають спільний початок відліку — точку O. Одну з осей, як правило горизонтальну, називають *віссю абсцис* (вісь x), а іншу — вертикальну — *віссю ординат* (вісь y). Точку O називають *початком координат* (див. рис.).

Кожній точці площини відповідає впорядкована пара чисел — *координати точки.* Перша координата — *абсциса* точки (позначають x), друга координата — *ордината* точки (позначають y). Тоді $M(x; y)$ — позначення точки на координатній площині. Наприклад, координати точок, які зображені на рисунку, є такими: $A(1; 3)$, $B(3; 1)$, $C(-2; 1)$, $D(1; 0)$, $K(0; -2)$.



Якщо точка лежить на осі абсцис, то її ордината дорівнює нулю ($y = 0$) (наприклад, точка D); якщо точка лежить на осі ординат, то її абсциса дорівнює нулю ($x = 0$) (наприклад, точка K); абсциса й ордината початку координат дорівнюють нулю ($O(0; 0)$).

Координатні осі розбивають площину на чотири *чверті* (*квадранти*). Точки координатних осей не належать до жодної із чвертей. У межах однієї чверті знаки координат точок не змінюються (див. рис.).



Відстань між двома точками

Відстань d між точками $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ в координатній площині обчислюють за формулою: $d = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Середина відрізка

Координати точки $C(x; y)$ — середини відрізка AB, де $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$, обчислюють за формулами: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Рівняння фігур на площині

Рівняння з двома змінними називають *рівнянням фігури F* у прямокутній системі координат, якщо:

1) координати будь-якої точки фігури F задовольняють це рівняння;

2) будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури F.

Наприклад:

1) $y = x$ — рівняння прямої (рис. 1);

2) $y = x^2$ — рівняння параболи (рис. 2);

3) $y = \dfrac{3}{x}$ — рівняння гіперболи (рис. 3).

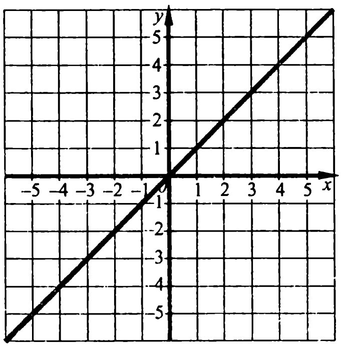


Рис. 1

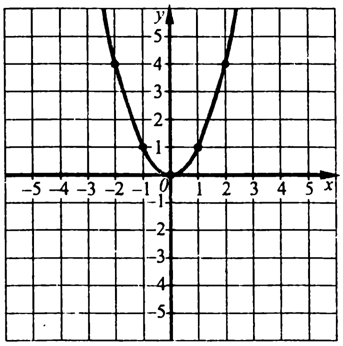


Рис. 2

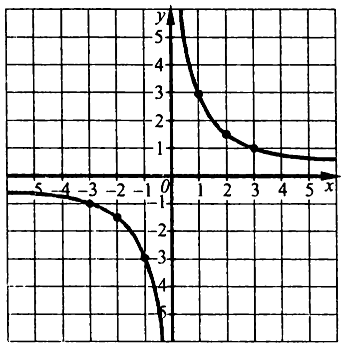
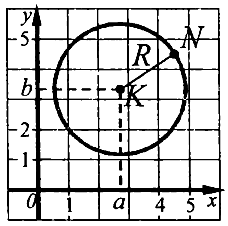


Рис. 3

Рівняння кола



У прямокутній системі координат рівняння кола має вигляд: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, де $K(a; b)$ — координати центра, R — радіус кола. $x^2 + y^2 = R^2$ — рівняння кола з центром у початку координат.

Рівняння прямої

Пряма, яка проходить через початок координат, задається рівнянням $y = kx$, де k — кутовий коефіцієнт прямої, $k = \operatorname{tg}\alpha$, α — кут нахилу прямої до осі абсцис.

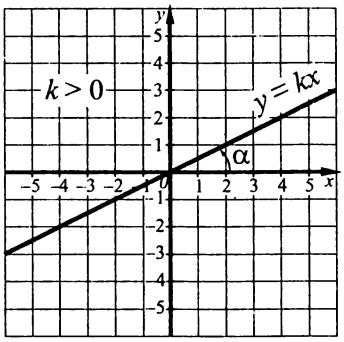


Рис. 4

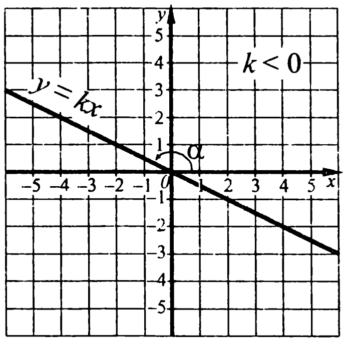


Рис. 5

На рис. 4 зображено графік рівняння $y = kx$, для $k > 0$, на рис. 5 для $k < 0$.

Рівняння прямої у прямокутній системі координат можуть мати вигляд:

1) рівняння $ax + by + c = 0$ (8), де a, b, c — деякі числа, a та b не дорівнюють одночасно 0, називають загальним рівнянням прямої;

2) рівняння $y = kx + b$ (9) називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k.

Одну й ту ж пряму можна задати рівнянням кожного з видів 1)–2).

Пряма у прямокутній системі координат

Пряма $ax + by + c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ у прямокутній системі координат може бути розміщена такими трьома способами:

1. $a = 0$, $b \neq 0$. Маємо $by + c = 0$, $y = -\dfrac{c}{b}$. Пряма $y = -\dfrac{c}{b}$ паралельна до осі абсцис (рис. 6) або збігається з нею. Рівняння $y = 0$ — рівняння осі абсцис.

2. $a \neq 0$, $b = 0$. Маємо $ax + c = 0$, $x = -\frac{c}{a}$. Пряма $x = -\frac{c}{a}$ паралельна до осі ординат (рис. 7) або збігається з нею. *Рівняння $x = 0$ — рівняння осі ординат.*

3. $a \neq 0$, $b \neq 0$. $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ або $y = kx + m$ — рівняння прямої (рис. 8).

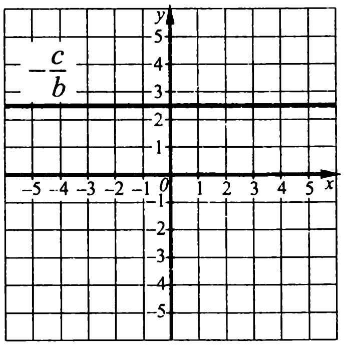


Рис. 6

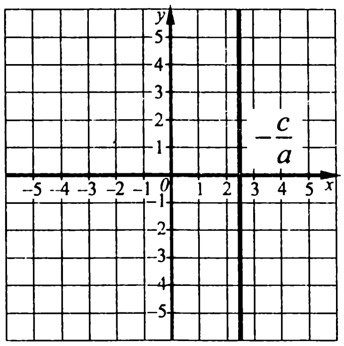


Рис. 7

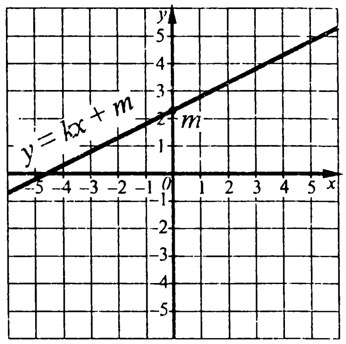


Рис. 8

Взаємне розміщення прямих

Якщо прямі l_1 та l_2 задані рівняннями $y = k_1x + m_1$ і $y = k_2x + m_2$, то вони:

а) паралельні тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $m_1 \neq m_2$, тобто коли їх кутові коефіцієнти будуть рівними;

б) перетинаються, якщо $k_1 \neq k_2$.

Метод координат

Метод дослідження геометричних фігур та їхніх властивостей засобами алгебри (із застосуванням системи координат) називають методом координат.

Методом координат розв'язують такі задачі:

1) знаючи деякі геометричні властивості фігури, знаходять її рівняння і досліджують інші властивості;

2) знаючи рівняння фігури, знаходять її властивості.

Щоб розв'язати задачу методом координат, слід:

1) сформулювати задачу мовою координат. Для цього вводять декартову систему координат і вказують спосіб розміщення в ній даної фігури. Доцільно вибрати систему координат так, щоб якнайбільше координат вершин фігури дорівнювали нулю або одному й тому самому числу;

2) визначити координати деяких точок даної фігури;

3) використати відомі співвідношення і формули;

4) перекласти отримані результати мовою геометрії.

КООРДИНАТИ У ПРОСТОРІ

Аналогічно до площини, можна розглянути координати у просторі. Нехай задано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$.

Координати точки $C(x; y; z)$ — середини відрізка AB, де $A(x_1; y_1; z_1)$, $A(x_2; y_2; z_2)$, обчислюють за формулами: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Відстань d між точками A та B обчислюють за формулою $d = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. Відстань від точки $M(x; y; z)$ до координатних площин xy, xz, yz відповідно дорівнює $|z|$, $|y|$, $|x|$. Відстань від точки $M(x; y; z)$ до початку координат $O(0; 0; 0)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рівняння сфери $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, де $(a; b; c)$ — координати центра, R — радіус сфери; $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — рівняння сфери з центром у початку координат.

Приклад 1. Знайти довжину відрізка DK, якщо $D(9; 1)$, $K(5; -2)$.

■ Скориставшись формулою $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, маємо:

$DK=\sqrt{(9-5)^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$.

Відповідь. 5. ■

Приклад 2. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1; 2)$ і $B(2; 3)$.

■ Нехай точка $C(0; y)$ — шукана точка. За формулою $d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ маємо: $AC^2=(0-1)^2+(y-2)^2$; $BC^2=(0-2)^2+(y-3)^2$. Оскільки $AC=BC$, то: $1+y^2-4y+4=4+y^2-6y+9$; $2y=8$; $y=4$. Отже, точка $C(0; 4)$ рівновіддалена від точок A та B і лежить на осі y.

Відповідь. $(0; 4)$. ■

Приклад 3. Знайти периметр і площу трикутника з вершинами $A(-3; 1)$, $B(-1; 3)$ і $C(1; 1)$.

■ За формулою $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ знайдемо довжини сторін трикутника:

$AB=\sqrt{(-3+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$; $BC=\sqrt{(-1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$; $CA=\sqrt{(-3-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{16}=4$.

Маємо: $P_{\Delta ABC}=AB+BC+CA$; $P_{\Delta ABC}=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4=4\sqrt{2}+4$ (см). Для сторін трикутника ABC маємо: $4^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2$; $16=16$, тобто виконується рівність: $CA^2=AB^2+BC^2$. Отже, трикутник ABC прямокутний з гіпотенузою CA. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC$; $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4$ (см^2).

Відповідь. $\left(4\sqrt{2}+4\right)$ см; 4 см^2. ■

Приклад 4. Точка O — середина відрізка AB. Знайти координати точки A, якщо $O(5; -5)$, $B(7; -12)$.

■ З формул координат середини відрізка $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ маємо: $2x=x_1+x_2$; $x_1=2x-x_2$; $2y=y_1+y_2$; $y_1=2y-y_2$. Маємо: $x_1=2\cdot 5-7=3$; $y_1=2\cdot(-5)-(-12)=-10+12=2$. $A(3; 2)$ — шукана точка. Відповідь. $(3; 2)$. ■

Приклад 5. Вершини чотирикутника $KDCM$ мають координати $K(1; 1)$, $D(3; 3)$, $C(8; 3)$, $M(6; 1)$. Довести, що $KDCM$ — паралелограм.

■ За ознакою паралелограма, чотирикутник, діагоналі якого діляться навпіл, — паралелограм. Знайдемо координати середин діагоналей KC і DM чотирикутника $KDCM$ за формулами $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$. Координати середини сторони KC: $x=\frac{1+8}{2}=4{,}5$; $y=\frac{1+3}{2}=2$; координати середини сторони DM: $x=\frac{3+6}{2}=4{,}5$; $y=\frac{3+1}{2}=2$. Отже, діагоналі мають спільну середину — точку $(4{,}5; 2)$. Тому чотирикутник $KDCM$ — паралелограм. ■

Приклад 6. Визначити центр і радіус кола, заданого рівнянням $x^2-6x+y^2-2y-26=0$.

■ Зведемо дане рівняння до вигляду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$: $x^2-6x+y^2-2y-26=(x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)-36=0$; $(x-3)^2+(y-1)^2=36$. Отже, $(3; 1)$ — центр кола, $R=6$ — радіус кола.

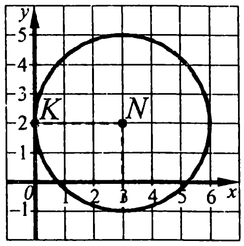
Відповідь. $(3; 1)$; 6. ■

Приклад 7. Скласти рівняння прямої, паралельної до прямої $5x+y-1=0$, яка проходить через точку $A(1; 2)$.

■ Запишемо рівняння прямої у вигляді $y=kx+m$: $y=-5x+1$. Тоді $y=-5x+m$ — шукана пряма. Оскільки вона проходить через точку $A(1; 2)$, то: $2=-5\cdot 1+m$, $m=7$. Отже, $y=-5x+7$ — шукане рівняння прямої.

Відповідь. $y=-5x+7$. ■

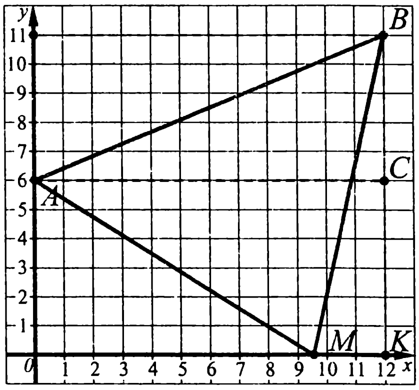
Приклад 8. Скласти рівняння кола з центром на прямій $x = 3$, що дотикається до осі ординат у точці $K(0; 2)$.



■ Точка $N(3; y)$ — центр кола, оскільки вона лежить на прямій $x = 3$ (див. рис.). За властивістю дотичної, $y \perp KN$. Отже, $y = 2$, $R = 3$, $N(3; 2)$. Використавши формулу рівняння кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $a = 3$, $b = 2$, $R = 3$, одержимо: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ — шукане рівняння кола.

Відповідь. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$. ■

Приклад 9. Відстань між населеними пунктами A та B, розміщеними з одного боку від залізничної колії, становить 13 км, а від них до колії — відповідно 6 км і 11 км. Де слід побудувати залізничну станцію, щоб вона була однаково віддалена від пунктів A та B? Знайти відстань від станції до пункту A. Результат округлити до цілих.



■ Уведемо систему координат так, щоб вісь x збігалася із залізничною колією, а пункт A розміщувався на осі y. Тоді $OA = 6$ км, $BK = 11$ км. $A(0; 6)$, $B(m; 11)$. $AB = 13$. Оскільки $AB = 13$, то за формулою відстані між точками на координатній площині одержимо: $(m - 0)^2 + (11 - 6)^2 = 13^2$; $m^2 = 169 - 25$; $m^2 = 144$; $m = \pm 12$. $m = -12$ не підходить. Отже, $B(12; 11)$. Знайдемо точку $M(x; 0)$, рівновіддалену від точок $A(0; 6)$ і $B(12; 11)$. $AM^2 = (0 - x)^2 + (6 - 0)^2 = x^2 + 36$; $BM^2 = (12 - x)^2 + (11 - 0)^2 = 144 - 24x + x^2 + 121$. З рівності $AM^2 = BM^2$ одержимо: $x^2 + 36 = 144 - 24x + x^2 + 121$; $24x = 229$; $x \approx 9{,}5$ (км). Отже, $M(9{,}5; 0)$ — точка, у якій має розміститися залізнична станція. $AM = BM = \sqrt{9{,}5^2 + 36} = \sqrt{127} \approx 11{,}3$ (км). Округливши результат до цілих, одержимо: 11,3 км ≈ 11 км.

Відповідь. 11 км. ■

Приклад 10. Довести, що трикутник з вершинами $A(2; 0; 5)$, $B(3; 4; 0)$ і $C(2; 4; 0)$ прямокутний. Знайти координати центра кола, описаного навколо трикутника ABC. У відповідь записати суму координат центра.

■ $AB^2 = (3-2)^2 + (4-0)^2 + (0-5)^2 = 42$; $BC^2 = (3-2)^2 + (4-4)^2 + (0-0)^2 = 1$;

$CA^2 = (2-2)^2 + (4-0)^2 + (0-5)^2 = 41$. $42 = 41 + 1$; $42 = 42$. Отже, за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник ABC прямокутний з гіпотенузою AB. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи. Її координати: $x = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$; $y = \frac{0+4}{2} = 2$; $z = \frac{0+5}{2} = 2{,}5$.

Отже, точка $(2{,}5; 2; 2{,}5)$ — центр кола. Тоді $2{,}5 + 2 + 2{,}5 = 7$.

Відповідь. 7. ■

Приклад 11. Скласти рівняння сфери, яка проходить через початок координат, а центр її міститься в точці $C(4; -4; 2)$.

■ Оскільки сфера проходить через початок координат, то її радіус дорівнює відстані від центра C сфери до початку системи координат. $R = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = 6$. Отже, рівняння сфери: $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 36$. ■

Приклад 12. На осі аплікат знайдіть точку A, рівновіддалену від точок $M(-2; 3; 5)$ і $N(3; -5; 1)$.

■ Нехай шукана точка має координати $A(0; 0; z)$. За умовою, $AM = AN$, звідки $AM^2 = AN^2$. Оскільки $AM^2 = 4 + 9 + (z - 5)^2$, $AN^2 = 9 + 25 + (z - 1)^2$, то: $13 + (z - 5)^2 = 34 + (z - 1)^2$; $8z = 3$; $z = \frac{3}{8}$. Отже, $A\left(0; 0; \frac{3}{8}\right)$. ■

Завдання 41.1–41.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

41.1. Точки $A(2; -4; -8)$ і $B(10; -20; 6)$ симетричні відносно точки C. Знайти координати точки C.

А	Б	В	Г	Д
(–10; 20; –6)	(3; –4; –0,5)	(12; –24; –1)	(6; –12; –1)	(–2; 4; –8)

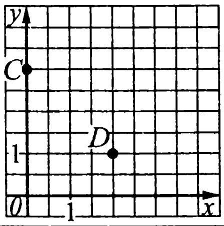
41.2. Скласти рівняння кола, в якого відрізок MN — діаметр і $M(7; 6)$, $N(11; 9)$.

А	Б	В	Г	Д
$(x-7)^2+(y-6)^2=$ $=6{,}25$	$(x+9)^2+(y+7{,}5)^2=$ $=6{,}25$	$(x-9)^2+(y-7{,}5)^2=$ $=6{,}25$	$(x-9)^2+(y-7{,}5)^2=$ $=25$	$(x+9)^2+(y+7{,}5)^2=$ $=9$

41.3. Дано трикутник ABC, вершини якого мають координати $A(-2; 6)$, $B(-2; -2)$ і $C(4; -2)$. Знайти довжину медіани BM.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

41.4. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $C(0; 3)$ і $D(2; 1)$.



А	Б	В	Г	Д
$y=x+3$	$y=x+1$	$y=x+2$	$y=-x+1$	$y=2$

41.5. Знайти координати точки, яка симетрична точці $A(1; 2; 3)$ відносно площини xy.

А	Б	В	Г	Д
(–1; –2; –3)	(–1; –2; 3)	(1; –2; 3)	(–1; 2; 3)	(1; 2; –3)

41.6. Знайти координати точки, яка симетрична точці $M(10; 20; 30)$ відносно осі аплікат.

А	Б	В	Г	Д
(–10; –20; 30)	(10; 20; 30)	(10; 20; 0)	(–10; –20; –30)	(10; 20; –30)

41.7. При паралельному перенесенні точка $A(1; 2; 6)$ переходить у точку $A_1(6; 7; 0)$. Вказати координати точки, у яку при цьому переходить точка $B(7; 9; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
(21; 31,5; 0)	(2; 4; 7)	(12; 14; –5)	(12; 14; 7)	(–12; –14; 5)

41.8. Знайти відстань від точки $M(5; 4; 12)$ до осі ординат.

А	Б	В	Г	Д
5	4	12	13	21

41.9. Знайти відстань від точки $P(3; -6; 8)$ до площини yz.

А	Б	В	Г	Д
3	4	6	8	10

41.10. Скласти рівняння сфери, яка проходить через початок координат із центром у точці $S(-1; 2; -3)$.

А	Б	В	Г	Д
$(x-1)^2+(y+2)^2+$ $+(z-3)^2=14$	$(x+1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+3)^2=2$	$(x+1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+3)^2=14$	$(x-1)^2+(y+2)^2+$ $+(z-3)^2=2$	$(x+1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+3)^2=10$

41.11. Вказати рівняння кола, яке на площині симетричне до кола $(x-4)^2+(y+5)^2=9$ відносно осі y.

А	Б	В	Г	Д
$(x+5)^2+$ $+(y-4)^2=9$	$(x-5)^2+$ $+(y+4)^2=9$	$(x+4)^2+$ $+(y-5)^2=9$	$(x-4)^2+$ $+(y-5)^2=9$	$(x+4)^2+$ $+(y+5)^2=9$

41.12. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(5; -2)$, яка дотикається до осі ординат.

А	Б	В	Г	Д
$(x+5)^2+(y+2)^2=$ $=25$	$(x+5)^2+(y-2)^2=$ $=4$	$(x-5)^2+(y+2)^2=$ $=4$	$(x-5)^2+(y+2)^2=$ $=5$	$(x-5)^2+(y+2)^2=$ $=25$

41.13. Скласти рівняння сфери з центром у точці $A(-1; 3; 2)$, яка дотикається до площини xy.

А	Б	В	Г	Д
$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=10$	$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=4$	$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=13$	$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=2$	$(x-1)^2+(y+3)^2+$ $+(z+2)^2=2$

41.14. Знайти координати центра кола $x^2-4x+y^2+10y+20=0$.

А	Б	В	Г	Д
(2; 5)	(–2; 5)	(–2; –5)	(2; –5)	(4; –10)

41.15. Знайти радіус сфери $x^2+y^2-2y+z^2+6z-6=0$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

41.16. Дано $ABCD$ — паралелограм. $A(-4; 1; 5)$, $B(-5; 4; 2)$, $C(3; -2; -1)$. Знайти координати вершини D.

А	Б	В	Г	Д
(12; 7; –8)	(6; –3; –6)	(–6; 3; 6)	(–12; 7; 8)	(4; –5; 2)

41.17. Дано $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. $A(7; 0; 0)$, $B(5; 0; 0)$, $C_1(5; 2; 2)$. Знайти координати вершини D_1.

А	Б	В	Г	Д
(7; 5; 2)	(5; 2; 0)	(2; 2; 2)	(7; 2; 2)	(7; 0; 2)

41.18. Дано трикутник ABC з вершинами $A(2; 2; -4)$, $B(2; -1; -1)$, $C(3; -1; -2)$. Знайти зовнішній кут при вершині B.

А	Б	В	Г	Д
60°	90°	120°	135°	інша відповідь

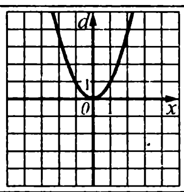
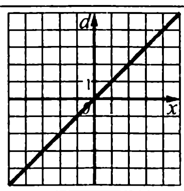
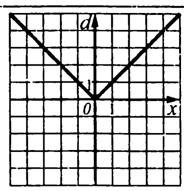
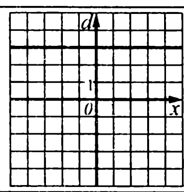
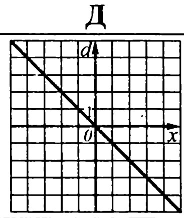
41.19. Точки $A(2; 4)$ і $C(5; 8)$ є вершинами квадрата $ABCD$. Знайти площу цього квадрата.

А	Б	В	Г	Д
2,5	5	12,5	25	20

41.20. Точки $A(-1; 0; 2)$ і $B(0; 1; 1)$ є вершинами правильного трикутника. Знайти площу цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	3	9

41.21. $d(x)$ — відстань від точки $M(x; 0; 0)$ до площини yz. Який з наведених графіків є графіком функції $d = d(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 41.22–41.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

41.22. При паралельному перенесенні точка $A(1; 3; 2)$ переходить у точку $A'(3; 0; 1)$. Установити відповідність між точками (1–4) та точками (А–Д), утвореними при цьому паралельному перенесенні.

1 $M_1(1; 3; 0)$	**А** $M'(2; -2; -3)$
2 $M_2(6; 8; -1)$	**Б** $M'(8; 5; -2)$
3 $M_3(0; 1; -2)$	**В** $M'(3; 0; -1)$
4 $M_4(-1; 2; 3)$	**Г** $M'(2; -3; -1)$
	Д $M'(1; -1; 2)$

41.23. Установити відповідність між центрами і радіусами сфер (1–4) та їх рівняннями (А–Д).

1 $C_1(1; 2; 0)$; 4	**А** $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 1 = 0$
2 $C_2(3; 0; -1)$; 3	**Б** $x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 2z - 8 = 0$
3 $C_3(0; 4; 1)$; 5	**В** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$
4 $C_4(2; 3; 1)$; 10	**Г** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 11 = 0$
	Д $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z - 86 = 0$

41.24. Установити відповідність між парами точок (1–4), та відстанями між цими точками (А–Д).

1 $M_1(1; 3; 4)$, $N_1(2; 1; 2)$	**А** 3
2 $M_2(3; 5; 1)$, $N_2(0; 1; 1)$	**Б** 13
3 $M_3(-2; 3; 4)$, $N_3(6; 3; -2)$	**В** 5
4 $M_4(1; -2; 5)$, $N_4(1; 10; 0)$	**Г** 7
	Д 10

Розв'яжіть завдання 41.25–41.32. Відповідь запишіть десятковим дробом.

41.25. На осі ординат знайти ординату точки, рівновіддаленої від точки $A(-4; 2)$ і початку координат.

41.26. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2; 5)$ й утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45°. У відповідь записати абсцису точки перетину прямої з віссю абсцис.

41.27. Знайти площу трикутника, обмеженого осями координат і прямою $4x + 3y = 24$.

41.28. Знайти квадрат довжини медіани AA_1 трикутника ABC, якщо $A(3; -2; 1)$, $B(3; 1; 5)$ і $C(4; 0; 3)$.

41.29. Знайти радіус сфери заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.

41.30. Скласти рівняння кола з центром на осі ординат, яке проходить через точки $A(-3; 0)$, $B(0; 9)$. У відповідь записати довжину радіуса кола.

41.31. Точка $M(2; 6; 3)$ — середина відрізка, кінці якого лежать на осі x і на площині yz. Знайти довжину відрізка.

41.32. На ділянці, яка обмежена з двох боків взаємно перпендикулярними дорогами, посадили сад. Відстань від яблуні до першої дороги становить 3 м, а до другої — 4 м. Відстань від груші до першої дороги дорівнює 6 м, а до другої — 8 м. Знайти відстань між цими деревами.

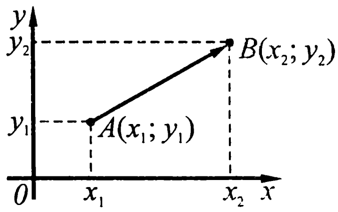
Тема 42. Вектори

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

Вектором називають напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано, який з його кінців є початком, а який — кінцем. На рис. 1 зображено вектор $\overrightarrow{AB}$, A — початок вектора, B — кінець вектора. Позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\overline{AB}$. Риска або стрілка над назвою вектора заміняють слово «вектор». Вектори позначають також малими латинськими буквами: $\overline{a}$ або $\vec{a}$, $\overline{b}$ або $\vec{b}$ (рис. 2). При позначенні вектора двома буквами на першому місці ставлять його початок. Щоб задати вектор, достатньо вказати його початок і кінець.

Координати вектора

Координатами вектора з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ (див. рис.). Отже, координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат його кінця і початку. Записують: **а)** $\overrightarrow{AB}(a_1; a_2)$ або **б)** $\vec{a}(a_1; a_2)$ або **в)** $\overline{(a_1; a_2)}$; читають **а)** вектор AB з координатами a_1 і a_2, **б)** вектор a з координатами a_1 і a_2, **в)** вектор з координатами a_1 і a_2.



Довжина вектора

Довжиною (модулем) вектора називають довжину відрізка, що зображає цей вектор. На рис. 1 довжина вектора AB дорівнює 3 см. Записують $\left|\overline{AB}\right| = 3$ см. Довжину вектора $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ обчислюють за формулою $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Довжина і напрям вектора не залежатьт від розміщення його початку у системі координат.

Рис. 1

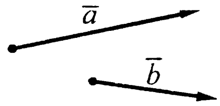


Рис. 2

Нуль-вектором (нульовим вектором) називають вектор, початок і кінець якого збігаються. Позначають: $\vec{0}$ або $\overline{0}$. Нуль-вектор не має напрямку, а його довжина дорівнює нулю: $\left|\overline{0}\right| = 0$. Будь-яку точку X площини можна вважати нульовим вектором $\overline{XX}$.

Одиничним вектором називають вектор, довжина якого дорівнює 1. Позначають $\overline{e}$. За означенням, $\left|\overline{e}\right| = 1$.

Колінеарність векторів

Ненульові вектори називають *колінеарними*, якщо вони паралельні до однієї прямої.

На рис. 3 $a||b$, вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{NK}$ — колінеарні. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають *однаково напрямленими* (*співнапрямленими*), якщо промені AB і CD однаково напрямлені. На рис. 4 вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ однаково напрямлені. Позначають: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{KF}$ називають *протилежно напрямленими*, якщо промені $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{KF}$ протилежно напрямлені. На рис. 5 вектори MN і KF протилежно напрямлені. Позначають: $\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KF}$.

Якщо вектори $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ колінеарні, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$, і навпаки, якщо $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$, то вектори колінеарні. Вектори *протилежно напрямлені*, якщо $k < 0$, і однаково напрямлені, якщо $k > 0$.

Вектори називають *протилежними*, якщо вони мають рівні довжини (модулі) і протилежно напрямлені. На рис. 6 вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — протилежні: $\vec{m} = -\vec{n}$, тому що $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$ і $|\vec{m}| = |\vec{n}|$.

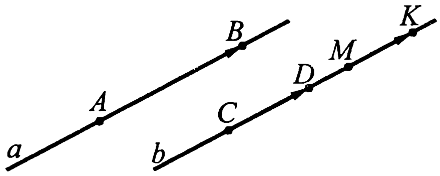


Рис. 3

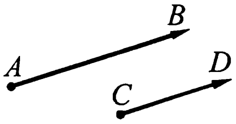


Рис. 4

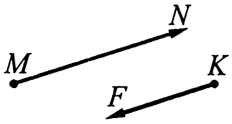


Рис. 5

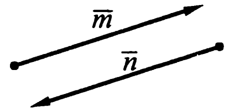
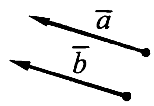


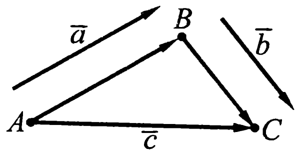
Рис. 6

Рівність векторів.



Вектори називають рівними, якщо вони співнапрямлені та мають однакові довжини (модулі). На рисунку вектори a і b рівні $\vec{a} = \vec{b}$, тому що $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Можна сказати й так: два вектори будуть рівними, якщо рівними є їхні відповідні координати: $\vec{a}\,(a_1;\,a_2) = \vec{b}\,(b_1;\,b_2)$, якщо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Сума векторів $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$



Якщо від довільної точки A відкласти вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, потім від точки B — вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ і сполучити початок вектора $\overrightarrow{AB}$ з кінцем вектора $\overrightarrow{BC}$, то одержимо вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, який називають *сумою* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (див. рис.). Записують: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Щоб додати вектори, можна додати їх відповідні координати. Наприклад, сумою векторів $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$ є вектор $\vec{c}\,(c_1;\,c_2)$ з координатами $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$. Отже, $\left(\overline{a_1;a_2}\right) + \left(\overline{b_1;b_2}\right) = \left(\overline{a_1 + b_1;a_2 + b_2}\right)$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$; $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$ і $\vec{c}\,(c_1;\,c_2)$ виконуються властивості:

1) переставна: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2) сполучна: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

3) додавання нульового вектора: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) додавання протилежних векторів: $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$.

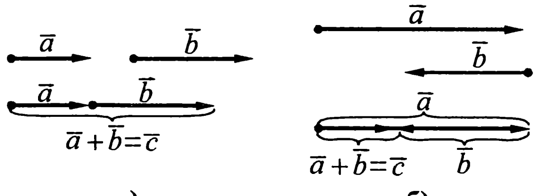
Для будь-яких точок A, B і C справджується векторна рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Побудувати вектор-суму неколінеарних векторів (або додати вектори) можна за:

1) правилом трикутника. Якщо будувати суму двох неколінеарних ненульових векторів, виходячи з означення, то утвориться трикутник (рис. 7). Цей спосіб знаходження суми двох векторів називають додаванням векторів за правилом трикутника: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Побудова суми векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у випадку, коли вони колінеарні, показано на рис. 8.

а) б)

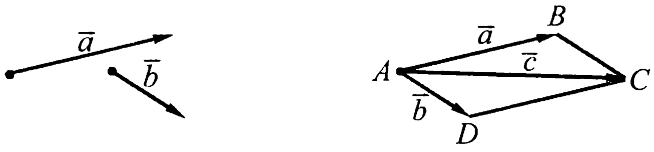
Рис. 7



а) б)

Рис. 8

2) правилом паралелограма. Щоб додати вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 9 а) за правилом паралелограма, потрібно від довільної точки A відкласти вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, потім побудувати на цих векторах як на сторонах паралелограм $ABCD$. Діагональ цього паралелограма — вектор $\overrightarrow{AC}$ є сумою $\vec{c}$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 9 б).



а) б)

Рис. 9

3) правилом многокутника. Щоб додати кілька векторів за правилом многокутника, потрібно вектори-доданки відкладати так, щоб початок другого вектора збігався з кінцем першого, початок третього — з кінцем другого і т. д. Тоді вектор, початок якого є початком першого вектора, а кінець — кінцем останнього, буде *вектором-сумою* (рис. 10): $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

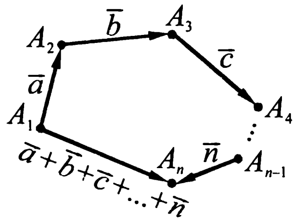


Рис. 10

Різниця векторів $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$ ($\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$), який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Щоб побудувати вектор-різницю, або відняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 11 а), потрібно: відкласти вектори від однієї точки (рис. 11 б). Вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець — з кінцем вектора $\vec{a}$, буде різницею $\vec{a} - \vec{b}$. Отже, вектор-різниця сполучає кінці векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ й напрямлений у бік зменшуваного.

а) б)

Рис. 11

Добуток вектора на число

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на число $k \neq 0$ називають вектор $\vec{b}$, довжина якого дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на модуль числа k. Напрям вектора $\vec{b}$ збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, коли $k > 0$, і протилежний до напряму вектору $\vec{a}$, коли $k < 0$ (рис. 12). Записують: $\vec{b} = k\vec{a}$.

а) б)

Рис. 12

Щоб помножити вектор на число, можна помножити його координати на це число. Наприклад, добутком вектора $\vec{a}\,(a_1;\,a_2)$ на число k буде вектор $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$ з координатами $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$. Отже, $\vec{b} = k\overrightarrow{(a_1;a_2)} = \overrightarrow{(ka_1;ka_2)}$.

Множення вектора на число має такі властивості:

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

2. $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

3. $k \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = 0$.

4. Переставний закон: $k \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot k$.

5. Сполучний закон: $k \cdot (m \cdot \vec{a}) = (k \cdot m) \cdot \vec{a}$.

6. Розподільний закон: $k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} = (k+m) \cdot \vec{a}$; $k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} = k(\vec{a} + \vec{b})$.

Кут між векторами

Кутом між ненульовими векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ називають кут BAC (рис. 13). Кутом між довільними векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають кут між векторами, що дорівнюють даним векторам і мають спільний початок. На рис. 14 $\angle MNK$ — кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Позначають $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

1. Якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.
2. Якщо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$.
3. Якщо $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, то вектори називають перпендикулярними (пишуть $\vec{a} \perp \vec{b}$).

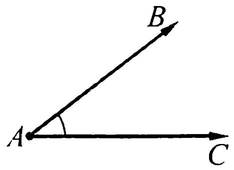


Рис. 13

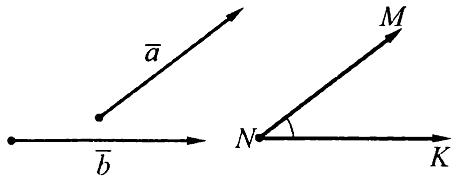


Рис. 14

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Скалярним добутком двох ненульових векторів називають число, що дорівнює добутку їх довжин та косинуса кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$. Звідси $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Скалярний добуток векторів має такі властивості:

1. Переставну $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. Сполучну $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (відносно скалярного множника).

3. Розподільну $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$.

Скалярним квадратом вектора $\vec{a}$ називають скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ і позначають: $\vec{a}^{\,2}$: $\vec{a}^{\,2} = a_1^2 \cdot a_2^2 = |\vec{a}|^2$.

Косинус кута між ненульовими векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Властивість і ознака перпендикулярних ненульових векторів

Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ і навпаки, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

Координати вектора

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$; $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1) = \overrightarrow{AB}(a_1; a_2; a_3)$, де $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$; $a_3 = z_2 - z_1$.

Рівність векторів

$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, якщо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Колінеарність векторів.

Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ колінеарні, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$.

Сума векторів

Сумою векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ є вектор $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$, такий що $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$, тобто $\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} + \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)}$.

Різниця векторів

$\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} - \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)}$.

Модуль (довжина) вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Множення вектора на число

$\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} \cdot \lambda = \overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, де φ — кут між векторами.

Косинус кута між ненульовими векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Приклад 1. За якого значення m вектори $\vec{a}(2; -4)$ і $\vec{b}(m; 2m - 1{,}5)$ будуть перпендикулярними?

А	Б	В	Г	Д
1	–1	2	1,5	–6

■ $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. $2m - 4(2m - 1{,}5) = 0$; $2m - 8m + 6 = 0$; $-6m = -6$; $m = 1$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 2. За якого значення t вектори $\vec{a}(8; t; 6)$ і $\vec{d}(4; 2; 3)$ будуть перпендикулярними?

А	Б	В	Г	Д
–23	25	–5	5	–25

■ Не нульові вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ будуть перпендикулярними лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто коли $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ або $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$. Для векторів $\vec{a}(8; t; 6)$ і $\vec{d}(4; 2; 3)$ отримаємо: $8 \cdot 4 + t \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 0$; $2t + 50 = 0$; $t = -25$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 3. Знайти координати вектора CD і вектора, йому протилежного, якщо: **а)** $C(3; -2)$, $D(-2; 5)$; **б)** $C(-5; 7)$, $D(4; -6)$.

■ Координати вектора обчислюють за формулами $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

а) $a_1 = -2 - 3 = -5$, $a_2 = 5 - (-2) = 7$. Отже, $\overrightarrow{CD}(-5;7)$. $\overrightarrow{DC}$ — вектор, протилежний $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}(5; -7)$;

б) $a_1 = 4 - (-5) = 9$, $a_2 = -6 - 7 = -13$. Отже, $\overrightarrow{CD}(9;-13)$; $\overrightarrow{DC}(-9; 13)$.

Відповідь. **а)** $(-5; 7)$, $(5; -7)$; **б)** $(9; -13)$, $(-9; 13)$. ■

Приклад 4. Модуль вектора $\vec{a}\,(12; n)$ дорівнює 13. Знайти n.

■ $\left|\vec{a}\right|^2 = a_1^2 + a_2^2$; $13^2 = 12^2 + n^2$; $n^2 = 169 - 144 = 25$; $n = \pm 5$.

Відповідь. -5, 5. ■

Приклад 5. Дано точки $A(3; 5)$, $B(-1; -2)$ і $C(0; 4)$. Знайти таку точку D, щоб вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ були рівними.

■ Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}(a_1;a_2)$, $a_1 = -1 - 3 = -4$, $a_2 = -2 - 5 = -7$. Отже, $\overrightarrow{AB}(-4;-7)$. Якщо вектори рівні, то їх відповідні координати рівні. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, тому $\overrightarrow{CD}(-4;-7)$. Знаючи координати вектора $\overrightarrow{CD}$, знайдемо координати його кінця: $x_2 = a_1 + x_1$, $x_2 = -4 + 0 = -4$; $y_2 = a_2 + y_1$, $y_2 = -7 + 4 = -3$. Отже, $D(-4; -3)$ — шукана точка.

Відповідь. $(-4; -3)$. ■

Приклад 6. За якого значення n вектори $\vec{a}\,(n + 5; -8)$ і $\vec{b}\,(5; 1 - n)$ колінеарні?

■ Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть колінеарними, якщо $\frac{n+5}{5} = \frac{-8}{1-n}$. Звідси: $(n + 5)(1 - n) = 5 \cdot (-8)$; $n + 5 - n^2 - 5n = -40$; $n^2 + 4n - 45 = 0$; $n_1 = -9$, $n_2 = 5$. Отже, вектори будуть колінеарними, якщо $n = -9$ або $n = 5$.

Відповідь. -9; 5. ■

Приклад 7. Знайти координати та довжину вектора $\vec{c}$, який дорівнює $\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a}\,(-10; 5)$, $\vec{b}\,(25; 3)$.

■ Нехай c_1 і c_2 — координати вектора $\vec{c}$. $c_1 = a_1 + b_1$, $c_1 = -10 + 25 = 15$; $c_2 = a_2 + b_2$, $c_2 = 5 + 3 = 8$. Отже, $\vec{c}\,(15; 8)$. $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$.

Відповідь. $\overrightarrow{(15;8)}$; 17. ■

Приклад 9. Спростити вираз $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$.

■ Маємо: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA} + \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}\right) + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \vec{0} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}$.

Відповідь. $\overrightarrow{PQ}$. ■

Приклад 10. Дано: $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 1$, $\varphi = 60°$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти: **а)** скалярний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a}$; **б)** модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$; **в)** косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{a} + \vec{b}$.

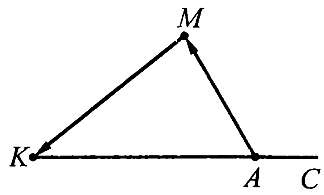
■ **а)** $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} + \vec{a}\,\vec{b} = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = 4 + 2 \cdot 1 \cdot \cos 60° = 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$;

б) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2}} = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60° + 1} = \sqrt{4 + 2 + 1} = \sqrt{7}$;

в) якщо α — кут між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}$, то $\cos\alpha=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}|}$, $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{7}\cdot 2}$, $\cos\alpha=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$.

Відповідь. **а)** 5; **б)** $\sqrt{7}$; **в)** $\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$. ■

Приклад 11. Знайти у градусах зовнішній кут при вершині A трикутника AMK, якщо $A(2; -2; -3)$, $M(4; -2; -1)$, $K(2; 2; 1)$.



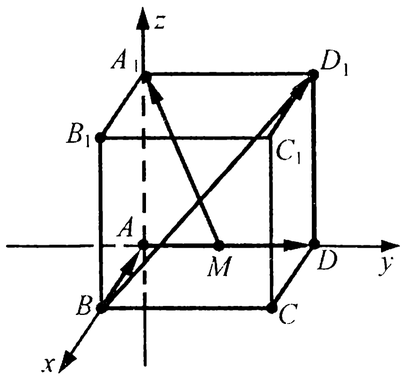
■ Кут KAM — кут між векторами $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AM}$.

Знайдемо модулі цих векторів. $\overrightarrow{AK}$ $(2-2; 2+2; 1+3)$. $\overrightarrow{AK}$ $(0; 4; 4)$, тоді $|\overrightarrow{AK}|=\sqrt{0^2+4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$. $\overrightarrow{AM}$ $(4-2;\ -2+\ 2;\ -1+\ 3)$. $\overrightarrow{AM}$ $(2; 0; 2)$, тоді $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM}=0\cdot 2+4\cdot 0+4\cdot 2=8$.

$\cos\angle KAM=\dfrac{\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AK}|\cdot|\overrightarrow{AM}|}=\dfrac{8}{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$; $\angle KAM=60°$. Тоді $\angle CAM=180°-60°=120°$.

Відповідь. 120. ■

Приклад 12. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{MA_1}$, де M — середина ребра AD.



■ Задамо в просторі систему координат, початком якої є вершина A куба, а осі x, y і z містять відповідно ребра AB, AD, AA_1. Приймемо довжину ребра куба за одиницю. Тоді:

$B(1; 0; 0)$, $D_1(0; 1; 1)$, $M(0; 0{,}5; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$; $\overrightarrow{BD_1}$ $(-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{MA_1}$ $(0; -0{,}5; 1)$.

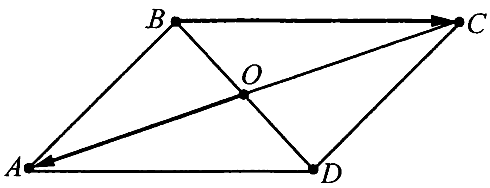
Знаходимо кут φ між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{MA_1}$:

$$\cos\varphi=\frac{(-1)\cdot 0+1\cdot(-0{,}5)+1\cdot 1}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{0{,}25+1}}=\frac{0{,}5}{\sqrt{3\cdot 1{,}25}}=\frac{0{,}5}{\sqrt{3\cdot 0{,}25\cdot 5}}=\frac{0{,}5}{0{,}5\cdot\sqrt{15}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{15}};\ \varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Відповідь. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. ■

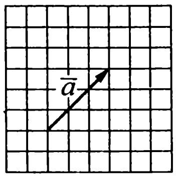
Завдання 42.1–42.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

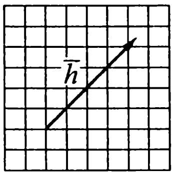
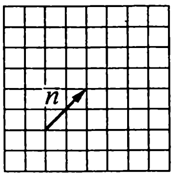
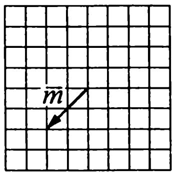
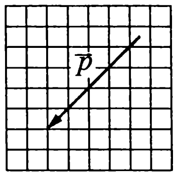
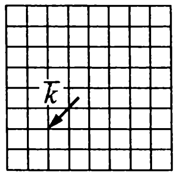
42.1. Дано паралелограм $ABCD$. O — точка перетину діагоналей. Який з наведених векторів дорівнює сумі $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}$?



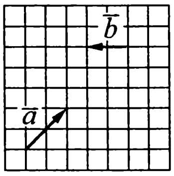
А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{OC}$	$\overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{OD}$	$\overrightarrow{AD}$

42.2. Дано вектор $\vec{a}$. Який з наведених векторів дорівнює $-\frac{2}{3}\vec{a}$?

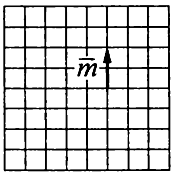
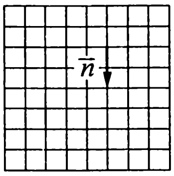
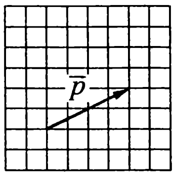
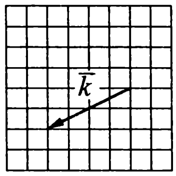
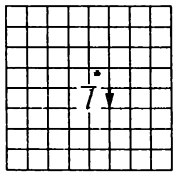


А	Б	В	Г	Д
				

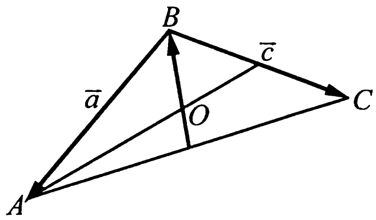
42.3. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Який з наведених векторів дорівнює різниці $\vec{a} - \vec{b}$?

А	Б	В	Г	Д
				

42.4. O — точка перетину медіан трикутника ABC. $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Виразити вектор $\overrightarrow{OB}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$.



А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$

42.5. Дано точки $A(5; -6; 7)$ і $B(8; -2; 7)$. Знайти абсолютну величину вектора $\overrightarrow{AB}$.

А	Б	В	Г	Д
5	25	$\sqrt{133}$	$9\sqrt{2}$	4

42.6. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(-1; 1; -1)$, $B(-1; 1; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	3	1

42.7. Серед векторів $\vec{a}(4; 14; 2)$, $\vec{b}(2; 7; -1)$, $\vec{c}(0; 0; 3)$, $\vec{d}(-6; -21; 3)$ знайти колінеарні.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a}$ і $\vec{c}$	$\vec{a}$ і $\vec{d}$	$\vec{b}$ і $\vec{c}$	$\vec{b}$ і $\vec{d}$

42.8. За якого значення n вектори $\vec{a}(n+5; -8; n+1)$ і $\vec{b}(5; 1-n; 3)$ колінеарні?

А	Б	В	Г	Д
±5	±5; 9	–9	5	5; 9

42.9. Дано вектори $\vec{a}(3; -6; 2)$ і $\vec{b}(8; 4; 5)$. Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

А	Б	В	Г	Д
–17	0	–5760	10	–3

42.10. Обчислити квадрат довжини вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\vec{c}(2; -2; 3)$ і їх скалярний добуток дорівнює 34.

А	Б	В	Г	Д
17	$\sqrt{17}$	2	4,5	68

42.11. За якого значення x вектори $\vec{a}(3; 0; 6)$ і $\vec{b}(-8; 7; x)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
6	4	2	–4	–2

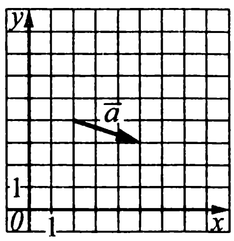
42.12. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 4. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

А	Б	В	Г	Д
8	–8	4	–4	2

42.13. Знайти кут між векторами $\vec{a}(1; 0; -1)$ і $\vec{b}(0; -1; 1)$.

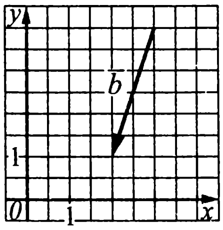
А	Б	В	Г	Д
60°	120°	45°	135°	150°

42.14. Знайти координати вектора $\vec{a}$, зображеного на рисунку.



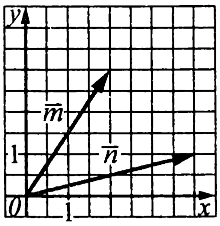
А	Б	В	Г	Д
(–3; –1)	(2; 4)	(5; 3)	(3; –1)	(3; 1)

42.15. Знайти абсолютну величину вектора $\vec{b}$, зображеного на рисунку.



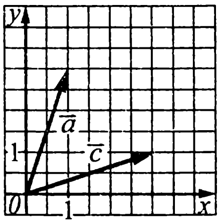
А	Б	В	Г	Д
3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{10}$	2	$\sqrt{7}$

42.16. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$.



А	Б	В	Г	Д
9	10	11	12	14

42.17. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$.



А	Б	В	Г	Д
0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

42.18. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 135°, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	5	$4\sqrt{2}$	4

42.19. Дві сили $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$ утворюють між собою кут 120°. $|\vec{F_1}| = |\vec{F_2}|$ = 10 Н. Знайти модуль рівнодійної цих сил.

А	Б	В	Г	Д
5 Н	10 Н	$5\sqrt{3}$ Н	20 Н	$10\sqrt{2}$ Н

42.20. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — ненульові вектори. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г	Д
30°	60°	45°	90°	120°

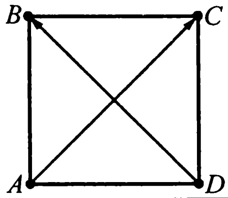
42.21. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ такі, що $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+\vec{b}|=3$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	4	6	8

42.22. Знайти модуль вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $\vec{a}(1;2)$, $\vec{b}(1;0)$.

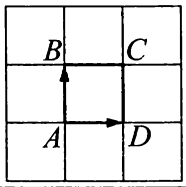
А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{41}$	3	$\sqrt{17}$	1	9

42.23. Дано квадрат *ABCD*. Який з наведених векторів дорівнює сумі $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$?



А	Б	В	Г	Д
$2\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{BC}$	$\vec{0}$	$2\overrightarrow{AC}$	$2\overrightarrow{AD}$

42.24. Дано квадрат *ABCD* зі стороною 1. Знайти $|3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$.



А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{3}$

Завдання 42.25–42.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

42.25. Установити відповідність між назвами формул для векторів $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ і $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ (1–4) та формулами (А–Д).

1 Довжина вектора $|\vec{a}|$

2 Скалярний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$

3 Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}\perp\vec{b}$

4 Умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

А $\overrightarrow{(a_1b_1;\, a_2b_2;\, a_3b_3)}$

Б $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

В $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$

Г $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

Д $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

42.26. Установити відповідність між векторами (1–4) та їх скалярними добутками (А–Д).

1 $\vec{a}_1(1;5;14)$, $\vec{b}_1(3;4;-1)$

2 $\vec{a}_2(3;0;-4)$, $\vec{b}_2(5;-7;2)$

3 $\vec{a}_3(4;-2;9)$, $\vec{b}_3(-3;1;4)$

4 $\vec{a}_4(5;-4;-1)$, $\vec{b}_4(3;4;5)$

А 7

Б 9

В –6

Г 22

Д 5

42.27. Установити відповідність між значеннями числа x (1–4) та парами векторів (А–Д), які за цих значень взаємно перпендикулярні.

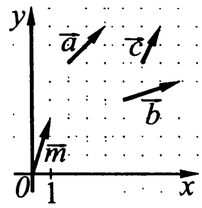
1 8
2 6
3 5
4 1

А $\vec{a}_1(2; x; -1),\ \vec{b}_1(-3; 2; x)$
Б $\vec{a}_2(-4; 5; 2x),\ \vec{b}_2(6; x; -1)$
В $\vec{a}_3(-x; 4; 2),\ \vec{b}_3(6; 3; -3x)$
Г $\vec{a}_4(2; 3x; 1),\ \vec{b}_4(x; 1; -25)$
Д $\vec{a}_5(x; -10; 1),\ \vec{b}_5(4; 1; -30)$

42.28. Установити відповідність між векторами (1–4) та їх координатами (А–Д).

1 $\vec{a}$
2 $\vec{b}$
3 $\vec{c}$
4 $\vec{m}$

А (1; 2)
Б (4; 1)
В (2; 2)
Г (3; 1)
Д (1; 3)



Розв'яжіть завдання 42.29–42.43. Відповідь запишіть десятковим дробом.

42.29. Відомо, що $|\vec{x}| = 11$, $|\vec{y}| = 23$, а $|\vec{x} - \vec{y}| = 30$. Знайти $|\vec{x} + \vec{y}|$.

42.30. Дано $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

42.31. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 120°. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$. Обчислити $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

42.32. $\vec{a}$ (4; –2; –4), $\vec{b}$ (6; –3; 2). Обчислити $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$.

42.33. Дано $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, а кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ дорівнює 120°. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{m}$ і $\vec{m} + \vec{n}$ і знайти його значення з точністю до 0,01.

42.34. Знайти довжину вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60°$, $\angle(\vec{b}; \vec{c}) = 90°$, $\angle(\vec{a}; \vec{c}) = 120°$ й обчислити його значення з точністю до 0,01.

42.35. Знайти косинус кута між векторами $-5\vec{a}$ і $\frac{1}{5}\vec{b}$ з точністю до 0,01, якщо $\vec{a}$ (–1; 1; 4) і $\vec{b}$ (1; 0; –1).

42.36. Дано вектори $\vec{a}$ (–2; 0), $\vec{b}$ (1; –1) і $\vec{c}$ (2; 3). За якого значення k вектори $2\vec{a} - k\vec{b}$ та $\vec{c}$ будуть колінеарними?

42.37. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ (3; 0; –4) і $\overrightarrow{AD}$ (0; 5; 0).

42.38. Дано трикутник MPK, M(–3; –2), P(1; 4), K(2; –1). Знайти у градусах величину кута M.

42.39. Дано вектор $\vec{a}$ (2; 1; –3). Знайти квадрат довжини вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$ і вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$.

42.40. Дано $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60°$. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ з точністю до 0,01.

42.41. Знайти косинус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$(3; 2) і $\vec{b}$(1; –2) з точністю до 0,01.

42.42. Знайти косинус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 4\vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 4\vec{m} + \vec{n}$ з точністю до 0,01, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $\varphi = \angle(\vec{m}; \vec{n}) = 60°$.

42.43. На озері від пристані одночасно відпливають два катери. Один з них рухається зі швидкістю 25 км/год під кутом 30° до берега, а інший — зі швидкістю 30 км/год перпендикулярно до берега. Якою буде відстань між човнами через 6 хв? Відповідь округли до сотих кілометра.