Тема 6. Логарифмічні та показникові вирази

Показникові співвідношення

Показникові тотожності.

1. $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$. Наприклад, $3^{x+2}=3^x\cdot 3^3=9\cdot 3^x$.

2. $a^{x-y}=a^x:a^y$. Наприклад, $2^{5-x}=2^5:2^x=\dfrac{32}{2^x}$.

3. $a^{xy}=(a^x)^y=(a^y)^x$. Наприклад, $7^{2x}=(7^2)^x=49^x$; $\left(\dfrac{27}{64}\right)^x=\left(\dfrac{3^3}{4^3}\right)^x=\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\right)^x=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3x}$.

4. $a^x\cdot b^x=(ab)^x$. Наприклад, $2^x\cdot 3^x=(2\cdot 3)^x=6^x$.

5. $\dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, якщо $b\neq 0$. Наприклад, $\dfrac{3^x}{5^x}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x$.

6. $a^0=1$, якщо $a\neq 0$. Наприклад, $7^0=\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=0{,}09^0=1$.

7. $a^1=a$. Наприклад, $5^1=5$; $\left(\dfrac{1}{7}\right)^1=\dfrac{1}{7}$.

8. $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, якщо $a\neq 0$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$. Наприклад, $2^{-x}=\dfrac{1}{2^x}$; $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-3}=\left(\dfrac{9}{4}\right)^3$.

9. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, якщо $a>0$, $n\in N$. Наприклад, $7^{\frac{x-4}{x}}=\sqrt[x]{7^{x-4}}$.

Логарифм

Логарифмом додатного числа b за основою a ($a>0$, $a\neq 1$) називають показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб отримати число b. Тобто якщо $a^x=b$ і $a>0$, $a\neq 1$, то $\log_a b=x$ і, навпаки, якщо $\log_a b=x$, то $a^x=b$. Наприклад, $\log_3 81=4$, бо $3^4=81$.

Логарифм за основою 10 називають *десятковим*. Записують: $\log_{10}x=\lg x$.

Логарифм за основою $e\approx 2{,}718281828459045...$ називають *натуральним*. Записують: $\log_e x=\ln x$.

Логарифмічні тотожності.

1. Основна логарифмічна тотожність: $a^{\log_a b}=b$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$. Наприклад, $3^{\log_3 5}=5$; $2^{-\log_2 5}=\dfrac{1}{2^{\log_2 5}}=\dfrac{1}{5}$; $4^{\log_2 6}=2^{2\log_2 6}=\left(2^{\log_2 6}\right)^2=6^2=36$.

2. $\log_a 1=0$, оскільки $a^0=1$. Наприклад, $\log_{13}1=0$, бо $13^0=1$.

3. $\log_a a=1$, оскільки $a^1=a$. Наприклад, $\log_5 5=1$, бо $5^1=5$.

4. $\log_a xy=\log_a|x|+\log_a|y|$, $xy>0$. Наприклад, $\log_2 40=\log_2(8\cdot 5)=\log_2 8+\log_2 5=3+\log_2 5$.

5. $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a|x|-\log_a|y|$, $\dfrac{x}{y}>0$. Наприклад, $\log_3\dfrac{3}{17}=\log_3 3-\log_3 17=1-\log_3 17$.

6. $\log_a x^p=p\log_a|x|$, $x^p>0$. Зокрема: **1)** $\log_a x^{2k}=2k\log_a|x|$, де $x\neq 0$, $k\in Z$. Наприклад, $\log_3 81=\log_3 3^4=$ $=4\log_3 3=4\cdot 1=4$; $\lg 32=\lg 2^5=5\lg 2$; 2) $\log_a\sqrt[n]{x}=\log_a x^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}\log|x|$.

7. $\log_{a^k}x=\dfrac{1}{k}\log_a x$. Наприклад, $\log_8 2=\log_{2^3}2=\dfrac{1}{3}\log_2 2=\dfrac{1}{3}$; $\log_{\sqrt{3}}3=\log_{3^{\frac{1}{2}}}3=2\log_3 3=2$. Зокрема, $\log_{a^m}x^n=\dfrac{n}{m}\log_a x$. Наприклад, $\log_4 32=\log_{2^2}2^5=\dfrac{5}{2}\log_2 2=2{,}5$.

8. Формула переходу до іншої основи: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, де $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$. Наприклад, $\log_{25}3 = \dfrac{\log_5 3}{\log_5 25} = \dfrac{\log_5 3}{2}$; $\log_7 11 = \dfrac{\lg 11}{\lg 7}$. Зокрема, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. Наприклад, $\log_3 10 = \dfrac{1}{\log_{10} 3} = \dfrac{1}{\lg 3}$.

9. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$. Наприклад, $2^{\log_5 x} + 4x^{\log_5 2} = x^{\log_5 2} + 4x^{\log_5 2} = 5x^{\log_5 2}$.

Логарифмування

Обчислення логарифмів заданих чисел або виразів називають *логарифмуванням*. Наприклад, прологарифмувати вираз $x = 7abc^3$ за основою a: $\log_a x = \log_a(7abc^3) = \log_a 7 + \log_a a + \log_a b + \log_a c^3 = \log_a 7 + 1 + \log_a b + 3\log_a c$.

Потенціювання

Знаходження чисел (виразу) за даним його логарифмом називають *потенціюванням*. Наприклад, пропотенціювати вираз $\lg x = \lg 7 + 2\lg a - 3\lg b$ і знайти x: $\lg x = \lg 7 + 2\lg a - 3\lg b = \lg 7 + \lg a^2 - \lg b^3 = \lg(7 \cdot a^2) - \lg b^3 = \lg\dfrac{7a^2}{b^3}$; $\lg x = \lg\dfrac{7a^2}{b^3}$; $x = \dfrac{7a^2}{b^3}$.

Приклад 1. Обчислити: $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{18}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
3	$\dfrac{1}{27}$	27	9	$\dfrac{1}{3}$

■ $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{18}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{9\cdot 2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Обчислити: $2^{\log_4 9 + \log_2 8}$.

А	Б	В	Г	Д
10	24	12	13	6

■ $2^{\log_4 9+\log_2 8} = 2^{\log_{2^2} 3^2+\log_2 8} = 2^{\frac{2}{2}\log_2 3} \cdot 2^{\log_2 8} = 3 \cdot 8 = 24$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 3. Знайти значення виразу $\log_{20}5 + \log_{20}4 + 2$.

А	Б	В	Г	Д
11	2	3	22	51

■ $\log_{20}5 + \log_{20}4 + 2 = \log_{20}(5 \cdot 4) + 2 = \log_{20}20 + 2 = 1 + 2 = 3$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 4. Обчислити суму $3^x + 3^{-x}$, якщо $9^x + 9^{-x} = 47$.

А	Б	В	Г	Д
7	49	45	$\sqrt{23}$	$\sqrt{47}$

■ Нехай $3^x + 3^{-x} = t$. Піднесемо обидві частини рівності до квадрата й одержимо: $\left(3^x+3^{-x}\right)^2=t^2$; $3^{2x}+2\cdot3^x\cdot3^{-x}+3^{-2x}=t^2$; $\left(3^2\right)^x+2\cdot3^{x+(-x)}+\left(3^2\right)^{-x}=t^2$; $9^x+2\cdot3^0+9^{-x}=t^2$; $9^x+2\cdot1+9^{-x}=t^2$. Оскільки за умовою $9^x + 9^{-x} = 47$, то $47 + 2 = t^2$; $t^2 = 49$; $t = \pm7$. Так як $3^x + 3^{-x} > 0$, бо показникова функція набуває тільки додатних значень, то $t = 7$. Отже, $3^x + 3^{-x} = 7$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 5. Обчислити: $4^{\log_2 9-\frac{2}{\log_{\sqrt{3}} 2}}$.

■ $4^{\log_2 9-\frac{2}{\log_{\sqrt{3}} 2}}=4^{\log_2 9-2\cdot\log_2\sqrt{3}}=4^{\log_2 9-\log_2\left(\sqrt{3}\right)^2}=4^{\log_2 9-\log_2 3}=4^{\log_2(9:3)}=4^{\log_2 3}=\left(2^2\right)^{\log_2 3}=2^{2\cdot\log_2 3}=2^{\log_2 9}=9$.

Відповідь. 9. ■

Приклад 6. Обчислити: $27^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{3}}+4\cdot5^{\log_5^2 2}-2^{\log_5 2}\cdot\log_2 16$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1	2	3	4	$\frac{1}{81}$

■ $27^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{3}}+4\cdot5^{\log_5^2 2}-2^{\log_5 2}\cdot\log_2 16=27^{\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}}+4\cdot\left(5^{\log_5 2}\right)^{\log_5 2}-2^{\log_5 2}\cdot\log_2 2^4=27^{\frac{1}{3}}+$
$+4\cdot2^{\log_5 2}-2^{\log_5 2}\cdot4=\sqrt[3]{27}=3$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 7. Обчислити: $\frac{1}{\log_{12}18}+\frac{1}{\log_{27}18}$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
27	18	12	2	3

■ $\frac{1}{\log_{12}18}+\frac{1}{\log_{27}18}=\log_{18}12+\log_{18}27=\log_{18}(12\cdot27)=\log_{18}324=2$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 8. Обчислити значення виразу $\log_2\sin\frac{\pi}{12}+\log_2\sin\frac{\pi}{6}+\log_2\sin\frac{5\pi}{12}$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
2^{-3}	3	-3	$-\frac{2}{3}$	не існує

■ $\log_2\sin\frac{\pi}{12}+\log_2\sin\frac{\pi}{6}+\log_2\sin\frac{5\pi}{12}=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)=$

$=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=\log_2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=$

$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\log_2\left(2^{-3}\right)=-3$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 9. Спростити $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_7 8$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	5	7	8

■ Перейдемо у всіх множниках до основи 2 й одержимо: $\log_2 3 \cdot \dfrac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \dfrac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\log_2 8}{\log_2 7} =$

$= \log_2 8 = 3$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 10. Знайти $\log_{30} 8$, якщо $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = c$.

■ $\log_{30} 8 = \log_{30} 2^3 = 3\log_{30} 2 = 3\log_{30} \dfrac{10}{5} = 3(\log_{30} 10 - \log_{30} 5) = 3\left(\log_{30} \dfrac{30}{3} - c\right) = 3(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - c) =$

$= 3(1 - a - c)$.

Відповідь. $3(1 - a - c)$. ■

Приклад 11. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми числовими значеннями (А–Д), якщо $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1 $\log_a 27\sqrt{3}$

2 $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[4]{3}$

3 $\log_{\frac{9}{a}} \dfrac{9}{\sqrt{3}}$

4 $\log_{\frac{a}{9}} 81$

А 0,6

Б –1,6

В –7

Г –10

Д 0,5

1. $\log_a 27\sqrt{3} = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} 27\sqrt{3} = \log_{3^{\frac{1}{2}-1}} 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \log_{3^{-\frac{1}{2}}} 3^{\frac{7}{2}} = \left(\dfrac{7}{2} : \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) \log_3 3 = -\dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{2}{1} = -7 \to$ **В**

2. $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[4]{3} = \log_{\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}} \sqrt[4]{3} = \log_{\frac{3}{\sqrt{3}}} 3^{\frac{1}{4}} = \log_{3^{1-\frac{1}{2}}} 3^{\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{1}{4} : \dfrac{1}{2}\right) \log_3 3 = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{1} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \to$ **Д**

3. $\log_{\frac{9}{a}} \dfrac{9}{\sqrt{3}} = \log_{\frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{3}}} \dfrac{9}{\sqrt{3}} = \log_{9\sqrt{3}} 3^{2-\frac{1}{2}} = \log_{3^{2+\frac{1}{2}}} 3^{1\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{3}{2} : \dfrac{5}{2}\right) \log_3 3 = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \to$ **А**

4. $\log_{\frac{a}{9}} 81 = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 9}} 3^4 = \log_{3^{\frac{1}{2}-1-2}} 3^4 = \log_{3^{-\frac{5}{2}}} 3^4 = \left(4 : \left(-\dfrac{5}{2}\right)\right) \log_3 3 = -1{,}6 \to$ **Б**

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2					☒
3	☒				
4		☒			

■

Завдання 6.1–6.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

6.1. Вказати неправильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\log_2 16 = 4$	$\log_2 \frac{1}{16} = -4$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

6.2. Обчислити: $5^{\log_5 7} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} + \log_7 1$.

А	Б	В	Г	Д
6	7	8	$7\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{3}$

6.3. Спростити вираз $\frac{3\lg 2 + 3\lg 5}{\lg 1300 - \lg 0{,}13}$.

А	Б	В	Г	Д
0,6	0,7	0,65	0,75	0,5

6.4. $\frac{\log_9 27 + \log_9 3}{\log_6 8 + \log_6 27} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
6	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$

6.5. $\frac{\log_8 128 - \log_8 2}{\log_2 36 - \log_2 9} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{14}{3}$	2	16	3

6.6. Обчислити значення виразу $\log_5 49 + 2\log_5 \frac{5}{7}$.

А	Б	В	Г	Д
2	1	0	4	25

6.7. Знайти значення x, якщо $\log_7 x = 2\log_7 6 - \log_7 12 + \log_7 15$.

А	Б	В	Г	Д
39	7,5	15	$\frac{17}{4}$	45

6.8. Обчислити: $\frac{\log_3 32}{\log_3 2} + \frac{\log_7 27}{\log_7 3}$.

А	Б	В	Г	Д
15	8	25	54	64

6.9. Обчислити: $8^{\log_2 3} + 9^{\log_3 4}$.

А	Б	В	Г	Д
33	7	14	43	60

6.10. Обчислити: $\log_8 16$.

А	Б	В	Г	Д
8	2	$\frac{3}{4}$	12	$\frac{4}{3}$

6.11. Знайти $\log_3 200$, якщо $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$.

А	Б	В	Г	Д
$3a + 2b$	$32ab$	$2a + 3b$	$3a + b$	$6(a + b)$

6.12. Обчислити: $\lg\mathrm{tg}1^\circ \lg\mathrm{tg}2^\circ \lg\mathrm{tg}3^\circ \ldots \lg\mathrm{tg}88^\circ \lg\mathrm{tg}89^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
89!	0,1	10	1	0

6.13. Обчислити: $\lg\mathrm{tg}1^\circ + \lg\mathrm{tg}2^\circ + \lg\mathrm{tg}3^\circ + \ldots + \lg\mathrm{tg}88^\circ + \lg\mathrm{tg}89^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
10	1	0	0,1	89!

6.14. Обчислити: $7^{\log_2 3} - 3^{\log_2 7}$.

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{7}{3}$	1	–1	2

6.15. Обчислити: $\log_5 7 \cdot \log_{49} 125$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{6}$	1	6	$\frac{2}{3}$	1,5

6.16. Серед чисел $\cos 2\pi$; $\sqrt[3]{2}$; $\log_2 0,25$; $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 7^{-6} знайти найбільше.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 2\pi$	$\sqrt[3]{2}$	$\log_2 0,25$	$\left(\frac{1}{3}\right)^5$	7^{-6}

6.17. $7^{1+\log_7 2} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
9	14	49	343	81

6.18. $\log_{7+4\sqrt{3}}\left(7 - 4\sqrt{3}\right) = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
14	2	1	–1	–2

6.19. $\log_7 \sqrt[5]{7 \cdot \sqrt[4]{7}} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$7^{\frac{1}{20}}$

6.20. Обчислити: $\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3

6.21. Обчислити: $\left(2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_3 5}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
8	16	3	4	5

6.22. Обчислити: $\left(5^{\log_5(\sqrt{3}+8)} - 3^{\log_9(\sqrt{3}-8)^2}\right)^2$.

А	Б	В	Г	Д
64	12	8	2	$65-16\sqrt{3}$

6.23. Обчислити: $\log_n \log_n \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\ldots\sqrt[n]{n}}}}_{2008}$.

А	Б	В	Г	Д
2008	–2008	1004	–1004	1

Завдання 6.24–6.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

6.24. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $2\lg 5 + \lg 4$

2 $\log_3 5 : \log_3 2$

3 $\log_a(a^2 + a) - \log_a(a+1)$

4 $2^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}}$

А 5

Б $\log_5 2$

В 1

Г $\log_2 5$

Д $\log_2 4$

6.25. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_{27} 81$

2 $\log_3 \frac{1}{81}$

3 $\log_{81} 3$

4 $\log_{81} \frac{1}{3}$

А –4

Б $-\frac{1}{4}$

В $\frac{1}{4}$

Г $\frac{3}{4}$

Д $\frac{4}{3}$

6.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_8 16$
2 $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{32}$
3 $\log_{25} 125$
4 $\log_{27} 9$

А 0,(6)
Б 0,75
В 1,25
Г 1,(3)
Д 1,5

6.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_5 \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt[5]{5}}$
2 $\log_2 \frac{4}{\sqrt[3]{2}}$
3 $\log_5 \frac{5}{\sqrt[3]{25}}$
4 $\log_3 3\sqrt[3]{3}$

А 0,3
Б 0,(3)
В 1,3
Г 1,(3)
Д 1,(6)

6.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\frac{\log_8 4 + \log_8 16}{\log_6 16 + \log_6 81}$
2 $\frac{\log_{12} 2 + \log_{12} 72}{\log_5 75 - \log_5 3}$
3 $\frac{\log_5 75 - \log_5 3}{\log_4 32 + \log_4 128}$
4 $\frac{\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}}{\log_3 54 - \log_3 2}$

А $\frac{1}{3}$
Б $\frac{1}{2}$
В $\frac{2}{3}$
Г 1
Д $\frac{4}{3}$

6.29. Установити відповідність між логарифмічними виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $4^{\log_2 5}$
2 $5^{1+\log_5 2}$
3 $\sqrt{3}^{\log_3 64}$
4 $2^{2\log_4 12-1}$

А 6
Б 8
В 10
Г 12
Д 25

6.30. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\frac{\log_3 64}{\log_3 2} + \frac{\log_5 9}{\log_5 3}$
2 $\frac{\log_4 625}{\log_4 5} + \frac{\log_7 128}{\log_7 2}$
3 $\frac{\log_5 49}{\log_5 7} + \frac{\log_3 \frac{1}{16}}{\log_3 \frac{1}{2}}$
4 $\frac{\lg 125}{\lg 5} + \frac{\log_3 16}{\log_3 2}$

А 7
Б 8
В 9
Г 6
Д 11

6.31. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_3 7 \cdot \log_{49} 81$	**А** 1,25
2 $\log_5 8 \cdot \log_{16} 125$	**Б** 1,5
3 $\log_9 1000 \cdot \lg 3$	**В** 1,75
4 $\log_{81} 128 \cdot \log_2 3$	**Г** 2
	Д 2,25

6.32. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_8 6 \cdot \log_6 5 \cdot \log_5 4$	**А** $\frac{5}{8}$
2 $\log_{14} 8 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15$	**Б** $\frac{1}{7}$
3 $\log_7 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_{32} 7$	**В** $\frac{2}{3}$
4 $\lg 2 \cdot \log_{11} 10 \cdot \log_{128} 11$	**Г** $\frac{3}{4}$
	Д $\frac{2}{5}$

6.33. $\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$. Установити відповідність між логарифмами чисел (1–4) та їх вираженням через a та b (А–Д).

1 $\log_7 1{,}5$	**А** $\frac{1}{a+b}$
2 $\log_7 4{,}5$	**Б** $\frac{2b}{a}$
3 $\log_6 7$	**В** $2b-a$
4 $\log_2 9$	**Г** $\frac{1}{a-b}$
	Д $b-a$

6.34. $\log_a b = 5$. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\log_{ab} a$	**А** 5,5
2 $\log_{ab} b$	**Б** 3
3 $\log_b \sqrt{ab}$	**В** $\frac{5}{6}$
4 $\log_a \sqrt{ab}$	**Г** 0,6
	Д $\frac{1}{6}$

Розв'яжіть завдання 6.35–6.46. Відповідь запишіть десятковим дробом.

6.35. Обчислити: $\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\log_3 2} + 4^{1+4\log_4 2}\right)^{5^{\frac{1}{\log_2 5}}} : 100$.

6.36. Обчислити: $\left(25^{2-\log_5 75} + 7^{-\log_7 3}\right) \cdot 27$.

6.37. Обчислити: $3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}} - 5^{\log_3 5} + 7^{\log_7 49}$.

6.38. Обчислити: $0,25^{\lg 0,5} \cdot 0,04^{\lg 0,5} + 81^{0,5\log_9 7} - 0,5 \cdot 27^{\frac{1}{\log_2 3}}$.

6.39. Обчислити: $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$.

6.40. Обчислити: $2^{\log_2^2 3} - 3^{\log_2 3} - 9^{\log_3 2}$.

6.41. Обчислити: $\log_{3+\sqrt{8}}\left(3-\sqrt{8}\right) + \log_{3-\sqrt{8}}\left(3+\sqrt{8}\right)$.

6.42. Обчислити: $3 \cdot 7^{2\left(\log_{\sqrt{3}} 7\right)^{-1} + \frac{1}{3}\log_7 8} - 3 \cdot \log_9 \sqrt[4]{9\sqrt[3]{9}} - 10$.

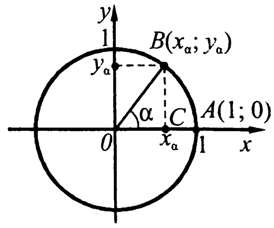
6.43. Обчислити: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot \log_{\frac{1}{99}} \frac{1}{100} \cdot \lg 2$.

6.44. Дано: $\log_{ab}a = 9$. Знайти $\log_{ab}b$.

6.45. Спростити вираз $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}} \cdot \log_a b$.

6.46. Обчислити: $\left(\log_5 2 + \log_2 5 + 2\right)\left(\log_5 2 - \lg 2\right) \cdot \log_2 5 - \log_5 2$.

Тема 7. Тригонометричні вирази



Нехай у прямокутній системі координат одиничний вектор *OA* лежить на додатному напрямку осі *x*. Вважатимемо, що *OA* — початкова сторона кута *AOB* й $\angle AOB = \alpha$. Координати точки *B* на осях *x* та *y* позначимо відповідно x_α та y_α.

Синусом кута α (sinα) називають ординату точки *B* одиничного кола, яка відповідає куту α.

Косинусом кута α (cosα) називають абсцису точки *B* одиничного кола, яка відповідає куту α.

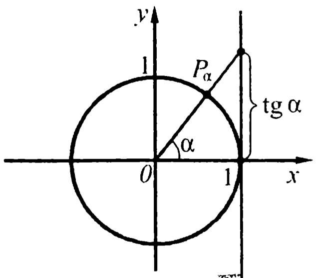
Тангенсом кута α (tgα) називають відношення ординати кінця одиничного рухомого радіуса до його абсциси: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, де $\cos\alpha \neq 0$.

Котангенсом кута α (ctgα) називають відношення абсциси кінця одиничного рухомого радіуса до його ординати: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, де $\sin\alpha \neq 0$.

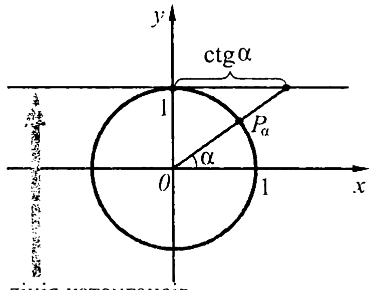
Секансом кута α (secα) називають відношення $\frac{1}{\cos\alpha}$, де $\cos\alpha \neq 0$.

Косекансом кута α (cosecα) називають відношення $\frac{1}{\sin\alpha}$, де $\sin\alpha \neq 0$.

Пряму, яка проходить через точку $P_\alpha(1; 0)$ паралельно до осі ординат, називають *лінією тангенсів*. Пряму, яка проходить через точку (0; 1) паралельно до осі абсцис, називають *лінією котангенсів*.



лінія тангенсів



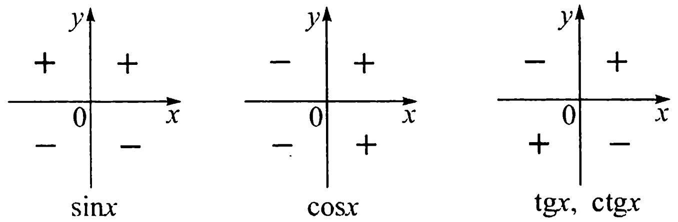
лінія котангенсів

Значення синуса, косинуса, тангенса та котангенса деяких кутів:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctgα	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Для будь-якого кута α $|\sin\alpha| \le 1$, $|\cos\alpha| \le 1$, $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{ctg}\alpha$ змінюються від $-\infty$ до $+\infty$.

Знаки тригонометричних функцій у чвертях:



Функції $y = \sin x$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ — непарні, а функція $y = \cos x$ — парна, тому:
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Значення тригонометричних функцій у точках x та $x + 2\pi n$, $n \in Z$, рівні за всіх допустимих значень x, тобто $\sin(x) = \sin(x + 2\pi n)$; $\cos(x) = \cos(x + 2\pi n)$; $\mathrm{tg}(x) = \mathrm{tg}(x + 2\pi n)$; $\mathrm{ctg}(x) = \mathrm{ctg}(x + 2\pi n)$. Усі тригонометричні функції є періодичними і довільне число виду $2\pi n$, $n \in Z$, $n \ne 0$, є їх періодом. Функції $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ мають своїми періодами і числа виду πn, $n \in Z$, $n \ne 0$: $\mathrm{tg}(x) = \mathrm{tg}(x + \pi n)$; $\mathrm{ctg}(x) = \mathrm{ctg}(x + \pi n)$. Серед усіх можливих періодів функцій виділяють основний період — найменший додатній період. Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ мають основний період 2π, а функції $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ — π.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — основна тригонометрична тотожність

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$;

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\sin\alpha =$	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$
$\mathrm{tg}\alpha =$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}$
$\mathrm{ctg}\alpha =$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$	—

Формули додавання для тригонометричних функцій

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$; $\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta}$.

Формули суми та різниці тригонометричних функцій

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$; $\mathrm{ctg}\alpha \pm \mathrm{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

Формули тригонометричних функцій подвійного та потрійного аргументу

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$;

$\mathrm{ctg}2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$;

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

$\mathrm{tg}3\alpha = \dfrac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$;

$\mathrm{ctg}3\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}$.

Формули універсальної підстановки

$$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\qquad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Формули половинного аргументу

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};\qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};\qquad \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Формули добутку тригонометричних функцій

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}.$$

Формули зведення

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$	$180^\circ+\alpha$	$270^\circ-\alpha$	$270^\circ+\alpha$	$360^\circ-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}x$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}x$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

Наприклад, $\cos(\underbrace{90°+x}_{2\text{ чверть}})=-\sin x$; $\operatorname{tg}(\underbrace{\pi+5\alpha}_{3\text{ чверть}})=\operatorname{tg}5\alpha$; $\sin\left(\underbrace{\frac{9}{2}\pi+\alpha}_{2\text{ чверть}}\right)=\cos\alpha$; $\operatorname{ctg}\left(\underbrace{\underset{7\cdot 90°}{630°}+\alpha}_{4\text{ чверть}}\right)=-\operatorname{tg}\alpha$;

$\cos\left(\underbrace{\underset{6\cdot 90°}{540°}+\alpha}_{3\text{ чверть}}\right)=-\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{11}{2}\pi\right)=-\operatorname{tg}\left(\underbrace{\frac{11}{2}\pi+\alpha}_{4\text{ чверть}}\right)=-(-\operatorname{ctg}\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$.

Обернені тригонометричні функції

Арксинусом числа b, де $|b|\le 1$, називають таке число α із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b. Наприклад, якщо $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$, бо $-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Узагалі $\arcsin b=\alpha$, якщо $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\alpha=b$. Наприклад, $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, але $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\ne\frac{3\pi}{4}$, оскільки $\frac{3\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Арккосинусом числа b, де $|b|\le 1$, називають таке число α із проміжку $[0;\pi]$, косинус якого дорівнює b. Наприклад, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, бо $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$ і $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, бо $\frac{5\pi}{6}\in[0;\pi]$ і $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Узагалі $\arccos b=\alpha$, якщо $\alpha\in[0;\pi]$ і $\cos\alpha=b$. Наприклад, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, але $\arccos\frac{1}{2}\ne-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\notin[0;\pi]$.

Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b. Наприклад, $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, бо $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$; $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. Узагалі, $\operatorname{arctg}b=\alpha$, якщо $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\alpha=b$. Наприклад, $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$, але $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\ne\frac{2\pi}{3}$, оскільки $\frac{2\pi}{3}\notin\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0;\pi)$, котангенс якого дорівнює b. Наприклад, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$, бо $\frac{\pi}{3}\in(0;\pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}$, бо $\frac{5\pi}{6}\in(0;\pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$. Узагалі, $\operatorname{arcctg}b=\alpha$, якщо $\alpha\in(0;\pi)$ і $\operatorname{ctg}\alpha=b$. Наприклад, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$, але $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})\ne-\frac{\pi}{6}$, оскільки $-\frac{\pi}{6}\notin(0;\pi)$.

Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями

$\arcsin(\sin x)=x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

$\sin(\arcsin x)=x,\ x\in[-1;1]$;

$\arcsin(-x)=-\arcsin x$;

$\arccos(\cos x)=x,\ x\in[0;\pi]$;

$\cos(\arccos x)=x,\ x\in[-1;1]$;

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$

$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$

$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x) = x;$

$\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x;$

$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}x) = x,\ x \in (0; \pi);$

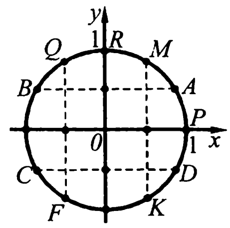
$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x) = x;$

$\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}x;$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1; 1];$

$\mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x = \frac{\pi}{2}.$

Приклад 1. Які з точок на одиничному колі задовольняють умову $\sin\alpha = \frac{1}{2}$?



А	Б	В	Г	Д
M і K	Q і F	A і B	C і D	R

■ Синусом кута є ордината кінця одиничного рухомого радіуса. Знайдемо на колі точки, ординати яких дорівнюють 0,5. Це точки A та B.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. Обчислити знак добутку $\sin 280° \cdot \cos 30° \cdot \mathrm{tg}170° \cdot \mathrm{ctg}190°$.

■ Для кожного множника визначимо чверть, у якій міститься кінець рухомого радіуса, й з'ясуємо знак даної функції. 280° — IV чверть, $\sin 280° < 0$; 30° — I чверть, $\cos 30° > 0$; 170° — II чверть, $\mathrm{tg}170° < 0$; 190° — III чверть, $\mathrm{ctg}190° > 0$. Отже, маємо: «–» · «+» · «–» · «+» > 0.

Відповідь. $\sin 280° \cdot \cos 30° \cdot \mathrm{tg}170° \cdot \mathrm{ctg}190° > 0$. ■

Приклад 3. Знайти знак виразів: **а)** $\sin 2{,}5$; **б)** $\cos 6$.

■ $\frac{\pi}{2} < 2{,}5 < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$. Отже, кут $\alpha = 2{,}5$ радіана закінчується у II чверті, а кут $\beta = 6$ радіан закінчується у IV чверті. Тоді $\sin 2{,}5 > 0$, $\cos 6 > 0$.

Відповідь. $\sin 2{,}5 > 0$, $\cos 6 > 0$. ■

Приклад 3. Обчислити: $\frac{\sin(-30°)\cos(-60°) + \mathrm{tg}(-45°)}{\mathrm{ctg}(-60°)\cos(-30°) - \sin(-60°)\mathrm{tg}(-30°)}$.

■ Урахувавши парність (непарність) тригонометричних функцій, одержимо:

$$\frac{\sin(-30°)\cos(-60°) + \mathrm{tg}(-45°)}{\mathrm{ctg}(-60°)\cos(-30°) - \sin(-60°)\mathrm{tg}(-30°)} = \frac{-\sin 30°\cos 60° - \mathrm{tg}45°}{-\mathrm{ctg}60°\cos 30° - \sin 60°\mathrm{tg}30°} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-\frac{5}{4}}{-\frac{5}{6}} =$$

$$= \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} = 1{,}5.$$

Відповідь. 1,5. ■

Приклад 4. Звести $\cos\frac{391\pi}{18}$ до тригонометричної функції гострого кута.

А	Б	В	Г	Д
$\cos\frac{\pi}{18}$	$-\sin\frac{2\pi}{9}$	$\cos\frac{7\pi}{18}$	$\sin\frac{2\pi}{9}$	$\cos\frac{31\pi}{18}$

■ $\cos\frac{391\pi}{18}=\cos\left(21\pi+\frac{13\pi}{18}\right)=\cos\left(2\cdot 10\pi+\pi+\frac{9\pi+4\pi}{18}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{9}\right)=\sin\frac{2\pi}{9}.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 5. Яка з указаних функцій є ні парною, ні непарною?

А	Б	В	Г	Д
$f_1(x)=\cos 3x \operatorname{ctg} 4x$	$f_2(x)=\frac{2+3\sin^2 5x}{6\operatorname{tg} x}$	$f_3(x)=5\sqrt{\cos x}+x^4$	$f_4(x)=\frac{x^2+\sin 2x}{\sin 2x-x^3}$	$f_5(x)=\sin 6x \operatorname{tg} x+x^2$

■ $f_1(-x)=\cos(-3x)\operatorname{ctg}(-4x)=\cos 3x\cdot(-\operatorname{ctg} 4x)=-\cos 3x\operatorname{ctg} 4x=-f_1(x)$. Функція непарна;

$f_2(-x)=\frac{2+3\sin^2(-5x)}{6\operatorname{tg}(-x)}=\frac{2+3(-\sin 5x)^2}{-6\operatorname{tg} x}=-\frac{2+3\sin^2 5x}{6\operatorname{tg} x}=-f_2(x)$. Функція непарна;

$f_3(-x)=5\sqrt{\cos(-x)}+(-x)^4=5\sqrt{\cos x}+x^4=f_3(x)$. Функція парна;

$f_4(-x)=\frac{(-x)^2+\sin(-2x)}{\sin(-2x)-(-x)^3}=\frac{x^2-\sin 2x}{-\sin 2x+x^3}=-\frac{x^2-\sin 2x}{\sin 2x-x^3}\neq f_4(x)$; $f_4(-x)\neq -f_4(x)$. Функція ні парна, ні непарна;

$f_5(-x)=\sin(-6x)\operatorname{tg}(-x)+(-x)^2=-\sin 6x\cdot(-\operatorname{tg} x)+x^2=\sin 6\operatorname{ctg} x+x^2=f_5(x)$. Функція парна.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 6. Знайти найбільше значення виразу $12\cos\alpha+5\sin\alpha-7$.

■ Перетворимо вираз: $12\cos\alpha+5\sin\alpha-7=\sqrt{12^2+5^2}\left(\frac{5}{\sqrt{12^2+5^2}}\sin\alpha+\frac{12}{\sqrt{12^2+5^2}}\cos\alpha\right)-7=$ $=13\left(\frac{5}{13}\sin\alpha+\frac{12}{13}\cos\alpha\right)-7=13\sin(\alpha+\varphi)-7$, де $\varphi=\arccos\frac{5}{13}$ або $\varphi=\arcsin\frac{12}{13}$. Далі маємо: $-1\le\sin(\alpha+\varphi)\le 1$; $-13\le 13\sin(\alpha+\varphi)\le 13$; $-13-7\le 13\sin(\alpha+\varphi)-7\le 13-7$; $-20\le 13\sin(\alpha+\varphi)-7\le 6$. Отже, найбільше значення виразу $12\cos\alpha+5\sin\alpha-7$ дорівнює 6.

Відповідь. 6. ■

Приклад 7. Обчислити числове значення виразу $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{5}{12}\pi$	$-2\frac{5}{12}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$

■ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-3\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=$

$=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{-2\pi+3\pi+6\pi}{12}=\frac{7}{12}\pi.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 8. Знайти tgα, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ і $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

А	Б	В	Г	Д
0,5	2	–0,5	–2	5

■ Кут α міститься у четвертій чверті, тому $\sin\alpha < 0$. Обчислимо sinα: $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{5}} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Знайдемо tgα: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -2$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 9. Обчислити: $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$.

■ $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ)\cdot \sin 15^\circ = \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}$. ■

Приклад 14. Знайти значення виразу $2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 2\alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
5	$2+\sqrt{3}$	3	$2-\sqrt{3}$	1

■ Спочатку спростимо вираз: $2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 2\alpha = 2\sin^2 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha + 2\sin\alpha = 2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + 2\sin\alpha = 2 + 2\sin\alpha$. Якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}$, то $2 + 2\sin\alpha = 2 + 2\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 2 + 2\cdot\frac{1}{2} = 3$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 10. Спростити вираз $\frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}$.

■ $\frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{-2\sin 30^\circ \sin(-10^\circ)}{\frac{\sin 30^\circ}{\cos 10^\circ \cos 20^\circ}} = \frac{2\sin 30^\circ \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ}{\sin 30^\circ} =$

$= 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \frac{1}{2}\sin 40^\circ$. ■

Завдання 7.1–7.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

7.1. $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-2\sin^2\alpha$	1	$2\cos^2\alpha$	$2\sin^2\alpha$	0

7.2. $\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\beta + 2 - \frac{1}{\cos^2\beta} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{\sin^2\beta}$	$\sin^2\beta$	$\frac{1}{\sin^2\beta}$	1	$\frac{2}{\sin^2\beta}$

7.3. Спростити вираз $\operatorname{ctg}(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha) - \sin^2(-\alpha)$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos\alpha$	$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$1+\sin^2\alpha$	$-\cos^2\alpha$

7.4. Обчислити $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$, якщо $tg\alpha + ctg\alpha = 2$.

А	Б	В	Г	Д
2	1	4	3	–2

7.5. Обчислити $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, якщо $tg\alpha = 3$.

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2

7.6. Знайти значення виразу $3\sin^2\alpha - 7\cos^2\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0,1$.

А	Б	В	Г	Д
2	2,9	3,1	3,96	2,92

7.7. Знайти значення виразу $\cos\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(\alpha + \pi)\cos(\beta - \pi)$, якщо $\alpha = 0,1\pi$, $\beta = 0,15\pi$.

А	Б	В	Г	Д
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.8. $tg7°tg83° + tg19°tg71° = ...$

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

7.9. $\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta} = ...$

А	Б	В	Г	Д
1	$tg\alpha tg\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$ctg\alpha ctg\beta$

7.10. $\frac{tg\,x + tg\,y}{tg(x + y)} + \frac{tg\,x - tg\,y}{tg(x - y)} = ...$

А	Б	В	Г	Д
2	0	1	$2tg x$	$2tg(x + y)$

7.11. $\sin(\pi - 2\alpha) + 2\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = ...$

А	Б	В	Г	Д
$\sin2\alpha$	1	$3\cos2\alpha$	3	0

7.12. $\cos^4\frac{\alpha}{2} - \sin^4\frac{\alpha}{2} = ...$

А	Б	В	Г	Д
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\frac{\alpha}{4}$	$\cos2\alpha$	1

7.13. $\dfrac{\sin 40^\circ}{2\cos^2 20^\circ} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\cos 20^\circ$	$\dfrac{1}{2}$	$\sin 20^\circ$	$\mathrm{ctg} 20^\circ$	$\mathrm{tg} 20^\circ$

7.14. $\sin 48^\circ + \sin 12^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\sin 36^\circ$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 18^\circ$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}\cos 18^\circ$

7.15. $\cos 70^\circ - \cos 10^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\sin 40^\circ$	$\sin 40^\circ$	$\cos 30^\circ$	$\dfrac{1}{2}$	$2\sin 40^\circ$

7.16. $\cos 70^\circ + \cos 50^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$2\cos 10^\circ$	$\sin 10^\circ$	$\cos 10^\circ$

7.17. Знайти значення виразу $\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, якщо $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
0,5	–0,25	–0,5	–2	0,25

7.18. $\cos 75^\circ \cos 15^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{4}$	1	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7.19. $\sin 105^\circ \cos 15^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

7.20. $\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

7.21. $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{4}\right) = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

7.22. $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{6}\right)=...$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{17}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{15}{16}$

7.23. $\mathrm{tg}\left(-\frac{1}{2}\arcsin 0,6\right)=...$

А	Б	В	Г	Д
0,3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

7.24. Обчислити: $3\sqrt{3}\cos\left(\mathrm{arctg}\sqrt{2}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
3	–3	±3	$3\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$

7.25. $16\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=...$

А	Б	В	Г	Д
0,5	–0,5	2	–2	0

7.26. $\sin\frac{3\pi}{14}-\sin\frac{\pi}{14}-\sin\frac{5\pi}{14}=...$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	–1

Завдання 7.27–7.39 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

7.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sin\alpha\cos\alpha$

2 $1-2\sin^2\alpha$

3 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$

4 $\cos(\pi-2\alpha)$

А $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

Б $-\cos 2\alpha$

В $\cos 2\alpha$

Г $2\cos\alpha$

Д $\sin 2\alpha$

7.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм дорівнюють (А–Д).

1 $\sin 740°$

2 $\cos 560°$

3 $\cos 225°$

4 $2\sin 20°\cos 20°$

А $\cos 50°$

Б $\sin 50°$

В $\sin 20°$

Г $\sin(-45°)$

Д $-\cos 20°$

7.29. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sin(45^\circ + \alpha)$

2 $\cos(45^\circ + \alpha)$

3 $\cos 3\alpha$

4 $\sin 3\alpha$

А $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$

Б $\cos\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha\sin 2\alpha$

В $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

Г $\cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha$

Д $\sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$

7.30. Одна зі сторін кута збігається з додатною піввіссю абсцис, а інша перетинає одиничне коло в точці $\left(-\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$. Установити відповідність між тригонометричними функціями кута β (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin\beta$

2 $\cos\beta$

3 $\mathrm{tg}\beta$

4 $\mathrm{ctg}\beta$

А $\frac{5}{12}$

Б $\frac{12}{5}$

В $-\frac{12}{13}$

Г $-\frac{5}{13}$

Д $\frac{13}{12}$

7.31. $\sin\beta = a$, α — кут I чверті. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$

2 $\sin(\pi - \beta)$

3 $\sin(\pi + \beta)$

4 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$

А a

Б $-a$

В $\frac{1}{a}$

Г $-\sqrt{1-a^2}$

Д $\sqrt{1-a^2}$

7.32. α — кут першої чверті, $\mathrm{tg}\,\alpha = a$. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

2 $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

3 $\mathrm{tg}(\pi - \alpha)$

4 $\mathrm{tg}(\pi + \alpha)$

А $\sqrt{1-a^2}$

Б a

В $\frac{1}{a}$

Г $-a$

Д $-\frac{1}{a}$

7.33. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin 510°$
2 $\cos 690°$
3 $\cos 840°$
4 $\sin 960°$

А $-\frac{1}{2}$
Б $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
В $\frac{\sqrt{3}}{2}$
Г $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Д $\frac{1}{2}$

7.34. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\text{tg}\frac{20\pi}{3}$
2 $\text{tg}\frac{28\pi}{3}$
3 $\text{tg}\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$
4 $\text{ctg}\frac{16\pi}{3}$

А $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
Б $-\sqrt{3}$
В $\frac{1}{\sqrt{3}}$
Г $\sqrt{3}$
Д -1

7.35. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x$
2 $\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$
3 $\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x$
4 $\sin x \cos 3x - \sin 3x \cos x$

А $\sin 4x$
Б $-\cos 4x$
В $\cos 4x$
Г $\cos 2x$
Д $-\sin 2x$

7.36. α — кут другої чверті, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Установити відповідність між заданими тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin 2\alpha$
2 $\cos 2\alpha$
3 $\text{tg}\, 2\alpha$
4 $\text{ctg}\, 2\alpha$

А $-\frac{119}{120}$
Б $-\frac{119}{169}$
В $\frac{119}{169}$
Г $-\frac{120}{119}$
Д $-\frac{120}{169}$

7.37. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $\dfrac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha}$

2 $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha}$

3 $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}$

4 $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha}$

А $\operatorname{tg}\alpha$

Б $\operatorname{ctg}\alpha$

В $\operatorname{tg}2\alpha$

Г $\operatorname{ctg}2\alpha$

Д $-\operatorname{ctg}2\alpha$

7.38. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $\sin 10° + \cos 20°$

2 $\sin 20° + \cos 10°$

3 $\cos 20° - \sin 10°$

4 $\cos 10° - \sin 20°$

А $\sin 50°$

Б $\sin 40°$

В $\sqrt{3}\sin 40°$

Г $\sqrt{3}\sin 50°$

Д $-\sqrt{3}\sin 50°$

7.39. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$

2 $\operatorname{ctg}\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right)$

3 $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$

4 $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$

А $\dfrac{4}{5}$

Б $\dfrac{3}{5}$

В $\dfrac{3}{4}$

Г $\dfrac{4}{3}$

Д $-\dfrac{3}{5}$

Розв'яжіть завдання 7.40–7.49. Відповідь запишіть десятковим дробом.

7.40. Обчислити: $\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha-\pi)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin(\alpha-\pi)\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}$.

7.41. Спростити: $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

7.42. Спростити: $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha$.

7.43. Спростити: $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}\cdot 2\operatorname{ctg}\alpha$.

7.44. Спростити: $\dfrac{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{5\cos\alpha\cdot(\cos\alpha + \cos 2\alpha)}$.

7.45. Спростити: $\left(\sin(2\pi - x)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos(x-\pi) - \sin(x-\pi)\right)^2 + \cos^2(\pi - x)$.

7.46. Обчислити: $2\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$.

7.47. Обчислити: $\frac{1}{\cos 1 + \cos 3} + \frac{1}{\cos 1 + \cos 5} + \frac{1}{\cos 1 + \cos 7} + \ldots + \frac{1}{\cos 1 + \cos 2001} + \frac{\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 1001}{2\sin 1}$.

7.48. Спростити вираз $\frac{\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha}{\cos^5\alpha}$.

7.49. Спростити вираз $26\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}\right)$.