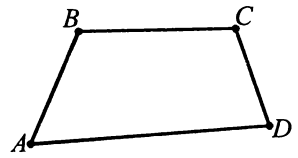
Тема 32. Чотирикутники



Чотирикутником називають фігуру, яка складається з чотирьох точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, та чотирьох відрізків, які послідовно з'єднують ці точки.

Чотирикутник позначають, послідовно записуючи його вершини. Наприклад, чотирикутник, зображений на рисунку, можна позначити так: $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$.

Чотирикутники бувають *опуклі й неопуклі*. Чотирикутник називають *опуклим*, якщо він лежить з одного боку від кожної прямої, яка містить його сторону. Чотирикутник називають *неопуклим*, якщо він не лежить з одного боку від кожної прямої, яка містить його сторону. Далі ми розглядатимемо лише опуклі чотирикутники.

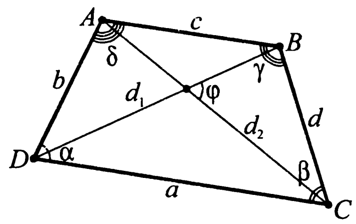
Елементами чотирикутника є його вершини, сторони та кути. На рисунку A, B, C і D — вершини чотирикутника, AB, BC, CD і DA — сторони чотирикутника, кути DAB, ABC, BCD і CDA — кути чотирикутника. Кути позначають і так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ і $\angle D$ відповідно.

Дві вершини чотирикутника називають *сусідніми*, якщо вони є кінцями однієї сторони. На рисунку A та B, B та C, C та D, D та A — сусідні вершини. Дві несусідні вершини чотирикутника називають *протилежними*. На рисунку A та C, B та D — протилежні вершини. Сторони чотирикутника називають *сусідніми*, якщо вони виходять з однієї вершини. На рисунку AB та AD, AB та BC, BC та CD, CD та AD — сусідні сторони. Сторони чотирикутника, які не мають спільної вершини, називають *протилежними*. На рисунку AB та CD, BC та AD — протилежні сторони.

Відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника, називають його *діагоналлю*. Кожен чотирикутник має дві діагоналі, які перетинаються. Кожна діагональ розбиває чотирикутник на два трикутники.

Периметр чотирикутника — це сума довжин усіх його сторін. Периметр позначають літерою P. Периметр чотирикутника обчислюють за формулою $P = a + b + c + d$.

Кожна сторона чотирикутника менша за суму трьох інших його сторін. Щоб установити, чи можна з чотирьох відрізків утворити чотирикутник, потрібно перевірити, чи буде найдовший з них меншим за суму трьох інших.



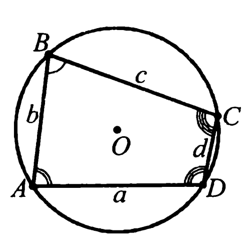
Сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360°:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.$$

Кут, суміжний з кутом чотирикутника, називають *зовнішнім кутом чотирикутника*. При кожній вершині чотирикутника є два зовнішні кути, які рівні між собою. Сума зовнішніх кутів чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Площа чотирикутника. $S = \dfrac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$.

Чотирикутник, вписаний у коло



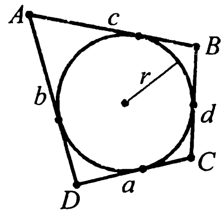
Чотирикутник, усі вершини якого лежать на колі, називають *вписаним* у це коло, а коло називають описаним навколо чотирикутника.

Навколо чотирикутника можна описати коло тоді й тільки тоді, коли суми його протилежних кутів дорівнюють 180°: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

Площа чотирикутника, вписаного в коло: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$,

де $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Чотирикутник, описаний навколо кола

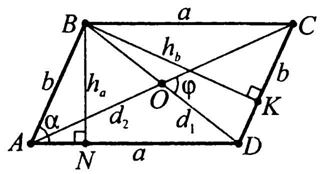


Чотирикутник, усі сторони якого дотикаються до кола, називають *описаним* навколо цього кола, а коло називають вписаним у чотирикутник.

У чотирикутник можна вписати коло тоді й тільки тоді, коли суми його протилежних сторін рівні: $a + c = b + d$.

Площа чотирикутника, описаного навколо кола: $S = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r$.

Паралелограм



Паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні. $AB \| CD$, $AD \| BC$, $ABCD$ — паралелограм.

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї сторони до протилежної сторони або до її продовження.

Властивості паралелограма:

1) у паралелограма протилежні сторони рівні: $AB = CD = a$, $BC = AD = b$;
2) у паралелограма протилежні кути рівні: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;
3) діагоналі паралелограма при перетині діляться навпіл: $AO = OC$, $BO = OD$;
4) кожна діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники;
5) сума кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°;
6) $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.
7) у паралелограмі кут між висотами дорівнює його гострому куту.
8) бісектриси кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, взаємно перпендикулярні;
9) бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні.

Ознаки паралелограма

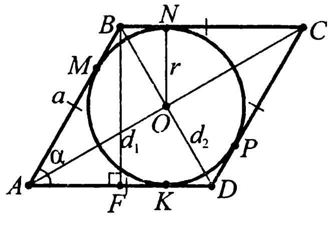
Чотирикутник $ABCD$ буде паралелограмом, якщо:
1) $AB = CD$ і $AB \| CD$;
2) $AB = CD$ і $BC = AD$;
3) $AO = OC$ і $BO = OD$;
4) $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$.

Теорема. Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії.

Площа

$S = ah_a$; $S = bh_b$; $S = ab\sin\alpha$; $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

Ромб



Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні. $AB = BC = CD = DA$, $ABCD$ — ромб.

Оскільки ромб — це паралелограм, то він має всі властивості паралелограма, а також властивості, характерні лише для нього.

Властивості:

1) діагоналі ромба перпендикулярні;
2) діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

Ознака ромба:

1. Паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом.

2. Паралелограм, діагоналі якого є бісектрисами його кутів, є ромбом.

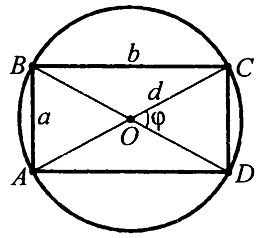
Площа ромба

$S = a^2\sin\alpha$; $S = ah$; $S = \frac{1}{2}d_1d_2$; $S = ar$.

У будь-який ромб можна вписати коло. Центр кола, вписаного в ромб, є точкою перетину його діагоналей. $r = \frac{1}{2}h_a$.

Прямокутник

Паралелограм, у якого всі кути прямі, називають *прямокутником.* $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, $ABCD$ — прямокутник.



Оскільки прямокутник — це окремий вид паралелограма, то він має всі властивості паралелограма.

Крім цих властивостей, прямокутник має особливу властивість: *Діагоналі прямокутника рівні.*

Наприклад, у прямокутнику $ABCD$ (див. рис.) AC і BD — діагоналі. Тоді $AC = BD$.

Ознака прямокутника

Якщо діагоналі паралелограма рівні, то такий паралелограм є прямокутником.

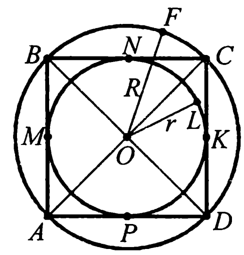
Площа прямокутника

$S = ab$; $S = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi$.

Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло. Центром кола, описаного навколо прямокутника, є точка перетину його діагоналей. $R = \frac{1}{2}d$; $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Квадрат

Квадрат — це ромб, у якого всі кути прямі. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, $AB = BC = CD = DA$, $ABCD$ — квадрат.



Ознака квадрата

Якщо діагоналі чотирикутника рівні та є бісектрисами його кутів, то такий чотирикутник — квадрат.

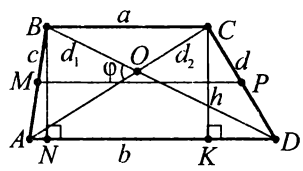
Площа квадрата

$S = a^2$; $S = \frac{1}{2}d^2$.

У будь-який квадрат можна вписати коло й навколо квадрата можна описати коло.

Центром вписаного й описаного кіл є точка перетину діагоналей квадрата. $r = \frac{1}{2}a$, $R = \frac{1}{2}d$, $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Трапеція



Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні. Паралельні сторони трапеції називають її *основами*, а непаралельні — *бічними сторонами. Висотою трапеції* називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї основи до іншої або до її продовження. $BC \parallel AD$, AB і CD — не паралельні. $ABCD$ — трапеція. $BN \perp AD$, $CK \perp AD$, BN, CK — висоти.

Сума градусних мір кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°: $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$ (рис. 1).

Трапецію, один з кутів якої прямий, називають *прямокутною.*

Рівнобічною називають трапецію, у якої бічні сторони рівні. Якщо $AB = CD$, то трапеція рівнобічна. У рівнобічній трапеції кути при кожній основі рівні.

Навколо трапеції можна описати коло, лише тоді, коли вона рівнобічна. У трапецію можна вписати коло, коли сума її основ дорівнює сумі бічних сторін.

Середня лінія трапеції

Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін. $AM = MB$, $CP = PD$, MP — середня лінія трапеції $ABCD$. Середня лінія трапеції паралельна до основ і дорівнює їх півсумі: $MP = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Властивості рівнобічної трапеції:

1. Сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180°: $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$ (рис. 1).

2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні: $AC = BD$ (рис. 2).

3. Якщо BK і CM — висоти рівнобічної трапеції $ABCD$ (рис. 3), то:

1) $\Delta ABK = \Delta DCM$;

2) $AK = DM = \frac{1}{2}(AD - BC)$;

3) $KD = MA = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

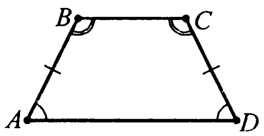


Рис. 1

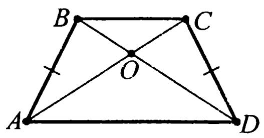


Рис. 2

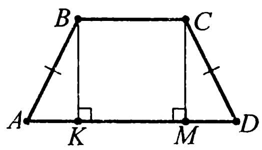


Рис. 3

Ознаки рівнобічної трапеції:

1. Якщо кути при основі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна.

2. Якщо в трапеції сума протилежних кутів дорівнює 180°, то трапеція рівнобічна.

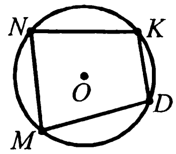
3. Якщо діагоналі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна.

Площа трапеції

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Приклад 1. Знайти кути чотирикутника, якщо відомо, що три з них, взяті послідовно, відносяться як 5 : 3 : 4 і навколо цього чотирикутника можна описати коло.

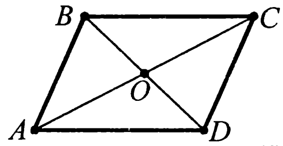
А	Б	В	Г	Д
120°, 80°, 60°, 100°	80°, 20°, 130°, 130°	100°, 60°, 80°, 120°	80°, 120°, 110°, 50°	110°, 90°, 80°, 80°



■ Нехай коло $(O; R)$ описане навколо чотирикутника $MNKD$. $\angle M : \angle N : \angle K = 5 : 3 : 4$. Оскільки навколо чотирикутника описане коло, то $\angle M + \angle K = 180°$, $\angle N + \angle D = 180°$.

Нехай одна частина дорівнює $x°$. Тоді одержимо: $\angle M = 5x°$, $\angle N = 3x°$, $\angle K = 4x°$. $5x + 4x = 180$; $9x = 180$; $x = 20$. Тоді $\angle M = 5 \cdot 20 = 100°$, $\angle N = 3 \cdot 20 = 60°$, $\angle K = 4 \cdot 20 = 80°$. $\angle D = 180° - 60° = 120°$.

Відповідь. **В.** ■



Приклад 2. O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти сторону AB, якщо периметр трикутника COD дорівнює 15 см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см.

А	Б	В	Г	Д
15 см	10 см	8 см	6 см	4 см

■ За властивістю діагоналей паралелограма: $AO = OC = \frac{1}{2}AC = 10 : 2 = 5$ (см). $BO = OD = \frac{1}{2}BD = 8 : 2 = 4$ (см). $CD = P_{\Delta COD} - (OC + OD)$; $CD = 15 - (5 + 4) = 6$ (см). За властивістю протилежних сторін паралелограма $AB = CD = 6$ см. ■

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 3. Знайти сторони чотирикутника, якщо перша з них на 9 см менша за другу, на 2 см більша за третю й удвічі більша за четверту, а периметр чотирикутника дорівнює 147 см.

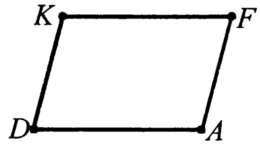
■ Нехай четверта сторона дорівнює x см. Тоді перша дорівнює $2x$ см, друга — $(2x + 9)$ см, третя — $(2x - 2)$ см. Складемо й розв'яжемо рівняння: $2x + 2x + 9 + 2x - 2 + x = 147$; $7x + 7 = 147$; $7x = 140$; $x = 20$ (см). Тоді $2x = 2 \cdot 20 = 40$ (см), $2x + 9 = 40 + 9 = 49$ (см), $2x - 2 = 40 - 2 = 38$ (см). Отже, перша сторона чотирикутника дорівнює 40 см, друга — 49 см, третя — 38 см, четверта — 20 см.

Відповідь. 40 см, 49 см, 38 см, 20 см. ■

Приклад 4. Знайти кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 7, 8, 9 і 12.

■ Кути чотирикутника відповідно дорівнюють $7x°$, $8x°$, $9x°$ і $12x°$, де x — деяке число. Складемо й розв'яжемо рівняння: $7x + 8x + 9x + 12x = 360$; $36x = 360$; $x = 10$. Тоді: $7x = 7 \cdot 10 = 70$, $8x = 8 \cdot 10 = 80$, $9x = 9 \cdot 10 = 90$, $12x = 12 \cdot 10 = 120$. Отже, кути чотирикутника дорівнюють 70°, 80°, 90° і 120°.

Відповідь. 70°, 80°, 90° і 120°. ■

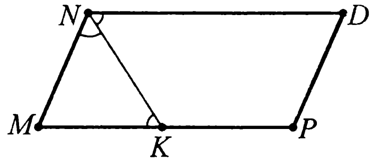


Приклад 5. Градусні міри двох кутів паралелограма відносяться як 5 : 7. Знайти кути паралелограма.

■ Оскільки протилежні кути паралелограма рівні, то кути, про які йдеться в умові задачі, будуть прилеглими до однієї сторони. Нехай це $\angle D$ і $\angle K$ (див. рис.). $\angle D = 5x°$, $\angle K = 7x°$, де x — деяке число. За властивістю кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, $\angle D + \angle K = 180°$. Маємо: $5x + 7x = 180$; $12x = 180$; $x = 15$, $5x = 5 \cdot 15 = 75$; $7x = 7 \cdot 15 = 105$. Отже, $\angle F = \angle D = 75°$, $\angle A = \angle K = 105°$.

Відповідь. 75°, 105°, 75°, 105°. ■

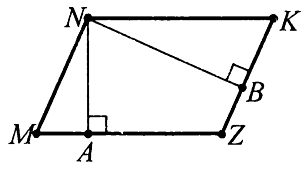
Приклад 6. Бісектриса тупого кута паралелограма $MNDP$ поділяє сторону MP на відрізки 8 см і 10 см, рахуючи від вершини гострого кута. Знайти периметр паралелограма.



■ Оскільки $ND \| MP$, то $\angle DNK = \angle MKN$ як внутрішні різносторонні. NK — бісектриса кута N, отже, $\angle DNK = \angle MNK$. Тому $\angle MKN = \angle MNK$ і трикутник MNK — рівнобедрений з основою NK. Отже, $MN = MK = 8$ (см). За властивістю вимірювання відрізків маємо: $MP = 8 + 10 = 18$ (см). $P_{MNDP} = 2 \cdot (MN + MP)$; $P_{MNDP} = 2(8 + 18) = 52$ (см).

Відповідь. 52 см. ■

Приклад 7. Знайти площу паралелограма, периметр якого дорівнює 24 см, а висоти — 10 см і 14 см.



■ $MZ + ZK = 24 : 2$; $MZ + ZK = 12$ (см). Нехай $MZ = x$ см, тоді $ZK = (12 - x)$ см.

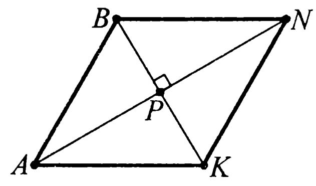
$S_{MNKZ} = MZ \cdot NA$; $S_{MNKZ} = x \cdot 10 = 10x$ (см) **(1)**.

$S_{MNKZ} = ZK \cdot NB$; $S_{MNKZ} = 14 \cdot (12 - x)$ **(2)**.

З рівностей (1) і (2) складемо та розв'яжемо рівняння: $10x = 14(12 - x)$; $10x = 168 - 14x$; $24x = 168$; $x = 7$. Отже, $MZ = 7$ см. $S = 7 \cdot 10 = 70$ (см^2).

Відповідь. 70 см. ■

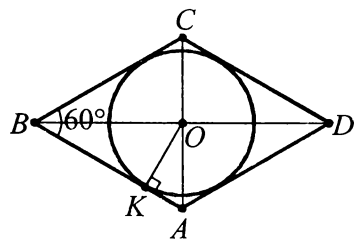
Приклад 8. Сторона ромба утворює з діагоналями кути, градусні міри яких відносяться як 4 : 5. Знайти кути ромба.



■ $\angle KAP = 4x°$, $\angle AKP = 5x°$, де x — деяке число. За властивістю діагоналей ромба $BK \perp AN$, тому трикутник APK — прямокутний ($\angle APK = 90°$). $4x + 5x = 90$, $9x = 90$, $x = 10$; $4x = 40$, $5x = 50$. Отже, $\angle KAP = 40°$, $\angle AKP = 50°$. Оскільки діагоналі ромба — бісектриси його кутів, то $\angle A = 2\angle KAP = 2 \cdot 40° = 80°$, $\angle K = 2\angle AKP = 2 \cdot 50° = 100°$.

Відповідь. 80°, 100°, 80°, 100°. ■

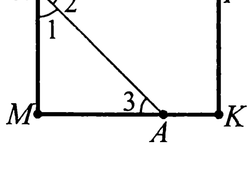
Приклад 9. Діагональ ромба, що виходить з вершини кута 60°, дорівнює 24 см. Знайти радіус кола, вписаного в ромб.



Нехай $ABCD$ — ромб, про який ідеться в умові задачі (див. рис.). За властивістю діагоналей ромба: $BO = DO = \dfrac{1}{2} \cdot 24 = 12$ (см). $\angle ABO = \angle CBO = 60° : 2 = 30°$. Проведемо $KO \perp AB$. KO — радіус вписаного кола. Трикутник BKO — прямокутний, бо $KO \perp AB$. За властивістю катета, який лежить проти кута 30°, $KO = \dfrac{1}{2}BO = \dfrac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см).

Відповідь. 6 см. ■

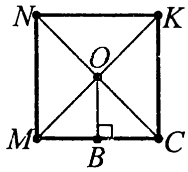
Приклад 10. Бісектриса кута N прямокутника $MNFK$ ділить сторону MK на відрізки у відношенні 5 : 2, починаючи від вершини M. Знайти сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.



■ Оскільки NA — бісектриса кута N, то $\angle 1 = \angle 2$. $NF \| MK$, NA — січна, тому $\angle 2 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні. Отже, $\angle 1 = \angle 3$ і трикутник NMA — рівнобедрений з основою NA. Отже, $MN = MA$. Довжини відрізків MA і AK відповідно дорівнюють $5x$ см, $2x$ см, де x — деяке число. Маємо: $2 \cdot ((5x + 2x) + 5x) = 72$; $12x = 36$; $x = 3$. $7x = 7 \cdot 3 = 21$, $5x = 5 \cdot 3 = 15$. Отже, $MK = NF = 21$ см, $MN = FK = 15$ см.

Відповідь. 15 см, 21 см, 15 см, 21 см. ■

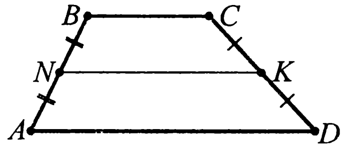
Приклад 11. Відстань від точки перетину діагоналей квадрата до однієї з його сторін дорівнює 7 см. Знайти периметр квадрата.



■ $MN \perp MC$, $OB \perp MC$, отже, $MN \parallel OB$. За властивістю діагоналей квадрата точка O — середина NC. Тоді за теоремою Фалеса точка B — середина сторони MC. Отже, OB — середня лінія трикутника MNC. За теоремою про середню лінію $OB = \frac{1}{2} MN$. Тому $MN = 2 \cdot OB = 2 \cdot 7 = 14$ (см). $P_{MNKC} = 4 \cdot MN = 4 \cdot 14 = 56$ (см).

Відповідь. 56 см. ■

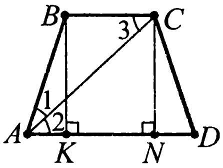
Приклад 12. Середня лінія трапеції дорівнює 12 см, а більша основа — 14 см. Знайти меншу основу.



■ За теоремою про середню лінію трапеції маємо: $NK = \frac{a+b}{2}$, де a та b — основи трапеції. Нехай $a = 14$ см, $b = x$ см. Тоді $12 = \frac{14+x}{2}$; $14 + x = 24$; $x = 10$. Отже, менша основа дорівнює 10 см.

Відповідь. 10 см. ■

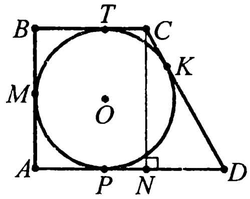
Приклад 13. Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її гострий кут, який дорівнює 60°. Знайти периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 12 см.



■ Оскільки AC — бісектриса, то $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 2 = \angle 3$ (як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ і січній AC). Отже, $\angle 1 = \angle 3$, тому трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC. $AB = BC = 12$ см. $CD = AB = 12$ (см) (як бічні сторони рівнобічної трапеції). Проведемо висоти BK і CN, $BK = CN$. $\Delta ABK = \Delta DCN$ за гіпотенузою і катетом. Отже, $AK = DN$. У прямокутному трикутнику ABK $\angle A = 60°$, тому $\angle ABK = 30°$. $AK = \frac{1}{2} AB$ (як катет, який лежить проти кута 30°). $AK = ND = 12 : 2 = 6$ (см). $KN = BC = 12$ см (як протилежні сторони прямокутника $KBCN$). $AD = AK + KN + ND$. $AD = 6 + 12 + 6 = 24$ (см). $P = 12 + 12 + 12 + 24 = 60$ (см).

Відповідь. 60 см. ■

Приклад 14. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює 21 см. Обчислити площу трапеції, якщо довжина кола, вписаного в неї, дорівнює 24π см.



■ Нехай $ABCD$ ($AD \parallel BC$) — задана прямокутна трапеція, у яку вписано коло (O; r) завдовжки 24π см, $BC = 21$ см. Тоді $2\pi r = 24\pi$, $r = 12$ (см). Проведемо висоту CN. Оскільки трапеція прямокутна, то $CN = AB = 2r = 24\pi : \pi$. За властивістю сторін описаного чотирикутника $BC + AD = AB + CD$; $21 + AD = 24 + CD$; $AD - CD = 3$. Нехай $CD = x$ см. Тоді $AD = (x + 3)$ см. $ABCN$ — прямокутник, тому $AN = BC = 21$ (см). Оскільки $AD = AN + ND$, то $ND = AD - AN = (x + 3) - 21 = (x - 18)$ см. Із трикутника CND ($\angle N = 90°$): $CD^2 = CN^2 + ND^2$; $x^2 = 24^2 + (x - 18)^2$; $x^2 = 576 + x^2 - 36x + 324$; $36x = 900$; $x = 25$. Отже, $CD = 25$ см. $ND = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = 7$. $AD = 21 + 7 = 28$ (см).

$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S_{ABCD} = \frac{21+28}{2} \cdot 24 = 588$ (см^2).

Відповідь. 588 см^2. ■

Завдання 32.1–32.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

32.1. Сума двох кутів паралелограма дорівнює 130°. Знайти найбільший кут паралелограма.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
140°	120°	105°	115°	125°

32.2. Периметр паралелограма дорівнює 84 см, а сума двох його сторін — 58 см. Знайти меншу сторону паралелограма.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
11 см	29 см	17 см	23 см	13 см

32.3. Бісектриса гострого кута паралелограма поділяє сторону на відрізки завдовжки 7 см і 10 см, починаючи від вершини тупого кута. Знайти периметр паралелограма.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
48 см	54 см	96 см	68 см	56 см

32.4. У чотирикутнику діагоналі дорівнюють 8 см і 5 см. Обчислити периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
40 см	13 см	26 см	3 см	20 см

32.5. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 8 см. Знайти площу прямокутника, якщо площа круга, описаного навколо нього, дорівнює 25π см^2.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
80 см^2	48 см^2	40 см^2	24 см^2	200 см^2

32.6. У прямокутнику $ABCD$ O — точка перетину діагоналей, $\angle BOC = 108°$. Знайти $\angle ABD$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
72°	45°	30°	54°	18°

32.7. Діагональ ромба утворює з однією зі сторін кут, що дорівнює 54°. Знайти менший кут ромба.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
36°	26°	72°	62°	27°

32.8. Одна з діагоналей ромба дорівнює 30 см. Знайти іншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 68 см.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
20 см	24 см	30 см	16 см	19 см

32.9. Сторона ромба дорівнює 6 см, а його площа — 18 см^2. Знайти найбільший кут ромба.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
105°	120°	130°	135°	150°

32.10. Сторони паралелограма дорівнюють 18 см і 30 см, а висота, яка проведена до більшої сторони, — 6 см. Знайти іншу висоту паралелограма.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
10 см	20 см	15 см	3,6 см	18 см

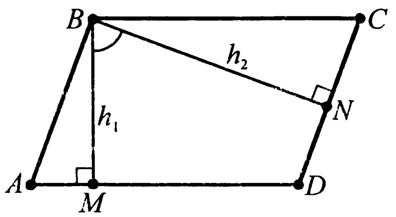
32.11. Висота рівнобічної трапеції, яка проведена з вершини тупого кута, поділяє основу на відрізки завдовжки 5 см і 11 см. Знайти периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
50 см	43 см	48 см	47 см	53 см

32.12. Дві менші сторони прямокутної трапеції дорівнюють a, а один з її кутів — 45°. Визначити площу трапеції.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
a^2	$\frac{5}{2}a^2$	$2a^2$	$3a^2$	$\frac{3}{2}a^2$

32.13. Висоти паралелограма дорівнюють h_1 і h_2, а кут між ними — α. Визначити площу паралелограма.



А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\frac{h_1h_2}{\cos\alpha}$	$\frac{h_1h_2}{\sin\alpha}$	$h_1h_2\sin\alpha$	$h_1h_2\cos\alpha$	$\frac{h_1h_2}{\sin^2\alpha}$

32.14. Діагоналі прямокутника утворюють кут 50°. Знайти кут між діагоналлю прямокутника та бісектрисою кута, проведеними з однієї вершини.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
50°	30°	25°	15°	20°

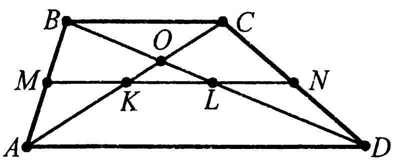
32.15. Точка O, яка є перетином діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \| BC$), ділить діагональ AC на відрізки $AO = 8$ см і $OC = 4$ см. Знайти основу BC, якщо $AD = 14$ см.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
5 см	6 см	7 см	8 см	4 см

32.16. Менша основа трапеції дорівнює 20 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 5 см і 6 см. Знайти площу трапеції.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
110 см^2	363 см^2	121 см^2	242 см^2	484 см^2

32.17. Відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює 7 см, а менша її основа — 6 см. Знайти середню лінію трапеції.



А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
9 см	6,5 см	12 см	26 см	13 см

32.18. У рівнобічну трапецію вписане коло. Знайти у квадратних сантиметрах площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 2 см і 8 см.

А	Б	В	Г	Д
40 см^2	5 см^2	20 см^2	16 см^2	8 см^2

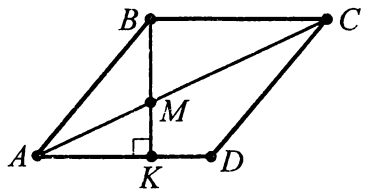
32.19. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні. Знайти площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 8 см і 20 см.

А	Б	В	Г	Д
196 см^2	392 см^2	784 см^2	588 см^2	98 см^2

32.20. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює d і поділяє його гострий кут на кути α і β. Визначити площу паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
$d^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$	$\dfrac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}$	$\dfrac{d^2\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$	$\dfrac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$	$\dfrac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$

32.21. У ромбі $ABCD$ більша діагональ AC поділяє висоту BK на відрізки $BM = 5$ см і $MK = 3$ см. Знайти площу ромба.



А	Б	В	Г	Д
40 см^2	80 см^2	120 см^2	140 см^2	20 см^2

32.22. Діагональ трапеції поділяє її на два подібні трикутники. Знайти цю діагональ, якщо основи трапеції дорівнюють 50 см і 72 см.

А	Б	В	Г	Д
90 см	30,5 см	30 см	61 см	60 см

32.23. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута й утворює з більшою основою кут 30°. Знайти периметр трапеції, якщо більша основа дорівнює 8 см.

А	Б	В	Г	Д
18 см	24 см	16 см	20 см	32 см

32.24. Периметр паралелограма більший від однієї з його сторін на 23 см і більший на 19 см від іншої його сторони. Знайти периметр паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
42 см	28 см	34 см	36 см	32 см

Завдання 32.25–32.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

32.25. Установити відповідність між фігурами (1–4) та їхніми характерними властивостями (А–Д).

1 Описаний навколо кола чотирикутник
2 Вписаний у коло чотирикутник
3 Паралелограм
4 Ромб

А Сума протилежних кутів дорівнює 180°
Б Діагоналі рівні
В Суми протилежних сторін рівні
Г Сума кутів при одній стороні дорівнює 180°
Д Діагоналі є бісектрисами кутів

32.26. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 60°. Установити відповідність між довжинами сторін (1–4) ромба і площами (А–Д) прямокутників з вершинами на серединах сторін ромба.

1 20 см
2 36 см
3 42 см
4 50 см

А $441\sqrt{3}$ см^2
Б $100\sqrt{3}$ см^2
В $529\sqrt{3}$ см^2
Г $625\sqrt{3}$ см^2
Д $324\sqrt{3}$ см^2

32.27. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 5 см. Установити відповідність між величинами гострих кутів (1–4) паралелограмів і їх площами (А–Д).

1 30°
2 45°
3 60°
4 80°

А $30\sqrt{3}$ см^2
Б 30 см^2
В $15\sqrt{3}$ см^2
Г $30\sqrt{2}$ см^2
Д $60\sin\frac{4\pi}{9}$ см^2

32.28. У рівнобічних трапеціях діагональ є бісектрисою гострого кута й утворює з більшою основою кут 30°. Установити відповідність між довжинами більших основ (1–4) та периметрами трапецій (А–Д).

1 4 см
2 8 см
3 24 см
4 12 см

А 20 см
Б 60 см
В 10 см
Г 30 см
Д 50 см

Розв'яжіть завдання 32.29–32.47. Відповідь запишіть десятковим дробом.

32.29. Перпендикуляр, проведений з вершини прямокутника на діагональ, дорівнює 12 і поділяє діагональ на відрізки, різниця яких дорівнює 7. Знайти площу прямокутника.

32.30. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює $6\sqrt{6}$ і утворює зі стороною паралелограма кут 60°. Знайти іншу діагональ, якщо вона утворює з тією ж стороною кут 45°.

32.31. Одна з діагоналей паралелограма, яка дорівнює $3\sqrt{6}$, утворює з основою паралелограма кут 60°. Обчислити довжину другої діагоналі, якщо вона утворює з цією ж основою кут 45°.

32.32. Висоти паралелограма дорівнюють 4 і 6, а його периметр — 40. Знайти у градусах гострий кут паралелограма.

32.33. Одна сторона паралелограма на 2 більша за іншу, а його діагоналі дорівнюють 8 і 14. Знайти периметр паралелограма.

32.34. Діагоналі ромба відносяться як 3 : 4. Знайти висоту ромба, якщо його периметр дорівнює 80.

32.35. Сума довжин діагоналей ромба дорівнює l, а площа ромба — S. Визначити сторону ромба й обчисли її значення, якщо $l = 5$, $S = 4$.

32.36. Визначити площу паралелограма за його висотами h_1 і h_2 та периметром P й обчислити її значення, якщо $h_1 = 3$, $h_2 = 7$, $P = 20$.

32.37. Основи трапеції дорівнюють 10 і 24, а бічні сторони — 15 і 13. Знайти площу трапеції.

32.38. У рівнобічну трапецію, верхня основа якої удвічі менша від її висоти, вписане коло, радіус якого дорівнює 3 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу трапеції.

32.39. Основи трапеції дорівнюють 5 і 15, а діагоналі — 12 і 16. Знайти площу трапеції.

32.40. Навколо трапеції описане коло, діаметром якого є більша основа. Обчислити площу трапеції у квадратних сантиметрах, якщо її діагональ і висота відповідно дорівнюють 5 см і 3 см.

32.41. Площі трикутників, утворених основами трапеції та відрізками діагоналей дорівнюють S_1 і S_2. Визначити площу трапеції й обчисли її значення, якщо $S_1 = 4$, $S_2 = 1$.

32.42. Квадрат зі стороною a повернуто навколо свого центра на 45°. Знайти площу спільної частини цих квадратів й обчисли її значення з точністю до 0,01, якщо $a = 1$.

32.43. Знайти квадрат площі паралелограма, якщо його більша діагональ дорівнює $2\sqrt{7}$, а висоти дорівнюють $\sqrt{3}$ і $2\sqrt{3}$.

32.44. Висота ромба дорівнює 24, а менша діагональ — 30. Знайти більшу діагональ ромба.

32.45. Знайти площу паралелограма з точністю до 0,01 см^2, якщо його більша діагональ дорівнює 5, а висоти дорівнюють 2 і 3.

32.46. Канал з Дніпра до Кривого Рогу в районі села Червоні Поди має у поперечному перерізі форму рівнобедреної трапеції, у якої довжина більшої основи дорівнює 12 м, висота 3 м, а бічні сторони нахилені до основи під кутом 45°. Швидкість руху води в каналі дорівнює 3 м/хв. Скільки кубічних метрів води забирається з Дніпра за 1 хв?

32.47. Скільки потрібно листів бляхи завширшки 3 м, щоб обгородити земельну ділянку прямокутної форми під будівництво офісного центру, площа якої дорівнює 480 м^2, а одна зі сторін — 16 м?