Тема 21. Арифметична та геометрична прогресії

Послідовністю називають функцію, задану на множині всіх натуральних чисел або на множині перших n натуральних чисел. Число a_1 називають *першим членом* послідовності, a_n — n-м членом (читають: a енне), а натуральне число n — його *номером*. Ми розглядатимемо лише послідовності, елементами яких є числа. Їх називають *числовими послідовностями*.

Послідовності позначають (a_n), (b_n), (c_n), ... і записують: (a_n): a_1, a_2, a_3, ... Наприклад, розглянемо послідовність (a_n): 2; 4; 6; 8; ... — послідовність парних натуральних чисел. У ній $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, ... Член послідовності $a_2 = 4$ є попереднім до члена $a_3 = 6$ і наступним за членом $a_1 = 2$.

Арифметична прогресія

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, утворюється додаванням до попереднього члена одного і того самого числа. Це число називають *різницею арифметичної прогресії* і позначають d. Отже, якщо (a_n): a_1; a_2; ...; a_n; ... — арифметична прогресія, то $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d$; ..., тобто для будь-якого натурального n виконується рівність $a_{n+1} = a_n + d$. Наприклад: а) послідовність (a_n): −8; −1; 6; 13; ... є арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює $a_1 = -8$, а різниця — $d = 7$; б) 4; 7; 10; 13; 16; 19 — скінченна арифметична прогресія, у якій $d = 3$; −4; −11; −18; −25; ... — нескінченна арифметична прогресія, у якій $d = -7$; 3; 3; 3; 3; ... — нескінченна арифметична прогресія, у якій $d = 0$.

Арифметична прогресія має такі властивості:

Властивість 1. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів. Тобто якщо a_1; a_2; a_3; a_4; ... — арифметична прогресія, то $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$; $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$; ...; $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Правильно й навпаки: послідовність, у якій будь-який член, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, є арифметичною прогресією. Наприклад, знайти невідомі члени арифметичної прогресії (a_n): −11; a_2; −21; −26; a_5; −36. $a_1 = -11$, $a_3 = -21$. Тоді $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{-11 - 21}{2} = -16$; $a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{-26 - 36}{2} = -31$;

Властивість 2. Сума будь-яких двох членів скінченної арифметичної прогресії, які рівновіддалені від її крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів цієї прогресії. Тобто якщо (a_n): a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6 — арифметична прогресія, то $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. Наприклад, знайти суму середніх членів арифметичної прогресії (a_n): 5; 7; ...; 19. Середніми членами цієї прогресії є a_4 і a_5. Тоді $a_4 + a_5 = a_1 + a_8 = 5 + 19 = 24$.

Формула n-го члена арифметичної прогресії має вигляд

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

де a_1 — перший член прогресії, d — різниця, n — порядковий номер члена прогресії.

Наприклад: а) нехай задано арифметичну прогресію (a_n), у якій $a_1 = 3{,}2$, $d = 0{,}3$, потрібно знайти a_{10}. Запишемо формулу n-го члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$. Тоді маємо: $a_{10} = a_1 + 9d = 3{,}2 + 9 \cdot 0{,}3 = 5{,}9$; б) знайти п'ятий член арифметичної прогресії (a_n), якщо її восьмий член дорівнює 24, а різниця — 3. Оскільки $a_n = a_1 + d(n-1)$, то $a_5 = a_1 + 4d$. Знайдемо a_1: $a_8 = a_1 + 7d$, звідки $a_1 = a_8 - 7d = 24 - 7 \cdot 3 = 3$. Тоді $a_5 = 3 + 4 \cdot 3 = 15$.

Для обчислення *суми членів арифметичної прогресії* використовують такі формули:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Наприклад, знайти суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1 = -4$, $d = 2$. За другою формулою знаходимо: $S_{10} = \frac{2 \cdot (-4) + 2 \cdot (10-1)}{2} \cdot 10 = 50$.

Геометрична прогресія

Геометричною прогресією називають послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а інші утворюються множенням попереднього члена на одне й те саме число, відмінне від нуля. Це число називають *знаменником геометричної прогресії* і позначають q. Отже, якщо (b_n): b_1; b_2; b_3; …; b_n; … — геометрична прогресія, то для будь-якого натурального n виконується рівність: $b_{n+1} = b_n \cdot q$. Знаменник геометричної прогресії дорівнює частці від ділення будь-якого її члена, починаючи з другого, на попередній, тобто: $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Якщо (b_n) — геометрична прогресія, то її рекурентна формула має вигляд: $b_{n+1} = b_n \cdot q,\ b_1 \neq 0,\ q \neq 0$. Наприклад: а) послідовність (b_n): 1; 3; 9; 27; ... є геометричною прогресією, перший член якої дорівнює $b_1 = 1$, а знаменник — $q = 3$; б) 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$ — скінченна геометрична прогресія, у якій $q = \frac{1}{3}$; 5; –10; 20; –40; … — нескінченна геометрична прогресія, у якій $q = -2$; 7; 7; 7; 7; … — нескінченна геометрична прогресія, у якій $q = 1$.

Геометрична прогресія має такі властивості:

Властивість 1. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів. Отже, якщо (b_n): b_1; b_2; …; b_n; … — геометрична прогресія, то $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, $b_3^2 = b_2 \cdot b_4$ тощо. Правильно й навпаки: якщо в деякій послідовності відмінних від нуля чисел квадрат будь-якого числа, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним чисел, то ця послідовність є геометричною прогресією. Якщо всі члени геометричної прогресії (b_n) є додатними числами, то з рівності $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ випливає $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Кожний член такої прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів. Наприклад, знайти сьомий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_6 = 3$, $b_8 = 27$. За описаною вище властивістю геометричної прогресії маємо: $b_7^2 = b_6 \cdot b_8$; $b_7^2 = 3 \cdot 27 = 81$; $b_7 = \pm 9$. Отже, $b_7 = 9$ або $b_7 = -9$.

Властивість 2. Добутки членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, однакові й дорівнюють добутку її крайніх членів. Тобто якщо (b_n): b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 — скінченна геометрична прогресія, то $b_1 \cdot b_6 = b_2 \cdot b_5 = b_3 \cdot b_4$. Наприклад, знайти сьомий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_6 = -36$, $b_8 = -4$. За описаною вище властивістю геометричної прогресії маємо: $b_7^2 = b_6 \cdot b_8$; $b_7^2 = (-36) \cdot (-4) = 144$; $b_7 = \pm 12$. Отже, $b_7 = 12$ або $b_7 = -12$.

Формула n-го члена геометричної прогресії має вигляд:

$$b_n = b_1 q^{n-1},$$

де b_1 — перший член прогресії, q — її знаменник, n — порядковий номер члена прогресії.

Наприклад, між числами 3 і 48 вставити такі три числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію (b_n). Нехай (b_n): 3; b_2; b_3; b_4; 48 — дана геометрична прогресія. Використавши формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$ й урахувавши, що $b_1 = 3$, $b_5 = 48$, складемо та розв'яжемо рівняння: $48 = 3 \cdot q^4$; $q^4 = 16$; $q = \pm 2$. Якщо $q = 2$, то $b_2 = 3 \cdot 2 = 6$, $b_3 = 6 \cdot 2 = 12$, $b_4 = 12 \cdot 2 = 24$. Якщо $q = -2$, то $b_2 = 3 \cdot (-2) = -6$, $b_3 = (-6) \cdot (-2) = 12$, $b_4 = 12 \cdot (-2) = -24$. Одержали прогресії: 3; 6; 12; 24; 48 або 3; –6; 12; –24; 48.

Для обчислення *суми членів геометричної прогресії* (b_n), де b_1 — перший член, b_n — n-й член, q — її знаменник, $q \neq 1$, n — кількість членів, використовують такі формули:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, q \neq 1;$$

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \text{ або } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

Якщо $q = 1$, то $S_n = n \cdot b_1$ — формула суми n перших членів геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює 1.

Наприклад, знайти суму перших чотирьох членів геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = \frac{1}{40}$, а знаменник — $q = \frac{1}{3}$. За формулою $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ маємо: $S_n = \frac{\frac{1}{40}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)}{1-\frac{1}{3}} =$

$= \frac{1}{40} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{27}$.

Нескінченна геометрична прогресія

У прогресіях 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4^2}$; $\frac{1}{4^3}$; ...; $\frac{1}{4^{n-1}}$; ..., 1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3^2}$; $-\frac{1}{3^3}$;...; $\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$; ... зі зростанням номера n модулі їхніх членів необмежено зменшуються, наближуючись до нуля. Прогресії такого виду називають нескінченно спадними. Геометричну прогресію називають *нескінченно спадною*, якщо модуль її знаменника менший за одиницю, тобто $|q| < 1$.

Сумою нескінченно спадної геометричної прогресії (b_n) називають число, до якого прямує сума її перших n членів за необмеженого збільшення n. Формула *суми нескінченно спадної геометричної прогресії* має вигляд:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Наприклад, знайти суму членів послідовності 2; 1; $\frac{1}{2}$; ... . Задана послідовність є нескінченною геометричною прогресією, у якій перший член дорівнює 2, а знаменник — $\frac{1}{2}$. Тоді сума членів прогресії дорівнює: $S = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

Приклад 1. Послідовність (a_n) задана формулою n-го члена $a_n = 2n^2 + 1$. Знайти: a_3, a_5, a_9.

■ $a_3 = 2 \cdot 3^2 + 1 = 19$; $a_5 = 2 \cdot 5^2 + 1 = 51$; $a_9 = 2 \cdot 9^2 + 1 = 163$.

Відповідь. 19; 51; 163. ■

Приклад 2. Числова послідовність (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = (n-1)(n+4)$. Чи є членом цієї послідовності число: **а)** 150; **б)** 8?

■ **а)** Розв'яжемо рівняння: $(n-1)(n+4) = 150$, де $n \in N$; $n^2 + 3n - 154 = 0$; $n_1 = 11$, $n_2 = -14$ — не задовольняє умови задачі. Отже, число 150 є членом послідовності;

б) розв'яжемо рівняння: $(n-1)(n+4) = 8$; $n^2 + 3n - 12 = 0$; $n_1 = \frac{-3+\sqrt{57}}{2}$, $n_2 = \frac{-3-\sqrt{57}}{2}$, $n_1 \notin N$, $n_2 \notin N$. Отже, число 8 не є членом послідовності.

Відповідь. **а)** Так, **б)** ні. ■

Приклад 3. Записати для арифметичної прогресії (a_n): –38; –34; –30; ... формулу n-го члена.

■ Оскільки $a_1 = -38$, $a_2 = -34$, то $d = a_2 - a_1 = -34 - (-38) = 4$. Формула n-го члена арифметичної прогресії (a_n): $a_n = -38 + 4(n-1) = 4n - 42$.

Відповідь. $a_n = 4n - 42$. ■

Приклад 4. Знайти різницю і п'ятий член арифметичної прогресії (a_n): **а)** 9,8; 11; 12,2; 13,4 ...; **б)** $\sqrt{3}-7$; $\sqrt{3}-4$; $\sqrt{3}-1$; $\sqrt{3}+2$; ... .

■ **а)** $d=a_2-a_1=11-9{,}8=1{,}2$; $a_4=13{,}4$; $a_5=a_4+d=13{,}4+1{,}2=14{,}6$;

б) $d=a_4-a_3=\sqrt{3}+2-(\sqrt{3}-1)=3$; $a_4=\sqrt{3}+2$; $a_5=a_4+d=\sqrt{3}+2+3=\sqrt{3}+5$.

Відповідь. **а)** 14,6; **б)** $\sqrt{3}+5$. ■

Приклад 5. Між числами 2,5 і 4 вставити два таких числа, щоб вони разом з даними утворювали арифметичну прогресію (a_n).

■ Маємо прогресію (a_n): 2,5; a_2; a_3; 4. Використавши формулу $a_n=a_1+d(n-1)$ й урахувавши, що $a_1=2{,}5$; $a_4=4$, складемо та розв'яжемо рівняння: $2{,}5+3d=4$; $3d=1{,}5$; $d=0{,}5$. Тоді $a_2=2{,}5+0{,}5=3$; $a_3=3+0{,}5=3{,}5$.

Відповідь. 3; 3,5. ■

Приклад 6. Знайти суму всіх трицифрових чисел, кратних 4, та менших за 250.

А	Б	В	Г	Д
124	4712	174	6612	348

■ Вказані числа утворюють арифметичну прогресію, перший член якої $a_1=100$, різниця $d=4$. За формулою n-го члена одержимо: $a_n=100+4(n-1)=4n+96$.

Щоб знайти кількість членів прогресії, складемо та розв'яжемо нерівність: $4n+96<250$; $n<38{,}5$. Отже, потрібно знайти суму 38 перших членів арифметичної прогресії. Знаходимо: $S_n=\dfrac{2\cdot 100+4\cdot 37}{2}\cdot 38=6612$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 7. Шість чисел утворюють арифметичну прогресію (a_n). Сума перших трьох її членів дорівнює -24, а сума трьох останніх дорівнює 12. Знайти ці числа.

■ Урахувавши, що $S_3=-24$, $S_6=-24+12=-12$, складемо і розв'яжемо систему:

$$\begin{cases}\dfrac{2a_1+2d}{2}\cdot 3=-24,\\ \dfrac{2a_1+5d}{2}\cdot 6=-12;\end{cases}\quad \begin{cases}a_1+d=-8,\\ 2a_1+5d=-4;\end{cases}\quad \begin{cases}2a_1+2d=-16;\\ 2a_1+5d=-4;\end{cases}\quad -3d=-12;\quad d=4.\quad \text{Тоді:}\quad a_1=-8-4=-12;$$

$a_2=-12+4=-8$; $a_3=-8+4=-4$; $a_4=-4+4=0$; $a_5=0+4=4$; $a_6=4+4=8$.

Відповідь. -12; -8; -4; 0; 4; 8. ■

Приклад 8. Щоб заасфальтувати ділянку завдовжки 117 м, використовують два котки. Перший коток встановили на одному кінці ділянки, другий — на протилежному. Працювати вони почали одночасно. За першу хвилину перший коток пройшов 1 м, за кожну наступну хвилину він проходив на 0,5 м більше, ніж за попередню. Другий коток за кожну хвилину проходив 6 м. Через скільки хвилин обидва котки зустрінуться?

■ Нехай обидва котки зустрінуться через x хв, тоді другий коток пройде до зустрічі шлях, що дорівнює $6x$ м, а перший пройде шлях, який можна виразити за допомогою суми членів арифметичної прогресії, де $a_1=1$, $n=x$, $d=\dfrac{1}{2}$. $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=\dfrac{2+\frac{1}{2}(x-1)}{2}\cdot x=\dfrac{4+x-1}{4}\cdot x=\dfrac{3x+x^2}{4}$. Увесь шлях дорівнює 117 м. Отже, маємо квадратне рівняння $6x+\dfrac{3x+x^2}{4}=117$. $x^2+27x-468=0$, звідки $x_1=12$, $x_2=-39$ — не задовольняє умову задачі. Отже, обидва котки зустрінуться через 12 хв.

Відповідь. 12 хв. ■

Приклад 9. Знайти знаменник та четвертий член геометричної прогресії (b_n): 4; –6; 9; … .

■ $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$; $b_4 = b_3 \cdot q = 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{2} = -13{,}5$.

Відповідь. $-\frac{3}{2}$; $-13{,}5$. ■

Приклад 10. За яких значень x числа 5^{5x}, $10^{\frac{3x^2+3}{4}}$ і 32^x будуть послідовними членами геометричної прогресії (b_n)? У відповідь записати добуток цих значень.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

■ За властивістю 1 геометричної прогресії маємо: $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$. Тоді: $\left(10^{\frac{3x^2+3}{4}}\right)^2 = 5^{5x} \cdot 32^x$;

$10^{\frac{3x^2+3}{2}} = 5^{5x} \cdot 2^{5x}$; $10^{\frac{3x^2+3}{2}} = 10^{5x}$; $\frac{3x^2+3}{2} = 5x$; $3x^2 - 10x + 3 = 0$; $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{3}$. Тоді $x_1 \cdot x_2 =$ $= 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 11. Знайти чотири числа, що утворюють геометричну прогресію (b_n), у якій сума крайніх членів дорівнює 27, а добуток середніх — 72.

■ Маємо геометричну прогресію (b_n): b_1; b_2; b_3; b_4, у якій $b_1 + b_4 = 27$, $b_2 \cdot b_3 = 72$. Оскільки $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_4}{b_3}$, то $b_2b_3 = b_1b_4 = 72$. Складемо і розв'яжемо систему: $\begin{cases} b_1 + b_4 = 27, \\ b_1 \cdot b_4 = 72. \end{cases}$ Звідки $b_1 = 3$, $b_4 = 24$ або $b_1 = 24$, $b_4 = 3$. Маємо дві прогресії: 1) 3; b_2; b_3; 24, 2) 24; b_2; b_3; 3. Знайдемо b_2 і b_3 в кожному з випадків.

1) Використавши формулу n-го члена геометричної прогресії, одержимо: $b_4 = b_1q^3$; $3 \cdot q^3 = 24$; $q^3 = 8$; $q = 2$. Тоді $b_2 = 3 \cdot 2 = 6$; $b_3 = 6 \cdot 2 = 12$. Маємо прогресію 3; 6; 12; 24.

2) $b_4 = b_1q^3$; $24q^3 = 3$; $q^3 = \frac{1}{8}$; $q = \frac{1}{2}$. Маємо прогресію: 24; 12; 6; 3.

Відповідь. 3; 6; 12; 24 або 24; 12; 6; 3. ■

Приклад 12. З бактерії за 30 хвилини утворюється дві, кожна з яких за 30 хвилини знову ділиться навпіл тощо. Скільки бактерій буде в організмі з однієї через добу?

А	Б	В	Г	Д
2^{30}	2^{48}	2^{10}	60	30

■ Число бактерій збільшується удвічі через кожні півгодини. Якщо зафіксувати кількість бактерій щопівгодини, то одержимо послідовність: 1; 2; 2^2; 2^3; …; 2^{n-1}. Ця послідовність є геометричною прогресією. Потрібно визначити, скільки бактерій утвориться з однієї бактерії через 24 год (48 разів по півгодини), тобто потрібно знайти 49-й член прогресії. Маємо $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 49$. Тоді за формулою $b_1 = b_1q^{n-1}$ маємо: $b_{49} = 1 \cdot 2^{49-1} = 2^{48}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 13. Знайти третій член нескінченної геометричної прогресії (b_n), сума якої дорівнює $\frac{8}{5}$, а другий член — $-\frac{1}{2}$.

■ За умовою складаємо та розв'язуємо систему: $\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = \frac{8}{5}, \\ b_1 q = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Поділивши почленно друге рівняння на перше, отримаємо $q(1-q) = -\frac{5}{16}$ або $q^2 - q - \frac{5}{16} = 0$. Звідки маємо $q_1 = -\frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{5}{4}$. Значення q_2 не задовольняє умову $|q| < 1$. Отже, $q = -\frac{1}{4}$. Тоді $b_3 = b_2 q = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$.

Відповідь. $\frac{1}{8}$. ■

Приклад 14. Перший, п'ятий та одинадцятий члени арифметичної прогресії (a_n) утворюють геометричну прогресію (b_n). Запиши шість перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 24$.

■ Нехай $a_1 = 24$ — перший член арифметичної прогресії, d — різниця прогресії. Тоді $a_5 = 24 + 4d$, $a_{11} = 24 + 10d$. (b_n): b_1; b_2; b_3; ... — геометрична прогресія. За умовою, $b_1 = 24$. $b_2 = a_5 = 24 + 4d$, $b_3 = a_{11} = 24 + 10d$. За властивістю геометричної прогресії $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$. Маємо: $(24 + 4d)^2 = 24(24 + 10d)$; $24^2 + 8 \cdot 24 \cdot d + 16d^2 = 24^2 + 10 \cdot 24 \cdot d$; $16d^2 - 2 \cdot 24 \cdot d = 0$; $16d(d-3) = 0$. $d = 0$ або $d = 3$. Отже, можливі два випадки:

1) $d = 0$, $a_1 = 24$, тоді маємо арифметичну прогресію: 24; 24; 24; 24; 24; 24.

2) $d = 3$, $a_1 = 24$, тоді маємо арифметичну прогресію: 24; 27; 30; 33; 36; 39.

Відповідь. 24; 24; 24; 24; 24; 24 або 24; 27; 30; 33; 36; 39. ■

Завдання 21.1–21.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

21.1. Знайти тридцять перший член арифметичної прогресії 3; 5,5; 8; ...

А	Б	В	Г	Д
85,5	83	80,5	78	73,5

21.2. В арифметичній прогресії (a_n) $a_1 = -2{,}7$; $a_{16} = 1{,}8$. Знайти різницю прогресії.

А	Б	В	Г	Д
0,5	0,2	0,4	–0,4	0,3

21.3. Ламана містить 14 відрізків. Кожний її відрізок, починаючи з другого, на 2 см більший від попереднього. Знайти довжину найменшого з відрізків, якщо найбільший з них дорівнює 29 см.

А	Б	В	Г	Д
2 см	2,5 см	3 см	3,5 см	4 см

21.4. В арифметичній прогресії $a_1 = 3$, $a_{75} = 299$. Знайти a_{50}.

А	Б	В	Г	Д
90	99	190	199	203

21.5. В арифметичній прогресії тридцять членів. Знайти суму всіх членів прогресії, якщо перший її член дорівнює –12, а останній — 75.

А	Б	В	Г	Д
1305	945	2610	835	1890

21.6. Знайти суму перших тринадцяти членів арифметичної прогресії –8; –5; –2; ...

А	Б	В	Г	Д
140	120	130	240	260

21.7. Третій і сьомий члени арифметичної прогресії відповідно дорівнюють 11 і 23. Знайти суму 10-ти перших членів цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
85	35	185	175	370

21.8. Записати формулу для обчислення n-го члена геометричної прогресії 4; 12; 36; ...

А	Б	В	Г	Д
$b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot 8^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot 3^n$

21.9. Записати формулу для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії 2; 6; 18; ...

А	Б	В	Г	Д
$2n$	$3^{n+1} - 7$	$3n - 1$	$2^n + 1$	$3^n - 1$

21.10. $17 + 17^2 + 17^3 + ... + 17^{20} = ...$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{16 \cdot (17^{20} - 1)}{17}$	$\frac{17 \cdot (17^{19} - 1)}{16}$	$\frac{17 \cdot (17^{20} - 1)}{16}$	$\frac{17^{20} - 1}{16}$	$\frac{17^{21} - 1}{16}$

21.11. Знайти суму нескінченно спадної геометричної прогресії 3; $-\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{8}$; ...

А	Б	В	Г	Д
2	3	6	2,5	1

21.12. Обчислити суму $21^{-1} + 21^{-2} + 21^{-3} = ...$

А	Б	В	Г	Д
0,1	0,05	0,01	0,2	0,02

21.13. (a_n) — арифметична прогресія, в якої $a_1 = 9$, $a_{10} = 27$. Знайти a_{15}.

А	Б	В	Г	Д
Не можна визначити	41	39	47	37

21.14. В арифметичній прогресії (a_n) $a_8 = 6$. Знайти S_{15}.

А	Б	В	Г	Д
180	84	96	90	не можна визначити

21.15. Сума восьмого і двадцятого членів арифметичної прогресії дорівнює 48. Знайти чотирнадцятий член прогресії.

А	Б	В	Г	Д
96	24	26	22	не можна визначити

21.16. (a_n) — арифметична прогресія. Знайти суму перших її десяти членів, якщо $a_4 = 10$ і $a_7 = 19$.

А	Б	В	Г	Д
145	290	155	390	310

21.17. Знайти суму натуральних чисел від 40 до 200 включно.

А	Б	В	Г	Д
19280	19200	19320	38400	38640

21.18. Знайти знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо її перший член $b_1 = \frac{1}{101}$, а сума — $\frac{1}{100}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{101}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{300}$

21.19. Вираз $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 + a^8 - a^9$, де $a \neq 1$, тотожно дорівнює виразу ...

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a^{10}-1}{a-1}$	$\frac{a^{10}+1}{a+1}$	$\frac{a^{10}-1}{a+1}$	$\frac{1-a^{10}}{a+1}$	$\frac{1-a^9}{a+1}$

21.20. У пробірці міститься три клітини, які розмножуються поділом навпіл. Скільки утвориться клітин після n-го поділу?

А	Б	В	Г	Д
$2 \cdot 3^n$	$2 \cdot 3^{n-1}$	$3 + 2^n$	$3 \cdot 2^{n-1}$	$3 \cdot 2^n$

21.21. Вкладник вніс до банку a гривень під 10% річних. Скільки грошей буде на рахунку вкладника через n років?

А	Б	В	Г	Д
$1{,}1^n a$	$1{,}1a^n$	$(1 + 0{,}1^n)a$	$(1 + 1{,}1^n)a$	$0{,}1a^n$

21.22. $11 + 101 + 1001 + 10001 + 1\underbrace{00...00}_{n}1 = ...$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{10^{n+1}+n-10}{9}$	$\frac{10^{n+2}+9n-1}{9}$	$\frac{10^{n+2}-10}{9}$	$\frac{10^{n+1}-10}{9}$	$\frac{10^{n+2}+10n-1}{9}$

Завдання 21.23–21.33 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

21.23. Установити відповідність між послідовностями (1–4) та їхніми можливими властивостями (А–Д).

1 Арифметична прогресія
2 Не прогресія
3 Геометрична прогресія ($|q| > 1$)
4 Нескінченна геометрична прогресія ($|q| < 1$)

А $S_n = \dfrac{n^2 + 13n}{2}$
Б $S = \dfrac{a_1}{1 - q}$
В $S_n = 3n + 2$
Г $a_n = 2^n$
Д $b_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

21.24. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та їх різницями (А–Д).

1 $a_1 = -1, a_2 = 3$
2 $a_1 = -30, a_5 = -6$
3 $a_1 = 13, a_4 = 1$
4 $a_1 = 17, a_{11} = -3$

А -2
Б -4
В 2
Г 4
Д 6

21.25. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та формулами n-го члена (А–Д).

1 $a_1 = 2, a_3 = 12$
2 $a_2 = -11, a_5 = -20$
3 $a_3 = 18, a_7 = 38$
4 $a_4 = -23, a_6 = -33$

А $a_n = 5 + 3n$
Б $a_n = 3 + 5n$
В $a_n = -5 - 3n$
Г $a_n = -3 - 5n$
Д $a_n = -3 + 5n$

21.26. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та їх десятим членом (А–Д).

1 $a_1 = -9, a_3 = -23$
2 $a_1 = -2, a_7 = 16$
3 $a_1 = -5, a_{13} = -29$
4 $a_1 = -1, a_{14} = 51$

А $a_{10} = 25$
Б $a_{10} = 35$
В $a_{10} = -45$
Г $a_{10} = -23$
Д $a_{10} = -72$

21.27. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та формулами сум n перших її членів (А–Д).

1 $a_1 = 5, a_2 = 9$
2 $a_1 = -5, a_3 = -13$
3 $a_1 = 7, a_4 = 13$
4 $a_1 = -11, a_5 = -19$

А $S_n = n^2 + 6n$
Б $S_n = -n^2 - 10n$
В $S_n = -2n^2 - 3n$
Г $S_n = 2n^2 + 3n$
Д $S_n = -n^2 + 10n$

21.28. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та сумами 10 перших її членів (А–Д).

1 $a_1 = 7, a_2 = 9$
2 $a_1 = -7, a_2 = -9$
3 $a_1 = -3, a_3 = 1$
4 $a_1 = 3, a_3 = -1$

А -160
Б -60
В 0
Г 60
Д 160

21.29. Установити відповідність між геометричними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та їх знаменниками (А–Д).

1 $b_1 = -2, b_4 = -54$
2 $b_2 = -6, b_5 = 162$
3 $b_1 = 32, b_4 = 4$
4 $b_3 = -24, b_6 = 3$

А -3
Б $-0{,}5$
В $-\frac{1}{3}$
Г $0{,}5$
Д 3

21.30. Установити відповідність між геометричними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та формулами n-го члена (А–Д).

1 $b_1 = 4, b_4 = 108$
2 $b_1 = 2, b_4 = -54$
3 $b_2 = -6, b_5 = 48$
4 $b_2 = 6, b_5 = \frac{81}{32}$

А $b_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$
Б $b_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$
В $b_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$
Г $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$
Д $b_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

21.31. Установити відповідність між геометричними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома першими членами, та формулами суми n перших їх членів (А–Д).

1 $b_1 = 4, b_2 = 8$
2 $b_1 = -4, b_2 = -2$
3 $b_1 = 12, b_2 = -24$
4 $b_1 = \frac{3}{4}, b_2 = -\frac{3}{8}$

А $S_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}$
Б $S_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}$
В $S_n = 2^{n+2} - 4$
Г $S_n = 2^{-n+3} - 8$
Д $S_n = 2 \cdot (-2)^{n+1} + 4$

21.32. Установити відповідність між нескінченними спадними геометричними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома першими членами, та їх сумами (А–Д).

1 $b_1 = 6, b_2 = 1$
2 $b_1 = 25, b_2 = -5$
3 $b_1 = \frac{2}{3}, b_2 = -\frac{1}{3}$
4 $b_1 = \frac{3}{7}, b_2 = \frac{6}{49}$

А $20\frac{5}{6}$
Б $0{,}6$
В $3{,}6$
Г $7{,}2$
Д $\frac{4}{9}$

21.33. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та їх сумами (А–Д).

1 $1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10}$, де $a \neq 1$

2 $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 + a^5 - a^6$, де $a \neq 1$

3 $a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10} + a^{12}$, де $a \neq 1$

4 $a - a^2 + a^3 - a^4 + a^5 - a^6$, де $a \neq -1$

А $\dfrac{a^7 + 1}{a + 1}$

Б $\dfrac{a^{14} - a^2}{a^2 - 1}$

В $\dfrac{a - a^7}{a + 1}$

Г $\dfrac{a - a^7}{a - 1}$

Д $\dfrac{1 - a^{12}}{1 - a^2}$

Розв'яжіть завдання 21.34–21.46. Відповідь запишіть десятковим дробом.

21.34. Знайти найбільший від'ємний член арифметичної прогресії (a_n), у якої $a_1 = 101$, $d = -7$.

21.35. Знайти суму S членів арифметичної прогресії (a_n) з десятого до сорокового включно, якщо $a_1 = -10$, $d = 2$. У відповідь записати $S : 100$.

21.36. Із двох точок, відстань між якими дорівнює 155 м, одночасно починають рухатися назустріч одне одному два тіла. Перше тіло рухається рівномірно зі швидкістю 8 м/с, а друге тіло за першу секунду пройшло 3 м, а кожної наступної секунди проходить на 1 м більше, ніж за попередню. Через скільки секунд тіла зустрінуться?

21.37. Знайти суму S усіх трицифрових натуральних чисел, які діляться на число 7 без остачі. У відповідь записати $S : 100$.

21.38. Знайти найбільше значення x, за яких числа $x - 1$, $2x - 1$ і $x^2 - 5$, записані в указаному порядку, утворюють арифметичну прогресію.

21.39. Визначити, за яких значень x три числа $\lg 2$, $\lg(3^x - 3)$ і $\lg(3^x + 9)$, узяті в заданій послідовності, утворюють арифметичну прогресію.

21.40. Знайти різницю арифметичної прогресії, якщо сума перших її 100 членів на 50 більша від суми ста наступних.

21.41. Інфузорії-туфельки розмножуються поділом на дві частини. Скільки утвориться інфузорій із п'яти після семи поділів?

21.42. (x_n) — нескінченна спадна геометрична прогресія, у якої $x_1 = 3$, $q = \dfrac{1}{3}$. Знайти суму її членів з непарними номерами.

21.43. У посудині міститься 1000 л повітря. Кожний рух поршня розріджувального насоса видаляє з посудини 0,1 частини повітря. Скільки літрів повітря залишиться в посудині після п'яти рухів поршня?

21.44. Спростити рівняння функції $y = x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^2} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^3} + \ldots$ та знайти її значення, якщо $x = 3$.

21.45. Знайти перші п'ятдесят членів двох арифметичних прогресій 2; 7; 12; … і 3; 10; 17;…, які однакові в обох прогресіях та обчислити їх суму S. У відповідь записати $S : 100$.

21.46. Числа m, n і p, відмінні від нуля та записані в заданій послідовності, утворюють геометричну прогресію, а числа $m+n$, $n+p$ і $p+m$, записані в заданій послідовності, — арифметичну прогресію. Знайти знаменник геометричної прогресії, відмінний від 1.