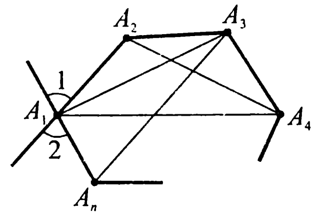
Тема 33. Многокутники



Нехай задано точки $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n$, жодні три сусідні з яких не лежать на одній прямій, і відрізки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, жодні два з яких не перетинаються. Одержану таким чином фігуру називають *многокутником*.

Точки $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n$ називають *вершинами* многокутника, відрізки $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ — *сторонами* многокутника. *Кутом многокутника* при даній вершині називають кут, утворений його сторонами, які сходяться в цій вершині. $\angle A_1, \angle A_2, \angle A_3, \angle A_4, \ldots, \angle A_n$ — *кути* (або *внутрішні кути*) многокутника.

Кут, суміжний із внутрішнім кутом многокутника, називають його *зовнішнім кутом многокутника.*

У многокутнику є *сусідні сторони* та *вершини.* Наприклад, на рисунку A_1 і A_2, A_2 і A_3 — сусідні вершини, A_1A_2 і A_2A_3 — сусідні сторони.

Многокутник, який має n вершин (а отже, й n сторін), називають *n-кутником.* Залежно від кількості вершин (сторін) многокутник може бути трикутником, чотирикутником, п'ятикутником тощо.

Многокутник позначають назвами його вершин. При цьому букви, що стоять у назві многокутника поруч, є назвами сусідніх вершин. Наприклад, п'ятикутник *ACFBK* не можна назвати *AFCBK.*

Многокутник називають *опуклим*, якщо він лежить з одного боку від будь-якої прямої, що містить його сторону.

Довжина кожної сторони многокутника менша за суму довжин усіх інших сторін.

Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін. Позначають периметр літерою P: $P_{A_1A_2\ldots A_n} = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$.

Діагоналлю многокутника називають відрізок, який сполучає дві несусідні його вершини.

Многокутник називають *вписаним* у коло, якщо всі його вершини лежать на цьому колі.

Многокутник називають *описаним* навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола.

Властивості опуклого n-кутника

1. Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$.

2. Сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює $360°$.

3. З однієї вершини опуклого многокутника виходить $(n - 3)$ діагоналі, які розбивають його на $(n - 2)$ трикутники.

4. В опуклому многокутнику є $\frac{n(n-3)}{2}$ діагоналі.

5. Опуклий многокутник існує, якщо сума його кутів кратна $180°$.

Правильні многокутники

Правильним многокутником називають опуклий многокутник, у якого всі сторони й усі кути рівні.

Сума кутів правильного многокутника, як і довільного многокутника, дорівнює $180° \cdot (n - 2)$.

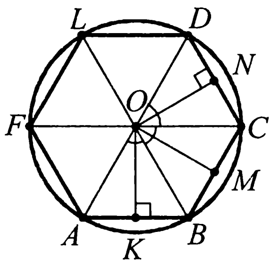
Величина кута α_n правильного n-кутника: $\alpha_n = \frac{180(n-2)}{n}$.

Навколо будь-якого правильного многокутника можна описати коло; у будь-який правильний многокутник можна вписати коло, до того ж центри вписаного й описаного кіл збігаються. $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$, $R = \sqrt{r^2 + \dfrac{a^2}{4}}$, $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}$, $r = \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2}{4}}$, де R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола, a — сторона правильного n-кутника.

Формули для обчислення сторони a_n, радіуса R описаного та радіуса r вписаного кіл для правильних n-кутників

n	R через a_n	r через a_n	a_n через R	a_n через r	R через r	r через R
3	$\frac{a_3}{\sqrt{3}}$	$\frac{a_3}{2\sqrt{3}}$	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$	$2r$	$\frac{R}{2}$
4	$\frac{a_4}{\sqrt{2}}$	$\frac{a_4}{2}$	$R\sqrt{2}$	$2r$	$r\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
6	a_6	$\frac{a_6\sqrt{3}}{2}$	R	$\frac{2r}{\sqrt{3}}$	$\frac{2r}{\sqrt{3}}$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
n	$\frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$	$\frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$	$2R\sin\frac{180°}{n}$	$2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$	$\frac{r}{\cos\frac{180°}{n}}$	$R\cos\frac{180°}{n}$

Спільний центр описаного і вписаного кіл називають *центром* правильного многокутника.



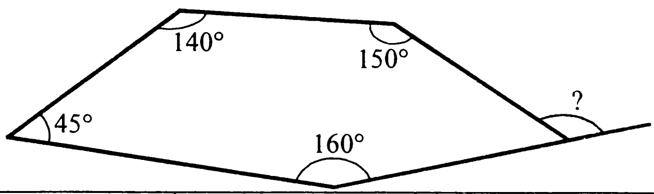
Апофемою правильного многокутника називають перпендикуляр, проведений з центра правильного многокутника до його сторони. Апофема — це радіус вписаного кола. На рисунку OK, OM, ON, ... — апофеми.

Правильні n-кутники подібні. Відношення їхніх периметрів, радіусів вписаних й описаних кіл дорівнюють відношенню їхніх сторін, а відношення їх площ — відношенню квадратів сторін.

Центральним кутом правильного многокутника називають кут, утворений двома радіусами, проведеними до сусідніх вершин. Наприклад, кути AOB, BOC, COD, ... — центральні кути.

Центральний кут правильного n-кутника обчислюють за формулою $\beta = \frac{360°}{n}$.

Приклад 1. Знайти зовнішній кут многокутника, зображеного на рисунку.



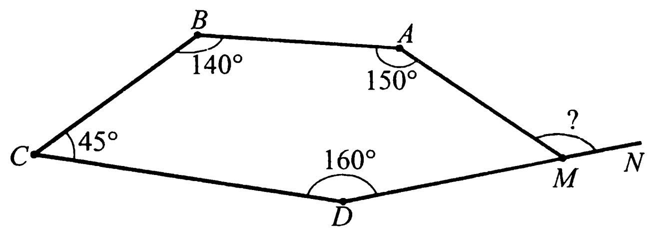
А	Б	В	Г	Д
150°	45°	160°	140°	135°

■ Сума кутів п'ятикутника дорівнює: $180° \cdot 5 - 180° \cdot 2 = 540°$.

$\angle AMD = 540° - (150° + 140° + 45° + 160°) = 45°$.

$\angle AMN = 180° - 45° = 135°$.

Відповідь. Д. ■



Приклад 2. Скільки сторін має многокутник, якщо в ньому можна провести 20 діагоналей?

А	Б	В	Г	Д
10	15	5	8	6

■ У n-кутнику можна провести $\frac{n(n-3)}{2}$ діагоналі. Маємо: $\frac{n(n-3)}{2} = 20$; $n^2 - 3n - 40 = 0$; $n_1 = -5$ — не задовольняє умову задачі, $n_2 = 8$.

Відповідь. Г. ■

Приклад 3. Знайти найбільший кут п'ятикутника, якщо градусні міри його внутрішніх кутів відносяться як 3 : 2 : 4 : 4 : 5.

■ Нехай кути п'ятикутника дорівнюють $3x°$, $2x°$, $4x°$, $4x°$, $5x°$, де x — деяке число. Сума кутів опуклого п'ятикутника дорівнює $180° \cdot (5-2) = 180° \cdot 3$. Рівняння: $3x + 2x + 4x + 4x + 5x = 180 \cdot 3$; $18x = 180 \cdot 3$; $x = 30$. Тоді $3x = 90$, $2x = 60$, $4x = 120$, $5x = 150$.

Отже, кути п'ятикутника дорівнюють 90°, 60°, 120°, 120° і 150°. Найбільший кут дорівнює 150°.

Відповідь. 150°. ■

Приклад 4. Скільки вершин має опуклий многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює 2160°?

■ Опуклий многокутник має стільки вершин, скільки й кутів. Сума кутів опуклого многокутника дорівнює $180° \cdot (n-2)$. Складемо та розв'яжемо рівняння: $180° \cdot (n-2) = 2160$; $n-2 = 12$; $n = 14$.

Отже, многокутник має 14 вершин.

Відповідь. 14. ■

Приклад 5. Скільки вершин у правильного многокутника, якщо його внутрішній кут відноситься до зовнішнього кута як 5 : 2?

■ Нехай внутрішній кут дорівнює $5x°$, а зовнішній — $2x°$. Маємо: $5x + 2x = 180$; $7x = 180$; $x = \frac{180}{7}$. Отже, зовнішній кут многокутника дорівнює $2 \cdot \frac{180°}{7} = \frac{360°}{7}$. Сума зовнішніх кутів многокутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°, а кожен зовнішній кут — $\frac{360°}{n}$. Маємо: $\frac{360°}{n} = \frac{360°}{7}$; $n = 7$. Отже, у многокутнику є 7 вершин.

Відповідь. 7. ■

Приклад 6. Три кути опуклого n-кутника дорівнюють по 80°, а решта по 160°. Визначити кількість кутів n-кутника.

■ Нехай $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_3, \ldots$, $\angle A_n$ — кути n-кутника. $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = 80°$. Тому $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 = 80° \cdot 3 = 240°$. У даному n-кутнику ще є $(n-3)$ кути по 160°, їх сума дорівнює $160° \cdot (n-3)$. Отже, сума всіх кутів даного n-кутника дорівнює $240° + 160° \cdot (n-3)$, а сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n-2)$. Складемо та розв'яжемо рівняння: $240 + 160 \cdot (n-3) = 180 \cdot (n-2)$; $240 + 160 \cdot n - 480 = 180 \cdot n - 360$; $20n = 120$; $n = 6$. Отже, в n-кутнику 6 кутів.

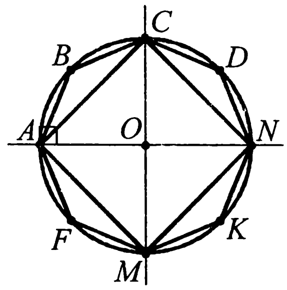
Відповідь. 6. ■

Приклад 7. На скільки градусів збільшиться сума внутрішніх кутів многокутника, якщо число сторін збільшити на 5?

■ Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n-2)$. Якщо число сторін збільшити на 5, то й число кутів збільшиться на 5. Тоді їх сума дорівнюватиме $180° \cdot (n+5-2) = 180° \cdot (n+3)$ і вона збільшиться на: $180° \cdot (n+3) - 180° \cdot (n-2) = 180° \cdot n + 540° - 180° \cdot n + 360° = 900°$.

Відповідь. На 900°. ■

Приклад 8. Знайти радіус кола, описаного навколо правильного восьмикутника, сторона якого дорівнює а.



■ Нехай $ABCDNKMF$ — правильний восьмикутник, вписаний у коло, AC — сторона квадрата, вписаного в це коло (див. рис.) $AC = R\sqrt{2}$, де R — шуканий радіус. Кут правильного n-кутника дорівнює $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$. Тоді

$\angle B = \dfrac{180°(8-2)}{8} = 135°$.

Із трикутника ABC за теоремою косинусів $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$.

$AC^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 135°$;

$2R^2 = 2a^2 + 2a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$R^2 = a^2 + \sqrt{2}\,a^2$; $R^2 = a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$;

$R = a\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Відповідь. $a\sqrt{1+\sqrt{2}}$. ■

Завдання 33.1–33.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

33.1. Скільки всього діагоналей має десятикутник?

А	Б	В	Г	Д
10	50	75	70	35

33.2. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів опуклого дванадцятикутника?

А	Б	В	Г	Д
1800°	1980°	2160°	1620°	2520°

33.3. Скільки вершин має опуклий многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює 900°?

А	Б	В	Г	Д
п'ять	шість	сім	вісім	дев'ять

33.4. Якщо в опуклому многокутнику всі кути гострі, то він...

А	Б	В	Г	Д
трикутник	чотирикутник	п'ятикутник	трикутник або чотирикутник	стокутник

33.5. Чому дорівнює внутрішній кут правильного восьмикутника?

А	Б	В	Г	Д
36°	45°	54°	135°	126°

33.6. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо його внутрішній кут дорівнює 156°?

А	Б	В	Г	Д
13	14	15	16	17

33.7. Скільки вершин має правильний многокутник, якщо його зовнішній кут дорівнює 20°?

А	Б	В	Г	Д
9	12	16	18	20

33.8. Якщо у правильного многокутника всі діагоналі рівні, то він...

А	Б	В	Г	Д
Чотирикутник	п'ятикутник	шестикутник	чотирикутник або п'ятикутник	чотирикутник або шестикутник

33.9. Кути п'ятикутника пропорційні до чисел 3, 5, 5, 6 і 8. Знайти найбільший кут п'ятикутника.

А	Б	В	Г	Д
160°	150°	140°	130°	155°

33.10. Скільки діагоналей має многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює 1620°?

А	Б	В	Г	Д
35	54	65	55	44

33.11. Сторона правильного шестикутника дорівнює 10 см. Знайти його найбільшу діагональ.

А	Б	В	Г	Д
$10\sqrt{3}$ см	$20\sqrt{3}$ см	10 см	40 см	20 см

33.12. Сторона правильного шестикутника дорівнює a. Визначити меншу діагональ.

А	Б	В	Г	Д
$2a\sqrt{3}$	a	$2a\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$	$2a$

33.13. Сторона правильного шестикутника дорівнює 2 см. Знайти його площу.

А	Б	В	Г	Д
$6\sqrt{3}$ см^2	$12\sqrt{3}$ см^2	$3\sqrt{3}$ см^2	32 см^2	64 см^2

33.14. Знайти периметр правильного шестикутника, якщо довжина кола, описаного навколо нього, дорівнює 18π см.

А	Б	В	Г	Д
108 см	54 см	27 см	$27\sqrt{3}$ см	$54\sqrt{3}$ см

33.15. Знайти меншу діагональ правильного шестикутника, якщо більша його діагональ дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ см	$\sqrt{3}$ см	3 см	2 см	1 см

33.16. Радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайти периметр шестикутника.

А	Б	В	Г	Д
24 см	48 см	96 см	192 см	72 см

33.17. Чому дорівнює найбільший кут між двома діагоналями, проведеними з однієї вершини правильного шестикутника?

А	Б	В	Г	Д
45°	60°	80°	90°	120°

33.18. Скільки сторін має опуклий многокутник, у якого сума внутрішніх кутів дорівнює сумі його зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині?

А	Б	В	Г	Д
Три	чотири	п'ять	шість	вісім

33.19. Скільки сторін має опуклий многокутник, якщо сума його усіх внутрішніх кутів і усіх зовнішніх дорівнює 2520°?

А	Б	В	Г	Д
10	11	12	13	14

33.20. Скільки вершин має правильний многокутник, у якого внутрішній кут у 8 разів більший від зовнішнього?

А	Б	В	Г	Д
12	14	16	18	20

Завдання 33.21–33.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

33.21. Установити відповідність між кількістю кутів (1–4) многокутника та кількістю його діагоналей (А–Д).

1 12
2 15
3 7
4 5

А 14
Б 5
В 54
Г 20
Д 90

33.22. Установити відповідність між величиною внутрішнього кута (1–4) правильного многокутника та кількістю його сторін (А–Д).

1 156°
2 108°
3 150°
4 140°

А 9
Б 12
В 5
Г 7
Д 15

33.23. Сторона правильного многокутника дорівнює 2 см. Установити відповідність між кількістю сторін (1–4) цього многокутника та його площею (А–Д).

1 6
2 9
3 12
4 15

А $12\operatorname{ctg}15°$ см^2
Б $6\sqrt{3}$ см^2
В $9\operatorname{ctg}20°$ см^2
Г $12\operatorname{ctg}12°$ см^2
Д $15\operatorname{ctg}12°$ см^2

Розв'яжіть завдання 33.24–33.35. Відповідь запишіть десятковим дробом.

33.24. Сума внутрішніх кутів многокутника удвічі більша від суми зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині. Знайти число сторін многокутника.

33.25. Кожний із трьох внутрішніх кутів многокутника дорівнює 80°, а кожний з решти кутів — 150°. Скільки найменше сторін може мати многокутник?

33.26. Три кути многокутника прямі, а решта дорівнюють по 150°. Скільки найменше вершин може мати многокутник?

33.27. На скільки градусів збільшиться сума внутрішніх кутів многокутника, якщо число його сторін збільшити на 5?

33.28. Внутрішній кут правильного многокутника на 144° більший від зовнішнього. Скільки сторін має многокутник?

33.29. Радіус кола, описаного навколо правильного восьмикутника, дорівнює $4\sqrt{2}$. Знайти найменшу діагональ восьмикутника.

33.30. Менша діагональ правильного шестикутника дорівнює $\sqrt{3}$. Визначити більшу його діагональ.

33.31. R — радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника. Визначити радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, якщо $R = \sqrt{3}$.

33.32. Під яким кутом (у градусах) перетинаються дві діагоналі правильного п'ятикутника, проведені з різних вершин?

33.33. За стороною a правильного дванадцятикутника визначити його апофему (перпендикуляр, опущений з центра до сторони), якщо $a = 2 - \sqrt{3}$.

33.34. Виразити сторону a правильного дванадцятикутника через радіус R описаного кола, й обчислити її довжину, якщо $R = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

33.35. На клумбі, яка має форму правильного восьмикутника зі стороною 1 м, потрібно посадити квіти. Скільки найбільше квітів можна посадити на такій клумбі, якщо для однієї рослини потрібно 160 $см^2$ землі?