

## Тема 8. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ

### 8.1. Основні поняття. Закон Кулона

Електромагнітне поле являє собою особливий вид матерії; воно є носієм енергії і проявляє себе характерними для нього електричними і магнітними властивостями.

Електростатичне поле – це частковий вид електромагнітного поля. Воно створюється сукупністю електричних зарядів, незмінних в часі і нерухомих у просторі у відношенні до спостерігача.

Відомо, що будь-яка речовина складається з елементарних заряджених частинок, оточених електромагнітним полем і в будь-якій речовині завжди в наявності мікроскопічна неоднорідність у просторі.

Елементарні заряджені частинки, які входять до складу атомів і молекул, знаходяться в неперервному хаотичному русі. Значить, крім мікроскопічної неоднорідності в просторі, завжди наявна неоднаковість розміщення мікроскопічних зарядів в суміжні моменти часу.

У теорії поля осереднюють мікроскопічні неоднорідності речовини в просторі і в часі, тобто розглядають процеси в макроскопічному розумінні.

У зарядженому тілі (при незмінності в часі його повного заряду) елементарні заряди рухаються хаотично і тому, навіть, в безпосередній близькості від поверхні цього тіла створюване елементарними зарядами магнітне поле практично відсутнє. Це дає можливість розглядати в електростатичному полі лише один «бік» електромагнітного поля, а саме – електричний «бік».

У подальшому будемо розглядати поля, створювані в однорідному й ізотропному середовищі, тобто в такому середовищі, електричні властивості якого однакові для всіх точок поля і не залежать від напрямку.

Електростатичному полю притаманна властивість взаємодіяти з поміщеним в це поле електричним зарядом з механічною силою, пропорційною величині цього заряду.

В основу визначення електростатичного поля покладено його механічне проявлення, яке описується законом Кулона:

Два точкові заряди  $q_1$  і  $q_2$  взаємодіють у вакуумі один з одним з силою  $\vec{F}$ , яка прямопропорційна добутку цих зарядів і оберненопропорційна квадрату відстані  $R$  між ними:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}_0, \quad (8.1)$$

де  $\vec{R}_0$  – одиничний вектор, який спрямований уздовж лінії, що сполучає ці заряди (рис. 8.1).

В системі СІ відстань  $R$  вимірюють у метрах (м), величину заряду  $q$  – в кулонах (Кл), а силу  $\vec{F}$  – в ньютонках (Н).

$\epsilon_0 = 8,86 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – діелектрична проникність вакууму (електрична стала).

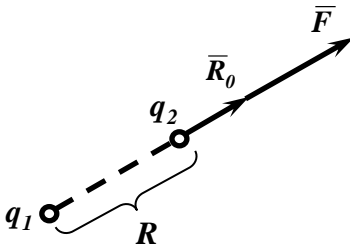


Рис. 8.1

Заряди однакових знаків відштовхуються один від одного по лінії, що сполучає точкові заряди; заряди протилежних знаків взаємопритягуються.

## 8.2. Основні величини електростатичного поля

Напруженість поля  $\vec{E}$  (векторна величина) і потенціал  $\varphi$  (скалярна величина) є основними величинами, які характеризують електростатичне поле і поле вважають визначеним, якщо відомий закон зміни  $E$  або  $\varphi$  в усіх точках цього поля.

Якщо в електростатичне поле помістити точковий заряд, який малий настільки, що своєю присутністю не

викличе помітного перерозподілу зарядів на тілах, які утворюють поле, то відношення сили  $\vec{F}$ , що діє на заряд, до величини цього заряду визначає напруженість поля в даній точці:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (8.2)$$

Напруженість поля чисельно рівна силі, яка діє на заряд, величиною рівний одиниці.

Якщо поле створене кількома зарядами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , то загальна напруженість поля рівна геометричній сумі напруженостей від кожного заряду зокрема:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n.$$

Визначимо взаємозв'язок між роботою, яку виконують сили поля при переміщенні заряду, і потенціалом довільної точки поля. Для цього помістимо в поле деякий заряд  $q$  (рис. 8.2), на який у відповідності з (8.2) буде діяти сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

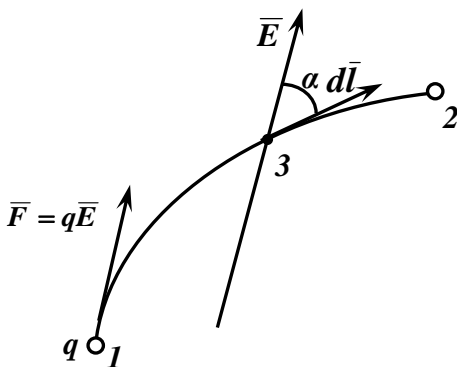


Рис. 8.2

Нехай заряд  $q$  рухається з точки 1 в точку 2 шляхом 1-3-2 (рис. 8.2). Так як напрямок сили  $\vec{F}$ , що діє на заряд у кожній точці шляху, може не співпадати з елементом шляху  $d\vec{l}$ , то елементарна робота, яка

витрачена на переміщення шляхом  $d\vec{l}$ , визначається скалярним добутком сили на елемент шляху:

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l}.$$

Повна робота, яка буде затрачена на переміщення заряду  $q$  з точки 1 в точку 2 на всьому шляху 1-3-2,

визначиться сумою елементарних робіт  $dA$  у вигляді лінійного інтеграла:

$$A = \int_1^2 q \bar{E} d\bar{l} = q \int_1^2 \bar{E} d\bar{l} = q \int_1^2 E dl \cos \alpha. \quad (8.3)$$

Заряд  $q$  може бути будь-яким, в тому числі й одиничним ( $q = 1$ ).

Під різницею потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  розуміють роботу, яку затрачують сили поля при переносі одиничного заряду з початкової точки  $1$  у кінцеву точку  $2$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \bar{E} d\bar{l}. \quad (8.4)$$

Якщо потенціал кінцевої точки  $2$  рівний нулю ( $\varphi_2 = 0$ ), то потенціал точки  $1$ :

$$\varphi_1 = \int_1^2 \bar{E} d\bar{l}, \quad (8.5)$$

тобто потенціал довільної точки поля може бути визначений як робота, яку виконують сили поля при переносі одиничного додатного заряду з даної точки поля в точку з нульовим потенціалом, в якості якої може бути прийнята будь-яка точка поля. Якщо така точка вибрана, то потенціали решти точок поля визначаються цілком однозначно.

Часто вважають, що точка з нульовим потенціалом знаходиться на поверхні Землі.

### 8.3. Потенціальність електростатичного поля

Виведемо формулу для різниці потенціалів у полі точкового заряду в функції шляху. Для цього припустимо, що в точці  $M$  (рис. 8.3) знаходиться додатний точковий заряд  $+q_1$ , який створює поле, а з точки  $1$  в точку  $2$  траєкторією  $1-3-2$  рухається одиничний додатний заряд  $+q = 1$ . На рис. 8.3 через  $R_1$ ,  $R$ ,  $R_2$  позначено відстані від точки  $M$  до точок  $1$ ,  $3$ ,  $2$  відповідно, а напрямки

напруженості  $\vec{E}$  й елемента шляху  $d\vec{l}$  показані для довільної проміжної точки 3.

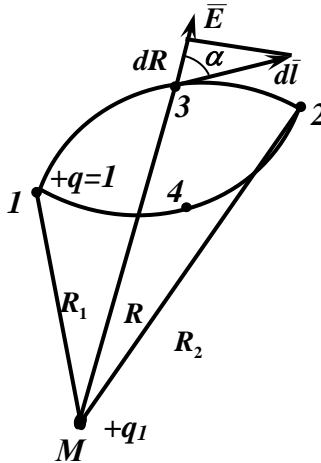


Рис. 8.3

Скалярний добуток двох векторів визначає елементарну роботу на шляху  $d\vec{l}$  :

$$dA = \vec{E}d\vec{l} = Edl \cos \alpha = EdR, \quad (8.6)$$

де  $dR$  — проекція елемента шляху  $d\vec{l}$  на напрямок радіуса  $R$ .

У відповідності з формулою (8.2):

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

а на підставі закону Кулона (8.1):

$$\vec{F} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{R}_0.$$

Так як  $|\vec{R}_0| = 1$  й  $q = 1$ , то  $\vec{F} = 1 \times \vec{E} = \vec{E}$  і формула (8.1) прийме вигляд:

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (8.7)$$

Враховуючи (8.6) і (8.7), вираз (8.4) для різниці потенціалів запишеться:

$$\begin{aligned}\varphi_1 - \varphi_2 &= \int_1^2 \bar{E} d\bar{l} = \int_1^2 E dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dR}{R^2} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).\end{aligned}\tag{8.8}$$

Звідси випливає, що різниця потенціалів між початковою і кінцевою точками шляху (між точками 1 і 2) залежить тільки від розташування цих точок і не залежить від шляху, яким відбувалось переміщення з початкової точки в кінцеву.

Іншими словами,

$$(\varphi_1 - \varphi_2)_{\text{по шляху } 1-3-2} = (\varphi_1 - \varphi_2)_{\text{по шляху } 1-4-2}.$$

Якби заряд переміщався замкненим шляхом *1-3-2-4-1*, то початкова і кінцева точки співпали б ( $\varphi_2 = \varphi_1$ ) і тоді б:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_1 = 0 = \int \bar{E} d\bar{l}.\tag{8.9}$$

Таким чином, в електростатичному полі лінійний інтеграл від напруженості електричного поля вздовж будь-якого замкненого шляху рівний нулеві.

Рівність  $\int \bar{E} d\bar{l} = 0$  трактується ще й так:

*Циркуляція вектора напруженості  $\bar{E}$  вздовж будь-якого замкненого контура рівна нулеві.*

*Поля, для яких виконуються співвідношення типу (8.9) називають потенціальними: електростатичне, гравітаційне, усталені температурні поля і т.п.*

#### 8.4. Силкові та еквіпотенціальні лінії поля

Силова лінія – це уявно проведена в полі лінія, яка починається на додатно зарядженому тілі і закінчується на від'ємно зарядженому тілі, причому дотична до неї в будь-якій точці співпадає з напрямком напруженості поля в цій точці (рис. 8.4). Так як додатний і від'ємний заряди, які створюють поле, не можуть бути одночасно в одній і в тій же точці, то силкові лінії електричного поля не можуть бути замкненими самими на себе лініями.

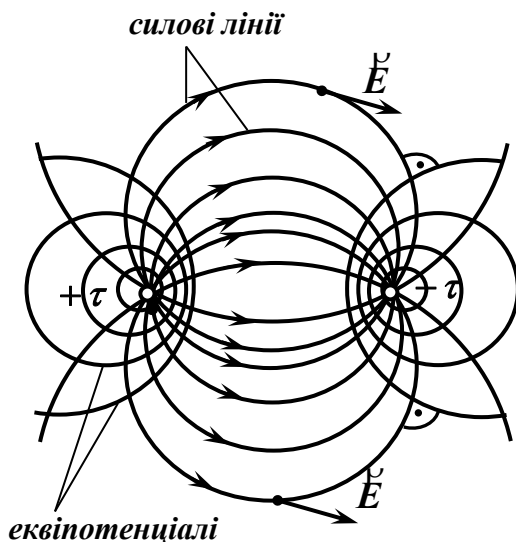


Рис. 8.4

Еквіпотенціальна (рівнопотенціальна) поверхня – це сукупність точок поля, що мають один і той же потенціал.

Еквіпотенціальні лінії – це сліди перетину січної площини з еквіпотенціальними поверхнями.

Еквіпотенціальні і силові лінії перетинаються в будь-якій точці поля під прямим кутом.

На відмінність від силових ліній еквіпотенціальні лінії є замкненими самими на себе лініями.

### 8.5. Напруженість і градієнт потенціалу

Так як електростатичне поле є потенціальним, то між будь-якими двома точками поля існує різниця потенціалів, розділивши яку на найкоротшу відстань між цими точками в напрямку зростання потенціалу, одержимо швидкість зміни потенціалу в даному напрямку, тобто **градієнт потенціалу**.

Виведемо залежність між градієнтом потенціалу і напруженістю поля. З цією метою візьмемо відрізки двох

еквіпотенціалей (рис. 8.5), одна з яких має потенціал  $\varphi_1$ , а друга – потенціал  $\varphi_2$ . Нехай  $\varphi_1 > \varphi_2$ .

Тоді у відповідності з приведеним вище правилом градієнт потенціалу визначається вектором, який перпендикулярний до екіпотенціалей і спрямований у напрямку збільшення потенціалу (від  $\varphi_2$  до  $\varphi_1$ ).

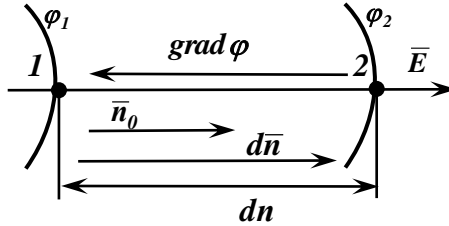


Рис. 8.5

Напруженість  $\bar{E}$  електростатичного поля направлена від більш високого потенціалу до більш низького (від  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ ).

Якщо  $dn$  – відстань по нормалі між екіпотенціальними поверхнями, а  $d\bar{n}$  – вектор, який співпадає з напрямком вектора  $\bar{E}$ , то

$$d\bar{n} = \bar{n}_0 dn,$$

де  $\bar{n}_0$  – одиничний вектор у напрямку вектора  $\bar{E}$ .

Тоді на підставі виразу (8.4):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \bar{E} d\bar{l} \cong \bar{E} d\bar{n} = -d\varphi, \quad (8.4,a)$$

де  $d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  – приріст потенціалу при переході від точки 1 до точки 2.

Так як вектори  $\bar{E}$  і  $d\bar{n}$  співпадають за напрямком ( $\alpha = 0^\circ$ ), то

$$\bar{E} d\bar{n} = E dn \cos 0^\circ = E dn$$



і згідно з виразом (8.4, а):  $E dn = -d\varphi$ . Звідси модуль напруженості поля:

$$E = -\frac{d\varphi}{dn}.$$

Вектор напруженості поля  $\vec{E} = E\vec{n}_0$ , отже,

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn}\vec{n}_0. \quad (8.10)$$

У відповідності з визначенням градієнта потенціалу:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{dn}(-\vec{n}_0) = -\frac{d\varphi}{dn}(-\vec{n}_0) = \frac{d\varphi}{dn}\vec{n}_0. \quad (8.11)$$

Співставляючи вирази (8.10) і (8.11), отримуємо:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (8.12)$$

тобто напруженість у будь-якій точці поля рівна швидкості зміни потенціалу в цій же точці, взятій з протилежним знаком. Знак « $\leftarrow$ » означає, що напрямок  $\vec{E}$  і напрямок  $\text{grad } \varphi$  взаємно протилежні (рис. 8.5).

Нормаль  $d\vec{n}$  у загальному випадку може займати загальне положення, тобто не співпадати з напрямком ні однієї координатної осі, і, тому, градієнт потенціалу в загальному випадку можна представити у вигляді суми трьох проєкцій на координатні осі. Наприклад, в декартовій системі координат:

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (8.13)$$

де  $\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  – швидкість зміни потенціалу  $\varphi$  в напрямку осі  $x$ ;

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  – числове значення (модуль) цієї швидкості;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – одиничні орти осей  $x, y, z$ .

Виразимо вектор напруженості  $\vec{E}$  через свої проєкції:

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z, \quad (8.14)$$

і, співставляючи вирази (8.13) та (8.14), на підставі рівності (8.12) одержимо:

$$\bar{i}E_x + \bar{j}E_y + \bar{k}E_z = -\left(\bar{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \quad (8.15)$$

Два вектори рівні тільки тоді, коли взаємно рівні їх відповідні проекції, тобто:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (8.16)$$

Звідси випливає, що проекція напруженості електростатичного поля рівна проекції швидкості зміни потенціалу уздовж тієї ж осі, взятій з протилежним знаком.

## 8.6. Диференціальний оператор Гамільтона

Під диференціальним оператором Гамільтона (оператором набла) розуміють суму частинних похідних за трьома координатними осями, помножених на відповідні одиничні вектори (орти). Вираз оператора набла в декартовій системі координат має вигляд:

$$\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}. \quad (8.17)$$

Оператор набла поєднує в собі диференціальні й векторні властивості і може бути застосований як до скалярних, так і до векторних функцій. Ту функцію, над якою хочуть провести операцію диференціювання по координатах, записують справа від оператора набла. Наприклад, застосувавши оператор  $\nabla$  до потенціалу  $\varphi$ , одержимо:

$$\nabla\varphi = \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \bar{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (8.18)$$

У виразах (8.13) й (8.18) праві частини однакові, і, значить, рівні їх і ліві частини:

$$\mathbf{grad}\varphi = \nabla\varphi, \quad (8.19)$$

тобто запис  $\nabla\varphi$  еквівалентний запису  $\mathbf{grad}\varphi$ , а приписування зліва до будь-якої скалярної функції оператора  $\nabla$  означає взяття градієнта від цієї функції.

У циліндричній системі координат (рис. 8.6):

$$\text{grad } \varphi = \bar{r}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \bar{\alpha}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \bar{z}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (8.20)$$

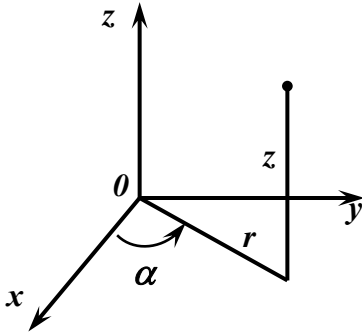


Рис. 8.6

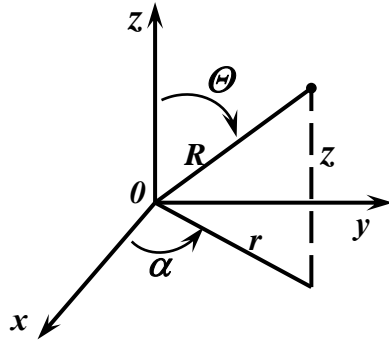


Рис. 8.7

У сферичній системі координат (рис. 8.7):

$$\text{grad } \varphi = \bar{R}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \bar{\Theta}^0 \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + \bar{\alpha}^0 \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (8.21)$$

### 8.7. Потік вектора через поверхню

Нехай у полі вектора напруженості поля  $\bar{E}$  знаходиться елементарна поверхня площею  $ds$  з однієї сторони (рис. 8.8). При вибраному додатному напрямку нормалі  $\bar{n}$  до елемента поверхні вектор елементарної поверхні  $d\bar{s}$  в деякому масштабі рівний площі  $ds$ , а його напрямок співпадає з додатним напрямком нормалі.

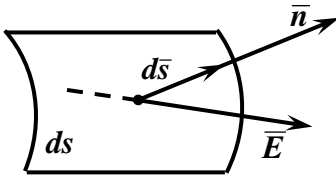


Рис. 8.8

Будемо вважати, що площа елемента  $ds$  достатньо мала так, щоб в її межах вектор  $\bar{E}$  був незмінним у всіх її точках.

Якщо  $\vec{E} \perp d\vec{s}$ , то вектор  $\vec{E}$  не буде пронизувати елемент поверхні; якщо  $\vec{E} \parallel d\vec{s}$ , то через елемент поверхні  $d\vec{s}$  буде проходити максимальний потік вектора  $\vec{E}$ . В загальному випадку потік вектора  $\vec{E}$  через елемент  $d\vec{s}$  визначається скалярним добутком  $\vec{E}d\vec{s}$  алгебраїчного характеру, тобто він може бути як додатним, так і від'ємним. Додатне значення потоку  $\vec{E}d\vec{s}$  означає, що він направлений в сторону вектора  $d\vec{s}$ ; від'ємне його значення – що він спрямований в протилежну сторону.

Якщо поверхня, через яку визначають потік вектора, досить велика, то не можна вважати, що у всіх її точках напруженість  $E$  одна й та ж. В цьому випадку поверхню ділять на окремі елементи  $d\vec{s}$  нескінченно малих розмірів і повний потік вектора  $\vec{E}$  через поверхню  $S$  визначають як суму потоків через усі елементи поверхні:

$$N = \int_s \vec{E}d\vec{s}. \quad (8.22)$$

## 8.8. Поляризація речовин. Вектор поляризації

Кожна речовина містить у собі як вільні, так і зв'язані заряди.

Електричні заряди, які під дією сил поля можуть вільно переміщуватись у речовині, називають вільними; причому їх переміщення не обмежують внутрішні молекулярні сили.

Електричні заряди, які входять до складу речовини й утримуються в певному положенні внутрішніми молекулярними силами, називають зв'язаними, так як вони «зв'язані» з речовиною і не піддаються відділенню від неї. У кожній речовині сума додатних зв'язаних зарядів рівна сумі від'ємних.

Якщо будь-який діелектрик помістити в електричне поле, то він поляризується, тобто відбувається упорядкована зміна розміщення в тілі зв'язаних зарядів, яку викличе електричне поле: від'ємні зв'язані заряди

діелектрика змістяться в напрямку більш високого потенціалу, а додатні зв'язані заряди – до більш низького потенціалу. Заряди змістяться настільки, що сили з якими поле діє на зв'язані заряди, зрівноважаться внутрішніми молекулярними силами.

Якщо два рівних за величиною і протилежних за знаком заряди  $+q$  і  $-q$  знаходяться на відстані  $l$  один від одного, то добуток  $ql$  визначає електричний момент цих зарядів, – вектор, який направлений від заряду  $-q$  до заряду  $+q$  (рис. 8.9).

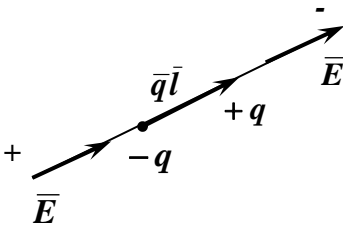


Рис. 8.9

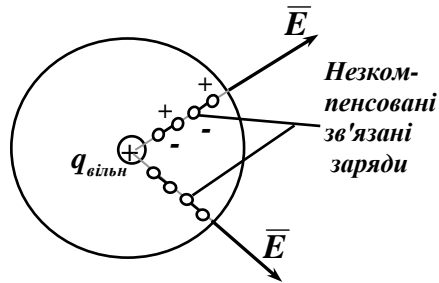


Рис. 8.10

У поляризованій речовині молекули в електричному відношенні являють собою диполі, які під дією зовнішнього електричного поля намагаються орієнтуватись у просторі таким чином, щоб їх електричний момент був спрямований паралельно вектору напруженості  $\vec{E}$  (рис. 8.10).

Електричний момент суми диполів, які знаходяться в одиниці об'єму  $V$  речовини, називають вектором поляризації (поляризованістю) речовини і позначають літерою  $\vec{P}$  :

$$\vec{P} = \sum q\vec{l}/V, \quad [\text{Кл}/\text{м}^2]. \quad (8.23)$$

Для більшості діелектриків вектор  $\vec{P}$  пропорційний напруженості поля  $\vec{E}$  :

$$\vec{P} = k\vec{E}. \quad (8.24)$$

Коефіцієнт пропорційності  $k$  називають електричною сприйнятливістю.

У залежності від процесів, які протікають в діелектриках при поляризації, останні можна поділити на дві групи.

До першої групи відносять діелектрики, молекули яких при відсутності зовнішнього електричного поля нейтральні, а під дією поля в них зміщується центр дії додатних зарядів в напрямку поля, а центр від'ємних зарядів – проти поля. В результаті молекула стає диполем.

У другу групу входять діелектрики, молекули яких при відсутності зовнішнього електричного поля являють собою диполі, електричні поля яких взаємно нейтралізовані внаслідок теплового руху. Поляризація в них полягає в тому, що полярні молекули намагаються повернутися так, щоб їх електричний момент був направлений узгоджено із зовнішнім електричним полем.

### 8.9. Вектор електричної індукції

Вектор електричної індукції  $\bar{D}$  (вектор електричного зміщення) рівний сумі двох векторів:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}, \quad [\text{Кл/м}^2]. \quad (8.25)$$

Вектор  $\epsilon_0 \bar{E}$  характеризує поле у вакуумі, а вектор  $\bar{P}$  – здатність діелектрика поляризуватись у даній точці електричного поля.

Враховуючи, що

$$\bar{P} = k\bar{E} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} k\bar{E},$$

вираз (8.25) запишеться:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} \left( 1 + \frac{k}{\epsilon_0} \right) = \epsilon_0 \epsilon \bar{E} = \epsilon_a \bar{E}, \quad (8.25,a)$$

де  $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$  – абсолютна діелектрична проникність речовини,  $\Phi/\text{м}$ ;  $\epsilon_0$  – діелектрична проникність вакууму

(електрична постійна),  $\epsilon_0 = 8,86 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ;  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність.

### 8.10. Теорема Гаусса в інтегральній формі

Теорема Гаусса відповідає закону Кулона й принципу накладання і є однією з важливих теорем електростатики.

Теорема може бути сформульована і записана трьома способами:

1. Потік вектора електричної індукції  $\bar{D}$  через будь-яку замкнену поверхню, що охоплює деякий об'єм, рівний алгебраїчній сумі вільних зарядів, які знаходяться всередині цієї поверхні:

$$N = \oint_s \bar{D} d\bar{s} = \sum q_{\text{вільн}}, \quad (8.26)$$

тобто вектор  $\bar{D}$  є такою характеристикою поля, яка при інших рівних умовах *не залежить* від діелектричних властивостей середовища (від величини  $\epsilon_a$ ).

2. Враховуючи, що  $\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$ , вираз (8.26) для ізотропного й однорідного середовища можна записати так:

$$\oint_s \bar{D} d\bar{s} = \epsilon_a \oint_s \bar{E} d\bar{s} = \sum q_{\text{вільн}}$$

або

$$\oint_s \bar{E} d\bar{s} = \sum q_{\text{вільн}} / \epsilon_a, \quad (8.27)$$

тобто потік вектора напруженості електричного поля крізь будь-яку замкнену поверхню рівний сумі вільних зарядів, які знаходяться всередині цієї поверхні, поділений на  $\epsilon_a$  середовища.

З формули (8.27) випливає, що вектор  $\bar{E}$  являє собою характеристику поля, яка на відмінність від вектора  $\bar{D}$  при інших рівних умовах *залежить* від діелектричних властивостей середовища (від величини  $\epsilon_a$ ).

3. Потік вектора  $\vec{E}$  крізь будь-яку замкнену поверхню створюється не тільки сумою вільних зарядів ( $\sum q_{\text{вільн}}$ ), а й сумою зв'язаних зарядів ( $\sum q_{\text{зв'яз}}$ ), що знаходиться всередині цієї поверхні:

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{s} = \sum q_{\text{вільн}} + \sum q_{\text{зв'яз}} \quad (8.27,а)$$

### 8.11. Визначення характеристик поля за теоремою Гаусса

Теорему Гаусса в інтегральній формі можна застосувати для знаходження напруженості або потенціалу в будь-якій точці поля, якщо через цю точку можна провести замкнену поверхню так, щоб усі точки цієї поверхні були симетричними відносно заряду, що знаходиться всередині цієї поверхні.

Такою поверхнею може бути сфера, якщо заряд точковий, або бічна поверхня циліндра, якщо заряд «лінійний». При цьому, завдяки симетрії всіх точок поверхні відносно заряду, числове значення напруженості поля  $\vec{E}$  в цих точках буде одне й те ж.

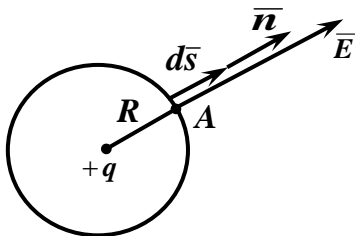


Рис. 8.10

Застосуємо теорему Гаусса для знаходження напруженості поля, яку створює точковий заряд у точці  $A$  (рис. 8.11), яка знаходиться на відстані  $R$  від заряду. Для цього проведемо через точку  $A$  сферичну поверхню радіусом  $R$  і, вважаючи,

що заряд знаходиться у центрі сфери, використаємо теорему Гаусса.

Вектор  $d\vec{s}$ , який зображає собою елемент поверхні  $ds$ , перпендикулярний до поверхні сфери і направлений в



сторону зовнішньої нормалі  $\bar{n}$ . Отже, в кожній точці сфери вектори  $\bar{E}$  і  $d\bar{s}$  мають однаковий напрямок.

Враховуючи, що числове значення напруженості у всіх точках одне й те ж, його можна винести з-під знаку інтеграла:

$$\oint_s \bar{E} d\bar{s} = \oint_s E ds \cos 0^\circ = E \oint_s ds = E \times S_{\text{сф}} = E \times 4\pi R^2.$$

Тоді, на підставі рівності (8.27):

$$E 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_a}.$$

Звідси знаходимо напруженість, яку створює заряд  $+q$  на відстані  $R$  від себе:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_a R^2}. \quad (8.28)$$

У сферичній системі координат завдяки сферичній симетрії напруженість  $E$  має тільки одну радіальну складову.

$$E = E_R = -\frac{\partial\varphi}{\partial R} = -\frac{d\varphi}{dR}. \quad (8.28, a)$$

Тоді

$$d\varphi = -EdR$$

або 
$$\varphi = -\int EdR = -\frac{q}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a R} + C \quad (8.29)$$

## 8.12. Теорема Гаусса в диференціальній формі

За допомогою теореми Гаусса в інтегральній формі неможливо визначити взаємозв'язок витоку ліній вектора електричної індукції  $\bar{D}$  у даній точці поля з густиною зарядів у цій же точці.

Цю задачу можна розв'язати за допомогою теореми Гаусса в диференціальній формі. Щоб прийти до неї, поділимо обидві частини рівності (8.26) на скалярну величину – об'єм  $V$ :

$$\frac{\oint_S \overline{D} dS}{V} = \frac{\sum q_{\text{вільн}}}{V} \quad (8.26, a)$$

і спрямуємо цей об'єм до нуля:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \overline{D} dS}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q_{\text{вільн}}}{V}. \quad (8.26, б)$$

Якщо  $V \rightarrow 0$ , то й  $\oint_S \overline{D} dS \rightarrow 0$  також, але відношення

двох нескінченно малих величин є величиною кінечною.

Границю відношення потоку векторної величини  $\overline{D}$  крізь замкнену поверхню, що охоплює деякий об'єм  $V$ , до величини цього об'єму називають дивергенцією (розходженням) вектора  $\overline{D}$  ( $\text{div} \overline{D}$ ) або витоком вектора  $\overline{D}$ .

У правій частині рівності (8.26, б) є об'ємна густина вільних зарядів ( $\rho_{\text{вільн}}$ ).

Таким чином, теорему Гаусса в диференціальній формі записують наступним чином (перша форма запису):

$$\text{div} \overline{D} = \rho_{\text{вільн}}, \quad (8.30)$$

тобто, витік ліній вектора електричної індукції у даній точці поля визначається величиною густини вільних зарядів у цій же точці.

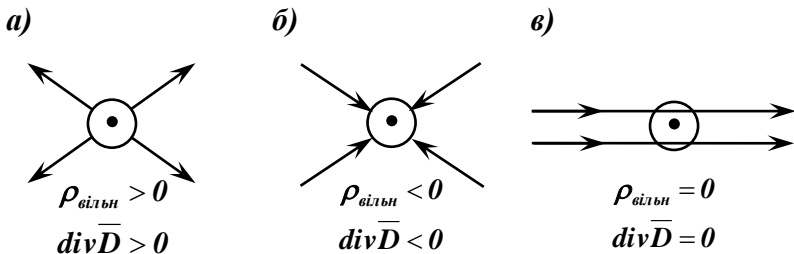


Рис. 8.11

Якщо об'ємна густина зарядів додатна ( $\rho_{\text{вільн}} > 0$ ), то із нескінченно малого об'єму, що охоплює дану точку поля, лінії вектора  $\bar{D}$  виходять і витік є додатним (рис. 8.11, а).

Якщо у даній точці поля  $\rho_{\text{вільн}} < 0$ , то в нескінченно малий об'єм, усередині якого знаходиться дана точка, лінії вектора  $\bar{D}$  входять (рис. 8.11, б) і витік є від'ємним.

Якщо ж у деякій точці поля  $\rho_{\text{вільн}} = 0$ , то в даній точці поля немає ні витоку, ні стоку ліній вектора  $\bar{D}$ , тобто в даній точці лінії вектора  $\bar{D}$  не починається і не закінчуються (рис. 8.11, в).

Враховуючи, що  $\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$ , вираз (8.30) запишеться:

$$\text{div} \bar{D} = \text{div}(\epsilon_a \bar{E}) = \rho_{\text{вільн}}.$$

Якщо середовище однорідне й ізотропне, то його діелектрична проникність  $\epsilon_a = \text{const}$  і її можна винести за знак дивергенції:

$$\epsilon_a \text{div} \bar{E} = \rho_{\text{вільн}}.$$

Звідси одержуємо другу форму запису теореми Гаусса:

$$\text{div} \bar{E} = \frac{\rho_{\text{вільн}}}{\epsilon_a}, \quad (8.30, a)$$

яка справедлива тільки для однорідного й ізотропного середовища. Для неоднорідного середовища  $\epsilon_a$  є функцією координат і тому його не можна винести за знак дивергенції.

Рівність (8.27, а) у диференціальній формі записують так (третя форма запису):

$$\text{div} \bar{E} = \frac{\rho_{\text{вільн}} + \rho_{\text{зв'яз}}}{\epsilon_a}. \quad (8.30, б)$$

Отже, витоком вектором вектора  $\bar{E}$  на відмінність від витоку вектора  $\bar{D}$  є не тільки вільні, а й зв'язані заряди.

### 8.13. Дивергенція напруженості поля

У попередньому параграфі було дане визначення  $\text{div} \bar{E}$ , як границі відношення потоку векторної величини  $\bar{E}$  крізь замкнену поверхню, яка охоплює деякий об'єм  $V$ , до величини цього об'єму, коли  $V \rightarrow 0$ .

Вираз дивергенції вектора  $\bar{E}$  в декартовій системі координат:

$$\text{div} \bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (8.31)$$

У п. 8.6 було доведено, що помноження оператора набла  $\nabla$  на скалярну функцію рівносильне взяттю градієнта від цієї функції ( $\nabla \varphi = \text{grad} \varphi$ ).

Доведемо, що скалярне помноження оператора  $\nabla$  на векторну функцію, наприклад, на функцію  $\bar{E}$ , означає взяття дивергенції від цієї векторної функції.

Добуток  $\nabla \bar{E}$  можна записати:

$$\begin{aligned} \nabla \bar{E} &= \left( \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\bar{i} E_x + \bar{j} E_y + \bar{k} E_z) = \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

У цьому добутку при почленному перемноженні складових двох дужок враховано, що скалярний добуток однойменних ортів рівний одиниці, а скалярний добуток різнойменних ортів рівний нулю, тобто:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1 \cdot 1 \cos 0^\circ = 1;$$

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{i} \cdot \bar{k} = 1 \cdot 1 \cos 90^\circ = 0.$$

Праві частини виразів (8.31) і (8.32) рівні, а, значить, повинні бути рівні і їх ліві частини:

$$\nabla \bar{E} = \text{div} \bar{E}, \quad (8.33)$$

тобто помноження оператора  $\nabla$  на вектор  $\bar{E}$  означає взяття дивергенції від цього вектора.

Вирази  $\operatorname{div} \bar{E}$  в циліндричній і сферичній системах координат відповідно записуються:

$$\operatorname{div} \bar{E}_c = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_z}{\partial z}; \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{E}_{cf} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} (R^2 E_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot E_\theta) + \\ + \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha}; \end{aligned} \quad (8.35)$$

#### 8.14. Рівняння Пуассона і рівняння Лапласа

Виконаємо вивід цих рівнянь, які є основними рівняннями електростатики, використавши теорему Гаусса в диференціальній формі (8.30, а):

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho_{\text{вільн}}}{\epsilon_a}.$$

Підставивши сюди  $\bar{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ , отримаємо:

$$\operatorname{div} \bar{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\rho_{\text{вільн}}}{\epsilon_a}.$$

Винесемо «мінус» за знак дивергенції:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho_{\text{вільн}}}{\epsilon_a}.$$

Запишемо замість  $\operatorname{grad} \varphi$  його еквівалент  $\nabla \varphi$ , а замість  $\operatorname{div} - \nabla$ . Тоді:  $\nabla(\nabla \varphi) = -\frac{\rho_{\text{вільн}}}{\epsilon_a}$

або 
$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_{\text{вільн}}}{\epsilon_a}. \quad (8.36)$$

Рівняння (8.36) називають рівнянням Пуассона. Його частковий вигляд, коли  $\rho_{\text{вільн}} = 0$ , називають рівнянням Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (8.37)$$

Оператор  $\nabla^2 = \text{divgrad}$  носить назву оператора Лапласа і позначається символом  $\Delta$  (дельта).

Розкриємо  $\nabla^2 \varphi$  в декартовій системі координат. З цією метою добуток двох множників  $\nabla$  і  $\nabla \varphi$  запишемо в розгорнутому вигляді й почленно перемножимо:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) &= \left( \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left( \bar{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Тоді рівняння Пуассона і рівняння Лапласа в декартовій системі координат відповідно запишуться:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{\rho_{\text{вільн}}}{\epsilon_a}; \quad (8.38)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (8.39)$$

Таким чином, рівняння Пуассона дає зв'язок між частинними похідними другого порядку від потенціалу  $\varphi$  в будь-якій точці поля.

У той же час потенціал  $\varphi$  в будь-якій точці поля залежить від усіх зарядів, що створюють поле, а не тільки від величини вільного заряду  $\rho_{\text{вільн}}$ , який знаходиться в даній точці.

Виведемо вираз розв'язку рівняння Пуассона в загальному вигляді.

Припустимо, що в об'ємі  $V$  є об'ємні ( $\rho$ ), поверхневі ( $\sigma$ ) і лінійні ( $\tau$ ) заряди. Представимо ці заряди у вигляді сукупностей точкових зарядів:  $\rho dv$ ,  $\sigma ds$ ,  $\tau dl$ , де  $dv$  – елемент зарядженого об'єму,  $ds$  – елемент зарядженої поверхні,  $dl$  – елемент зарядженої осі.

Складова потенціалу  $d\varphi$  в деякій точці простору, яка віддалена від  $\rho dv$  на відстань  $R$ , у відповідності з формулою (8.29) рівна:

$$\frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_a R}.$$

Складові потенціалу від поверхневого і лінійного зарядів, якщо розглядати їх як «точкові», запишуться аналогічно:

$$\frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_a R} \quad \text{і} \quad \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a R}.$$

Повне значення потенціалу  $\varphi$  визначиться як сума (інтеграл) складових потенціалу від усіх зарядів у полі:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \left( \int_v \frac{\rho dv}{R} + \int_s \frac{\sigma ds}{R} + \int_l \frac{\tau dl}{R} \right), \quad (8.40)$$

де  $\rho$ ,  $\sigma$  і  $\tau$  являються функціями радіуса  $R$ .

При застосуванні формули (8.40) мають на увазі, що потенціал у нескінченності рівний нулю і що заряди, які створюють поле, розподілені в обмеженій області, інакше інтеграл може виявитись розбіжним.

При інтегруванні рівняння Пуассона (або Лапласа) в його розв'язок будуть входити постійні (сталі) інтегрування. Їх визначають, виходячи з граничних умов, тобто умов, які визначають поле на межі розділу середовищ з різними електричними властивостями.

## 8.15. Електростатичне поле провідного тіла

У провідному тілі, яке знаходиться в електростатичному полі, завдяки явищу електростатичної індукції відбувається перерозподіл електричних зарядів.

Від'ємні заряди зміщуються на поверхню тіла, яка знаходиться зі сторони більш високого потенціалу, а додатні – в протилежну сторону (рис. 8.13).

Всі точки тіла будуть мати однаковий потенціал, тобто поверхня провідного тіла стане екіпотенціальною. Якби між деякими точками тіла виникла різниця потенціалів, то під її дією утворився б упорядкований рух зарядів, що протирічило б поняттю електростатичного поля.

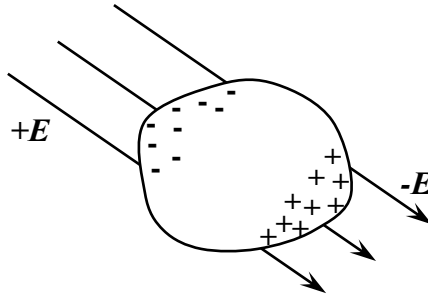


Рис. 8.13

Вектор напруженості  $\vec{E}$  зовнішнього поля в будь-якій точці поверхні підходить до цієї поверхні під прямим кутом.

Всередині провідного тіла напруженість поля рівна нулю, так як зовнішнє поле компенсується полем зарядів, що знаходяться на поверхні тіла.

### 8.16. Граничні умови поля

*Граничними (краєвими) вважають умови, які визначають поле на межі розділу середовищ з різними електростатичними властивостями.*

На межі провідне тіло – діелектрик за відсутності струму через провідне тіло виконуються дві умови:

1) відсутня тангенціальна (дотична до поверхні) складова напруженості поля:

$$E_t = 0; \quad (8.41)$$

2) вектор електричного зміщення  $\vec{D}$  в будь-якій точці діелектрика, яка безпосередньо близько прилягає до поверхні провідного тіла, чисельно рівний густині заряду  $\sigma$  на поверхні провідного тіла у тій же точці:



$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\sigma}. \quad (8.42)$$

На межі розділу двох діелектриків з різними діелектричними проникностями виконуються наступні умови:

1) рівні тангенціальні складові напруженості поля:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}; \quad (8.43)$$

2) рівні нормальні складові електричної індукції:

$$\mathbf{D}_{1n} = \mathbf{D}_{2n}. \quad (8.44)$$

### 8.17. Поле зарядженої осі

Під зарядженою віссю розуміють досить тонкий і теоретично нескінченно довгий металічний провідник, одиниця довжини якого має заряд  $\tau$ .

Нехай діелектрична проникність середовища, в якому знаходиться вісь, рівна  $\epsilon_a$ . Для визначення напруженості поля в деякій точці  $M$ , яка віддалена на відстань  $r$  від осі (рис. 8.14), проведемо через точку  $M$  циліндричну поверхню так, щоб її вісь співпала із зарядженою віссю.

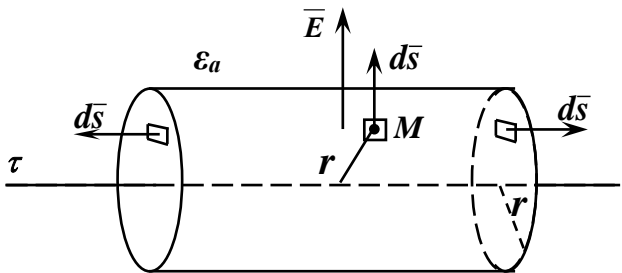


Рис. 8.14

Застосуємо теорему Гаусса до замкненої поверхні циліндра: бічної поверхні і двох його донець. Потік вектора напруженості  $\mathbf{e}$  тільки через бічну поверхню циліндра:

$$\oint_s \bar{E} d\bar{s} = \oint_s E ds \cos \alpha. \quad (8.22,a)$$

Через денце потік вектора  $\bar{E}$  відсутній, так як  $\bar{E} \perp d\bar{s}$  і  $\cos 90^\circ = 0$ .

Елемент  $d\bar{s}$  бічної поверхні і вектор напруженості поля  $\bar{E}$  в будь-якій точці бічної поверхні циліндра співпадають за напрямком і тому:

$$\oint_s \bar{E} d\bar{s} = \oint_s E ds \cos 0^\circ = E \oint_s ds = E \times 2\pi r. \quad (8.22,b)$$

На підставі (8.27) і (8.22, б):

$$\oint_s \bar{E} d\bar{s} = \frac{q}{\epsilon_a} = \frac{\tau}{\epsilon_a};$$

$$E \times 2\pi r = \frac{\tau}{\epsilon_a} \quad \text{або} \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}. \quad (8.45)$$

Таким чином, напруженість у полі зарядженої осі змінюється обернено пропорційно відстані  $r$  від зарядженої осі.

Підставивши у формулу (8.29) вираз (8.45), визначимо потенціал електричного поля  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\int E dr = -\int \frac{\tau dr}{2\pi\epsilon_a r} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln r + \tilde{N} = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r} + \tilde{N}, \end{aligned} \quad (8.46)$$

тобто, потенціал  $\varphi$  у полі зарядженої осі змінюється за логарифмічним законом в залежності від відстані  $r$  до зарядженої осі.

## 8.18. Поле двох заряджених осей

Нехай дві паралельні заряджені осі проходять через точки  $A$  і  $B$  (рис. 8.15) і одна вісь має на одиницю довжини заряд  $+\tau$ , а друга – заряд  $-\tau$ .

Візьмемо в полі осей довільну точку  $M$ , в якій результуюча напруженість поля  $\vec{E}_M$  рівна геометричній сумі напруженостей від обох зарядів. Відстані точки  $M$  до заряджених осей позначимо через  $a$  і  $b$ .

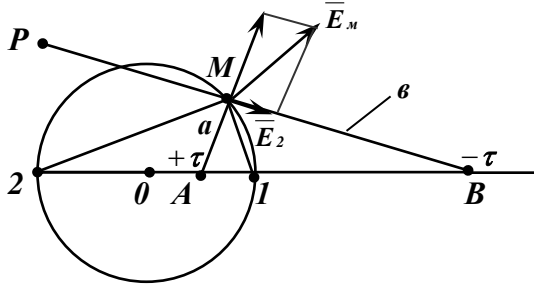


Рис. 8.15

Потенціал точки  $M$ , як функція скалярна, рівний сумі потенціалів від кожної осі зокрема:

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{a} + \frac{(-\tau)}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{b} + C = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} (\ln 1 - \ln a - \ln 1 + \ln b) + C = \quad (8.47) \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b}{a} + C. \end{aligned}$$

Рівнянням екіпотенціалі у полі двох заряджених осей служить вираз:  $\frac{b}{a} = \text{const}$ .

Екіпотенціаль являє собою сукупність точок, відношення відстаней яких до двох заданих точок є величина стала. У відповідності з теоремою Аполлонія таким геометричним місцем є коло. Для побудови його сполучимо точку  $M$  з осями (точки  $A$  і  $B$  на рис. 1.15), проведемо бісектрису  $M1$  внутрішнього  $\angle AMB$  і бісектрису  $M2$  зовнішнього  $\angle PMA$ . Точки  $1$  і  $2$  перетину бісектрис з лінією, проведеною через заряджені осі, і точка

$M$  будуть трьома точками шуканого кола, центр якого (точка  $\theta$ ) знаходиться на середині відрізка  $1-2$ .

### 8.19. Поле двопровідної лінії

Позначимо через  $d$  відстань між геометричними осями двох проводів (рис. 8.16), а радіус кожного проводу через  $r$ . Якщо лівому проводу буде наданий заряд  $+\tau$  на одиницю довжини, а правому – заряд  $-\tau$ , то в просторі між проводами виникне електричне поле. Заряди проводів розподіляться на їх поверхнях з неоднаковою густиною.

Поверхня кожного проводу, зокрема, є екіпотенціальною. У середині проводу напруженість поля рівна нулю. Задача про поле двопровідної лінії зводиться до розглянутої вище задачі про поле двох заряджених осей. Розмістимо дві заряджені осі так, щоб поверхні кожного проводу стали екіпотенціальними.

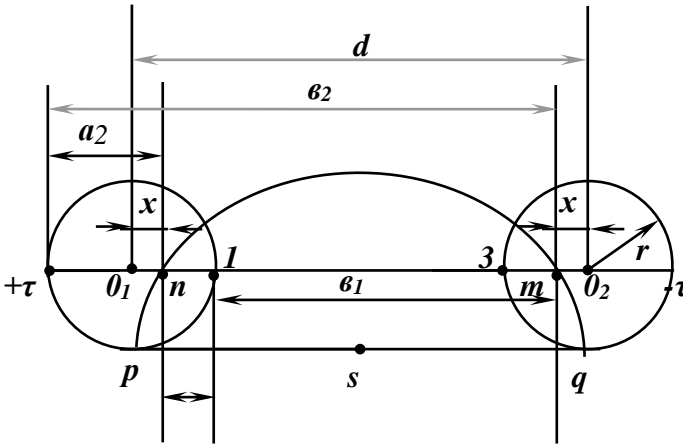


Рис. 8.16

Точки  $O_1$  й  $O_2$  означають геометричні осі проводів. Нехай заряджені осі будуть розміщені в точках  $m$  і  $n$ , які у відповідності з умовами симетрії віддалені від геометричних осей на однакову відстань  $x$ .

Запишемо умову рівності потенціалів точок  $1$  і  $2$  лівого проводу. Відношення  $\phi/a$  для точки  $1$  буде  $(d-r-x)/(r-x)$ ; відношення  $\phi/a$  для точки  $2$  –  $(d+r-x)/(r+x)$ .

З рівності  $(d-r-x)/(r-x) = (d+r-x)/(r+x)$  одержимо:

$$x = \left(\frac{d}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r^2} . \quad (8.48)$$

У цьому виразі знак «+» відповідає положенню точки  $m$ , а знак «-» – положенню точки  $n$ .

Положення заряджених осей (інакше, електричних осей) проводів знайдемо шляхом наступних графічних побудов.

Проведемо спільну дотичну до проводів (пряма  $pq$ ), поділимо її навпіл (точка  $s$ ) і проведемо коло радіусом  $sp$ . Точки перетину ( $m$  і  $n$ ) кола з лінією  $O_1O_2$  дають положення електричних осей, тобто таких осей, на яких необхідно було б уявно зосередити заряди проводів, щоб поверхні проводів були екіпотенціальними.

Неважко переконатись в тому, що, якщо  $d \gg r$ , то  $x$  стає набагато меншим від  $r$ . При цьому геометричні й електричні осі практично співпадають.

## 8.20. Ємність двопровідної лінії

Під ємністю  $C$  між двома тілами, на яких є рівні й протилежні за знаком заряди, розуміють абсолютну величину відношення заряду на одному з тіл до напруги між тілами:

$$C = \frac{Q}{U} . \quad (8.49)$$

Так як напруга між двома тілами в електричному полі може бути лінійно виражена через заряд  $Q$ , то відношення  $Q/U$  виявиться незалежним ні від величини  $Q$ , ні від величини  $U$ .

Ємність  $C$  залежить тільки від конфігурації тіл, їх розмірів, від відстані між тілами, від електричних властивостей діелектрика і т. п.

Розглянемо задачу визначення ємності двопровідної лінії. Виразимо напругу між двома проводами через заряд  $\tau$  на одиницю довжини. Точка  $1$  (рис. 8.16) належить поверхні лівого проводу, точка  $3$  – поверхні правого проводу.

Різниця потенціалів між цими точками на підставі виразу (8.47):

$$U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-r-x}{r-x} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r-x}{d-r-x}.$$

При  $d \gg r$  буде  $x \ll r$  і тоді:

$$U_{13} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} 2 \ln \frac{d}{r} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{d}{r}. \quad (8.50)$$

Тоді ємність одиниці довжини лінії при умові  $d \gg r$ :

$$C = \frac{\tau}{U_{13}} = \frac{\pi\epsilon_a}{\ln \frac{d}{r}}. \quad (8.51)$$

Вона дійсно залежить тільки від геометричних розмірів і властивостей середовища  $\epsilon_a$  і не залежить ні від величини заряду  $\tau$ , ні від величини напруги  $U_{13}$ . Якщо відстань між двома проводами збільшувати, то ємність буде зменшуватись.

## 8.21. Аналіз задач електростатичного поля

**Приклад 8.1.** У деякому сферичному середовищі з відносною діелектричною проникністю  $\epsilon = 2,5$  рівномірно розподілений об'ємний заряд з густиною  $\rho = 1 \times 10^{-6} \text{ Кл/м}^3$ . Обчислимо значення вектора електричної індукції  $\bar{D}$ , значення вектора напруженості електричного поля  $\bar{E}$  і вектора поляризації  $\bar{P}$  в точці середовища, яка знаходиться на відстані  $R = 0,1 \text{ м}$  від центру.

### Розв'язання

На підставі теореми Гаусса в інтегральній формі (8.26) потік вектора електричної індукції  $\vec{D}$  крізь замкнену поверхню рівний сумарному вільному заряду, який знаходиться всередині цієї поверхні:

$$\oint_S \vec{D} \vec{ds} = \sum q_{\text{вільн}}. \quad (8.26)$$

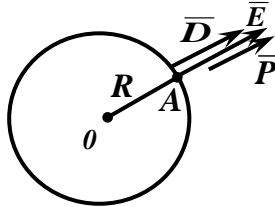


Рис. 8.17

Проведемо сферичну поверхню радіусом  $R = 0,1 \text{ м}$  довкола центру заданої області (рис. 8.17).

Лінії вектора  $\vec{D}$  виявляться нормальними до проведеної поверхні, тому потік вектора  $\vec{D}$  крізь цю поверхню:

$$\oint_S \vec{D} \vec{ds} = \int_S D ds \cos \theta^\circ = D \int_S ds = DS_{\text{сф}} = D \times 4\pi R^2. \quad (8.26, a)$$

Сума вільних зарядів усередині сферичної поверхні:

$$\sum q_{\text{вільн}} = V \times \rho = \frac{4}{3} \pi R^3 \times \rho.$$

На підставі рівності (8.26, a):

$$D \times 4\pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \times \rho,$$

звідки  $D = \frac{R}{3} \times \rho = \frac{0,1}{3} \times 1 \times 10^{-6} = 3,33 \times 10^{-8} \text{ Кл / м}^2$ .

Поле вектора  $\vec{E}$  створюється як вільними зарядами  $\rho_{\text{вільн}}$ , так і «зв'язаними»  $\rho_{\text{зв}}$ , які виникли в результаті поляризації діелектрика.

Вплив «зв'язаних» зарядів враховують відносною діелектричною проникністю  $\epsilon$  :

$$D = \epsilon_a E = \epsilon \epsilon_0 E ,$$

звідки 
$$E = \frac{D}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{3,33 \times 10^{-8}}{2,5 \times 8,86 \times 10^{-12}} = 1503 \text{ В / м .}$$

Поле вектора поляризації  $\bar{P}$  створюється тільки зв'язаними зарядами. У відповідності з (8.25) в точці спостереження:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} . \quad (8.25)$$

Тоді значення вектора поляризації:

$$\begin{aligned} P &= D - \epsilon_0 E = 3,33 \times 10^{-8} - 8,86 \times 10^{-12} \times 1503 = \\ &= 2 \times 10^{-8} \text{ Кл / м}^2 . \end{aligned}$$

**Приклад 8.2.** Циліндричний конденсатор, радіуси внутрішнього і зовнішнього електродів якого  $r_1 = 0,01 \text{ м}$  і  $r_2 = 0,02 \text{ м}$  (рис. 8.18) заповнений повітрям ( $\epsilon_{\text{нов}} = 1$ ). Довжина конденсатора  $l = 0,2 \text{ м}$  і заряд його  $q = 6,36 \times 10^{-9} \text{ Кл}$ .

**Визначимо:** а) електричну індукцію  $D$ , напруженість електричного поля  $E$ , поляризованість  $P$  і напругу  $U$  між електродами конденсатора.

#### **Розв'язання**

Для визначення електричної індукції  $D$  застосуємо теорему Гаусса в інтегральній формі (8.26):

$$\oint_S \bar{D} ds = \sum q_{\text{вільн}} . \quad (8.26)$$

Для цього уявно оточимо внутрішній електрод циліндра замкненою поверхнею співосного циліндра довільного радіуса  $r_1 < r < r_2$  і довжиною  $l$  (рис. 8.18) з плоскими денцями, перпендикулярними до осі циліндричного конденсатора.



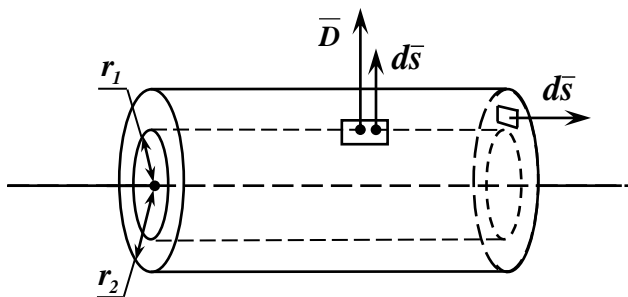


Рис. 8.18

Через торцеві поверхні (денця) потік вектора  $\bar{D}$  рівний нулю:

$$\oint_S \bar{D} ds = \int_S D ds \cos 90^\circ = 0 .$$

Потік вектора  $\bar{D}$  через бічну поверхню циліндра:

$$\oint_S \bar{D} ds = \int_S D ds \cos 0^\circ = D \int_S ds = DS_{\text{бц}} = D \times 2\pi Rl .$$

На підставі (8.26):

$$D \times 2\pi Rl = q ,$$

звідки:

$$D = \frac{q}{2\pi l} = \frac{6,36 \times 10^{-9}}{2 \times 3,14 \times 0,2r} = 5,06 \times 10^{-9} \times \frac{1}{r} \text{ Кл} / \text{ м}^2 .$$

Згідно з виразом (8.25, а):

$$D = \varepsilon_a E = \varepsilon \varepsilon_0 E .$$

Звідси напруженість електричного поля:

$$E = \frac{D}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{5,06 \times 10^{-9}}{1 \times 8,86 \times 10^{-12} \times r} = \frac{571}{r} \text{ В} / \text{ м} .$$

Поляризованість конденсатора:

$$P = (\varepsilon_{\text{нов}} - 1) \times \varepsilon_0 E = 0 .$$

Напруга (різниця потенціалів) між обкладками циліндричного конденсатора рівна роботі, яку виконують сили поля при переміщенні одиничного точкового заряду від обкладки  $r_1$  до обкладки  $r_2$ :

$$U = \varphi_{r_1} - \varphi_{r_2} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{571}{r} dr = 571 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = 571 \ln \frac{r_2}{r_1} =$$

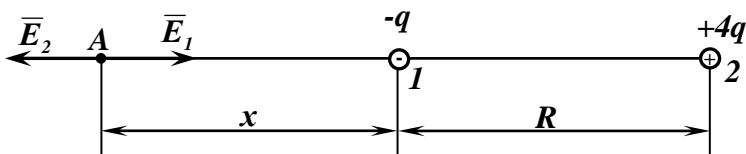
$$= 571 \times 0,693 = 396 \text{ В.}$$

**Приклад 8.3.** Два точкових заряди:  $-q$  і  $+4q$ , відстань між якими  $R = 0,15 \text{ м}$ , створюють електростатичне поле. Визначимо положення точки  $A$  поля, в якій напруженість  $E$  рівна нулю.

**Розв'язання**

Аналізуючи напрямки поля довкола зарядів, можна зробити висновок, що напруженість поля може бути рівною нулю зліва від заряду  $-q$ , так як там напрямки полів протилежні (рис. 8.19).

В усіх інших випадках вектори  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  будуть геометрично додаватись.



**Рис. 8.19**

Позначимо через  $x$  відстань від заряду  $-q$  до точки  $A$ . Тоді напруженості в точці  $A$ , створені обома зарядами:

$$E_{1A} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_a x^2}; \quad E_{2A} = \frac{4q}{4\pi\epsilon_a (0,15 + x)^2}.$$

У відповідності з умовою:

$$|E_{1A}| = |E_{2A}|.$$

Отже,

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_a x^2} = \frac{4q}{4\pi\epsilon_a (0,15 + x)^2},$$

звідки:

$$3x^2 - 0,3x - 0,0225 = 0.$$

Розв'язок цього квадратного рівняння дає  $x_1 = 0,15 \text{ м}$ .

Таким чином, точка  $A$  знаходиться на відстані  $0,15 \text{ м}$  зліва від заряду  $-q$  і на відстані  $0,15 + 0,15 = 0,3 \text{ м}$  від заряду  $+4q$ .

**Приклад 8.4.** Визначимо напруженості та електричні потенціали поля в точках  $A$ ,  $B$  і  $C$  посудини, заповненої повітрям ( $\varepsilon_{\text{нов}} = 1$ ), на відстанях  $R_A = 0,2 \text{ м}$ ;  $R_B = 0,4 \text{ м}$  і  $R_C = 0,6 \text{ м}$  від точкового заряду  $+q = 2 \times 10^{-8} \text{ Кл}$ , який створює навколо себе електростатичне поле.

#### Розв'язання

Напруженість в будь-якій точці поля визначається за формулою (8.28):

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{2 \times 10^{-8}}{4 \times 3,14 \times 1 \times 8,86 \times 10^{-12}} \cdot \frac{1}{R^2} = \frac{180}{R^2} \text{ В / м}.$$

Таким чином

$$E_A = \frac{180}{(R_A)^2} = \frac{180}{(0,2)^2} = 4490 \text{ В / м};$$

$$E_B = \frac{180}{(R_B)^2} = \frac{180}{(0,4)^2} = 1125 \text{ В / м};$$

$$E_C = \frac{180}{(R_C)^2} = \frac{180}{(0,6)^2} = 500 \text{ В / м}.$$

Електричний потенціал в будь-якій точці поля визначається за формулою (8.29):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, \quad (8.29)$$

яка відрізняється від формули (8.28) тільки степенем величини  $R$ , тобто:

$$\varphi = E \times R. \quad (8.29, a)$$

Тоді на підставі (8.29, a) потенціали точок  $A$ ,  $B$  і  $C$ :

$$\varphi_A = E_A \times R_A = 4490 \times 0,2 = 898 \text{ В} ;$$

$$\varphi_B = E_B \times R_B = 1125 \times 0,4 = 450 \text{ В} ;$$

$$\varphi_C = E_C \times R_C = 500 \times 0,6 = 300 \text{ В} .$$

Напругу між будь-якими двома точками поля визначають як різницю потенціалів цих точок:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = 898 - 450 = 448 \text{ В} ;$$

$$U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = 898 - 300 = 598 \text{ В} ;$$

$$U_{CA} = \varphi_C - \varphi_A = 300 - 898 = -598 \text{ В} = -U_{AC} .$$

Обчислюючи напруги, можна вибрати рівним нулю потенціал довільної точки поля, наприклад, потенціал поверхні Землі.

Вектори напруженостей  $\vec{E}_A$ ,  $\vec{E}_B$  і  $\vec{E}_C$  в точках  $A$ ,  $B$  і  $C$  представлені на рис. 8.20, а графік залежності напруженості поля в функції відстані  $R$  – на рис. 8.21.

Напрямки векторів  $\vec{E}_A$ ,  $\vec{E}_B$  і  $\vec{E}_C$  співпадають з напрямками силових ліній поля, які починаються на додатному заряді  $+q$  і виходять з нього радіально.

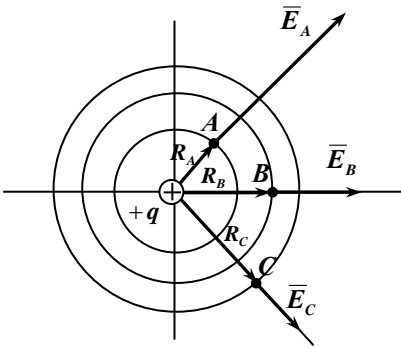


Рис. 8.20

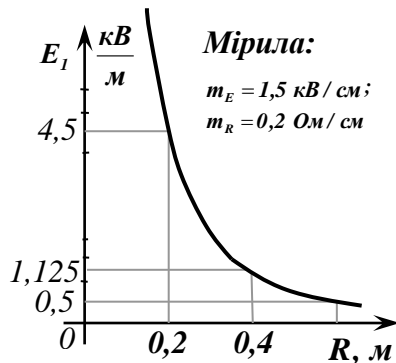


Рис. 8.21

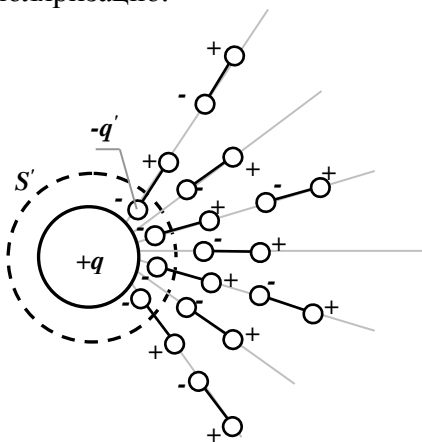
**Приклад 8.5.** Визначимо напруженості і електричні потенціали поля в точках  $A$ ,  $B$  і  $C$  посудини (рис. 8.20) з мінеральною олією ( $\varepsilon = 2,15$ ) на відстанях  $R_A = 0,2 \text{ м}$  ;

$R_B = 0,4 \text{ м}$  і  $R_C = 0,6 \text{ м}$  від металевої кульки радіусом  $R = 2 \times 10^{-2} \text{ м}$  і додатним зарядом  $+q = 2 \times 10^{-8} \text{ Кл}$ , яка знаходиться в посудині і створює навколо себе електростатичне поле.

### **Розв'язання**

Під дією сил поля в молекулах діелектрика (олії) зміщуються додатні і від'ємні частинки. При цьому від'ємно заряджені частинки наблизяться до заряду  $+q$ .

У результаті кожену молекулу діелектрика можна розглядати як систему двох різнойменних зарядів, розміщених вздовж лінії напруженості поля на деякій відстані один від одного (рис. 8.22). Така система двох зміщених зарядів являє собою диполь, а електрична деформація молекул – поляризацію.



**Рис. 8.22**

Так як елементарні частинки діелектрика не можуть вільно переміщуватись, тому, що вони «зв'язані» в диполях, то біля межі кульки з зарядом  $+q$  в тонкому шарі діелектрика, обмеженому деякою поверхнею  $S'$ , диполі створюють від'ємний «зв'язаний» заряд  $-q'$  (рис. 8.22). За межами цього шару заряди диполів зкомпенсовуються розташованими поруч зарядами іншого знаку і їх електричну взаємодію можна не враховувати.

Таким чином, в будь-якій точці діелектрика, що оточує кульку з зарядом  $+q$ , електричне поле створюється зарядом  $+q$  і зв'язаним зарядом  $-q'$  (рис. 8.22).

Враховуючи, що заряди  $+q$  і  $-q'$  протилежні за знаком, результуюча напруженість поля в діелектрику:

$$E = \frac{+q - q'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (8.28, a)$$

менша від напруженості поля у повітрі (8.28), де відсутні заряди  $-q'$ .

При розрахунках напруженості поля величина заряду  $-q'$  попередньо невідома, тому на практиці зменшення напруженості поля в діелектрику в порівнянні з вакуумом (повітрям) враховують за допомогою відносної діелектричної проникності  $\epsilon$ , яка визначається експериментальним шляхом.

Так як для мінеральної олії  $\epsilon = 2,15$ , то напруженості поля в точках  $A$ ,  $B$  і  $C$  діелектрика (олії) приймають значення:

$$E'_A = \frac{E_A}{\epsilon} = \frac{4490}{2,15} = 2088 \text{ В / м};$$

$$E'_B = \frac{E_B}{\epsilon} = \frac{1125}{2,15} = 523 \text{ В / м};$$

$$E'_C = \frac{E_C}{\epsilon} = \frac{500}{2,15} = 233 \text{ В / м},$$

де  $E_A$ ,  $E_B$  і  $E_C$  – напруженості точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  в посудині, заповненої повітрям (приклад 8.4).

Таким чином, напруженість поля в будь-якій точці діелектрика:

$$E' = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a R^2}. \quad (8.30)$$

При визначенні потенціалів точок для спрощення розрахунків будемо вважати посудину і поле зарядів безмежними і, так як потенціал є величиною, яка залежить

від точки відліку, тобто від точки з нульовим потенціалом, то прийемо рівним нулю потенціал нескінченно віддаленої точки. Тоді для будь-якої точки поля, створеного зарядом  $q$ , електричний потенціал визначається виразом (8.29):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_a R}.$$

Формула (8.29) відрізняється від формули (8.30) тільки степенем величини  $R$ , отже:

$$\varphi = E' \times R.$$

Тоді потенціали точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  діелектрика:

$$\varphi'_A = E'_A \times R_A = 2088 \times 0,2 = 417,6 \text{ В};$$

$$\varphi'_B = E'_B \times R_B = 523 \times 0,4 = 209,2 \text{ В};$$

$$\varphi'_C = E'_C \times R_C = 233 \times 0,6 = 139,8 \text{ В}.$$

**Приклад 8.6.** Два точкових заряди:  $q_M = +2 \times 10^{-9} \text{ Кл}$  і  $q_N = -2 \times 10^{-9} \text{ Кл}$  знаходяться в мінеральній олії ( $\epsilon = 2,2$ ) і створюють електростатичне поле. Визначимо напруженості поля і електричні потенціали в точках  $A$  і  $B$ , які розташовані симетрично відносно перпендикуляра, поставленого до середини відрізка  $MN$  (рис. 8.23), а також силу взаємодії зарядів  $q_M$  і  $q_N$  за умови, що  $MA = R_1 = 0,1 \text{ м}$ ;  $NA = R_2 = 0,15 \text{ м}$  і  $\angle MAN = 120^\circ$ .

#### **Розв'язання**

На підставі методу накладання напруженість поля в будь-якій його точці визначається як геометрична (векторна) сума напруженостей, створюваних кожним зарядом зокрема.

Отже, напруженості поля, які виникають в точці  $A$  від дії зарядів  $q_M$  і  $q_N$ :

$$E_{AM} = \frac{q_M}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1^2} = \frac{+2 \times 10^{-9}}{4 \times 3,14 \times 2,2 \times 8,86 \times 10^{-12} \times 0,1^2} = 818 \text{ В / м};$$

$$E_{AN} = \frac{q_N}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_2^2} = \frac{-2 \times 10^{-9}}{4 \times 3,14 \times 2,2 \times 8,86 \times 10^{-12} \times 0,15^2} = -364 \text{ В / м.}$$

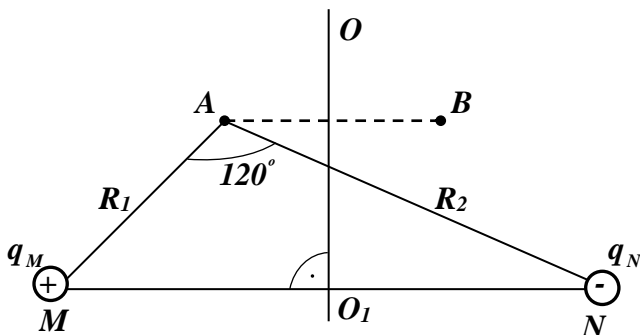


Рис. 8.23

Вектор  $\vec{E}_{AM}$  (рис. 8.24) направлений від точки  $M$ , так як  $q_M$  – додатний заряд, а вектор  $\vec{E}_{AN}$  спрямований до точки  $N$ , так як  $q_N$  – від’ємний заряд.

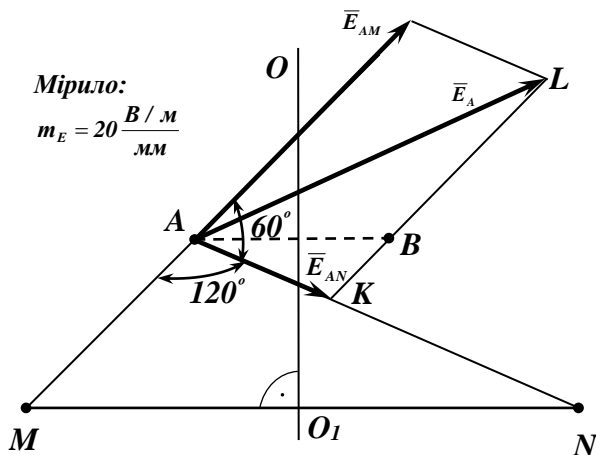


Рис. 8.24



Вектор результуючої напруженості  $\vec{E}_A$  в точці  $A$  від сумісної дії двох зарядів визначиться геометричною сумою векторів  $\vec{E}_{AM}$  і  $\vec{E}_{AN}$  (рис. 8.24).

Модуль напруженості  $E_A$  можна також визначити аналітично, застосувавши теорему косинусів до  $\triangle AMN$ :

$$E_A = \sqrt{E_{AM}^2 + E_{AN}^2 - 2E_{AM} \times E_{AN} \times \cos 60^\circ} = \\ = \sqrt{818^2 + (-364)^2 - 2 \times 818 \times (-364) \times 0,5} = 1049,5 \text{ В / м.}$$

Наведеним вище методом можна обчислити напруженість в будь-якій точці поля, в тому числі й в точці  $B$  (рис. 8.25). Враховуючи симетрію точок  $A$  і  $B$  та рівність за модулем зарядів  $q_M$  і  $q_N$ , можна записати:

$$E_{BN} = E_{AM} = 818 \text{ В / м}; \quad E_{BM} = E_{AN} = 364 \text{ В / м.}$$

Вектор  $\vec{E}_{BM}$  буде направлений від точки  $M$ , а вектор  $\vec{E}_{BN}$  – до точки  $N$ .

Завдяки симетрії результуючі напруженості в точках  $A$  і  $B$  також чисельно рівні:

$$E_A = E_B = 1050 \text{ В / м.}$$

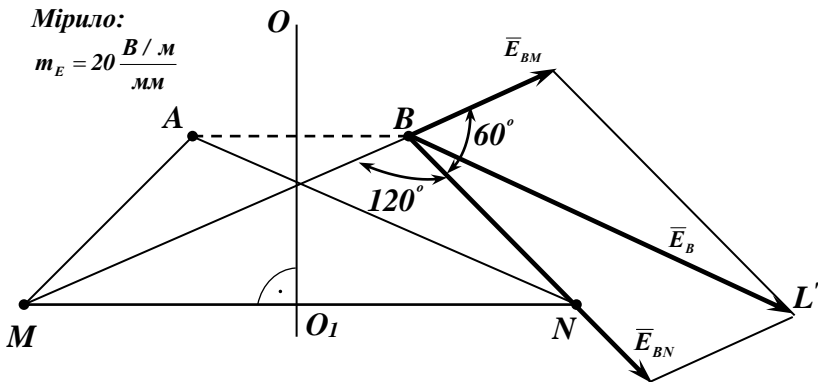


Рис. 8.25

Заряди  $q_M$  і  $q_N$  створюють в точці  $A$  потенціали:

$$\varphi_{AM} = E_{AM} \times R_1 = 818 \times 0,1 = 81,8 \text{ В};$$

$$\varphi_{AN} = E_{AN} \times R_2 = -364 \times 0,15 = -54,6 \text{ В}.$$

Застосуємо метод накладання для визначення результуючих потенціалів в точках  $A$  і  $B$ : потенціал будь-якої точки поля від дії кількох зарядів рівний алгебраїчній сумі потенціалів, створюваних у цій точці кожним зарядом зокрема.

Таким чином,

$$\varphi_A = \varphi_{AM} + \varphi_{AN} = 81,8 \text{ В} - 54,6 \text{ В} = 27,2 \text{ В}.$$

Враховуючи симетрію точок  $A$  і  $B$ , знаходимо, що заряди  $+q_M$  і  $-q_N$  створюють у точці  $B$  потенціали:

$$\varphi_{BM} = -\varphi_{AN} = -(-54,6) = 54,6 \text{ В};$$

$$\varphi_{BN} = -\varphi_{AM} = -81,8 \text{ В}.$$

Результуючий потенціал точки  $B$  від сумісної дії зарядів  $+q_M$  і  $-q_N$ :

$$\varphi_B = \varphi_{BM} + \varphi_{BN} = +54,6 \text{ В} - 81,8 \text{ В} = -27,2 \text{ В}.$$

## 8.22. Метод дзеркальних зображень

При аналітичному розрахунку електростатичних полів у кусково-однорідних середовищах, коли є геометрично правильна границя між однорідними зонами – діелектрик-провідник, діелектрик-діелектрик – застосовують метод дзеркальних зображень. Це штучний захід. Тут, крім заданих зарядів, вводять ще додаткові, фіктивні заряди, значення і місцезнаходження яких вибирають так, щоб задовольнити крайовим умовам у полі. Якщо границя між двома середовищами плоска (ми лише такий випадок розглядатимемо), то фіктивні заряди розміщують у місці дзеркального відображення заданих.

Метод дзеркальних відображень застосовують не тільки для розрахунку електростатичних полів, але й для

електричних полів у провідному середовищі і для магнітних полів.

Розглянемо два випадки. Перший з них зумовлений границею «діелектрик-провідник», другий – границею «діелектрик-діелектрик».

**Перший випадок.** Заряджена вісь проходить паралельно до поверхні провідного середовища, наприклад, землі (рис. 8.26, а). Треба розрахувати поле у верхній півплощині (в діелектрику).

На поверхні провідника внаслідок електростатичної індукції з'являються заряди. Поле в діелектрику створюється не тільки зарядженою віссю, але й зарядами, індуктованими на поверхні провідника. Хоча розподіл цих зарядів невідомий, дану задачу легко розв'язати за методом дзеркальних зображень.

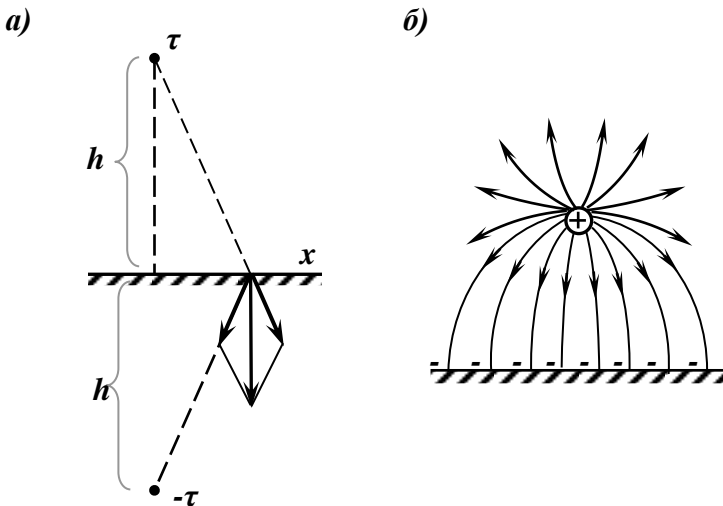


Рис. 8.26

Розмістимо в провіднику дзеркально відображений фіктивний заряд протилежного знаку  $-\tau$ , що дорівнює за значенням заданому заряду. Переконаємося, що напруженість електричного поля від двох зарядів  $+\tau$  і  $-\tau$

у будь-якій точці границі має тільки нормальний до границі компонент і не має тангенціального, чого вимагає умова (8.41) (рис. 8.26, а). Дійсно, тангенціальні компоненти від обох зарядів мають протилежну орієнтацію і в сумі дають нуль у будь-якій точці поверхні.

Підставивши потенціал від кожної з осей (8.46) у рівняння Лапласа (8.38), одержимо:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{r} \right) \right) = 0. \quad (8.52)$$

Оскільки потенціал кожної із осей задовольняє рівнянню Лапласа і граничним умовам, то одержаний розв'язок є істинним.

Картину поля зарядженої осі, розміщеної паралельно до провідної площини, зображено на рис. 8.26, б.

**Другий випадок.** Як показано на рис. 8.27, а, верхній півпростір заповнений діелектриком з проникністю  $\epsilon_{1a}$ , нижній – діелектриком з проникністю  $\epsilon_{2a}$ . У верхньому півпросторі паралельно до границі розділу знаходиться заряджена вісь із зарядом  $\tau$ . Внаслідок поляризації діелектриків на межі розділу з'являються «зв'язані» заряди, котрі впливатимуть на поле в обох середовищах. Їх вплив здійснюють введенням двох додаткових фіктивних зарядів, на відміну від попередньої задачі, де вводиться один заряд. Це зумовлено тим, що в першому випадку треба було задовольнити одну граничну умову ( $\bar{E}_\tau = 0$ ), а тепер треба задовольнити дві ( $\bar{E}_{1\tau} = \bar{E}_{2\tau}$   $\bar{D}_{1n} = \bar{D}_{2n}$ ).

Поле у верхньому півпросторі розраховують від двох зарядів: заданого  $\tau_1$  і фіктивного  $\tau_2$ , причому нижній півпростір заповнюють діелектриком з діелектричною проникністю  $\epsilon_{1a}$  (рис. 8.27, б). Поле у нижньому півпросторі визначають як поле від деякого фіктивного заряду  $\tau_3$ , розміщеного на місці заряду  $\tau_1$ , а верхній півпростір заповнюють діелектриком з діелектричною проникністю  $\epsilon_{2a}$  (рис. 8.27, в).

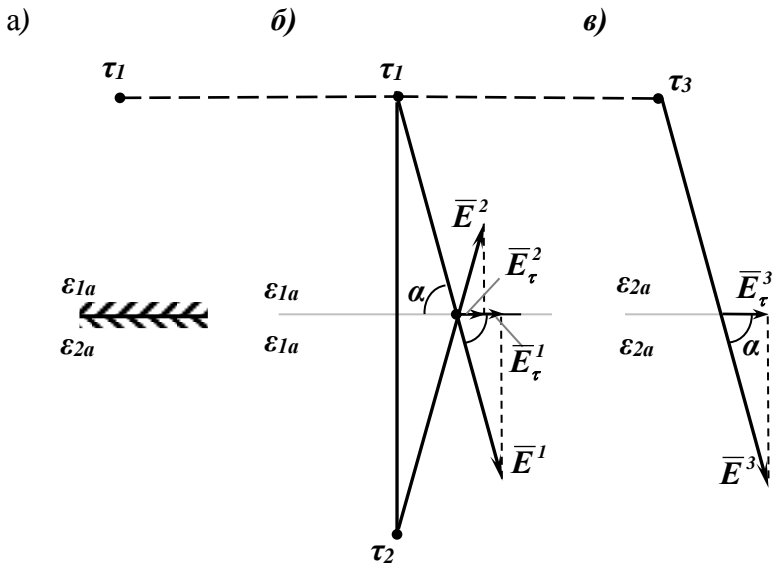


Рис. 8.27

Складемо два рівняння для визначення  $\tau_2$  і  $\tau_3$ .

Із умови рівності тангенціальних компонентів вектора  $\bar{E}$  на межі двох середовищ одержуємо  $\bar{E}_\tau^{1'} + \bar{E}_\tau^2 = \bar{E}_\tau^3$ , або, згідно з (8.45):

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_{1a}r}(\tau_1 + \tau_2)\cos\alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_{2a}r}\tau_3\cos\alpha. \quad (8.53)$$

Звідси,

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{\epsilon_{1a}}{\epsilon_{2a}}\tau_3. \quad (8.54)$$

Із умови рівності нормальних компонентів вектора  $\bar{D}$  на межі двох середовищ маємо  $\bar{D}_n^1 - \bar{D}_n^2 = \bar{D}_n^3$ , або, згідно з (8.25, а) і (8.45):

$$\frac{1}{2\pi r}(\tau_1 - \tau_2)\sin\alpha = \frac{1}{2\pi r}\tau_3\sin\alpha. \quad (8.55)$$

Отже,

$$\tau_1 - \tau_2 = \tau_3. \quad (8.56)$$

Розв'язуючи сумісно (8.54) і (8.56), знаходимо:

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon_{1a} - \varepsilon_{2a}}{\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}} \tau_1 \quad \tau_3 = \frac{2\varepsilon_{2a}}{\varepsilon_{1a} + \varepsilon_{2a}} \tau_1. \quad (8.57)$$

Знак заряду  $\tau_2$  збігається за знаком заряду  $\tau_1$ , якщо  $\varepsilon_{1a} > \varepsilon_{2a}$ . Знак  $\tau_3$  завжди такий самий, як і  $\tau_1$ .

## 8.23. Електростатичне поле системи заряджених тіл

### 8.23.1. Потенціал довільної точки поля

При розрахунку електростатичних полів, особливо обмежених будь-якою провідною поверхнею правильної форми, широко застосовують метод дзеркальних зображень.

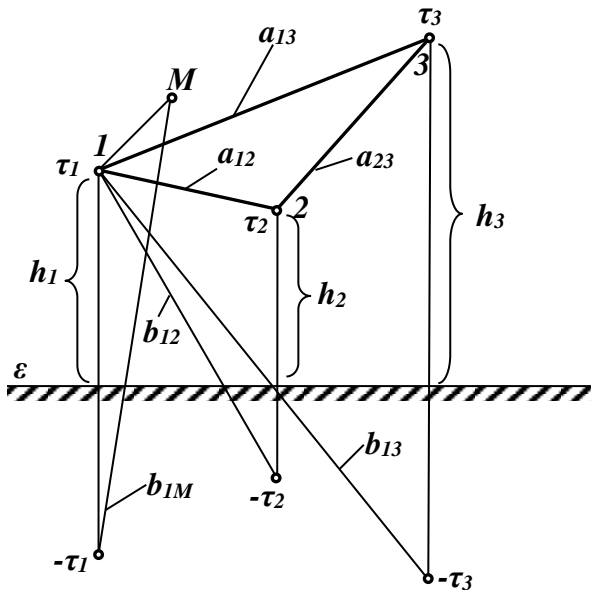


Рис. 8.28

Як заряджені тіла будемо розглядати багатопровідну лінію, яка складається з  $n$  дуже довгих проводів, протягнутих паралельно до землі, із зарядом  $\tau_k$  на одиницю довжини. Висота підвісу  $h_k$  і радіус  $r_k$  кожного проводу відомі. Відома також електрична проникність  $\epsilon_a$  середовища, в якому знаходяться проводи.

Візьмемо в діелектрику деяку точку  $M$  (рис. 8.28) і розрахуємо її потенціал, який визначається сумою потенціалів, створених кожним проводом і його дзеркальним зображенням.

Складова потенціалу точки  $M$  від проводу 1 і його дзеркального зображення:

$$\varphi_{M_1} = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha} \ln\left(\frac{a'_{M_1}}{a_{M_1}}\right), \quad (8.58)$$

де  $a_{M_1}$  – відстань точки  $M$  до першого проводу;

$a'_{M_1}$  – відстань точки  $M$  до дзеркального зображення першого проводу.

Будемо вважати, що висота підвісу проводів над землею набагато більша від радіусів проводів, і що електричні осі проводів практично співпадають з їх геометричними осями.

Складова потенціалу точки  $M$  від другого проводу і його дзеркального зображення:

$$\varphi_{M_2} = \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha} \ln\left(\frac{a'_{M_2}}{a_{M_2}}\right). \quad (8.59)$$

Таким чином, потенціал точки  $M$ :

$$\begin{aligned} \varphi_M = \varphi_{M_1} + \varphi_{M_2} + \varphi_{M_3} + \dots = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha} \ln\left(\frac{a'_{M_1}}{a_{M_1}}\right) + \\ + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha} \ln\left(\frac{a'_{M_2}}{a_{M_2}}\right) + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha} \ln\left(\frac{a'_{M_3}}{a_{M_3}}\right) + \dots \end{aligned} \quad (8.60)$$

### 8.23.2. Перша група формул Максвелла

Якщо точку  $M$  розмістити на поверхні першого проводу, то:

$$\varphi_M = \varphi_1; \quad a'_{M1} = 2h_1; \quad a_{M1} = r_1;$$

де  $a'_{M2} = h_{12}$  – відстань першого проводу до дзеркального зображення другого проводу;

$a'_{M2} = a_{12}$  – відстань першого проводу до другого проводу і тощо.

Тоді потенціал першого проводу

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \tau_1 \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha} \ln\left(\frac{2h_1}{r_1}\right) + \tau_2 \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha} \ln\left(\frac{a'_{12}}{a_{12}}\right) + \\ + \tau_3 \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha} \ln\left(\frac{a'_{13}}{a_{13}}\right) + \dots \end{aligned} \quad (8.61)$$

Коефіцієнти при зарядах  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  залежать тільки від геометричних розмірів тіл, взаємного їх розміщення і від властивостей середовища. Вони не залежать ні від величини, ні від знаків зарядів, ні від потенціалів.

Для скорочення запису вираз (8.61) та інші, аналогічні йому, запишемо наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12} + \tau_3 \alpha_{13} + \dots \\ \varphi_2 &= \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22} + \tau_3 \alpha_{23} + \dots \\ \varphi_3 &= \tau_1 \alpha_{31} + \tau_2 \alpha_{32} + \tau_3 \alpha_{33} + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (8.62)$$

Тут позначено:

$$a_{km} = \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha} \ln\left(\frac{a'_{km}}{a_{km}}\right); \quad a_{kk} = \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha} \ln\left(\frac{2h_k}{r_k}\right). \quad (8.63)$$

Так як  $a'_{mk} = a'_{km}$  і  $a_{mk} = a_{km}$ , то у відповідності з (8.63):

$$a_{km} = a_{mk}. \quad (8.63, a)$$

Систему рівнянь (8.62) прийнято називати першою групою формул Максвелла.



Коефіцієнти  $\alpha$  називають потенціальними коефіцієнтами. Розмірність їх рівна розмірності одиниці довжини, поділеній на фараду ( $m/\Phi$ ).

Так як у всіх коефіцієнтів  $\alpha$  під знаком логарифму знаходиться дріб, чисельник якого завжди більший від знаменника, то всі коефіцієнти  $\alpha$  додатні.

Коефіцієнтом  $\alpha$  може бути таке наступне тлумачення. Нехай заряди всіх проводів, окрім першого, рівні нулю:

$$\tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \dots = 0, \quad \text{а} \quad \tau_1 = 1.$$

Тоді  $\varphi_1 = a_{11}$ , тобто  $a_{11}$  чисельно рівний потенціалу першого проводу, якщо на першому проводі знаходиться одиничний заряд, а заряди на решті проводів відсутні. Аналогічно,  $a_{21}$  чисельно рівний потенціалу другого проводу при тих же умовах. Система (8.62) дозволяє обчислити потенціали заряджених тіл за відомими їх повними зарядами.

Може бути і обернена задача: за відомими потенціалами тіл знайти повні заряди тіл.

### 8.23.3. Друга група формул Максвелла

Розв'яжемо систему (8.62) відносно зарядів, вважаючи, що потенціали  $\varphi$  і коефіцієнти  $a$  відомі:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 + \dots \\ \tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 + \dots \\ \tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (8.64)$$

Коефіцієнти  $\beta_{kn} = \frac{\Delta k_n}{\Delta}$ . Тут через  $\Delta$  позначено визначник системи (8.62):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчне доповнення  $\Delta_{kn}$  одержуємо з визначника системи  $\Delta$  шляхом викреслення  $k$ -го рядка та  $n$ -го стовпця і множенням одержаного мінора на  $(-1)^{k+n}$ .

Система (8.64) являє собою другу групу формул Максвелла. Коефіцієнти  $\beta$  називають ємнісними коефіцієнтами. Розмірність їх обернена розмірності коефіцієнтів  $\alpha$ . Так, як визначник системи  $\Delta$  є симетричним відносно головної діагоналі, то  $\Delta_{kn} = \Delta_{nk}$  і через це  $\beta_{kn} = \beta_{nk}$ . Всі коефіцієнти  $\beta$  з однаковими індексами додатні, всі  $\beta$  з різними індексами від'ємні.

### 8.23.4. Третя група формул Максвелла

Систему (8.64) прийнято записувати інколи в іншій формі, щоб у правій частині кожного рядка були не потенціали, а різниці потенціалів між заданим тілом і всіма останніми, в тому числі й землею.

У відповідності з (8.64) заряд  $k$ -го тіла:

$$\tau_k = \beta_{kk} \varphi_M + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=k} \beta_{km} \varphi_M.$$

Доданок:

$$\beta_{km} \varphi_M = \beta_{km} (\varphi_M - \varphi_k + \varphi_k) = -\beta_{km} U_{km} + \beta_{km} \varphi_k,$$

де

$$U_{km} = \varphi_k - \varphi_m.$$

Тому

$$\begin{aligned} \tau_k &= \varphi_k \beta_{kk} + \varphi_k \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} \beta_{km} U_{km} = \\ &= \varphi_k \sum_{m=1}^{m=n} \beta_{km} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} (-\beta_{km}) U_{km}. \end{aligned}$$

Позначимо:

$$C_{kk} = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \dots + \beta_{kk} + \dots + \beta_{kn} = \sum_{m=1}^{m=n} \beta_{kn}; \quad (8.65)$$

$$C_{km} = -\beta_{km} . \quad (8.66)$$

Тоді:

$$\tau_k = \varphi_k C_{kk} + U_{k1} C_{k1} + U_{k2} C_{k2} = \varphi_k C_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{m=n} U_{km} C_{km} . \quad (8.67)$$

Якщо надати  $k$  значення 1,2,3,..., то одержимо:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \varphi_1 C_{11} + U_{12} C_{12} + U_{13} C_{13} + \dots \\ \tau_2 &= \varphi_2 C_{22} + U_{21} C_{21} + U_{23} C_{23} + \dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (8.68)$$

Систему (8.68) називають третьою групою формул Максвелла; коефіцієнти  $C_{kk}$  – власними частковими ємностями; коефіцієнти  $C_{km}$  – взаємними частковими ємностями.

Так як  $\beta_{km} = \beta_{mk}$ , то  $C_{km} = C_{mk}$ .

Розмірність часткових ємностей така ж, як і розмірність ємнісних коефіцієнтів  $\beta$ . Всі часткові ємності додатні.

Так як  $C_{km} = -\beta_{km}$ , а в свою чергу  $\beta_{km} < 0$ , то  $C_{km} > 0$ .

На підставі (8.68) повний заряд  $k$ -го тіла рівний сумі зарядів. Заряд  $q_{kk} = \varphi_k C_{kk}$  обумовлений різницею потенціалів між  $k$ -тілом і землею.

$q_{km} = U_{km} C_{km}$  – заряд, обумовлений різницею потенціалів між  $k$ -им і  $m$ -им тілами. Через це частковим ємностям  $C_{km}$  між  $k$ -им і  $m$ -им тілами можна дати наступне тлумачення:  $C_{km}$  є відношення складової заряду  $k$ -тіла, обумовленої різницею потенціалів  $U_{km}$  між  $k$ -им і  $m$ -им тілами, до величини цієї різниці потенціалів.

Часткові ємності використовують при розрахунках не тільки електростатичних полів; вони застосовуються при розрахунках швидкоплинних процесів в електричних колах, наприклад, при ємнісному відборі потужності від високовольтної лінії електропередачі.

## 8.24. Розрахунок електричного поля паралельних проводів

### 8.24.1. Постановка задачі

Лінія передачі складається з трьох паралельних проводів. Радіус кожного проводу рівний  $r$  (рис. 8.29). Висоти підвісу проводів:  $h_1, h_2, h_3$ . Відстані між проводами по горизонталі:  $A_{12}, A_{13}, A_{23}$ . Потенціали проводів:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

Визначимо для кожного проводу:

- 1) потенціальні коефіцієнти  $\alpha$  ;
- 2) ємнісні коефіцієнти  $\beta$  ;
- 3) часткові ємності  $C$  ;
- 4) лінійні заряди на одиницю довжини  $\tau$  .

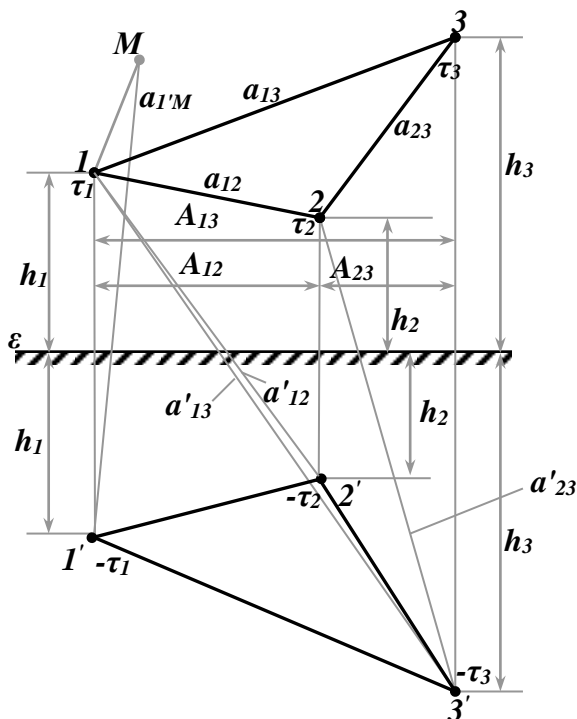


Рис. 8.29

Розрахунок електростатичного поля системи заряджених тіл проведемо за числовими даними, наведеними в табл. 8.1.

**Таблиця 8.1**

$r \times 10^{-3}, \text{ м}$	$A_{12}, \text{ м}$	$A_{23}, \text{ м}$	$h_1, \text{ м}$	$h_2, \text{ м}$	$h_3, \text{ м}$	$\varphi_1, \text{ кВ}$	$\varphi_2, \text{ кВ}$	$\varphi_3, \text{ кВ}$
0,6	2	1,6	6	5,2	6	26,3	-3,7	-23,7

### 8.24.2. Визначення потенціальних коефіцієнтів

Найкоротші відстані між проводами у просторі рівні гіпотенузам прямокутних трикутників, де одним катетом є різниця висот підвісу проводів, а другим – відстань між проводами по горизонталі:

$$\alpha_{12} = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + A_{12}^2} = \sqrt{(6 - 5,2)^2 + 2^2} = 2,13 \text{ м};$$

$$\alpha_{13} = \sqrt{(h_1 - h_3)^2 + A_{13}^2} = \sqrt{(6 - 6)^2 + (2 + 1,6)^2} = 3,6 \text{ м};$$

$$\alpha_{23} = \sqrt{(h_2 - h_3)^2 + A_{23}^2} = \sqrt{(5,2 - 6)^2 + 1,6^2} = 1,79 \text{ м}.$$

Відстань між проводом 1 і дзеркальним зображенням проводу 2 рівна гіпотенузі прямокутного трикутника, одним катетом якого є сума висот підвісу проводів, а другим – відстань між проводами по горизонталі (рис. 8.29):

$$a'_{12} = \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + A_{12}^2} = \sqrt{(6 + 5,2)^2 + 2^2} = 11,4 \text{ м}.$$

Аналогічно визначаються відстані між проводом 1 і дзеркальним зображенням проводу 3; проводом 2 і дзеркальним зображенням проводу 3:

$$a'_{13} = \sqrt{(h_1 + h_3)^2 + A_{13}^2} = \sqrt{(6 + 6)^2 + (2 + 1,6)^2} = 12,5 \text{ м};$$

$$a'_{23} = \sqrt{(h_2 + h_3)^2 + A_{23}^2} = \sqrt{(5,2 + 6)^2 + 1,6^2} = 11,3 \text{ м}.$$

Потенціальні коефіцієнти проводів на одиницю довжини лінії визначаємо за формулами (8.63):

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_1}{r}\right) = \frac{4\pi \times 9 \times 10^9}{2\pi} \ln\left(\frac{2 \times 6}{0,006}\right) = 13,68 \times 10^{10} \text{ м}/\Phi;$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_2}{r}\right) = 18 \times 10^9 \ln\left(\frac{2 \times 5,2}{0,006}\right) = 13,42 \times 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_3}{r}\right) = 18 \times 10^9 \ln\left(\frac{2 \times 6}{0,006}\right) = 13,68 \times 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{12}}\right) = 18 \times 10^9 \ln\left(\frac{11,4}{2,13}\right) = 3,02 \times 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\alpha_{13}}{\alpha_{13}}\right) = 18 \times 10^9 \ln\left(\frac{12,5}{3,6}\right) = 2,23 \times 10^{10} \text{ м/Ф};$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{23}}\right) = 18 \times 10^9 \ln\left(\frac{11,3}{1,79}\right) = 3,32 \times 10^{10} \text{ м/Ф};$$

Одержані значення потенціальних коефіцієнтів дають можливість визначити потенціали проводів за відомими їхніми лінійними зарядами на одиницю довжини з системи рівнянь (8.62).

Якщо необхідно визначити лінійні заряди проводів, коли відомі їхні потенціали, то зручно користуватись системою рівнянь:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3; \\ \tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3; \\ \tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3. \end{aligned} \quad (8.69)$$

### 8.24.3. Визначення ємнісних коефіцієнтів

Розв'яжемо систему рівнянь (8.62) відносно лінійних зарядів  $\tau$  :

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \varphi_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \varphi_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2}{\Delta} \varphi_1 + \frac{\alpha_{13}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta} \varphi_2 + \frac{\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}}{\Delta} \varphi_3; \\ \tau_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \varphi_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \varphi_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \varphi_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\alpha_{31}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{33}}{\Delta} \varphi_1 + \frac{\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2}{\Delta} \varphi_2 + \frac{\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{23}}{\Delta} \varphi_3; \\ \tau_3 &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \varphi_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \varphi_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \varphi_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}}{\Delta} \varphi_1 + \frac{\alpha_{12}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{32}}{\Delta} \varphi_2 + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\Delta} \varphi_3. \end{aligned} \right\} (8.69, a)$$

У системі рівностей (8.69, a) позначено через  $\Delta$  детермінант (визначник) системи рівнянь (8.62), який складається з потенціальних коефіцієнтів  $a$  :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13,68 & 3,02 & 2,23 \\ 3,02 & 13,42 & 3,32 \\ 2,23 & 3,32 & 13,68 \end{vmatrix} \times (10^{10})^3 = \\ &= 2214 \times (10^{10})^3 = 22,14 \times 10^2 \times (10^{10})^3. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Прирівнявши у перших рівняннях систем (8.69) і (8.69, a) коефіцієнти перед потенціалами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  і  $\varphi_3$ , одержуємо вирази для визначення ємнісних коефіцієнтів  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{\Delta} = \frac{(13,42 \times 13,68 - 3,32^2) \times (10^{10})^2}{22,14 \times 10^2 \times (10^{10})^3} = 7,67 \times 10^{-12} \Phi/M; \\ \beta_{12} &= \frac{a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}}{\Delta} = \frac{(2,23 \times 3,32 - 3,02 \times 13,68) \times (10^{10})^2}{22,14 \times 10^2 \times (10^{10})^3} = -1,52 \times 10^{-12} \Phi/M; \end{aligned}$$

$$\beta_{13} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{32}}{\Delta} = \frac{(3,02 \times 3,32 - 2,23 \times 13,42) \times (10^{10})^2}{22,14 \times 10^2 \times (10^{10})^3} = -0,9 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

Оскільки, відповідно до (8.63, а) симетричні потенціальні коефіцієнти  $a$  рівні, тобто:

$$a_{12} = a_{21}; \quad a_{13} = a_{31}; \quad a_{32} = a_{23},$$

то, відповідно, будуть рівні та симетричні ємнісні коефіцієнти:

$$\beta_{21} = \beta_{12} = -1,53 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; \quad \beta_{31} = \beta_{13} = -0,9 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

Шляхом аналогічного прирівнювання у других і третіх рівняннях систем (8.69) і (8.69, а) коефіцієнтів перед потенціалами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  і  $\varphi_3$ , одержимо:

$$\beta_{22} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{\Delta} = \frac{13,68 \times 13,68 - 2,23^2}{22,14 \times 10^{12}} = 8,23 \times 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\beta_{23} = \frac{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}}{\Delta} = \frac{3,02 \times 2,23 - 13,68 \times 3,32}{22,14 \times 10^{12}} = -1,75 \times 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\beta_{33} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\Delta} = \frac{13,68 \times 13,42 - 3,02^2}{22,14 \times 10^{12}} = 7,78 \times 10^{-12} \text{ Ф/м},$$

причому:  $\beta_{32} = \beta_{23} = -1,75 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}.$

#### 8.24.4. Визначення часткових ємностей

Систему рівнянь (8.69) часто записують у такій формі, щоб у правих частинах рівнянь були не потенціали  $\varphi$  проводів, а різниці потенціалів між проводами та між проводами і землею. Тоді зв'язок між потенціалами  $\varphi$  і лінійними зарядами  $\tau$  проводів за допомогою часткових ємностей  $C$  виразиться рівняннями:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= C_{11}(\varphi_1 - \varphi_0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3); \\ \tau_2 &= C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}(\varphi_2 - \varphi_0) + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3); \\ \tau_3 &= C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}(\varphi_3 - \varphi_2) + C_{33}(\varphi_3 - \varphi_0); \end{aligned} \quad (8.71)$$



Розкривши дужки в правих частинах рівнянь системи (8.74) і, враховуючи, що потенціал землі  $\varphi_0 = 0$ , одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= (C_{11} + C_{12} + C_{13})\varphi_1 - C_{12}\varphi_2 - C_{13}\varphi_3; \\ \tau_2 &= -C_{21}\varphi_1 + (C_{21} + C_{22} + C_{23})\varphi_2 - C_{23}\varphi_3; \\ \tau_3 &= -C_{31}\varphi_1 - C_{32}\varphi_2 + (C_{31} + C_{32} + C_{33})\varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (8.71, a)$$

Прирівнюючи у відповідних рівняннях систем (8.71, a) і (8.69) коефіцієнти перед потенціалами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  і  $\varphi_3$ , одержуємо:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= C_{11} + C_{12} + C_{13}; & \beta_{12} &= -C_{12}; & \beta_{13} &= -C_{13}; \\ \beta_{22} &= C_{21} + C_{22} + C_{23}; & \beta_{22} &= -C_{23}; \\ \beta_{33} &= C_{31} + C_{32} + C_{33}. \end{aligned}$$

Враховуючи обчислені значення ємнісних коефіцієнтів  $\beta$  і рівність симетричних коефіцієнтів ( $\beta_{12} = \beta_{21}$ ,  $\beta_{13} = \beta_{31}$ ,  $\beta_{23} = \beta_{32}$ ) з останніх рівнянь визначаємо значення часткових ємностей провідів:

$$C_{12} = C_{21} = -\beta_{12} = 1,53 \times 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$C_{13} = C_{31} = -\beta_{13} = 0,9 \times 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$C_{23} = C_{32} = -\beta_{23} = 1,75 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} = (7,79 - 1,53 - 0,9) \times 10^{-12} = 5,36 \times 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$C_{22} = \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} = (-1,53 + 8,23 - 1,75) \times 10^{-12} = 4,95 \times 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$C_{33} = \beta_{31} + \beta_{32} + \beta_{33} = (-0,9 - 1,75 + 7,78) \times 10^{-12} = 5,13 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

### 8.24.5. Визначення лінійних зарядів

Лінійні заряди  $\tau$  провідів на одиницю довжини лінії визначимо за відомими потенціалами провідів  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  і ємнісними коефіцієнтами  $\beta_{kk}$  і  $\beta_{km}$  згідно з формулами системи (8.69):

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 = 7,79 \times 10^{-12} \times 26,3 \times 10^3 - \\ &\quad - 1,53 \times 10^{-12} \times (-3,7) \times 10^3 - 0,9 \times 10^{-12} \times (-23,7) \times 10^3 = \\ &= 231,9 \times 10^{-9} \text{ K}/\text{M};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 = -1,53 \times 10^{-12} \times 26,3 \times 10^3 + \\ &\quad + 8,23 \times 10^{-12} \times (-1,53) \times 10^3 - 1,75 \times 10^{-12} \times (-23,7) \times 10^3 = \\ &= 11,44 \times 10^{-9} \text{ K}/\text{M};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_3 &= \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 = 0,9 \times 10^{-12} \times 2,63 \times 10^3 - \\ &\quad - 1,75 \times 10^{-12} \times (-3,7) \times 10^3 - 7,78 \times 10^{-12} \times (-23,7) \times 10^3 = \\ &= -201,6 \times 10^{-9} \text{ K}/\text{M}.\end{aligned}$$

## РОЗДІЛ 9. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ В ПРОВІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

### 9.1. Струм і густина струму

Якщо під дією зовнішніх джерел енергії у провідному середовищі (металічних провідниках, рідинах, землі тощо) виникло електричне поле, то в ньому буде протікати електричний струм. Носіями зарядів у металах є вільні електрони, носіями зарядів у рідинах – іони.

Упорядкований рух вільних електронів у металах та іонів у рідинах під дією електричного поля називають струмом провідності. При цьому русі носії зарядів стикаються з іншими частинками речовин, які знаходяться в тепловому русі. Ці зіткнення затрудняють упорядкований рух носіїв зарядів і служать причиною опору, який чинить провідне середовище проходженню струму.

*Властивість середовища, яка характеризує здатність середовища проводити струм, називають питомою провідністю  $\gamma$ . Питома провідність  $\gamma$  залежить від фізичних властивостей провідного матеріалу та від температури і має розмірність  $\text{Ом}^{-1} \text{м}^{-1} = \text{См} / \text{м}$ .*

Основною величиною електричного поля провідного середовища є густина струму  $\vec{\delta}$  – векторна величина, яка направлена уздовж вектора напруженості поля  $\vec{E}$ . Густина струму чисельно рівна відношенню струму  $\Delta i$ , що протікає через елемент поверхні  $\Delta S$ , який перпендикулярний до напрямку напруженості поля в даній точці поля, до величини  $\Delta S$  цієї поверхні.

Якщо поверхня має кінечні розміри, то напрямок вектора густини струму у всіх елементах  $\Delta S$  і напрямок елемента поверхні можуть не співпадати. Тоді струм визначають як потік вектора густини струму:

$$I = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}. \quad (9.1)$$

На відмінність від густини струму  $\vec{\delta}$ , струм  $I$  є скалярною величиною алгебраїчного характеру.

При протіканні постійних струмів, як усередині провідних тіл, так і зовні них, існують постійні магнітні поля. Оскільки ці поля незмінні в часі, то в них не виникає явище електромагнітної індукції і, таким чином, магнітне поле, створене постійним струмом, не виявляє впливу на електричне поле постійного струму. Тому електричне і магнітне поля постійного струму можна розглядати окремо.

## 9.2. Закон Ома в диференціальній формі

Виділимо у провідному середовищі невеликий паралелепіпед об'ємом  $\Delta V$ , довжина ребра якого  $\Delta l$  і площа поперечного перерізу  $\Delta S$ . Розташуємо цей паралелепіпед так, щоб напруженість поля у ньому була спрямована паралельно ребру паралелепіпеда (рис. 9.1).

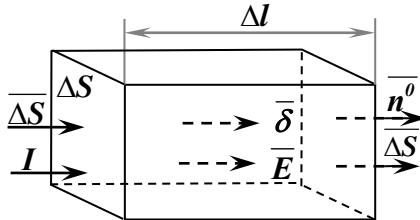


Рис. 9.1

Беручи до уваги невеликий об'єм  $\Delta V$ , можна вважати, що напруженість електричного поля одна й та ж у всьому елементарному об'ємі  $\Delta V$ .

Тоді:  $\vec{\Delta l} = \Delta l \vec{n}^0$ ;  $\vec{\Delta S} = \Delta S \vec{n}^0$ ,

де  $\vec{n}^0$  – одиничний вектор у напрямку  $\vec{\Delta l}$ ,  $\vec{\Delta S}$  і  $\vec{E}$ .

Згідно з (9.1) струм в елементі об'єму  $\Delta V$ :

$$I = \int_s \vec{\delta} \vec{\Delta S} = \vec{\delta} \vec{\Delta S}. \quad (9.1, a)$$

Електрична напруга на елементі об'єму:

$$U = \vec{E} \vec{\Delta l} = RI. \quad (9.2)$$

Електричний опір елемента об'єму:

$$R = \frac{l \Delta l}{\gamma \Delta S}. \quad (9.3)$$

Підставивши у рівність (9.2) вирази (9.1, а) і (9.3), одержимо:

$$\overline{E} \Delta l n^o = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} \overline{\delta} \Delta S n^o,$$

звідки

$$\overline{\delta} = \gamma \overline{E}. \quad (9.4)$$

Співвідношення (9.4) називають законом Ома в диференціальній формі. Воно установлює зв'язок між густиною струму в даній точці провідного середовища і напруженістю поля в цій же точці.

Рівність (9.4) справедлива для ділянок поза джерелом ЕРС. На ділянках зайнятих джерелами ЕРС, крім кулонового (електростатичного) поля, існує ще, так зване, стороннє електричне поле, яке забезпечує безперервний рух зарядів у електричному колі.

Під стороннім електричним полем розуміють електричне поле не електростатичного походження (наприклад, обумовлене хімічними, електрохімічними, тепловими, термоелектричними, механічними або електромагнітними процесами).

Напруженість стороннього поля  $\overline{E}_{стор}$ . На ділянках, зайнятих джерелами ЕРС, повне значення напруженості поля рівне геометричній сумі напруженостей кулонового і стороннього полів ( $\overline{E} + \overline{E}_{стор}$ ).

Закон Ома в диференціальній формі для ділянок, які зайняті джерелами ЕРС, запишеться у вигляді:

$$\overline{\delta} = \gamma (\overline{E} + \overline{E}_{стор}). \quad (9.5)$$

Рівність (9.5) називають узагальненим законом Ома в диференціальній формі.

### 9.3. Закони Кірхгофа в диференціальній формі

Якщо від обох частин рівності (9.5) взяти інтеграл по замкненому контуру, який включає в себе джерело ЕРС, то з рівності (9.5) одержимо другий закон Кірхгофа:

$$\oint \bar{\delta} d\bar{s} = \int \gamma (\bar{E} + \bar{E}_{\text{емп}}) d\bar{s}. \quad (9.5,a)$$

Рівність (9.5, a) називають другим законом Кірхгофа в диференціальній формі.

Якщо в провідному середовищі виділити деякий об'єм, через який протікає постійний струм, тобто струм, який не змінюється в часі, то можна сказати, що струм, який увійшов в об'єм, повинен бути рівним струму, який вийшов з об'єму, інакше в цьому об'ємі відбувалося б накопичення електричних зарядів, чого досліди не підтверджують.

У сумі ці струми записують так:

$$\oint \bar{\delta} d\bar{S} = 0. \quad (9.6)$$

Якщо поділити ліву і праву частини (9.6) на одну й ту ж величину – об'єм  $V$  і спрямувати цей об'єм до нуля, то одержимо:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{\delta} d\bar{S}}{V} = \text{div} \bar{\delta} = 0. \quad (9.7)$$

Співвідношення (9.7) називають першим законом Кірхгофа в диференціальній формі. Воно означає, що в усталеному режимі (при постійному струмі) в довільній точці поля немає ні витоку, ні стоку ліній струму провідності  $\bar{\delta}$ .

Якщо через провідник опором  $R$  протікає струм  $I$ , то в одиницю часу (сек.) в провіднику виділяється енергія, яка чисельно рівна  $I^2 R$ . Тоді енергія, що виділяється в одиницю часу в одиниці об'єму провідного середовища (рис. 9.1) визначається виразом:

$$\frac{I^2 R}{V} = \frac{(\delta \Delta S)^2}{\Delta \Delta S} \left( \frac{\Delta l}{\gamma \Delta S} \right) = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2. \quad (9.8)$$

Таким чином, в одиниці об'єму провідного середовища виділяється в одиницю часу енергія, яка чисельно рівна  $\gamma E^2$ .

#### 9.4. Рівняння Лапласа для електричного поля у провідному середовищі

Як і в електростатичному полі, напруженість електричного поля у провідному середовищі  $\bar{E} = -\text{grad } \varphi$ .

Для незмінного в часі поля:

$$\text{div } \bar{E} = 0. \quad (9.9)$$

Якщо провідність  $\gamma$  середовища не змінюється від точки до точки, тобто, якщо середовище однорідне й ізотропне, то  $\gamma$  як сталу величину можна винести за знак дивергенції і, відповідно, замість  $\text{div } \bar{E} = 0$  можна написати  $\gamma \text{div } \bar{E} = 0$  або

$$\text{div } \bar{E} = \text{div}(-\text{grad } \varphi),$$

тобто,  $\nabla^2 \varphi = 0$ . (9.10)

Таким чином, електричне поле в однорідному провідному середовищі підпорядковується рівнянню Лапласа і являється потенціальним. В цьому полі в ділянках, не зайнятих джерелами енергії, циркуляція вектора напруженості електричного поля дорівнює нулю:

$$\oint \bar{E} dl = 0. \quad (9.11)$$

#### 9.5. Струм на межі розділу двох середовищ

Вияснимо, які граничні (краєві) умови виконуються при переході струму з середовища провідністю  $\gamma_1$  у середовище з провідністю  $\gamma_2$ .

На рис. 9.2 лінія  $00$  є межею розділу двох середовищ. Візьмемо на межі плоский замкнений контур  $1-2-3-4$ .

Сторони 1–2 і 3–4 його досить малі в порівнянні зі сторонами 2–3 й 1–4 (довжину останніх позначимо  $dl$ ).

Оскільки циркуляція вектора напруженості  $\oint \overline{E} dl$  уздовж всякого замкненого контуру рівна нулю, то вона рівна нулю і для контуру 1–2–3–4.

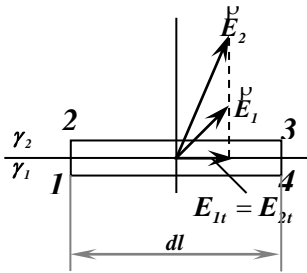


Рис. 9.2

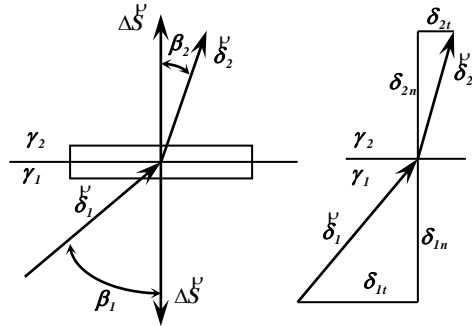


Рис. 9.3

У силу малості відрізків 1–2 і 3–4 знехтуємо складовими інтеграла вздовж цих шляхів і тоді:

$$E_{1t} dl - E_{2t} dl = 0 \text{ або } E_{1t} = E_{2t}, \quad (9.12)$$

тобто на межі розділу двох середовищ з різними провідностями рівні тангенціальні складові напруженостей поля.

На межі розділу середовищ також рівні нормальні складові густини струмів (рис. 9.3):

$$\delta_{1n} = \delta_{2n}. \quad (9.13)$$

Отже, при переході струму з середовища з однією провідністю в середовище з іншою провідністю неперервна тангенціальна складова вектора  $\overline{E}$ , тобто  $E_{1t} = E_{2t}$  (але  $E_{1n} \neq E_{2n}$ ), і неперервна нормальна складова густини струму, тобто  $\delta_{1n} = \delta_{2n}$  (але  $\delta_{1t} \neq \delta_{2t}$ ).

Звідси випливає, що повні значення вектора  $\overline{E}$  і вектора  $\overline{\delta}$  в загальному випадку змінюються стрибком на межі розділу середовищ.



Знайдемо зв'язок між кутом падіння  $\beta_1$  і кутом заломлення  $\beta_2$ :

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\delta_{1t}}{\delta_{1n}} = \frac{E_{1t} \gamma_1}{\delta_{1n}}; \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\delta_{2t}}{\delta_{2n}} = \frac{E_{2t} \gamma_2}{\delta_{2n}}.$$

Тоді 
$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (9.14)$$

Якщо струм переходить з середовища з великою провідністю (наприклад, з металу) в середовище з малою провідністю (наприклад, в землю), то тангенс кута заломлення:

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \operatorname{tg} \beta_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

менший від тангенса кута падіння  $\beta_1$  і, відповідно, кут  $\beta_2$  менший від кута  $\beta_1$ .

## 9.6. Електричне поле в діелектрику між двома струмопроводами

Прийнято вважати, що картина електричного поля в діелектрику, який охоплює провідники зі струмами, тотожна картині електричного поля в умовах електростатики.

Строго кажучи, це вірно лише наближено, оскільки в умовах електростатики тангенціальна складова напруженості електричного поля на поверхні провідного тіла рівна нулю, тоді, як при протіканні постійного струму провідником тангенціальна складова напруженості електричного на поверхні провідника, хоч і дуже мала в порівнянні з нормальною складовою напруженості в цій же точці, але не рівна нулю.

**Приклад 9.1.** На числовому прикладі переконаємось, що тангенціальна складова напруженості поля  $E_t$  в багато разів менша від нормальної складової напруженості  $E_n$ .

Припустимо, що різниця потенціалів  $U$  між двома паралельними струмонесучими мідними шинами (рис. 9.4) рівна  $100 \text{ В}$ , відстань  $b$  між шинами  $0,02 \text{ м}$ , густина струму  $\delta = 2,5 \times 10^6 \text{ А/м}$ , провідність  $\gamma = 5,6 \times 10^7 \text{ См/м}$ .

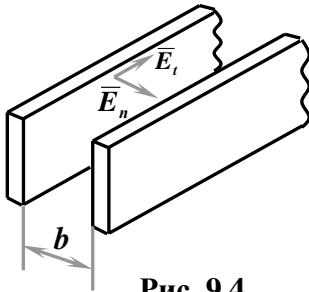


Рис. 9.4

*Розв'язання*

$$E_t = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{2,5 \times 10^6}{5,6 \times 10^7} = 4,46 \times 10^{-2} \text{ В/м};$$

$$E_n = \frac{U}{b} = \frac{100}{0,02} = 5 \times 10^2 \text{ В/м};$$

$$\frac{E_n}{E_t} = \frac{5 \times 10^2}{4,46 \times 10^{-2}} = 1,12 \times 10^4.$$

Таким чином, нормальна складова напруженості  $E_n$  на чотири порядки більша від тангенціальної складової  $E_t$ .

**Приклад 9.2.** Визначимо струм витікання коаксіального кабелю на  $1 \text{ км}$  довжини, якщо простір між жилою і оболонкою кабелю заповнений неідеальним діелектриком, провідність якого  $\gamma = 10^{-8} \text{ См/м}$ ; радіус жили  $r_1$ , радіус оболонки  $r_2 = e \times r_1$ , де  $e$  – основа натурального логарифму; напруга між жилою і оболонкою  $U = 10 \text{ кВ}$ .

*Розв'язання*

Провідність кабелю:

$$G = \frac{2\pi\gamma}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2 \times 3,14 \times 10^{-8} \times 10^3}{\ln(e \times r_1/r_1)} = 6,28 \times 10^{-5} \text{ См}.$$

Струм витікання через недосконалу ізоляцію:

$$I = UG = 10^4 \times 6,28 \times 10^{-5} = 0,628 \text{ А/км}.$$

**Приклад 9.3.** В морську воду, провідність якої  $\gamma = 0,1 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ , вертикально опущені дві металічні трубки зовнішнім діаметром  $D = 0,05 \text{ м}$  і довжиною  $l = 3 \text{ м}$ . Відстань між осями труб  $d = 25 \text{ м}$ . Визначимо провідність  $G$  між трубками.

*Розв'язання*

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln(d/R)} = \frac{3,14 \times 10^{-1} \times 3}{\ln(25/0,025)} = \frac{9,52}{6,907} = 0,13 \text{ См.}$$

## 9.7. Просторове розтікання електричного струму в землі. Опір замикання

Для здійснення з'єднання будь-якої точки електричного кола з землею закопують у землю металічні провідники, до яких і приєднують відповідну точку кола. Систему таких закопаних у землю провідників називають заземлювачем.

*Опір, який зустрічає струм при розтіканні в землі від заземлювача, називають опором заземлення. Опором металічних заземлювачів зазвичай нехтують у порівнянні з опором землі.*

У потужних електроенергетичних пристроях при коротких замиканнях на землю будь-якої точки електричного кола, яка в нормальних умовах не повинна мати з'єднання з землею, виникають великі струми короткого замикання, які проходять через заземлювачі, землю і місце пошкодження електричного кола. Спад напруги в землі біля заземлювача залежать від величини струму короткого замикання і від опору заземлення. Надзвичайно важливо намагатись зменшити цей спад напруги: цього можна досягти зменшенням опору заземлення.

Зменшення опору заземлення досягають двома шляхами: збільшенням розмірів системи, утвореної провідниками заземлення і, якщо це можливо, збільшенням питомої провідності ґрунту.

Особливо важливо надати системі провідників заземлення таку конструкцію, щоб спад напруги від струмів короткого замикання, який виникає на поверхні землі, рівній довжині людського кроку, так звана крокова напруга, ніде не перевищував величини, при якій через людину, що йде по землі, можуть пройти небезпечні для її життя струми. У зв'язку з цим досить важливо вміти розраховувати опір розтіканню струму в землі при різних конструкціях заземлювачів.

Формули для провідності  $G = I/U$  заземлення можуть бути написані на основі методу електричної аналогії з формулами для ємності  $C = Q/U$  відповідно розміщених тіл.

В електростатичних задачах звично приймають рівним нулю потенціал нескінченно віддалених точок. У задачах, що відносяться до обчислення струмів у землі, також приймають рівним нулю потенціал нескінченно віддалених точок або практично достатньо віддалених від електрода точок. При цьому у виразі  $G = I/U$  величина  $U$  є потенціал зарядженого тіла.

Необхідно зазначити, що в землі лінії струму не прямують у нескінченність, а збираються біля іншого електрода або біля місця пошкодження ізоляції лінії. Однак ця обставина мало відбивається на розподілі струму біля даного електрода і на значенні відповідного йому опору заземлення, так як основний опір розтіканню струму зосереджений поблизу електрода, де густина струму в землі має найбільше значення.

## 9.8. Розрахунок поля півсферичного електрода

На рис. 9.5, а, зображено півсферичний електрод, радіус якого  $r$ . Електрод призначений для заземлення металічної опори лінії електропередачі постійного струму. Струм короткого замикання ліній стікає через заземлювач у

землю і розтікається в товщі землі, яка виконує роль зворотного проводу для лінії електропередачі. Питома провідність землі  $\gamma = 1 \times 10^{-2} \text{ Сл/м}$ .

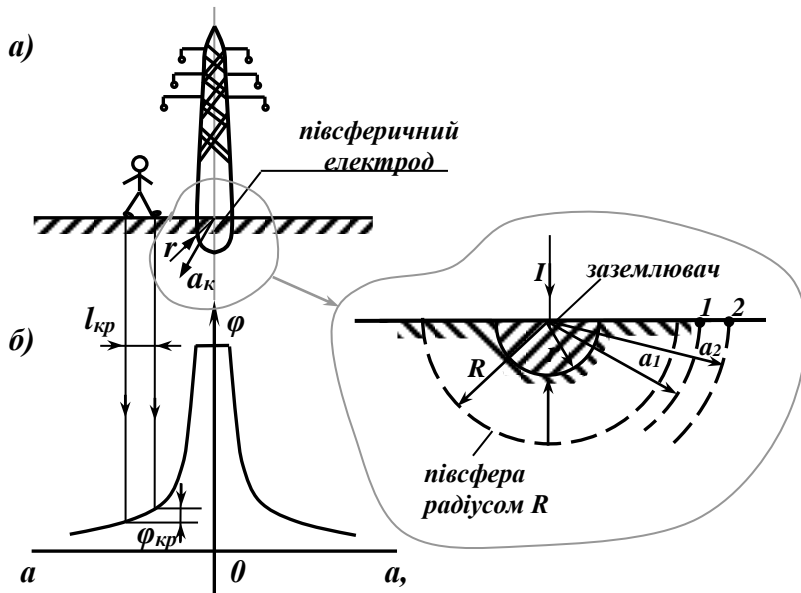


Рис. 9.5

Визначимо:

- 1) густину струму на відстані  $a_1$  від центру півсфери електрода;
- 2) напруженість поля  $E$  на поверхні півсфери радіуса  $a_1$ ;
- 3) значення потенціалів у точках на поверхні землі на відстанях  $a_1$ ,  $a_1$ ,  $a_3$  й  $a_4$  від центру півсферичного електрода і побудуємо графік залежності  $\phi = f(a)$ ;
- 4) крокову напругу на тих же відстанях  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  й  $a_4$ , прийнявши середню довжину кроку людини  $l_{кр} = 0,8 \text{ м}$ ;

5) небезпечну зону, тобто радіус кола  $a_0$  на поверхні землі з центром, що співпадає з центром півсферичного електрода;

б) опір заземлення півсферичного електрода.

### **Розв'язання**

Розрахунок електричного поля півсферичного електрода проведемо за числовими даними, наведеними в табл. 9.1.

Таблиця 9.1

$I, A$	$a, м$	$a_1, м$	$a_2, м$	$a_3, м$	$a_4, м$
1000	0,3	0,3	1,2	4	8

Згідно з умовою задачі необхідно визначити характеристики розподілу потенціалів електричного поля на поверхні землі довкола заземлюючого пристрою. Така задача має практичне значення в схемах електропостачання, наприклад, у випадку короткого замикання проводів високої напруги з опором.

Струм короткого замикання, протікаючи по землі, як по зворотному проводі, утворює на поверхні землі електричне поле, основні характеристики якого необхідно визначити. Будемо вважати, що основа опори манти являє собою півсферичний електрод, радіус якого  $r = a$ . Поверхня стикання півсферичного електрода з землею:

$$S = 2\pi a^2.$$

При можливому короткому замиканні струм короткого замикання, стікаючи через опору, буде відводитись у землю через заземлювач.

1. Густина струму короткого замикання на відстані  $a_1 = 0,3 м$  від центру півсферичного електрода визначимо як відношення величини струму до площі поверхні півсфери, через яку проходить цей струм, тобто:

$$\delta = \frac{I}{4\pi R^2 / 2} = \frac{I}{2\pi R^2}. \quad (9.15)$$

Отже,

$$\delta = \frac{I}{2\pi\alpha_1^2} = \frac{1000}{2 \times 3,14 \times (0,3)^2} = 1770 \text{ A/м}^2.$$

2. У формулу закону Ома в диференціальній формі ( $\delta = \gamma \times E$ ) підставимо замість густини  $\delta$  її вираз згідно з (9.15):

$$\gamma E = \frac{I}{2\pi\alpha_1^2}. \quad (9.16)$$

З виразу (9.16) визначимо напруженість  $E$  електричного поля на поверхні землі на відстані  $\alpha_1 = 0,3\text{м}$  від центра півсферичного електрода:

$$E = \frac{I}{2\pi\gamma\alpha_1^2} = \frac{1000}{2 \times 3,14 \times 1 \times 10^{-2} \times 0,3^2} = 177000 \text{ В} = 177 \text{ кВ}. \quad (9.17)$$

3. Знаходимо значення потенціалів у точках на поверхні землі на відстанях  $a_k$  від центру напівсферичного електрода за формулою:

$$\varphi_k = \frac{I}{2\pi\gamma\alpha_k}. \quad (9.18)$$

Результати обчислень заносимо в табл. 9.2 і будемо графік залежності  $\varphi = f(a)$ .

Таблиця 9.2

$a_k$	$a_1, \text{м}$	$a_2, \text{м}$	$a_3, \text{м}$	$a_4, \text{м}$
		0,3	1,2	4
$\varphi, \text{кВ}$	53,1	13,27	4	2
$U_{кр}, \text{кВ}$	38,6	5,3	0,66	0,18

4. Обчислюємо величини крокової напруги на відстанях  $a_k$  від центру півсферичного електрода за формулою:

$$U_{крk} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + l_{кр}} \right). \quad (9.19)$$

Результати обчислень заносимо в табл. 9.2.

5. Знаходимо небезпечну зону радіусом  $a_0$  з умови техніки безпеки, беручи до уваги, що крокова напруга на межі цієї зони відповідно до нормативів не повинна перевищувати **150 В**, тобто:

$$U_{кр0} \leq 150 \text{ В}. \quad (9.20)$$

Підставивши в цю нерівність вираз (9.19) для крокової напруги, одержимо:

$$\frac{1}{2\pi\gamma} \left[ \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + l_{кр}} \right] \leq 150 \text{ В}.$$

Цей вираз після нескладного перетворення перепишемо в іншому вигляді:

$$300\pi\gamma a_0^2 + 300\pi\gamma l_{кр} a_0 - I_{кр} \leq 0.$$

Підставивши числові значення, визначаємо радіус небезпечної зони:

$$300 \times 3,14 \times 10^{-2} \times a_0^2 + 300 \times 3,14 \times 10^{-2} \times 0,8 \times a_0 - 1000 \times 0,8 \leq 0,$$

звідки:  $a_0 \geq 8,82 \text{ м}.$

Опір заземлення півсферичного електрода знаходимо з формули:

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma a_0} = \frac{1}{2 \times 3,14 \times 10^{-2} \times 8,82} = 1,8 \text{ Ом}. \quad (9.21)$$

## 9.9. Аналогія між електростатичним полем і електричним полем у провідному середовищі

За своєю природою поле електростатичне і поле постійного струму в провідному середовищі різні. Електростатичне поле створюється електричними зарядами, які незмінні в часі і нерухомі у просторі, тоді як електричне поле у провідному середовищі є полем, в якому електричні заряди мають упорядкований рух під дією зовнішнього джерела енергії. Незважаючи на це, між двома полями може бути проведена певна аналогія.

Дійсно, електростатичне поле в об'ємах, вільних від зарядів, задовольняє рівнянню Лапласа. Електричне поле



постійного струму в провідному середовищі поза посторонніми джерелами також йому задовольняє. В обох полях маємо справу з вектором напруженості  $\vec{E}$ . Вектору електричного зміщення  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$  можна співставити вектор густини струму  $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$ . З потоком вектора  $\vec{D}$  ( $\psi = \int \vec{D} d\vec{S}$ ) можна співставити потік вектора густини електричного струму  $I = \int \vec{\delta} d\vec{S}$ .

Краєві умови на поверхні розділу двох діелектриків:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{і} \quad D_{1n} = D_{2n}.$$

Краєві умови на поверхні розділу двох середовищ з різною провідністю:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{і} \quad \delta_{1n} = \delta_{2n}.$$

Але, якщо два поля задовольняють одне й теж рівняння  $\nabla^2 \varphi = 0$  і в них виконуються тотожні краєві умови для схожих величин, то за однакової форми граничних поверхонь на основі теореми єдності можна стверджувати, що сукупність силових і еквіпотенціальних ліній у цих двох полях буде однаковою. Ця формальна аналогія широко використовується на практиці. Так, наприклад, якщо якийсь електростатичне поле вже вивчене, то всі відомості про нього можуть бути застосовані і для геометрично подібного поля у провідному середовищі, і навпаки.

## РОЗДІЛ 10. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

### 10.1. Основні характеристики магнітного поля

Магнітне поле характеризується індукцією  $\vec{B}$ , намагніченістю  $\vec{J}$  і напруженістю  $\vec{H}$ . Ці три величини зв'язані співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0\mu\vec{H} = \mu_a\vec{H}, \quad (10.1)$$

де  $\mu_a$  – абсолютна магнітна проникність середовища (Гн/м);

$\mu_0$  – магнітна постійна (магнітна проникність вакууму):

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м} = 1,256 \times 10^{-6} \text{ Гн/м};$$

$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}$  – відносна магнітна проникність.

Одним з основних проявів магнітного поля є його дія на провідник зі струмом, що знаходиться в цьому полі.

Дослідами встановлено, що сила  $\vec{F}$ , з якою поле діє на елемент заструмленого провідника довжиною  $d\vec{l}$ , визначаються формулою:

$$\vec{F} = I[\vec{B} \times d\vec{l}] = IBdl \sin(\angle \vec{B}, d\vec{l}). \quad (10.2)$$

Ця сила в будь-якій точці поля перпендикулярна до магнітної індукції  $\vec{B}$  і до елемента струму  $I d\vec{l}$  (рис. 10.1).

У відповідності з виразом (10.2) магнітна індукція  $\vec{B}$  може бути визначена як сила, що діє на провідник довжиною  $d\vec{l} = 1$ , через який протікає струм, рівний одиниці.

Якщо вектор індукції  $\vec{B}$  і елемент  $d\vec{l}$  провідника паралельні ( $\angle \vec{B}, d\vec{l} = 0^\circ$ ), то на елемент струму магнітне поле не діє:

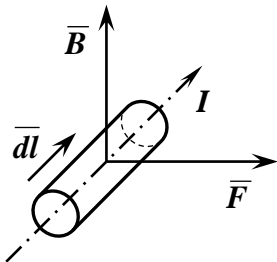


Рис. 10.1

$$F = IBdl \sin 0^\circ = IBdl \times 0 = 0.$$

Ця дія максимальна, коли  $\vec{B}$  і  $\vec{dl}$  взаємноперпендикулярні:

$$F = IBdl \sin 90^\circ = IBdl \times 1 = IBdl.$$

Електромагнітне поле являє собою сукупність взаємозв'язаних електричного і магнітного полів і магнітне поле є однією зі сторін електромагнітного поля.

Магнітне поле постійного струму створюється незмінними в часі струмами, що протікають по провідних тілах (середовищах), які нерухомі в просторі у відношенні до спостерігача.

Якщо де-небудь протікає струм, то він неминуче створює магнітне поле і навпаки, якщо в якій-небудь точці (або точках) є магнітне поле, то воно створене деяким струмом. Цей струм не обов'язково протікає в безпосередній близькості від точок простору, в яких ним створене магнітне поле.

Магнітне поле створюється в рівній мірі струмами провідності і струмами зміщення.

## 10.2. Закон повного струму в інтегральній формі

Кількісний зв'язок між циркуляцією вектора  $\vec{H}$  по замкненому контуру і струмом усередині цього контуру визначається законом повного струму в інтегральній формі: *інтеграл від напруженості магнітного поля уздовж будь-якого замкненого контуру рівний повному струмові, який пронизує цей контур (рис.10.2), тобто:*

$$\oint \vec{H} \vec{dl} = I. \quad (10.3)$$

Під повним струмом розуміють увесь струм (струм провідності та струм зміщення), що пронизує деякий контур інтегрування.

Інтегральну форму закону повного струму (10.3) застосовують тоді, коли може бути використана симетрія в магнітному полі. Так, наприклад, напруженість поля в деякій точці  $A$ , що знаходиться в полі одинокого прямого

проводу зі струмом  $I$  (рис. 10.2) згідно з законом повного струму визначимо наступним чином.

Проведемо через точку  $A$  коло радіусом  $R$  так, щоб центр кола знаходився на осі проводу. Завдяки симетрії напруженість поля в усіх точках кола чисельно одна й та ж ( $H = \text{const}$ ) і напрямок напруженості співпадає з дотичною до кола ( $\angle \vec{H}, \vec{dl} = 0^\circ$ ). Тоді у відповідності з (10.3):

$$\oint \vec{H} \vec{dl} = \oint H dl \cos 0^\circ = H \oint dl = H 2\pi R = I.$$

Звідси напруженість магнітного поля:

$$H = I / 2\pi R. \quad (10.4)$$

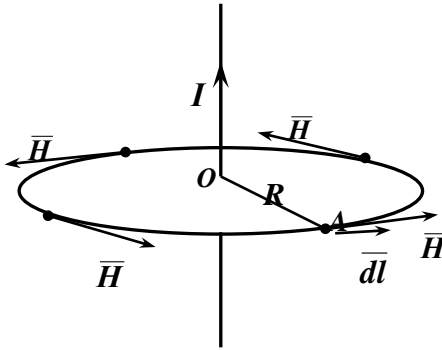


Рис. 10.2

Таким чином, при зростанні відстані від осі проводу напруженість  $H$  магнітного поля зменшується за гіперболічним законом.

Якщо якийсь поле має складний характер і не вдається скласти замкнений контур, всі точки якого знаходилися б у симетричних умовах, то використати інтегральну форму запису закону повного струму для знаходження напруженості в будь-якій точці поля неможливо, так як  $H$  не можна буде винести з-під знаку інтеграла ( $H \neq \text{const}$ ).

### 10.3. Закон повного струму в диференціальній формі. Ротор напруженості

Співвідношення (10.3) справедливе для контурів будь-яких розмірів, в тому числі й для досить малих.

Виділимо в деякому середовищі (рис. 10.3) невеликий контур і складемо вздовж нього циркуляцію вектора  $\vec{H}$ , яка рівна струмові, що пронизує площадку  $\Delta S$ , обмежену цим контуром.

Якщо площадка досить мала, то можна вважати, що густина струму  $\vec{\delta}$  в межах цієї площадки одна й та ж ( $\vec{\delta} = \text{const}$ ) і струм, який пронизує площадку  $\Delta S$ :

$$\Delta i = \vec{\delta} \Delta S = \delta \Delta S \cos \alpha = \delta_n \Delta S,$$

де  $\delta_n$  – проекція вектора густини струму  $\vec{\delta}$  на нормаль  $\vec{n}$  до площадки  $\Delta S$ , тобто на напрямок вектора  $\vec{\Delta S}$ .

Тоді формула (10.3) відносно площадки  $\Delta S$  запишеться:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \delta_n \Delta S. \quad (10.5)$$

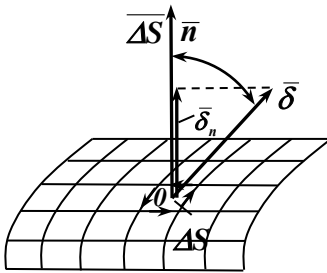


Рис. 10.3

За додатний напрямок нормалі до площадки приймають напрямок руху вістряка правоходового гвинта, головка якого обертається в напрямку обходу контуру при складанні циркуляції вектора  $\vec{H}$ .

Поділимо обидві частини рівності (10.5) на  $\Delta S$  і спрямуємо  $\Delta S$  до нуля, що відповідає стягуванню розглядуваної площадки до нуля.

Границя цього співвідношення:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta S} = \delta_n. \quad (10.6)$$

Ліва частина рівності (10.6) являє собою проекцію ротора  $\overline{H}$  на напрямок нормалі  $\overline{n}$  до площадки  $\Delta S$ .

Тоді вираз (10.6) прийме вигляд:

$$\text{rot}_n \overline{H} = \delta_n. \quad (10.6,a)$$

Якщо площадку  $\Delta S$  зорієнтувати в просторі так, щоб напрямок нормалі  $\overline{n}$  до неї співпадав з напрямком вектора густини струму  $\overline{\delta}$  в даній точці поля, то замість рівності проєкцій двох векторів (10.6, a), можна записати рівність самих векторів:

$$\text{rot} \overline{H} = \overline{\delta}. \quad (10.7)$$

Формула (10.7) виражає закон повного струму в диференціальній формі.

Ротор може бути визначений як функція, яка характеризує поле в даній точці у відношенні до здатності утворення виходів.

Рівняння (10.7) записане в загальній формі, безвідносно до будь-якої координатної системи, і в кожній системі координат воно розкривається по-своєму.

#### 10.4. Вираження ротора в різних системах координат

З рівності векторів:  $\text{rot} \overline{H} = \overline{\delta}$  в свою чергу слідує рівність їх проєкцій по трьох координатних осях декартової системи координат.

Проекція  $\text{rot} \overline{H} = \overline{\delta}$  на вісь  $oz$  рівна:

$$\text{rot} \overline{H} = \frac{\oint \overline{H} dl}{\Delta S_z} \quad (10.8)$$

Візьмемо в площині  $xoy$  деякий замкнений контур  $mnpq$  (рис. 10.4). Обійдемо цей контур проти ходу годинникової стрілки і складемо уздовж нього циркуляцію вектора  $\overline{H}$ , враховуючи зміну вектора  $\overline{H}$  від точки до точки.

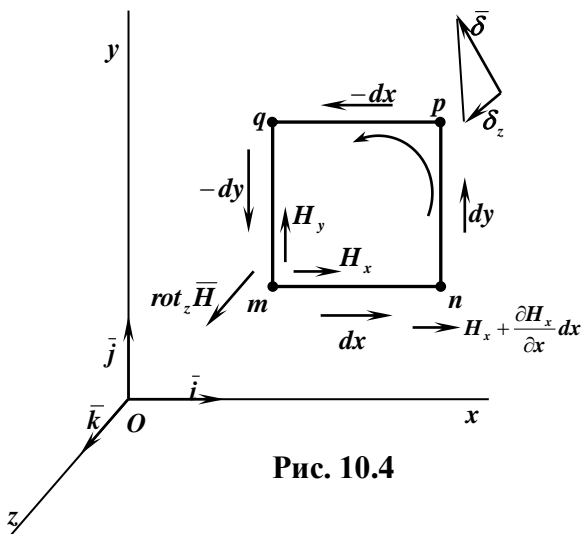


Рис. 10.4

Нехай проекції вектора  $\bar{H}$  на осі  $ox$  і  $oy$  в точці  $m$  будуть  $H_x$  і  $H_y$ . В точці  $n$  проекції вектора  $\bar{H}$  на осі  $ox$  і  $oy$  зміняться в порівнянні з проекціями в точці  $m$  і стануть рівними:

$$H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx; \quad H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx.$$

Проекції вектора  $\bar{H}$  на осі  $ox$  і  $oy$ :

в точці  $q$ :  $H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy; \quad H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy;$

в точці  $p$ :  $H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx; \quad H_y + \frac{\partial H_y}{\partial y} dy + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx.$

При складанні циркуляції на ділянках  $mn$  і  $pq$  необхідно брати до уваги лише «іксові» складові напруженості  $H$  («ігрекові» складові перпендикулярні елементам шляху).

Складову  $\oint \overline{H} d\overline{l}$  на ділянці  $mn$  знаходимо як добуток середнього значення «іксової» складової напруженості  $H$  на цій ділянці на довжину шляху  $dx$  :

$$\frac{H_x + \left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right)}{2} dx = \left( H_x + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right) dx .$$

Складові  $\oint \overline{H} d\overline{l}$  :

на ділянці  $np$  :  $\left( H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dy \right) dy ;$

на ділянці  $pq$  :  $\left( H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x} dx \right) (-dx);$

на ділянці  $qm$  :  $\left( H_y + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial y} dx \right) (-dy).$

Просумувавши всі складові циркуляції вектора  $\overline{H}$  уздовж контуру  $mnpq$  , отримаємо:

$$\left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dx dy . \quad (10.10)$$

У відповідності з визначенням (10.8) проекції ротора  $\overline{H}$  на вісь  $oz$  поділимо циркуляцію (10.10) вектора  $\overline{H}$  на площу  $ds_z = dx dy$  , обмежену контуром  $mnpq$  ; після чого проекція ротора на напрямок осі  $oz$  буде рівна:

$$rot_z \overline{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \delta_z .$$

Аналогічно запишуться проекції  $rot \overline{H}$  на осі  $ox$  і  $oy$  :

$$rot_x \overline{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \delta_x ;$$

$$rot_y \overline{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \delta_y .$$

Просумувавши три останніх вирази, одержимо вираз ротора  $\overline{H}$  в декартовій системі координат:



$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} = & \bar{i} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \\ & + \bar{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Представимо формально вираз  $\operatorname{rot} \bar{H}$  у вигляді векторного добутку оператора просторового диференціювання  $\nabla$  на вектор  $\bar{H}$ , тобто у вигляді:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = [\nabla \times \bar{H}].$$

Для цього перемножимо безпосередньо оператор  $\nabla$  на вектор  $\bar{H}$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left( \bar{i} H_x + \bar{j} H_y + \bar{k} H_z \right) \right] = \\ & = \bar{i} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \bar{k} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Тут враховано, що  $\bar{i} \times \bar{j} = \mathbf{1}$ ;  $\bar{j} \times \bar{j} = \mathbf{0}$ .

Ротор будь-якого вектора, що використовується в теорії електромагнітного поля, можна також представити у вигляді визначника третього порядку.

Наприклад,  $\operatorname{rot} \bar{H}$  в декартовій системі координат запишеться у вигляді:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \quad (10.13)$$

Якщо розкрити цей визначник, то отримаємо вираз (10.11).

Проекції ротора в циліндричній системі координат:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_r \bar{H} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z}; \\ \operatorname{rot}_\alpha \bar{H} &= \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}; \\ \operatorname{rot}_z \bar{H} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r H_\alpha) - \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

в сферичній системі координат:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_R \bar{H} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\alpha) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \alpha} \right]; \\ \operatorname{rot}_\theta \bar{H} &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial H_R}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R H_\alpha); \\ \operatorname{rot}_\alpha \bar{H} &= \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (R H_\theta) - \frac{\partial H_R}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

## 10.5. Принцип неперервності магнітного потоку

Магнітний потік – це потік вектора магнітної індукції через деяку поверхню:

$$\Phi = \int_S \bar{B} ds. \quad (10.16)$$

Тут інтеграл береться по поверхні  $S$ . Якщо поверхня замкнена сама на себе, наприклад, поверхня кулі, то потік вектора магнітної індукції:

$$\Phi = \oint \bar{B} ds. \quad (10.17)$$

Досліди підтверджують, що магнітний потік, який входить усередину деякого об'єму, рівний потоку, що виходить із цього об'єму.

Отже, сума потоку, що увійшов в об'єм, і потоку, який вийшов із цього об'єму, рівна нулю:

$$\oint \bar{B} ds = 0. \quad (10.18)$$

*Цей вираз являє собою математичний запис принципу неперервності магнітного потоку.*

Поділимо обидві частини (10.18) на об'єм  $V$ , що знаходиться всередині замкненої поверхні  $S$ , і визначимо границю цього відношення, спрямувавши об'єм  $V$  до нуля:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{B} ds}{V} = 0 \quad \text{або} \quad \text{div} \bar{B} = 0. \quad (10.19)$$

Співвідношення (10.19) виражає собою диференціальну форму запису неперервності магнітного потоку. Воно справедливе для будь-якої точки магнітного поля. Значить, у будь-якій точці магнітного поля немає ні витоків, ні стоків ліній вектора магнітної індукції. Лінії вектора  $\bar{B}$  ніде не розриваються, вони являють собою замкнені самі на себе лінії (коло, еліпс тощо).

Вихровими називають поля, ротор яких відмінний від нуля. Оскільки для магнітного поля постійного струму  $\text{rot} \bar{H} = \bar{\delta}$ , то у всіх точках простору, де  $\bar{\delta} \neq 0$ , поле вектора  $\bar{H}$  являється вихровим полем.

У точках простору, де  $\bar{\delta} = 0$ ,  $\text{rot} \bar{H} = 0$  і магнітне поле можна розглядати як потенціальне.

## 10.6. Скалярний потенціал магнітного поля

Для сукупності точок, де  $\bar{\delta} = 0$ ,  $\text{rot} \bar{H} = 0$  і магнітне поле можна розглядати як потенціальне, тобто як поле, кожна точка якого має скалярний магнітний потенціал  $\varphi_M$ . Таким чином, для таких областей можна прийняти:

$$\bar{H} = -\text{grad} \varphi_M. \quad (10.20)$$

Так як  $\text{div} \bar{B} = \text{div} \mu_a \bar{H} = 0$ , то при  $\mu_a = \text{const}$   $\text{div} \bar{H} = 0$ . Підставивши сюди згідно з (10.20) вираз  $-\text{grad} \varphi_M$  замість  $\bar{H}$ , одержимо:

$$\text{div grad} \varphi_M = 0.$$

Таким чином, скалярний потенціал  $\varphi_M$  поля, про який може йти мова для ділянок, не зайнятих струмом, визначається рівнянням Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_M = 0. \quad (10.21)$$

Різницю скалярних магнітних потенціалів між точками  $I$  і  $2$  називають спадом магнітної напруги між цими точками:

$$U_{M12} = \varphi_{M1} - \varphi_{M2} = \int_1^2 \overline{H} d\overline{l}. \quad (10.22)$$

Спад магнітної напруги між точками  $I$  і  $2$  по деякому одному шляху  $I-3-2$  (рис. 10.5, а) рівний спаду магнітної напруги між цими ж точками по якомусь іншому шляху, наприклад по шляху  $I-4-2$  в тому випадку, коли ці шляхи утворюють замкнений контур, струм усередині якого рівний нулю, тобто:

$$\int_{152} \overline{H} d\overline{l} = \int_{132} \overline{H} d\overline{l}.$$

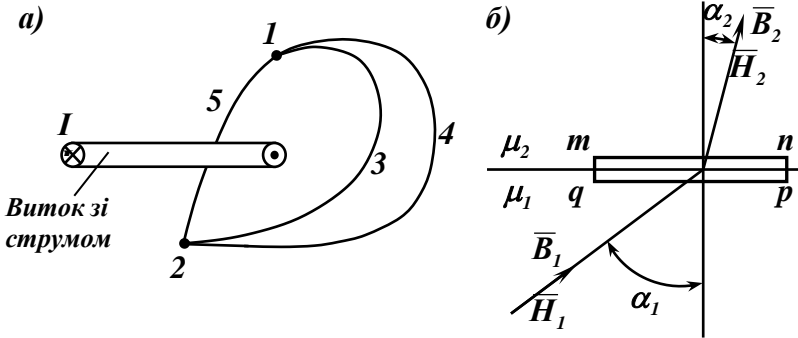


Рис. 10.5

Якщо ж замкнений контур, який утворений двома шляхами, охоплює деякий струм, то спад магнітної напруги по першому шляху не рівний спаду напруги по другому шляху:

$$\int_{152} \overline{H} d\overline{l} \neq \int_{132} \overline{H} d\overline{l}.$$

Згідно з законом повного струму вони будуть відрізнятися на величину струму, охопленого цим контуром.

Слід зауважити, що поняття «спад магнітної напруги» і «магнітна напруга» не ідентичні. Перше поняття визначається лише лінійним інтегралом  $\int_1^2 \overline{H} d\overline{l}$  уздовж вибраного шляху, а друге – не тільки цим інтегралом, але й магніторушійною силою  $wI$ , що є на шляху. Тут існує повна аналогія з поняттям «спад напруги» і «напруга» в електричному колі.

### 10.7. Граничні умови

На межі розділу двох однорідних середовищ (рис.10.5, б), які різні в магнітному відношенні ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ), рівні тангенціальні складові векторів напруженостей  $\overline{H}_1$  і  $\overline{H}_2$  та нормальні складові векторів магнітних індукцій  $\overline{B}_1$  і  $\overline{B}_2$ :

$$H_{1t} = H_{2t}; \quad (10.23)$$

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (10.24)$$

З цих рівностей і з рис. 10.5, б випливає співвідношення:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_{1a}}{\mu_{2a}}, \quad (10.25)$$

яке дає зв'язок між кутом падіння  $\alpha_1$  і кутом заломлення  $\alpha_2$  (рис. 10.5, б).

Якщо магнітні силові лінії виходять із середовища з великою магнітною проникністю, наприклад  $\mu_{1a} = 10^4 \mu_0$ , в середовище з малою магнітною проникністю, наприклад в повітря ( $\mu_{2a} = \mu_0$ ), то:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{10^4 \mu_0}{\mu_0} = 10^4 \quad \text{і} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = 10^{-4} \operatorname{tg} \alpha_1,$$

звідки  $\alpha_2 \ll \alpha_1$ , тобто, кут заломлення  $\alpha_2$  набагато менший від кут падіння  $\alpha_1$ .

## 10.8. Векторний потенціал магнітного поля

При розрахунку магнітних полів широко використовують векторний потенціал, або вектор-потенціал магнітного поля  $\vec{A}$ . Це векторна величина, що плавно змінюється від точки до точки, і ротор якої дорівнює магнітній індукції поля:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}. \quad (10.26)$$

Підставою для представлення індукції у вигляді ротора від вектор-потенціалу служить те, що дивергенція довільного ротора тотожно рівна нулю.

Оскільки в магнітному полі  $\text{div}\vec{B} = 0$ , то, підставивши сюди замість  $\vec{B}$  його вираз  $\text{rot}\vec{A}$ , одержимо:

$$\text{div}\text{rot}\vec{A} = 0.$$

*На відміну від скалярного магнітного потенціалу  $\varphi_M$ , який можна застосовувати тільки для ділянок, не зайнятих струмом, векторним потенціалом  $\vec{A}$  можна користуватись як на ділянках не зайнятих струмом, так і на зайнятих струмом ділянках.*

В електротехнічних розрахунках векторний потенціал  $\vec{A}$  застосовують при визначенні магнітної індукції  $\vec{B}$  у відповідності з виразом (10.26) і при визначенні магнітного потоку, що пронизує будь-який контур.

Векторний потенціал  $\vec{A}$  в довільній точці поля зв'язаний з густиною струму в цій же точці рівнянням Пуассона.

## 10.9. Рівняння Пуассона для векторного потенціалу

Помножимо обидві частини рівності  $\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta}$  на магнітну проникність середовища  $\mu_a$ :

$$\mu_a \text{rot}\vec{H} = \mu_a \vec{\delta}.$$

Оскільки ми маємо справу з полями, які можна поділити на окремі ділянки так, щоб в межах кожної

ділянки було  $\mu_a = \text{const}$ , тоді  $\mu_a$  можна внести під знак ротора:

$$\text{rot } \mu_a \bar{H} = \text{rot } \bar{B} = \mu_a \bar{\delta}. \quad (10.27)$$

Підставивши замість  $\bar{B}$  вираз  $\text{rot } \bar{A}$ , одержимо:

$$\text{rot } \text{rot } \bar{A} = \mu_a \bar{\delta}. \quad (10.28)$$

З курсу математики відомо, що

$$\text{rot } \text{rot } \bar{A} = -\nabla^2 \bar{A}.$$

Тоді рівність (10.28) запишеться:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_a \bar{\delta}. \quad (10.29)$$

Це і є рівняння Пуассона для вектор-потенціалу  $\bar{A}$ .

Одиниця вимірювання для  $\bar{A}$ :  $\left[ \frac{B \cdot c}{m} \right]$ .

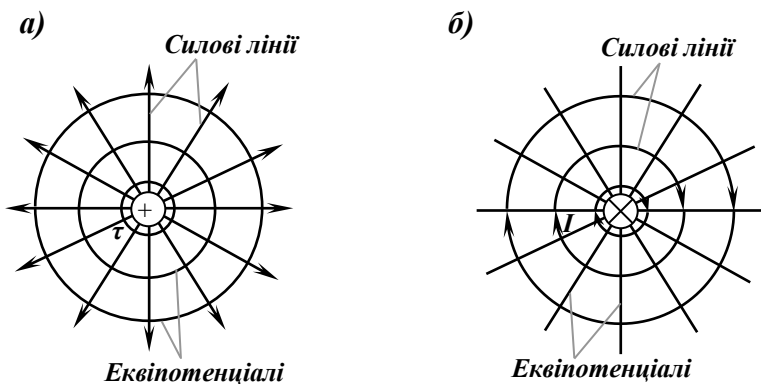
### 10.10. Взаємна відповідність електростатичного (електричного) і магнітного полів

Між картиною електростатичного поля і картиною магнітного поля постійного струму в областях, не зайнятих струмом, існує відповідність двох типів.

Перший тип відповідності полягає в однаковому розподілі лінійних зарядів в електростатичному полі і лінійних струмів у магнітному полі. В цьому випадку картина магнітного поля (сітка поля) (рис. 10.6, б) подібна до картини електростатичного поля (рис. 10.6, а).

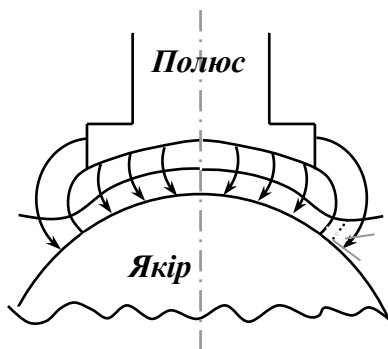
Різниця полягає тільки в тому, що силовим лініям електростатичного поля відповідають еквіпотенціальні лінії магнітного поля, а еквіпотенціалам електростатичного поля – силові лінії поля магнітного.

На рис. 10.6, а зображено картину електричного поля одинокого лінійного заряду  $+q$ , а на рис. 10.6, б – картину магнітного поля одинокого провідника зі струмом (для області зовні провідника).



**Рис. 10.6**

Другий тип відповідності – коли однакова форма крайових еквіпотенціальних поверхонь в електростатичному полі і в магнітному полі постійного струму. Так, наприклад, на рис. 10.7 зображено картину магнітного поля у повітряному проміжку між полюсом і якорем машини постійного струму.



**Рис. 10.7**

Якщо припустити, що полюс і якір цієї машини використовуються як електроди деякого конденсатора, то картина електричного поля у повітряному проміжку між електродами відповідала б картині магнітного поля: в обох випадках силові лінії виходили б з полюса і входили б у якір



перпендикулярно до поверхонь полюса і якоря, тобто картини полів виявилися б абсолютно однаковими.

### 10.11. Магнітне екранування

Припустимо, що в рівномірному магнітному полі напруженістю  $H_0$  необхідно екранувати деяку частину простору, наприклад, циліндричну так, щоб напруженість поля в ній була в багато разів меншою, ніж напруженість зовнішнього поля.

Циліндричний екран II, внутрішній радіус якого  $R_1$  і зовнішній  $R_2$ , має відносну магнітну проникність  $\mu_2$  (рис. 10.8, а). В областях I і III відносна магнітна проникність рівна одиниці. Так як у всіх трьох областях немає струму, то магнітне поле в них описується рівнянням Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_M = 0.$$

Екран будемо вважати достатньо протяжним уздовж осі  $oz$ , яка перпендикулярна до площини рисунка.

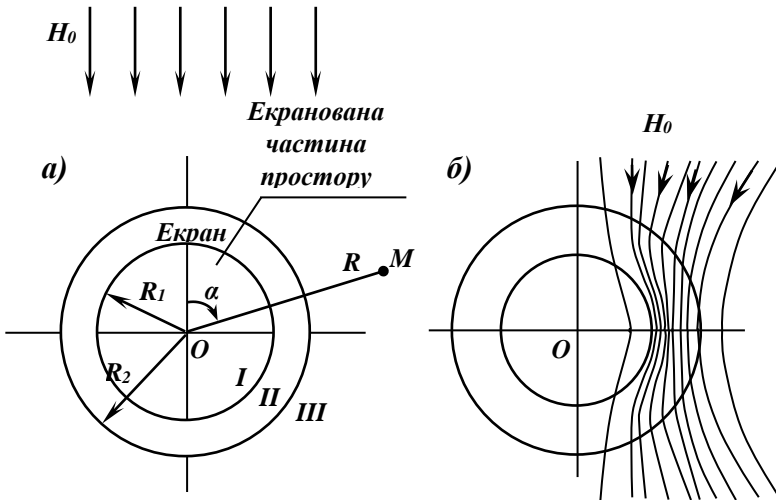


Рис. 10.8

Скалярний магнітний потенціал  $\varphi_M$  залежить тільки від координат  $R$  і  $\alpha$  циліндричної системи координат:

$$\nabla^2 \varphi_M = \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial \varphi_M}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_M}{R^2 \partial \alpha^2} = 0. \quad (10.30)$$

Після розв'язку цього рівняння з врахуванням залежності  $H = \partial \varphi_M / \partial x$  одержимо відношення напруженості поля всередині екрану до напруженості зовнішнього поля:

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4R_2^2}{\mu_2(R_2^2 - R_1^2)}. \quad (10.31)$$

Таким чином, можна зробити висновок, що чим більша магнітна проникність  $\mu_2$  матеріалу екрану і чим товстіша стінка екрану, тим сильніша його екрануюча дія.

## 10.12. Метод дзеркальних зображень

Цей метод застосовують для розрахунку магнітних полів, створених лінійними струмами, що протікають поблизу сталевих мас. Нехай у повітрі чи в якомусь іншому середовищі з магнітною проникністю  $\mu_1$  паралельно площині розділу середовищ пролягає провід зі струмом  $I_1$  (рис. 10.9, *a*). Суміжне середовище має магнітну проникність  $\mu_2$ . Визначимо напруженість поля в довільній точці обох середовищ. З цією метою введемо в розрахунок фіктивні (розрахункові) струми  $I_2$  й  $I_3$ . Провід зі струмом  $I_2$  розмістимо дзеркально відносно проводу зі струмом  $I_1$ , а провід зі струмом  $I_3$  розмістимо там, де знаходиться провід зі струмом  $I_1$ .

Двома поки-що невідомими струмами  $I_2$  й  $I_3$  розпорядимось таким чином, щоб задовольнити граничні умови на межі розділу двох середовищ:

$$H_{1t} = H_{2t}; \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

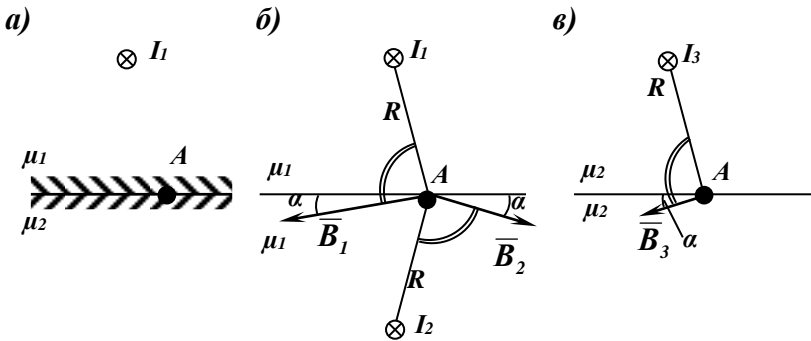


Рис. 10.9

Поле у верхньому півпросторі буде визначатись двома струмами: заданим струмом  $I_1$  і розрахунковим струмом  $I_2$ , причому, як верхній, так і нижній півпростори заповнює середовище з магнітною проникністю  $\mu_1$ .

Поле в будь-якій точці нижнього півпростору визначається струмом  $I_3$ , а верхній і нижній півпростори мають проникність  $\mu_2$  (рис. 10.9, в).

Складемо рівняння для визначення струмів  $I_2$  й  $I_3$ . Якщо взяти довільну точку  $A$  на межі розділу середовищ, то її можна вважати приналежною як до першого, так і до другого середовища. Якщо точка  $A$  належить першому середовищу, то тангенціальна складова напруженості поля в ньому буде відповідати лівій частині рівняння (10.32), а якщо другому середовищу, – то правій частині (10.32):

$$H_{1t} - H_{2t} = H_{3t}$$

або 
$$\left( \frac{I_1}{2\pi R} - \frac{I_2}{2\pi R} \right) \times \cos \alpha = \frac{I_3}{2\pi R} \times \cos \alpha. \quad (10.32)$$

Звідси одержуємо перший зв'язок між струмами:

$$I_1 - I_2 = I_3. \quad (10.32, a)$$

Щоб одержати другий зв'язок, складемо рівняння, яке виражає собою рівність нормальних складових магнітної індукції в довільній точці  $A$  на межі розділу середовищ:

$$B_{1n} + B_{2n} = B_{3n}$$

або 
$$\left( \frac{I_1}{2\pi R} + \frac{I_2}{2\pi R} \right) \mu_1 \sin \alpha = \frac{I_3}{2\pi R} \mu_2 \sin \alpha,$$

тобто 
$$I_1 + I_2 = I_3 \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (10.32, б)$$

Сумісний розв'язок рівнянь (10.32, а) й (10.32, б) дає:

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \times I_1; \quad I_3 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \times I_1. \quad (10.33)$$

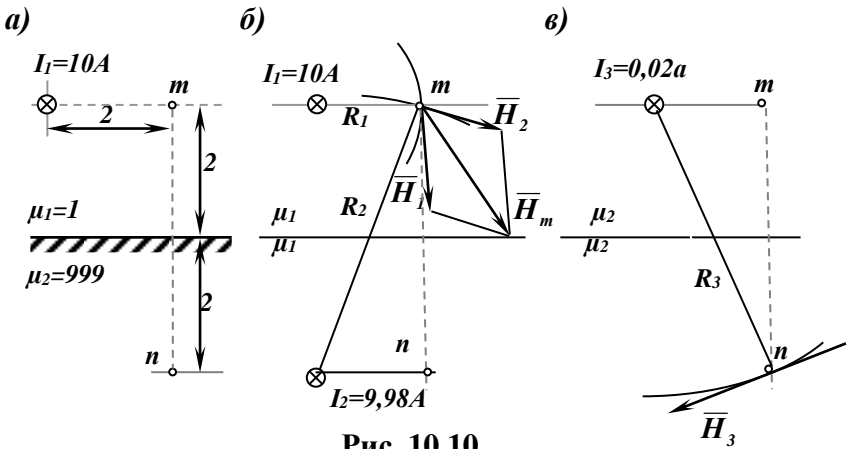


Рис. 10.10

Для прикладу визначимо напруженості магнітного поля, які створює постійний струм  $I_1 = 10 \text{ A}$  в точках  $m$  і  $n$  суміжних середовищ (рис. 10.10, а) з відносними магнітними проникностями:  $\mu_1 = 1$  і  $\mu_2 = 999$ ; точки  $m$  і  $n$  знаходяться на однаковій відстані  $l = 0,02 \text{ м}$  від осі проводу і від лінії розділу середовищ.

**Розв'язання.** Використовуючи формули (10.33), знаходимо:

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \times I_1 = \frac{999 - 1}{999 + 1} \times 10 = 9,98 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \times I_1 = \frac{2 \times 1}{999 + 1} \times 10 = 0,02 \text{ A}.$$

Для визначення напруженості поля в точці  $m$ , яка знаходиться в тому ж півпросторі, що й струм  $I_1$  (в тому ж середовищі) служить рис. 10.10, б.

Вектор напруженості  $\bar{H}_1$  – це дотична до магнітної силової лінії радіусом  $R_1$ , а вектор  $\bar{H}_2$  – дотична до магнітної силової лінії радіусом  $R_2$ . Величина вектора результуючої напруженості  $\bar{H}_m$  струмів  $I_1$  й  $I_2$ :

$$\bar{H}_m = \bar{H}_1 + \bar{H}_2.$$

На підставі закону повного струму:

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi R_1} = \frac{10}{2 \times 3,14 \times 0,02} = 79,5 \text{ A/м};$$

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi R_2} = \frac{9,98}{2 \times 3,14 \times 4,48 \times 10^{-2}} = 35,4 \text{ A/м};$$

де 
$$R_2 = \sqrt{0,04^2 + 0,02^2} = 4,48 \times 10^{-2} \text{ м}.$$

Графічним шляхом знаходимо  $H_m = 101 \text{ A/м}$ .

Напруженість магнітного поля в точці  $N$  (рис. 10.10, в):

$$H_3 = H_n = \frac{I_3}{2\pi R_3} = \frac{0,02}{2 \times 3,14 \times 4,48 \times 10^{-2}} = 0,0715 \text{ A/м}.$$

На рис. 10.11, а наведено якісну картину ліній магнітної індукції  $B$  для випадку, коли провід зі струмом проходить через повітря паралельно поверхні сталюї плити; на рис. 10.11, б – коли провід зі струмом проходить через вузький канал у сталюї плиті паралельно поверхні плити.

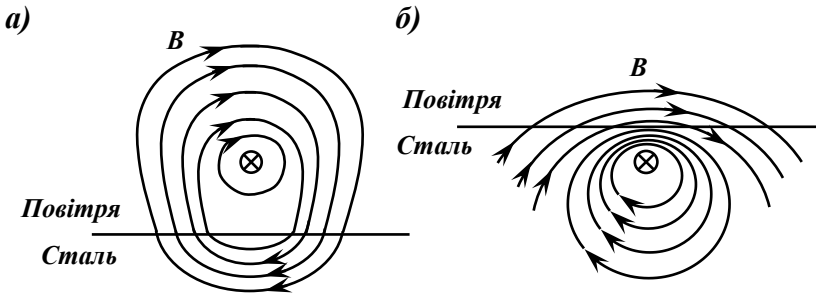


Рис. 10.11

### 10.13. Аналіз задач магнітного поля постійного струму

**Приклад 10.1.** Визначимо намагніченість  $\mathfrak{H}$ , абсолютну магнітну проникність  $\mu_a$  і густину енергії в кільці котушки, середній діаметр якої  $D_{cp} = 0,25 \text{ м}$  і поперечний переріз –  $S = 5 \times 10^{-4} \text{ м}^2$ , якщо по котушці з числом витків  $w = 314$  протікає постійний струм  $I = 2 \text{ А}$ , а магнітний потік в магнітопроводі (осерді) котушки  $\Phi = 1,5 \times 10^{-4} \text{ Вб}$ .

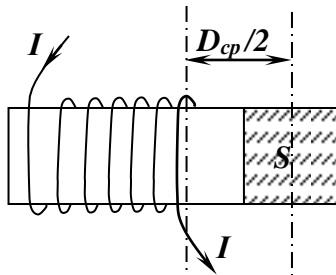


Рис. 10.12

**Розв'язання.** Так як напруженість магнітного поля  $H = const$ , то згідно з законом повного струму маємо:

$$\oint H dl = H \oint dl = H 2\pi R_{cp} = H \pi D_{cp} = wI .$$

Звідси величина напруженості:

$$H = \frac{wI}{\pi D_{cp}} = \frac{314 \times 2}{3,14 \times 0,25} = 800 \text{ A/м.}$$

Магнітна індукція в кільці котушки:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1,5 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-4}} = 0,3 \text{ Вб/м}^2 = 0,3 \text{ Тл.}$$

Намагніченість сталі магнітопроводу:

$$\mathfrak{J} = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{0,3}{4 \times 3,14 \times 10^{-7}} - 800 = 2,38 \times 10^5 \text{ A/м.}$$

Абсолютна і відносна магнітні проникності сталі магнітопроводу:

$$\mu_a = \frac{B}{H} = \frac{0,3}{800} = 3,75 \text{ Гн/м};$$

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0} = \frac{3,75 \times 10^{-4}}{4 \times 3,14 \times 10^{-7}} = 298,4 \cong 300.$$

Густина енергії в кільці магніто проводу:

$$W_0 = \frac{B \times H}{2} = \frac{0,3 \times 800}{2} = 120 \text{ Дж/м}^3.$$

**Приклад 10.2.** Через центр кільцевої котушки перпендикулярно до площини кільця проходить довгий прямий провід діаметром  $d = 0,011 \text{ м}$ , по якому протікає постійний струм  $I_1 = 100 \text{ А}$ . По обмотці котушки з числом витків  $w = 120$  протікає струм  $I_2 = 10 \text{ А}$ . Зовнішній діаметр кільця котушки  $D_1 = 0,14 \text{ м}$ , а внутрішній –  $D_2 = 0,1 \text{ м}$ .

Визначимо напруженість  $H$  магнітного поля в точках 1, 2, 3 і побудуємо графік зміни напруженості в площині, що проходить через вісь проводу.

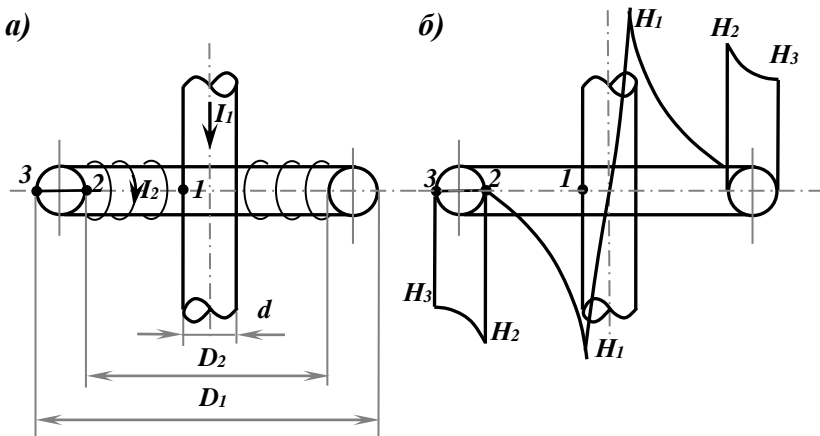


Рис. 10.13

**Розв'язання.** Згідно з законом повного струму напруженість магнітного поля:

$$H = \frac{wI}{2\pi R} = \frac{wI}{\pi D}$$

і відповідно в точках 1, 2, 3:

$$H_1 = \frac{1 \times I_1}{\pi d} = \frac{1 \times 100}{3,14 \times 0,011} = 2900 \text{ A/м};$$

$$H_2 = \frac{1 \times I_1}{\pi D_2} + \frac{w \times I_2}{\pi D_2} = \frac{1 \times 100 + 120 \times 10}{3,14 \times 0,1} = 4140 \text{ A/м};$$

$$H_3 = \frac{1 \times I_1}{\pi D_1} + \frac{w \times I_2}{\pi D_1} = \frac{1 \times 100 + 120 \times 10}{3,14 \times 0,14} = 2956 \text{ A/м}.$$

Між точками 1 і 2 напруженість буде змінюватись згідно з параболічним законом:

$$H(x) = \frac{I_1}{\pi x} + \frac{w_2 I_2}{\pi x},$$

де

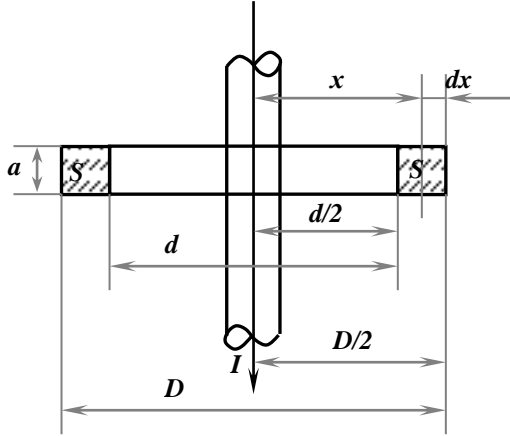
$$d \leq x \leq D.$$

Аналогічна зміна напруженості буде також між точками 2 і 3.



**Приклад 10.3.** Визначимо потокозчеплення між кільцевою котушкою з неферомагнітним осердям, яка має  $w$  витків, і прямолінійним проводом, розміщеним уздовж осі котушки (рис. 10.14). Прямолінійний провід розглядати як одну із сторін рамки великих розмірів.

**Розв'язання.** Нехай прямолінійним проводом протікає постійний струм  $I$ .



**Рис. 10.14**

Оскільки в даному випадку наявна симетрія в магнітному полі, то згідно з законом повного струму в інтегральній формі можна визначити напруженість  $H$  поля в довільній його точці:

$$H = \frac{I}{2\pi x}.$$

Магнітна індукція поля на відстані  $x$  від осі проводу:

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi x}.$$

Магнітний потік, що пронизує поперечний переріз котушки  $S = a \times dx$ :

$$\Phi = \int_{d/2}^{D/2} d\Phi = \int_{d/2}^{D/2} d(BS) = \int_{d/2}^{D/2} B a dx = \int_{d/2}^{D/2} \frac{\mu_0 a I}{2\pi x} dx =$$

$$= \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \int_{d/2}^{D/2} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln \frac{D}{d}.$$

Потокозчеплення з  $w$  витками котушки:

$$\Psi = w\Phi = \frac{\mu_0 w a I}{2\pi} \ln \frac{D}{d}.$$

**Приклад 10.4.** Визначимо різницю скалярних магнітних потенціалів (магнітну напругу) між точками  $A$  і  $B$ , магнітного поля лінійного струму  $I = 10 \text{ A}$ , який протікає від спостерігача перпендикулярно до площини рисунка (рис. 10.15).

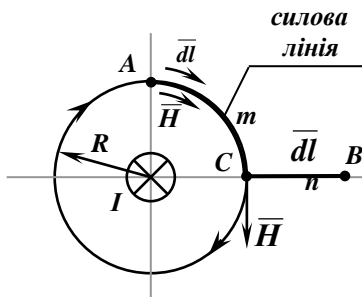


Рис. 10.15

**Розв'язання.** Магнітна напруга між точками  $A$  і  $B$  рівна сумі спадів магнітних напруг на ділянках  $AmC$  і  $CnB$ :

$$U_{AB}^M = \int_A^B \overline{H} d\overline{l} = m \int_A^C \overline{H} d\overline{l} + n \int_C^B \overline{H} d\overline{l}.$$

Кількісний зв'язок між циркуляцією вектора  $\overline{H}$  уздовж контуру зі струмом усередині цього контуру визначається законом повного струму в інтегральній формі:

$$\oint \overline{H} d\overline{l} = I.$$

У нашому випадку:  $\oint Hdl = H \int dl = H2\pi R = I$ , звідки напруженість магнітного поля:

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

Спад магнітної напруги на ділянці  $AmC$ :

$$m \int_A^C \overline{H} dl = m \int_A^C Hdl \cos 0^\circ = H \left( m \int_A^C dl \right) = \frac{I}{2\pi R_A} \times \frac{2\pi R_A}{4} = \frac{I}{4}.$$

Спад магнітної напруги на ділянці  $CnB$ :

$$n \int_C^B \overline{H} dl = n \int_C^B Hdl \cos 90^\circ = 0.$$

Таким чином,

$$U_{AB}^M = m \int_A^C \overline{H} dl = \frac{I}{4} = 2,5 A.$$

**Приклад 10.5.** Уздовж труби, внутрішній радіус якої  $R_1$  і зовнішній –  $R_2$  (рис. 10.16), протікає постійний струм  $I$ . Виведемо формули для визначення напруженості  $H$  магнітного поля: внутрішньої порожнини труби, тіла труби і зовнішнього середовища поза трубою.

**Розв'язання.** Напруженість магнітного поля в усіх вказаних областях знайдемо згідно з законом повного струму.

Якщо провести коло радіусом  $R < R_1$  з центром на осі труби, то воно не охопить струму. Тому, при  $R \leq R_1$  напруженість  $H_1 = 0$ , тобто, у внутрішній порожнині труби магнітне поле відсутнє.

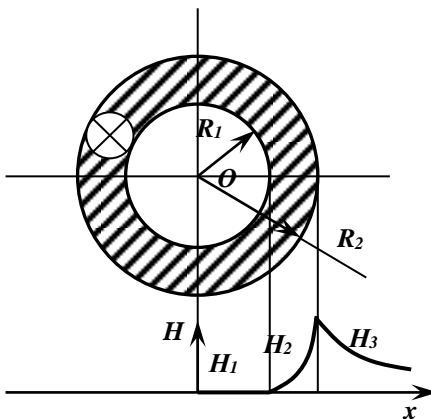


Рис. 10.16

Густина струму в тілі труби:

$$\delta = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Коло радіусом  $R_1 \leq R \leq R_2$  охоплює струм:

$$I = \delta \pi (R_2^2 - R_1^2),$$

тому в цьому інтервалі зміни  $R$  напруженість поля:

$$H_2 = \frac{I}{2\pi R} = \frac{\delta \pi (R_2^2 - R_1^2)}{2\pi R}.$$

Зовні труби при  $R \geq R_2$  напруженість поля спадає за гіперболічним законом:

$$H_3 = \frac{I}{2\pi R}.$$

**Приклад 10.6.** Визначимо магнітну індукцію, яку створить відрізок лінійного проводу зі струмом  $I$  в точці  $M$  (рис. 10.17), якщо  $h$  – відстань точки  $M$  від осі проводу.

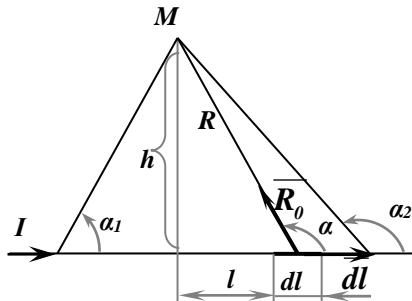


Рис. 10.17

**Розв'язання.** Згідно з законом Біо–Савара–Лапласа при відсутності феромагнітних середовищ відрізок  $\overline{dl}$  лінійного проводу, по якому тече струм  $I$  в напрямку  $\overline{dl}$ , створить магнітну індукцію в точці, яка віддалена на відстані  $R$  від лінійного проводу, величиною:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [\overline{dl} \times \vec{R}_0]}{4\pi R^2},$$

де  $\vec{R}_0$  – одиничний вектор, проведений від відрізка  $\overline{dl}$  до точки  $M$ , в якій визначається магнітна індукція.

Позначимо через  $\alpha$  кут між векторами  $\overline{dl}$  і  $\vec{R}_0$ . Тоді:

$$h = R \sin(180^\circ - \alpha) = R \sin \alpha,$$

звідки:

$$R = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

З іншого боку:

$$\frac{l}{h} = \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

звідки:

$$l = -h \operatorname{ctg} \alpha \quad dl = \frac{hd\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Скалярний добуток:

$$[\overline{dl} \times \vec{R}_0] = dl \times l \times \sin \alpha = \frac{hd\alpha}{\sin^2 \alpha} \sin \alpha = \frac{hd\alpha}{\sin \alpha}.$$

Магнітна індукція на відстані  $R$  від заструмленого проводу:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{[\overline{dl} \times \vec{R}_0]}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\sin^2 \alpha}{h^2} \times \frac{hd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \times \sin \alpha d\alpha.$$

Результуюча магнітна індукція в точці  $M$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \times (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

## 10.14. Магнітне поле проводів зі струмами

### 10.14.1. Магнітне поле одинокого проводу

Магнітне поле провідника зі струмом неоднорідне, так як величини і напрямки векторів магнітної індукції у різних точках поля не однакові (рис. 10.18).

Для довгого прямолінійного проводу, який знаходиться у вакуумі, магнітна індукція  $\vec{B}$  будь-якої його точки зовні проводу прямо пропорційна величині струму  $I$  в проводі та обернено пропорційна відстані  $R$  від точки до осі проводу:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}. \quad (10.34)$$

Напрямок магнітних силових ліній, по дотичних до яких направлені вектори  $\vec{B}$  (рис. 10.18), визначається правилом правоходового гвинта.

При визначенні магнітного поля в будь-якому середовищі (крім вакууму) необхідно враховувати посилення або послаблення поля цим середовищем. Тоді формула (10.34) матиме вигляд:

$$\vec{B} = \mu_a \frac{I}{2\pi R} = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi R}, \quad (10.35)$$

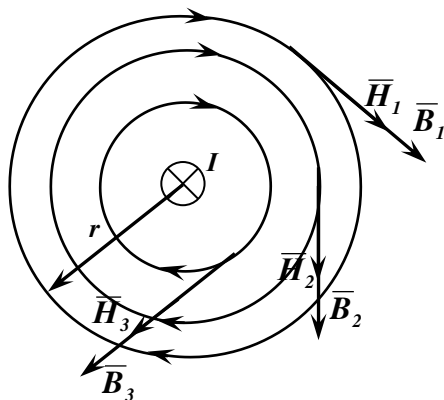


Рис. 10.18

де  $\mu_a$  – абсолютна магнітна проникність середовища, яка враховує вплив середовища на величину магнітної індукції;  $\mu = \mu_a / \mu_0$  – відносна магнітна проникність, яка показує у скільки разів абсолютна магнітна проникність середовища  $\mu_a$  більша або менша від магнітної постійної  $\mu_0$ .

У практичних розрахунках для всіх неферромагнітних середовищ можна приймати  $\mu_a = \mu_0$  і користуватись формулою (10.34).

Напруженість магнітного поля всередині проводу  $H = B / \mu_a$ . Напруженість магнітного поля зовні прямолінійного проводу визначається за формулою (10.35):

$$H = \frac{I}{2\pi R}. \quad (10.35)$$

Формули (10.34) і (10.35) строго справедливі тільки для нескінченно довгого проводу. У випадку кінцевої довжини ними можна користуватись тільки поблизу проводу, тобто на відстанях  $R$ , які малі порівняно з довжиною проводу  $l$ . Для багатьох практичних задач важливо знати поле якраз поблизу проводу, де воно найбільш інтенсивне.

**Приклад 10.7.** По прямолінійному провіднику  $AB$  діаметром  $d = 0,005$  м протікає струм  $I = 235$  А. Обчислимо магнітну індукцію, яку створює відрізок проводу довжиною  $l = 1$  м у точці  $M$ , яка віддалена на однакові відстані від кінців  $A$  і  $B$  проводу, а від середини його – на відстань  $R_M = 0,5$  м (рис. 10.19).

**Розв'язання.** Для визначення магнітної індукції у точці  $M$  поблизу відрізка  $AB$  проводу користуватись формулою (10.35) не можна, так як відстань  $R_M = 0,5$  м сумірна з довжиною відрізка  $l = 1$  м. В цьому випадку слід застосовувати формулу Біо–Савара, в який враховується форма провідника з струмом. Так, для прямолінійного

провідника довільної довжини  $l$  (рис. 10.19) магнітна індукція в точці  $M$  :

$$B_M = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_M} \times (\cos \beta_1 + \cos \beta_2). \quad (10.36)$$

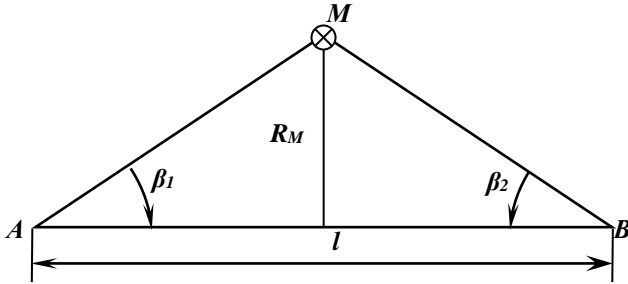


Рис. 10.19

При  $R_M \ll l$  можна вважати, що  $\beta_1 = \beta_2 = 0^\circ$ . Тоді  $\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = 1$  і формули (10.34) і (10.36) стають тотожними.

У нашому випадку:  $R_M = l/2 = 0,5 \text{ м}$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 45^\circ$  і  $\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = 0,707$ .

Підставивши ці значення у формулу (10.36), визначимо магнітну індукцію в точці  $M$  :

$$B_M = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 235}{4\pi \times 0,5} \times (0,707 + 0,707) = 6,63 \times 10^{-5} \text{ Тл}.$$

Напруженість магнітного поля в точці  $M$  :

$$H_M = \frac{B_M}{\mu_0} = \frac{6,65 \times 10^{-5}}{4\pi \times 10^{-7}} = 53 \text{ А/м}.$$

Побудуємо графік зміни напруженості поля і магнітної індукції всередині проводу і поза ним.

Для довгого прямолінійного відрізка проводу напруженість зовні проводу визначається за формулою (10.35):

$$H = \frac{I}{2\pi R} = \frac{235}{6,28} \times \frac{1}{R} = 37,5 \times \frac{1}{R}.$$



Обчислимо  $H$  для кількох значень  $R$  (табл. 10.1) і побудуємо графік залежності  $H = f(R)$  (рис. 10.20, а):

Таблиця 10.1

$R, \times 10^{-2} \text{ м}$	0,5	1	2,5	5,0	7,5	10
$H, \times 10^2 \text{ А/м}$	75	37,5	15	7,5	5,0	3,75

Ордината точки  $P$  на графіку визначає напруженість  $H$  поля на поверхні проводу (при  $R = 0,5 \text{ см}$ ). З'єднавши початок координат з точкою  $P$ , одержимо пряму лінію  $OP$  (рис. 10.20, а), яка виражає залежність  $H = f(R)$  усередині проводу, де напруженість поля пропорційна відстані точки від осі проводу.

Дійсно, провівши коло радіусом  $R_S$  усередині проводу (рис. 10.20, б), згідно з законом повного струму одержимо:

$$H 2\pi R_S = I_S, \quad (10.37)$$

де  $I_S$  – частина струму  $I$ , що проходить через переріз проводу всередині круга радіусом  $R_S$ .

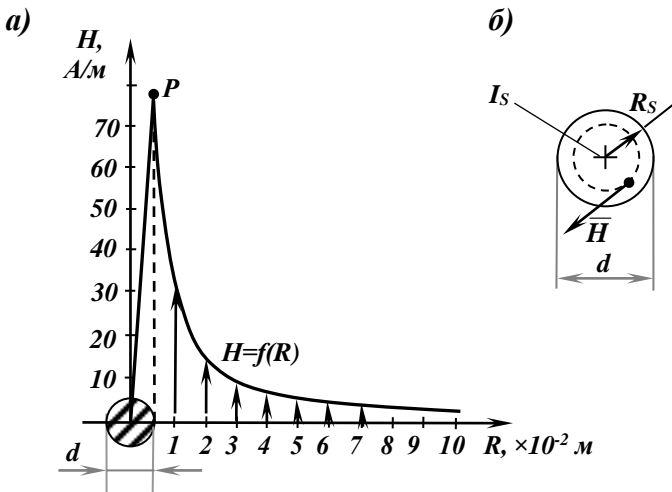


Рис. 10.20

Вираз (10.37) виражає рівність магнітної напруги по замкненому контуру радіусом  $R_S$  і величини струму, що охоплюється цим контуром (у даному випадку струму  $I_S$ ).

Запишемо вираз густини струму:

$$\delta = \frac{I_S}{S} = \frac{I_S}{\pi d^2/4} = \frac{I_S}{\pi R^2}, \quad (10.38)$$

де  $S$  – площа поперечного перерізу проводу. Тоді згідно з (10.37) і (10.38) можна записати:  $I_S = \delta \pi R^2$  і всередині проводу  $2H\pi R = \delta \pi R^2$ , звідки:

$$H = \frac{\delta \pi R^2}{2\pi R} = \frac{\delta}{2} R, \quad (10.39)$$

тобто напруженість поля усередині проводу збільшується пропорційно відстані точки від осі проводу.

Побудований графік  $H = f(R)$  (рис. 10.20, а) виражає також в певному співвідношенні й залежність  $B = f(R)$ , так як  $B = \mu_0 H$ .

## 10.14.2. Розрахунок магнітного поля двопровідної лінії

### 10.14.2.1. Постановка задачі

По двопровідній повітряній лінії з відстанню  $a$  між проводами проходить струм  $I_1 = I_2 = I$  (рис. 10.21).

Визначимо:

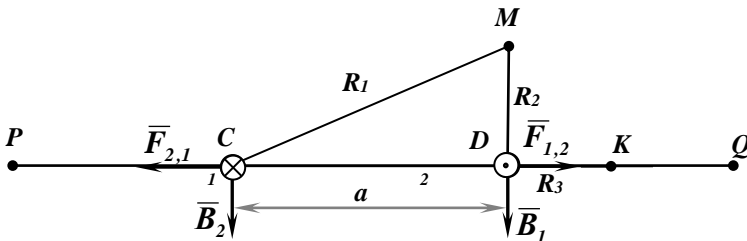


Рис. 10.21

- 1) напруженість магнітного поля в точках  $M$  і  $K$  ;
- 2) силу взаємодії проводів при короткому замиканні в мережі, якщо струм при цьому зростає в  $k$  разів ( $I_{к.з} = k \times I$ );
- 3) побудуємо графік зміни напруженості поля  $H(l)$  уздовж прямої  $CD$ , яка сполучає осі проводів;
- 4) визначимо електромагнітну силу  $F_M$ , яка діє на паралельний провід зі струмом  $I_M$ , що проходить через точку  $M$ .

**Розв'язання.** Розрахунок магнітного поля паралельних проводів проведемо за числовими даними, наведеними в табл. 10.2.

Таблиця 10.2

$I, A$	$a, м$	$R_2, Ом$	$R_3, Ом$	$k$	$I_M, A$
235	0,1	0,05	0,05	10	100

#### 10.14.2.2. Визначення напруженості поля паралельних проводів

Для обчислення напруженості магнітного поля в точці  $M$  застосуємо принцип накладання: напруженість магнітного поля в будь-якій точці поля рівна геометричній (векторній) сумі напруженостей від кожного струму зокрема.

Напруженість поля, яку створює струм проводу  $I$  в точці  $M$  :

$$\begin{aligned}
 H_{M1} &= \frac{I}{2\pi R_1} = \frac{I}{2\pi \sqrt{a^2 + R_2^2}} = \\
 &= \frac{235}{2 \times 3,14 \times \sqrt{0,1^2 + 0,05^2}} = 335 \text{ А/м.}
 \end{aligned}$$

Оскільки, струм проводу  $I$  направлений від нас, то вектор  $\vec{H}_{M1}$  являє собою дотичну до магнітної силової лінії

$L_1L_2$  (коло радіусом  $R_1$ ) в точці  $M$  і згідно з правилом правоходового гвинта він направлений за рухом годинникової стрілки (рис. 10.22, а).

Напруженість поля, яку створює струм проводу 2 в точці  $M$ :

$$H_{M2} = \frac{I}{2\pi R_2} = \frac{235}{2 \times 3,14 \times 0,05} = 748,4 \text{ А/м.}$$

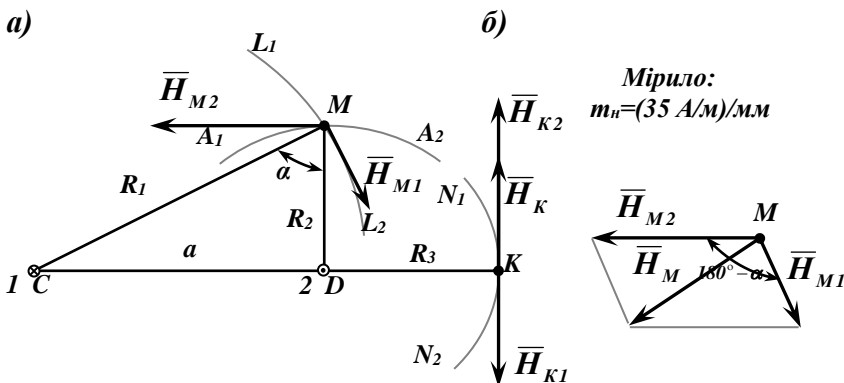


Рис. 10.22

Оскільки, струм проводу 2 спрямований до нас, то вектор  $\vec{H}_{M2}$  – дотична до магнітної силової лінії  $A_1A_2$  (коло радіусом  $R_2$ ) в точці  $M$  – згідно з правилом правоходового гвинта спрямований проти руху годинникової стрілки (рис. 10.22, а).

Величину і напрямок вектора  $\vec{H}_M$  напруженості результуючого магнітного поля двох паралельних проводів у точці  $M$  визначимо графічно (рис. 10.22, б) у відповідності з векторним рівнянням:

$$\vec{H}_M = \vec{H}_{M1} + \vec{H}_{M2}.$$

Вимірюємо довжину вектора  $\vec{H}_M$  ( $l_{H_M} = 20,5 \text{ мм}$ ) і, враховуючи мірило напруженості поля  $m_n = (35 \text{ А/м})/\text{мм}$ , знаходимо:

$$H_M = m_n \times l_{HM} = 35 \times 20,5 = 717,5 \text{ A/м.}$$

Застосуємо принципи накладання для визначення результуючої напруженості поля в точці  $K$  :

$$H_{K1} = \frac{I}{2\pi(a + R_3)} = \frac{235}{2 \times 3,14 \times (0,1 + 0,05)} = 249,5 \text{ A/м};$$

$$H_{K2} = \frac{I}{2\pi R_3} = \frac{235}{2 \times 3,14 \times 0,05} = 748,5 \text{ A/м.}$$

Оскільки точка  $K$  знаходиться на одній лінії з точками  $C$  і  $D$  паралельних проводів, то вектори напруженості магнітного поля  $\vec{H}_{K1}$  і  $\vec{H}_{K2}$  – дотичні до магнітної силової лінії  $N_1N_2$ , що проходить через точку  $K$ , причому, згідно з правилом правоходового гвинта вектор  $H_{K1}$  спрямований за рухом годинникової стрілки, а вектор  $H_{K2}$  – в протилежну сторону (рис. 10.22, а).

Результуюча напруженість  $H_K$  магнітного поля паралельних проводів у точці  $K$  :

$$H_K = H_{K2} - H_{K1} = 748,5 - 249,5 = 499 \text{ A/м}$$

і напрямком вектора  $\vec{H}_K$  буде співпадати з напрямком вектора  $\vec{H}_{K2}$ .

### 10.14.2.3. Визначення сили взаємодії проводів при короткому замиканні в мережі

Проводи зі струмами однакового напрямку притягуються один до одного, а проводи зі струмами протилежного напрямку – взаємно відштовхуються.

Магнітна індукція  $B_1$ , яка створюється струмом  $I_1$  в місці розташування проводу 2 визначається згідно з формулою (10.34):

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r}$$

Електромагнітна сила, з якою магнітна індукція  $B_1$  діє на ділянку довжиною  $l = 1 \text{ м}$  проводу 2 зі струмом  $I_2$ :

$$F_{12} = B_1 I_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi a}.$$

Магнітна індукція  $B_2$ , створювана струмом  $I_2$  в місці розташування проводу 1:

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi a}$$

діє на ділянку довжиною  $l = 1 \text{ м}$  проводу 1 зі струмом  $I_1$  з силою:

$$F_{21} = B_2 I_1 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi a}.$$

Оскільки,  $I_1 = I_2 = I$ , то

$$F_{12} = F_{21} = F = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi a}.$$

При короткому замиканні в мережі проводи довжиною  $l = 1 \text{ м}$  взаємодіють (відштовхуються один від одного) з силою:

$$F = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{I_{к.з}^2}{2\pi a} = 2 \times 10^{-7} \times \frac{(10 \times 235)^2}{0,1} = 11 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \approx 1,1 \frac{\text{кГ}}{\text{м}}.$$

Наприклад, якщо між ізоляторами опор лінії електропостачання відстань рівна  $50 \text{ м}$ , то між проводами лінії виникне сила:

$$F \times l = 1,1 \times 50 = 55 \text{ кГ}.$$

#### 10.14.2.4. Побудова графічної картини напруженості поля паралельних проводів

Для побудови кривої зміни напруженості  $H$  магнітного поля уздовж прямої  $CD$ , яка сполучає осі проводів зі струмами, застосовуємо знову метод накладання.

Струм  $I_1$  проводу  $I$  створює в будь-якій точці прямої  $CD$  напруженість поля, вектор якої направлений перпендикулярно лінії  $CD$  (наприклад,  $H_1 = \frac{B_1}{\mu_0}$  в точці  $D$ , рис. 10.21).

Величина напруженості зменшується в міру віддалення від точки  $C$  у відповідності з формулою (10.35, а):

$$H = \frac{I}{2\pi R} = 37,5 \frac{I}{R}.$$

Використовуючи дані табл. 10.1 і враховуючи що струм в обох проводах однаковий, будемо графік залежності  $H = f(R)$  (рис. 10.23, а), який є дзеркальним відображенням графіка  $H = f(R)$  (рис. 10.20).

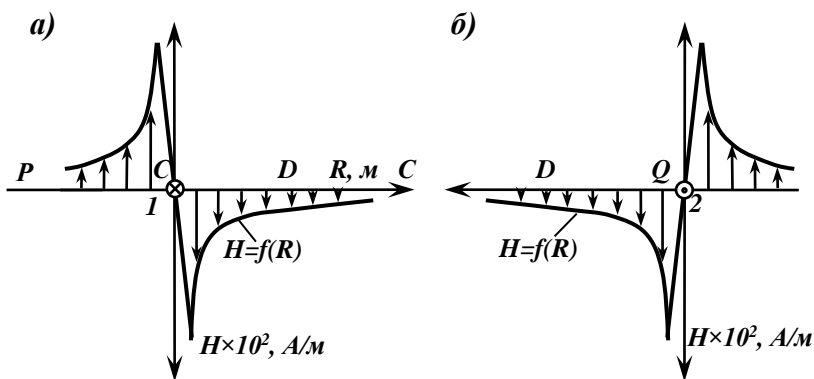


Рис. 10.23

Струм проводу  $2$  створює аналогічну картину розподілу векторів напруженості магнітного поля (рис. 10.23, б).

Для більш повного уявлення про картину поля на рис. 10.23 наведено розподіл величини напруженості  $H$  уздовж ділянки  $CP$  і  $DQ$ , які знаходяться за межами розглядуваної прямої  $CD$  на її продовженні.

Щоб одержати криву зміни результуючої напруженості магнітного поля двох паралельних проводів

(рис. 10.24), додамо відповідні ординати графіків напруженостей кожного проводу, тобто накладемо один на одного графіки  $H = f(P)$  рис. 10.23, а і рис. 10.23, б.

Криву результуючої напруженості поля для ділянок  $PC$  і  $DQ$  (рис. 10.24), де вектори  $\vec{H}_1$  і  $\vec{H}_2$  напруженостей, збуджених струмами  $I_1$  й  $I_2$  проводів 1 і 2, мають протилежні напрямки, одержимо як різницю ординат графіків рис. 10.23, а і рис. 10.23, б.

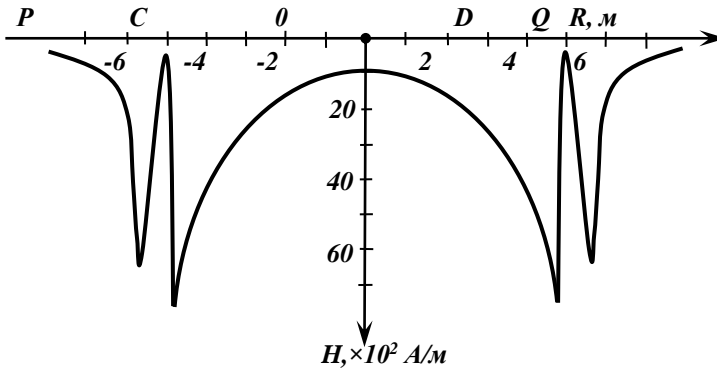


Рис. 10.24

#### 10.14.2.5. Визначення сили взаємодії трьох проводів зі струмами

На  $1\text{ м}$  третього проводу зі струмом  $I_M = 100\text{ А}$ , що проходить через точку  $M$  паралельно до проводів 1 і 2, діє сила  $\vec{F}_M$  магнітного поля цих двох проводів.

Для визначення напрямку дії сили  $\vec{F}_M$  перенесемо вектор  $\vec{H}_M$  з рис. 10.22, б на рис. 10.25, а. Вектор магнітної індукції  $\vec{B}_M$  співпадає за напрямком з вектором  $\vec{H}_M$ . Тоді вектор сили  $\vec{F}_M$  згідно з правилом лівої руки буде відставати від вектора  $\vec{B}_M$  на кут  $90^\circ$  (рис. 10.25, а).



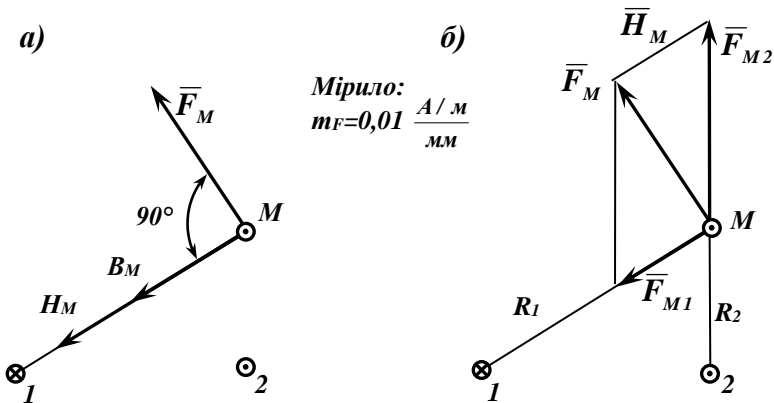


Рис. 10.25

Силу взаємодії третього проводу з проводами 1 і 2 можна знайти іншим способом, а саме: від проводу 2 він відштовхується з силою:

$$\begin{aligned}
 F_{M2} &= 2\pi \times 10^{-7} \times \frac{I_M \times I}{R_2} = \\
 &= 2 \times 3,14 \times 10^{-7} \times \frac{100 \times 235}{0,05} = 0,29 \frac{\text{Н}}{\text{м}},
 \end{aligned}$$

а до проводу 1 притягується з силою:

$$\begin{aligned}
 F_{M1} &= 2\pi \times 10^{-7} \times \frac{I_M \times I}{R_1} = \\
 &= 2 \times 3,14 \times 10^{-7} \times \frac{100 \times 235}{0,112} = 0,13 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.
 \end{aligned}$$

Вектор результуючої сили  $\vec{F}_M$  рівний геометричній сумі векторів сил  $\vec{F}_{M1}$  і  $\vec{F}_{M2}$  (рис. 10.25, б). Взявши мірило  $m_F = (0,01 \text{ Н / м}) / \text{мм}$  при довжині вектора  $l_{FM} = 25 \text{ мм}$ , одержимо:

$$F_M = 0,01 \times 25 = 0,25 \text{ Н / м}.$$

## РОЗДІЛ 11. ЗМІННЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ

### 11.1. Основні поняття та визначення

У попередніх розділах були описані часткові виявлення електромагнітного поля: електричні поля системи нерухомих заряджених тіл та електричні і магнітні поля нерухомих середовищ з постійними струмами.

У загальному випадку для змінних в часі зарядів і струмів, рухомих заряджених або намагнічених тіл або рухомих контурів зі струмами в навколишньому просторі існує змінне електромагнітне поле, тобто, сукупність взаємозв'язаних електричного та магнітного полів, які змінюються в часі.

Змінне електромагнітне поле являється одним з видів матерії, так як воно володіє масою, енергією, кількістю руху і може перетворюватись в інші види матерії. В подальшому будемо розглядати змінне електромагнітне поле в нерухомих однорідних й ізотропних середовищах.

При дослідженнях процесів у змінному електромагнітному полі використовують чотири рівняння Максвелла:

$$1) \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad - \text{ виражає зв'язок між ротором}$$

напруженості магнітного поля в деякій його точці і густиною струму в цій же точці поля;

2)  $\operatorname{div} \bar{B} = 0$  – виражає принцип неперервності магнітного потоку (принцип замкнутості);

$$3) \operatorname{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad - \text{ виражає зв'язок між ротором}$$

напруженості електричного поля в деякій його точці і швидкістю зміни магнітного поля в цій же точці поля;

$$4) \operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho_{\text{вільн}}}{\epsilon_a} \quad - \text{ виражає зв'язок між вихором}$$

напруженості електричного поля в деякій точці і густиною зарядів в цій же точці поля.

## 11.2. Перше рівняння Максвелла

Перше рівняння Максвелла записують у вигляді:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad (11.1)$$

В правій частині цього рівняння записано дві густини струму: густина струму провідності  $\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$  і густина струму електричного зміщення  $\epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ .

Зміщення виникає у всякому діелектрику і навіть у вакуумі, якщо напруженість  $E$  електричного поля змінюється в часі. Струм зміщення, як і струм провідності, також породжує магнітне поле. Таким чином, хоч природа струмів зміщення і струмів провідності не одна й та ж, вони проявляють спільну властивість – викликати магнітне поле.

*Фізичний зміст першого рівняння Максвелла: будь-яка зміна в часі напруженості електричного поля  $\partial \bar{E} / \partial t$  в деякій точці поля (тобто, виникнення в цій точці струму зміщення) в однаковій мірі, як і струм провідності, викликає в цій точці поля вихор магнітного поля ( $\operatorname{rot} \bar{H}$ ), тобто, викликає вихрове магнітне поле.*

Таким чином, якщо в діелектрику змінюється електричне поле, то в ньому виникає струм зміщення. Наприклад, якщо взяти пластинчатий повітряний конденсатор і під'єднати його через опір  $R$  до джерела енергії напругою  $U$ , то в міру зарядки конденсатора напруга на його обкладинках буде зростати за експоненціальним законом:

$$u_c = U(1 - e^{-t/RC}),$$

при струмі зарядки (струмі провідності):

$$i_{Cnp} = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{R} e^{-t/RC}. \quad (11.2)$$

Напруженість електричного поля в конденсаторі:

$$E = \frac{u_c}{d} = \frac{U}{d} (1 - e^{-t/RC}).$$

Ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_a S}{d},$$

де  $S$  – площа обкладинки конденсатора;

$d$  – відстань між його обкладинками.

Тоді струм зміщення, що протікає через одиницю перерізу діелектрика, перпендикулярного до електричних силових ліній:

$$\frac{i_{\text{зміщ}}}{S} = \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_C}{dt} \right) = \frac{\varepsilon_a}{RC} \times \frac{U}{d} e^{-t/RC} = \frac{U}{RS} e^{-t/RC}.$$

Струм зміщення через поверхню площею  $S$  :

$$i_{C_{\text{зміщ}}} = \frac{U}{R} e^{-t/RC},$$

тобто він рівний струму провідності  $i_{C_{\text{пр}}}$  (11.2), що протікає по провідниках, які з'єднують конденсатор з джерелом ЕРС.

Таким чином, перше рівняння Максвелла являє собою закон повного струму в диференціальній формі.

### 11.3. Рівняння неперервності

Лінії повного струму  $\left( \bar{\delta} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right)$  являються

неперервними. Фізично це означає, що на межі провідного тіла і діелектрика струм провідності переходить в струм зміщення.

Для математичного визначення принципу неперервності (замкнутості) ліній повного струму візьмемо від обох частин рівняння (11.1) дивергенцію:

$$\text{div rot } \bar{H} = \text{div} \left( \bar{\delta} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right).$$

Оскільки  $\text{div rot } \bar{H} = 0$ ,

$$\text{то й:} \quad \text{div} \left( \bar{\delta} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (11.3)$$

і, врахувавши, що  $\bar{D} = \epsilon_a \bar{E}$ , з (11.3) одержимо:

$$\operatorname{div} \bar{\delta} = -\operatorname{div} \left( \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} (\epsilon_a \bar{E})) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{D}.$$

Згідно з теоремою Гаусса:

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho_{\text{вільн}}.$$

Тоді:

$$\operatorname{div} \bar{\delta} = -\frac{\partial \rho_{\text{вільн}}}{\partial t}. \quad (11.4)$$

*Рівняння (11.4) називають рівняння неперервності або законом збереження заряду: електричний заряд не знищується; він тільки може переміщуватись з одного місця в інше.*

#### 11.4. Друге рівняння Максвелла

Друге рівняння Максвелла записують наступним виразом:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \quad (11.5)$$

Фізичний зміст рівності (11.5) полягає в тому, що всяке зміна в часі магнітного поля ( $\partial \bar{B} / \partial t$ ) в будь-якій точці поля породжує в ній вихор (ротор) електричного поля, тобто викликає вихрове електричне поле.

*Друге рівняння Максвелла виражає собою диференціальну форму запису закону електромагнітної індукції.*

Як у перше, так і в друге рівняння Максвелла входять частинні похідні по часу  $t$ . Пояснюється це тим, що рівняння Максвелла записують для таких тіл і контурів, які є нерухомими відносно вибраної системи координат.

Слід зауважити, що в змінному електромагнітному полі, крім силових ліній електричного поля, які «починаються» і «закінчуються» на електричних зарядах (наприклад, в електростатичному полі), можуть бути і

замкнені самі на себе силові лінії електричного поля, які охоплюють замкнуті на себе силові лінії магнітного поля.

### 11.5. Рівняння Максвелла в комплексній формі

Рівняння Максвелла (11.1) і (11.5), наведені вище, записані для миттєвих значень:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \quad (11.1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{\partial (\mu_a \bar{H})}{\partial t}. \quad (11.5)$$

Якщо напруженості  $E$  і  $H$  змінюються в часі за синусоїдним законом, то використавши комплексний метод, ці рівняння можна записати в іншій формі.

Нехай:

$$\begin{aligned} H &= H_m \sin(\omega t + \psi_H); \\ E &= E_m \sin(\omega t + \psi_E). \end{aligned}$$

Використавши знак відповідності « $\doteq$ », можна записати комплексні зображення цих функцій:

$$\begin{aligned} H &\doteq H_m e^{j\omega t} \times e^{j\psi_H}; \\ E &\doteq E_m e^{j\omega t} \times e^{j\psi_E}. \end{aligned}$$

Комплексні амплітуди напруженостей:

$$\begin{aligned} \underline{H}_m &= H_m e^{j\psi_H}; \\ \underline{E}_m &= E_m e^{j\psi_E}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} H &\doteq \underline{H}_m e^{j\omega t}; \\ E &\doteq \underline{E}_m e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

Оскільки напруженості  $E$  і  $H$ , крім того, що вони змінюються за синусоїдним закон, являються функціями векторними, тобто, певним чином орієнтованими в просторі векторами, то над ними будемо ставити і риску і крапку:

$$\underline{\underline{E}}_m; \underline{\underline{H}}_m.$$

Тоді вираз  $\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$  можна замінити на вираз:

$$\bar{\delta} \doteq \gamma \bar{E} e^{j\alpha t}$$

і, врахувавши, що:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{E}_m e^{j\alpha t} = j\omega \bar{E}_m e^{j\alpha t},$$

записати:

$$\varepsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \doteq \varepsilon_a j\omega \bar{E}_m e^{j\alpha t}$$

і замінити  $\text{rot} \bar{H}$  на

$$\text{rot}(\bar{H} e^{j\alpha t}) = e^{j\alpha t} \times \text{rot} \bar{H}.$$

Тут множник  $e^{j\alpha t}$  – величина стала ( $e^{j\alpha t} = \text{const}$ ), яка не залежить від координат. Отже, її можна винести за знак ротора.

Тоді рівняння (11.1) запишеться:

$$e^{j\alpha t} \times \text{rot} \bar{H} = (\gamma \bar{E} + j\omega \varepsilon_a \bar{E}) \times e^{j\alpha t}.$$

Скоротивши на  $e^{j\alpha t}$ , одержимо вираз першого рівняння Максвелла в комплексній формі:

$$\text{rot} \bar{H} = \gamma \bar{E} + j\omega \varepsilon_a \bar{E}. \quad (11.6)$$

Друге рівняння Максвелла в комплексній формі запишеться аналогічно:

$$\text{rot} \bar{E} = -j\omega \mu_a \bar{H}. \quad (11.7)$$

## 11.6. Теорема Умова-Пойнтинга для миттєвих значень

Крім рівнянь Максвелла в теорії електромагнітного поля особливе місце займає теорема Умова-Пойнтинга, яка описує енергетичні співвідношення в електромагнітному полі.

Вказана теорема має дві форми запису: а) для миттєвих значень будь-яких змінних величин; б) комплексна форма – для синусоїдних величин.

Оскільки, енергія електричного поля в одиниці об'єму  
 рівна  $\varepsilon_a E^2 / 2$ , а енергія магнітного поля в одиниці об'єму  
 –  $\mu_a H^2 / 2$ , то енергія в об'ємі  $dv$  запишеться виразом:

$$\left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv .$$

Для того, щоб утворити вираз, в який увійшла б повна  
 енергія в об'ємі  $dv$ , помножимо рівність (11.1) на  $\bar{E}dv$ , а  
 рівність (11.5) – на  $\bar{H}dv$ :

$$\bar{E}rot\bar{H}dv = \left( \gamma\bar{E}\bar{E} + \varepsilon_a \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) dv = \left( \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right) \right) dv . \quad (11.8)$$

$$\bar{H}rot\bar{E}dv = \left( -\mu_a \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) dv = \left( -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv . \quad (11.9)$$

Віднімемо від рівності (11.8) рівність (11.9):

$$(\bar{E}rot\bar{H} - \bar{H}rot\bar{E})dv = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dv . \quad (11.10)$$

Використавши формулу:

$$div[\bar{E} \times \bar{H}] = \bar{H}rot\bar{E} - \bar{E}rot\bar{H} ,$$

ліву частину (11.10) запишемо:  $-div[\bar{E} \times \bar{H}]dv$ .

Отже,

$$-div[\bar{E} \times \bar{H}]dv = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dv . \quad (11.10,a)$$

Для спрощення запису позначимо векторний добуток  
 $[\bar{E} \times \bar{H}]$  через  $\bar{S}$ , тобто приймемо:  $\bar{S} = [\bar{E} \times \bar{H}]$ .

Вектор  $\bar{S}$  називають вектором Пойнтинга. Його  
 розмірність рівна добутку розмінностей  $E$  і  $H$ :

$$[S] = [E] \times [H] = \frac{B}{m} \times \frac{A}{m} = \frac{BA}{m^2} .$$



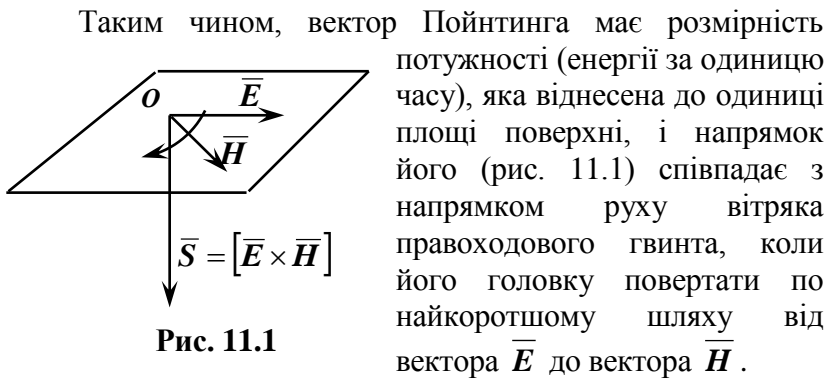


Рис. 11.1

Отже,

$$-\operatorname{div} \bar{S} dv = \left\{ \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) \right\} dv. \quad (11.11)$$

Поширимо вираз (11.11) на деякий об'єм  $v$  кінечних розмірів. Для цього проінтегруємо (11.11) по об'єму  $v$ :

$$-\int_v \operatorname{div} \bar{S} dv = \int_v \gamma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left[ \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right] dv. \quad (11.11, a)$$

Використавши теорему Остроградського-Гауса, перетворимо об'ємний інтеграл у поверхневий:

$$\int_v \operatorname{div} \bar{S} dv = \oint \bar{S} ds.$$

Тоді теорема Умова-Пойнтинга для миттєвих значень прийме вигляд:

$$-\oint \bar{S} ds = \int_v \gamma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left[ \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right] dv. \quad (11.12)$$

Ліва частина рівності (11.12) виражає собою потік вектора Пойнтинга крізь будь-яку замкнену поверхню  $S$ , що обмежує деякий об'єм  $v$ , всередину цього об'єму.

За рахунок знаку «-» у лівій частині виразу (11.12), ліва частина – величина додатна. Доведемо це. Елемент поверхні  $ds$  у будь-якій точці поверхні направлений в сторону зовнішньої відносно даного об'єму  $v$  нормалі.

Вектор Пойнтинга  $\vec{S}$  направлений усередину цього об'єму. Оскільки, кут між векторами  $\vec{S}$  і  $d\vec{s}$  більший від прямого, то скалярний добуток  $\vec{S} \cdot d\vec{s} < 0$ , а  $(-\vec{S}) \cdot d\vec{s} > 0$ , що й треба було довести.

Згідно з рівнянням Джоуля-Ленца в диференціальній формі запису  $\gamma E^2$  виражає енергію, що виділяється у вигляді тепла в одиниці об'єму за одиницю часу. Тоді  $\int_V \gamma E^2 dv$  – енергія, що виділяється у вигляді тепла в об'ємі  $V$ .

$$V \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) - \text{швидкість зміни запасу}$$

електромагнітної енергії в одиниці об'єму. Але швидкість зміни електромагнітної енергії – це потужність.

Таким чином, потік вектора Пойнтинга крізь будь-яку замкнену поверхню, що обмежує деякий об'єм  $V$ , рівний сумі потужностей: потужності, яка виділяється в об'ємі  $V$  у вигляді тепла і потужності, яка витрачається на приріст енергії електромагнітного поля.

Теорему Умова-Пойнтинга слід трактувати як рівняння енергетичного балансу: ліва частина рівності (11.12) – це потужність (енергія за одиницю часу), яка достачається у вигляді потоку вектора Пойнтинга усередину деякого об'єму  $V$ , а права частина – енергія, яка витрачається за одиницю часу всередині цього об'єму.

Співвідношення (11.12) було отримано при допущенні, що всередині об'єму  $V$ : а) середовище однорідне й ізотропне; б) відсутня відбита хвиля енергії; в) відсутні джерела електрорушійної сили.

Якщо електромагнітне поле не змінюється в часі, то:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) = 0$$

і тоді згідно з (11.12):

$$-\oint \vec{S} d\vec{s} = \int_V \gamma E^2 dv. \quad (11.12, a)$$

## 11.7. Теорема Умова-Пойнтинга в комплексній формі запису

Повна потужність у колі синусоїдного струму виражається формулою:

$$\tilde{S} = \mathcal{U} \mathcal{I}^* = P + jQ. \quad (11.13)$$

Реактивна потужність послідовного *RLC* - кола:

$$\begin{aligned} Q &= I^2 X = I^2 (X_L - X_C) = I^2 \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \\ &= \frac{2}{2} \omega \left[ I^2 L - I^2 \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2 C \right] = 2\omega (W_M - W_e), \end{aligned} \quad (11.14)$$

де 
$$W_M = \frac{LI^2}{2}; \quad W_e = \frac{CU_C^2}{2}; \quad U_C = I \left( \frac{1}{\omega C} \right).$$

Таким чином, реактивна потужність  $Q$  рівна різниці між магнітною  $W_M$  і електричною  $W_e$  енергіями кола, помноженій на подвоєну частоту  $2\omega$ .

Подібно до того, як в колі синусоїдного струму для обчислення комплексної потужності  $\tilde{S}$  необхідно помножити комплексну напругу  $\mathcal{U}$  на спряжений комплексний струм  $\mathcal{I}^*$ , в теорії поля застосовують поняття комплексного вектора Пойнтинга:

$$\tilde{S} = \left[ \dot{\vec{E}} \times \vec{H}^* \right]. \quad (11.15)$$

Тоді замість виразу  $(-\oint \bar{S} ds)$  рівності (11.12) можна записати:

$$-\oint \bar{S} ds = -\int_{\nu} \text{div} \bar{S} dv = \int_{\nu} \left( \dot{\vec{E}} \text{rot} \vec{H}^* - \vec{H}^* \text{rot} \dot{\vec{E}} \right) dv. \quad (11.16)$$

Використавши вирази першого та другого рівняння Максвелла в комплексній формі запису:

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}} = \gamma \dot{\bar{E}} - j\omega \varepsilon_a \dot{\bar{E}}; \quad (11.6)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{E}} = -j\omega \mu_a \dot{\bar{H}}, \quad (11.7)$$

запишемо вираз ротора спряженого значення напруженості  $\bar{H}$  у вигляді:

$$\operatorname{rot} \dot{\bar{H}}^* = \gamma \dot{\bar{E}}^* - j\omega \varepsilon_a \dot{\bar{E}}^*.$$

Підставимо вираз  $\dot{\bar{E}} \operatorname{rot} \dot{\bar{H}}^*$  у праву частину рівності (11.16):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}} \operatorname{rot} \dot{\bar{H}}^* - \dot{\bar{H}} \operatorname{rot} \dot{\bar{E}} &= \gamma \dot{\bar{E}} \dot{\bar{E}}^* - j\omega \varepsilon_a \dot{\bar{E}} \dot{\bar{E}}^* + j\omega \mu_a \dot{\bar{H}} \dot{\bar{H}}^* = \\ &= \gamma E^2 + 2j\omega \left( \frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right), \end{aligned}$$

де  $\dot{\bar{E}} \dot{\bar{E}}^* = E^2$  і  $\dot{\bar{H}} \dot{\bar{H}}^* = H^2$ .

Тоді рівність (11.16) запишеться:

$$-\oint \bar{S} d\bar{s} = \int_v \gamma E^2 dv + j2\omega \int_v \left( \frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right) dv. \quad (11.17)$$

Перший доданок у правій частині рівності (11.17) являє собою активну потужність  $P$ , а другий згідно з (11.14) реактивну потужність  $Q$ . Таким чином, теорема Умова-Пойнтинга може бути записана наступним чином:

$$-\oint \bar{S} d\bar{s} = P + jQ. \quad (11.17, a)$$

Теорема Умова-Пойнтинга дає можливість зробити висновок, що електромагнітна енергія від місця її генерування передається до місця споживання через діелектрик, який оточує з'єднувальні проводи. Ці проводи виконують подвійну роль: вони служать організаторами структури поля в діелектрику і каналами, якими проходить струм, але самі являються споживачами енергії, що поступає в провідник ззовні і перетворюється в тепло.

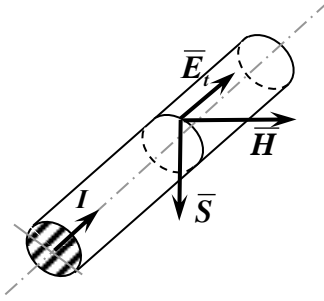


Рис. 11.2

Це можна проілюструвати на прямолінійному проводі радіусом  $R$  (рис. 11.2) при проходженні через нього постійного струму. При цьому навколо проводу збуджується магнітне поле, напруженість якого на поверхні

проводу рівна  $H = \frac{I}{2\pi R}$  і

направлена по дотичній до кола

поперечного перерізу.

Напруженість  $\vec{E}$  електричного поля рівна сумі нормальної  $\vec{E}_n$  і тангенціальної  $\vec{E}_t$  складових напруженості:

$$\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_t,$$

де  $\vec{E}_n = \frac{\sigma}{\epsilon_a}$ ;  $\vec{E}_t = \frac{\delta}{\gamma}$ .

Потужність, яка поступає в провід ззовні, на довжині  $l$ :

$$-\oint \vec{S} d\vec{s} = \oint E_t H ds = \frac{\delta}{\gamma} \times \frac{I}{2\pi R} \times 2\pi R l = \frac{l I^2}{\gamma \pi R^2} = R I^2,$$

так як:  $S = EH \sin 90^\circ = EH$ ;  $S ds = E_t H ds$  і густина

струму:  $\delta = \frac{I}{\pi R}$ .