

РОЗДІЛ 4. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

4.1. Основні засади. Закони комутації

Перехідний процес виникає в колі з реактивними елементами L або C внаслідок будь-якої комутації, тобто при переході від одного усталеного режиму до іншого. Вважають, що комутація відбувається в момент часу $t = 0$ миттєво, тобто за проміжок часу $\Delta t = 0$ (наприклад, увімкнення кола під дію джерела енергії, стрибкоподібна зміна параметра кола, амплітуди, частоти або фази прикладеної напруги тощо).

Перехідний процес зумовлений тим, що не можуть при комутації раптово змінитись енергії полів конденсаторів і котушок індуктивностей.

Розрахунок перехідного процесу зводиться до складання інтегрально-диференціальних рівнянь кола згідно з законами Кірхгофа і їх розв'язку у відповідності з законами комутації. При цьому вважають, що комутація відбувається в момент $t = 0$ і позначають через $t = -0$ – момент часу, який безпосередньо близько прилягає до моменту комутації, але перед комутацією; а через $t = +0$ – момент часу, що також близько прилягає до моменту комутації, але після комутації.

Закони комутації

1. У будь-якій вітці з індуктивністю струм в момент комутації не може змінитись стрибком, а починає змінюватись з того значення, яке він мав безпосередньо близько перед комутацією:

$$i_L(+0) = i_L(-0). \quad (4.1)$$

2. Напруга на ємності не може змінитись стрибком в момент комутації, а починає змінюватись з того значення, яке вона мала безпосередньо близько перед комутацією:

$$u_C(+0) = u_C(-0). \quad (4.2)$$

Струми в індуктивностях і напруги на ємностях в момент комутації називають незалежними початковими умовами.

4.2. Класичний метод розрахунку перехідних процесів

4.2.1. Основи методу

Суть методу полягає в тому, що для схеми кола, в якому протікає перехідний процес, складають систему інтегрально-диференціальних рівнянь. Потім систему перетворюють і зводять її до одного неоднорідного диференціального рівняння кола, в яке увійде тільки одна невідома величина – координата стану, наприклад, перехідний струм вітки з індуктивністю, і всі параметри кола:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k i}{dt^k} = f(t). \quad (4.3)$$

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння рівний сумі частинного розв'язку (i') неоднорідного рівняння (4.3) і загального розв'язку (i'') відповідного йому однорідного диференціального рівняння (4.3, а):

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k i''}{dt^k} = 0, \quad (4.3, a)$$

тобто
$$i = i' + i'' \quad (4.4)$$

Частинний розв'язок i' залежить від виду збудуючої функції $f(t)$, порядку диференціального рівняння та його коефіцієнтів $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ і в електротехніці називається вимушеною (усталеною) складовою перехідного струму.

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (вільна складова) має вигляд

$$i'' = A_k e^{p_k t} + A_{k-1} e^{p_{k-1} t} + \dots + A_1 e^{p_1 t}, \quad (4.5)$$

де p_k, p_{k-1}, \dots, p_1 – корені характеристичного рівняння:

$$a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 = 0, \quad (4.6)$$

в якому змінна p має степінь, рівну порядку похідної в рівнянні (4.3, a).

Постійні інтегрування $A_k, A_{k-1} + \dots + A_1$ визначаються початковими умовами, тобто значеннями в момент комутації ($t = 0$) функції « i » та її ($k - 1$) похідних.

Загальний розв'язок (i'') не залежить від виду функції $f(t)$, а визначається лише видом диференціального рівняння (4.4) (яке, в свою чергу, залежить від характеру кола) і початковими умовами.

В пасивних електричних колах вільна складова (i'') перехідного струму при $t \rightarrow \infty$ спадає до нуля і залишається тільки вимушена складова i' , яка може або затухати, або залишатись незмінною, або змінюватись в часі за певним законом, визначеним функцією збурення $f(t)$. З фізичної точки зору вільна реакція кола зумовлена переходом системи від одного енергетичного стану до іншого.

Якщо в колі є індуктивності та ємності, тобто елементи, що здатні накопичувати магнітну й електричну енергію, перехідний процес, який описується вільною складовою (i''), виникає кожен раз, коли виникає невідповідність між нерівноважними енергетичними станами кола в даний момент часу. Так, наприклад, в момент вмикання розрядженого конденсатора C під постійну напругу U_0 в ньому виникне така невідповідність.

При рівноважному стані кола конденсатор повинен бути заряджений до напруги U_0 і мати запас енергії:

$$A_e = \frac{CU_0^2}{2}, \quad (4.7)$$

тобто в момент увімкнення кола енергія в ньому повинна зрости від нуля до A_e . Але будь-яка зміна запасу енергії не може відбуватись миттєво, що й обумовлює наявність перехідного процесу.

Аналогічне явище буде спостерігатись і при наявності в колі котушок індуктивностей, запас енергії в яких визначається струмом:

$$A_m = \frac{Li^2}{2}. \quad (4.8)$$

4.2.2. Перехідні процеси в колі з послідовним сполученням R і L

4.2.2.1. Загальний випадок перехідного процесу

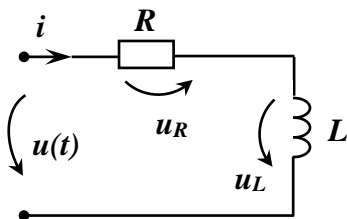


Рис. 4.1

Реальна котушка індуктивності має незначну ємність ($C_L \approx 0$), якою можна знехтувати, і активний опір ($R_L \neq 0$), який необхідно враховувати при розрахунках. Отже, схема заміщення котушки має вигляд, показаний на рис. 4.1.

Диференціальне рівняння кола має вигляд:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = u(t). \quad (4.9)$$

Струм перехідного процесу:

$$i = i' + i'', \quad (4.10)$$

тобто складається з вимушеної і вільної складових.

Вимушена складова i' перехідного струму є частинним розв'язком неоднорідного рівняння (4.9) і визначається видом функції $u(t)$: якщо напруга постійна ($u(t) = U_0$), то й струм i' буде постійним, якщо ж напруга $u(t)$ синусоїдна функція, то й струм $i'(t)$ буде синусоїдним тощо.

Вільна складова i'' визначається як розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$Ri'' + L \frac{di''}{dt} = 0. \quad (4.11)$$

Його характеристичне рівняння $Rp^0 + Lp^1 = 0$ має єдиний корінь $p = -\frac{R}{L}$.

Тоді

$$i'' = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (4.12)$$

де $\tau = \frac{L}{R}$ – постійна часу кола, яка вимірюється в секундах.

Отже, струм перехідного процесу:

$$i = i' + i'' = i' + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (4.10,a)$$

Стала інтегрування A визначається за початковим значенням струму індуктивності $i_L(0)$: в ліву частину рівності (4.10, a) підставляють значення струму $i_L(0)$ в момент комутації, а в праву – $t = 0$:

$$i_L(0) = i' + Ae^{-\frac{R}{L} \times 0}.$$

$$\text{Звідси визначаємо } A: \quad A = i_L(0) - i'. \quad (4.13)$$

4.2.2.2. Замикання накоротко RL – кола

Коло було увімкнене під постійну напругу $U_0 = \text{const}$, а в момент $t = 0$ замикається накоротко (рис. 4.2, a)

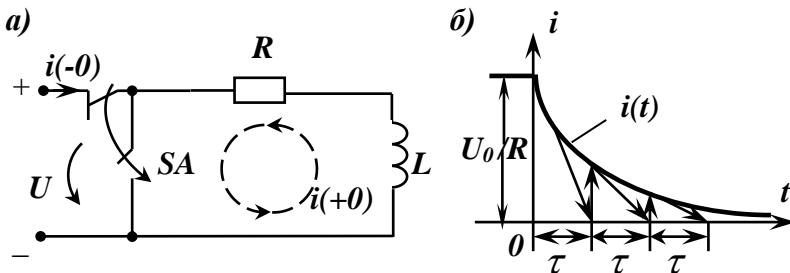


Рис. 4.2

Після комутації маємо $U_{\text{вх}} = 0$. Усталений струм $i' = 0$ також. Отже, струм перехідного процесу визначається тільки вільною складовою i'' :

$$i = i'' = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.14)$$

Стала інтегрування A визначається початковим значенням струму. До моменту комутації в колі був струм $i(-0) = I_0 = \frac{U_0}{R}$, а, так як, струм індуктивності не може змінитись стрибком, то й в момент комутації $i(0) = I_0 = \frac{U_0}{R}$.

Запишемо рівність (4.14) для моменту комутації ($t = 0$):

$$i(0) = I_0 = \frac{U_0}{R} = Ae^{-\frac{R}{L}0}.$$

Звідси
$$A = \frac{U_0}{R}.$$

Таким чином, струм перехідного процесу:

$$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.14, a)$$

За час рівний постійній часу τ струм у колі зменшується в $e = 2,74$ рази. Чим більша постійна τ , тим повільніше затухає струм.

З рівності (4.14, a) слідує, що струм $i = 0$ через нескінченно великий проміжок часу ($t = \infty$). Практично ж $i \approx 0$ за час $t = 3\tau, \dots, 5\tau$.

Введення в котушку феромагнітного осереддя значно збільшує постійну часу кола, так як збільшується індуктивність котушки $L = f(\mu)$, але внаслідок цього коло стає нелінійним. Наприклад, постійна часу обмотки збудження великого гідрогенератора може сягати до 5 сек.

4.2.2.3. Відключення RL -кола, зашунтованого великим опором, від джерела постійної напруги

Усталена складова струму $i' = 0$, так як з часом енергія магнітного поля котушки розсіється на опорах R і R_0 . Отже, перехідний струм буде визначатись тільки вільною складовою i'' :

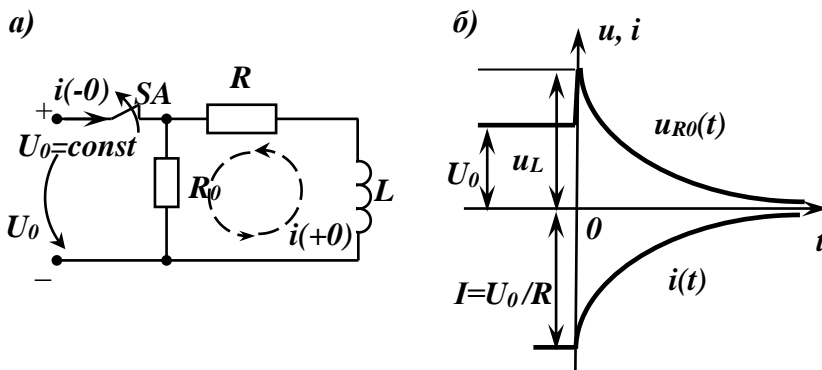


Рис. 4.3

$$i = i'' = A e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (4.15)$$

$$\tau = \frac{L}{R + R_0}.$$

де постійна часу кола

До комутації в котушці протікав струм $i(-0) = I_0 = \frac{U_0}{R}$, а, значить, і в момент комутації

$$i(0) = I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Для визначення сталої інтегрування A підставимо в ліву частину рівності (4.15) значення $i(0)$, а в праву частину – $t = 0$.

Маємо:
$$\frac{U_0}{R} = A e^{-\frac{0}{\tau}}. \text{ Звідси: } A = \frac{U_0}{R}.$$

Тоді перехідний струм:

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t(R_0+R)}{L}}. \quad (4.15, a)$$

До комутації до опору R_0 була прикладена напруга $U_{R_0} = U_0$.

У момент комутації:

$$U_{R_0} = R_0 \times i(0) = R_0 \frac{U_0}{R} = \frac{R_0}{R} U_0, \quad (4.16)$$

тобто напруга отримує стрибок $\frac{R_0}{R} \times U_0$ (рис. 4.3, б).

Якщо $R_0 \gg R$, наприклад, до котушки індуктивності з малим активним опором R паралельно під'єднаний вольтметр з великим внутрішнім опором R_0 , то при відключенні кола від постійної напруги U_0 , напруга на опорі R_0 в перший момент збільшиться в $\frac{R_0}{R}$ разів і вольтметр може перегоріти.

Щоб уникнути великих перенапруг при відключенні кіл постійного струму з великою індуктивністю, їх попередньо замикають на малий опір.

4.2.2.4. Увімкнення RL -кола під постійну напругу

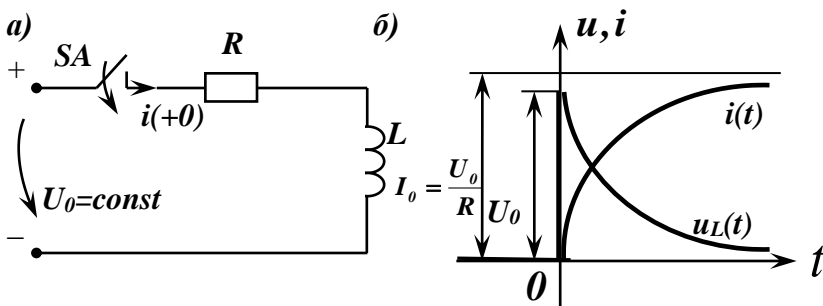


Рис. 4.4

Струм усталеного режиму: $i' = I_0 = \frac{U_0}{R}$.

Перехідний струм:

$$i = i' + i'' = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (4.17)$$

Якщо початкові умови були нульові, тобто $i(-0) = 0$ А, то й $i(0) = 0$ А і вираз (4.17) при $t = 0$ запишеться: $0 = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}0}$, звідки $A = -\frac{U_0}{R}$.

Тоді перехідний струм:

$$i = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (4.17, a)$$

Напруга на індуктивності:

$$U_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{U_0}{R} \times \frac{1 \times R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = U_0 e^{-\frac{R}{L}t} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.18)$$

Криві перехідного процесу $i(t)$ й $u_L(t)$ наведені на рис. 4.4, б. Згідно з (4.18) напруга на індуктивності в момент комутації одержує стрибок, рівний прикладеній напрузі U_0 :

$$U_L(0) = U_0 e^{-0} = U_0.$$

4.2.2.5. Увімкнення RL – кола під синусоїдну напругу

Нехай коло (рис. 4.5, а) вмикається під напругу:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (4.19)$$

Для післякомутаційного режиму кола усталений струм визначається як:

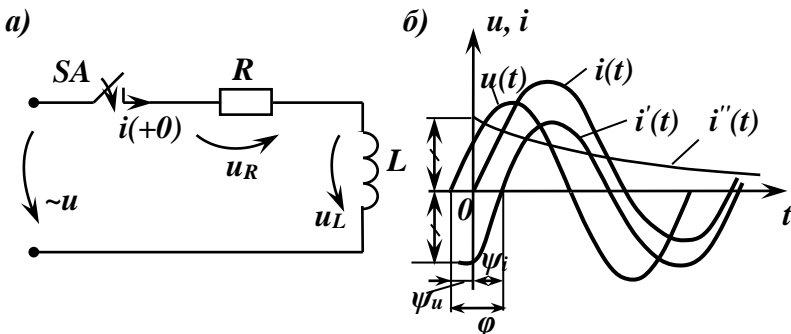


Рис. 4.5

$$i' = \frac{u}{Z} = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi),$$

де $I_m = \frac{U_m}{Z}$; $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$; $\varphi = \arctg(X_L / R)$.

Тоді загальний вираз перехідного струму запишеться:

$$i = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.20)$$

Сталу інтегрування A визначимо з початкової умови: струм в колі до комутації: $i(-0) = 0$. А так як струм індуктивності в момент комутації не може змінитись стрибком, то $i(0) = i(-0) = 0$.

Вираз (4.20) для моменту комутації запишеться:

$$i(0) = I_m \sin(\omega \times 0 + \psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{0}{\tau}}$$

або
$$0 = \frac{U_m}{Z} \sin(\psi_u - \varphi) + A,$$

звідки
$$A = -I_m \sin(\psi_u - \varphi).$$

Тоді вираз (4.20) для перехідного струму набуде вигляду:

$$i = I_m \left[\sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]. \quad (4.20, a)$$

На рис. 4.5, б побудовані залежності $u(t)$, $i'(t)$, $i''(t)$ та $i(t)$ за їх виразами (4.19), (4.20).

У момент комутації (при $t = 0$) початкове значення вільного струму $i''(0)$ рівне і протилежне за знаком значенню усталеного струму $i'(0)$, а, отже, перехідний струм $i(0) = 0$.

Початкове значення вільного струму i'' рівне амплітуді I_m , якщо фаза вмикання $\psi_u - \varphi = \pm \pi / 2$:

$$i'' = I_m \sin(\pi / 2) = I_m.$$

Перехідний струм взагалі не виникає при $\psi_u = \varphi$. За такої умови режим кола стає усталеним з моменту комутації.

4.2.3. Перехідні процеси в колі з послідовним сполученням R і C

4.2.3.1. Загальний випадок перехідного процесу

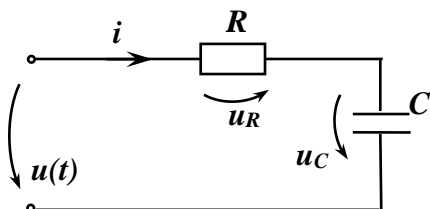


Рис. 4.6

Схема заміщення конденсатора показана на рис. 4.6.

Диференціальне рівняння кола:

$$Ri + u_C = u(t). \quad (4.21)$$

Враховуючи, що $q = Cu_C$, можна записати:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} = C \frac{du_C}{dt}.$$

Тоді рівняння (4.21) прийме вигляд:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t). \quad (4.21, a)$$

Напряга перехідного процесу $u_e = u'_C + u''_C$ складається з вимушеної (усталеної) складової u'_C і вільної складової u''_C . Вільна складова визначається розв'язком однорідного диференціального рівняння:

$$RC \frac{du''_C}{dt} + u''_C = 0. \quad (4.22)$$

Його характеристичне рівняння:

$$RCp + 1 = 0$$

має єдиний корінь: $p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$ і тому:

$$u''_C = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (4.23)$$

де $\tau = RC$ – постійна часу кола (сек).

Усталена складова u'_C напруги перехідного процесу є частинним розв'язком неоднорідного диференціального

рівняння (4.21, а); вона визначається видом функції $u(t)$ прикладеної до кола напруги.

Отже, напруга перехідного процесу:

$$u_C = u'_C + u''_C = u'_C + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.24)$$

Стала інтегрування A визначається з рівняння (4.24), записаного для моменту комутації: в ліву частину його підставляють початкове значення напруги $u_C(0)$, а в праву $-t=0$:

$$u_C(0) = u'_C + Ae^{-\frac{0}{\tau}},$$

звідки

$$A = u_C(0) - u'_C$$

4.2.3.2. Замикання накоротко RC -кола

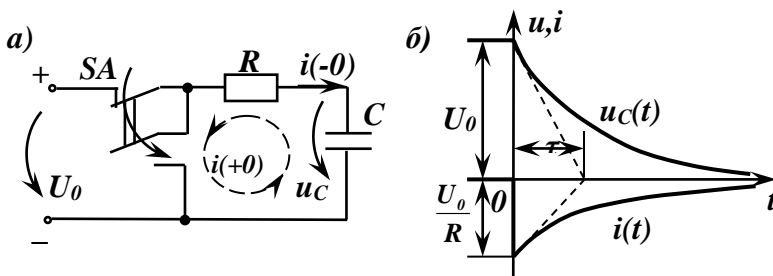


Рис. 4.7

Післякомутаційний режим такого кола відповідає нульовій напрузі на його вході (рис. 4.7).

Після розрядки ємності через опір R усталене значення напруги $u'_C = 0$ і перехідна напруга буде складатись тільки з вільної складової u''_C :

$$u_C = u''_C = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.25)$$

До моменту комутації напруга на ємності $u_C(-0) = U_0$. На підставі закону комутації:

$$u_C(0) = u_C(-0) = U_0.$$

Підставивши в рівняння (4.25) значення $u_C(0) = U_0$ і $t = 0$, знаходимо: $U_0 = Ae^{-\frac{0}{\tau}}$, звідки: $A = U_0$.

Таким чином, напруга перехідного процесу:

$$u_C(t) = u_C'' = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4.26)$$

Струм перехідного процесу:

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -C \frac{1}{RC} U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4.27)$$

В момент комутації: $i(0) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{0}{RC}} = -\frac{U_0}{R}$, тобто струм змінюється стрибком від нуля до значення $\left(-\frac{U_0}{R}\right)$ (рис. 4.7, б). Це є наслідком того, що ми повністю знехтували індуктивністю конденсатора.

Енергія, яка виділяється у вигляді теплоти в опорі кола, рівна енергії, що була накопичена в електричному полі конденсатора в початковий момент часу. Дійсно,

$$\int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} C U_0^2.$$

4.2.3.3. Увімкнення RC - кола під постійну напругу

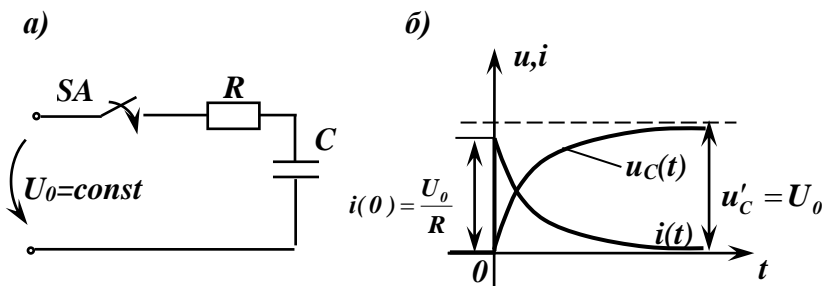


Рис. 4.8

Нехай до комутації ємність C заряджена не була, тобто $u_C(-0) = 0$.

Усталене значення напруги перехідного процесу $u'_C = U_0$. Тоді перехідна напруга на ємності:

$$u_C = u'_C + u''_C = U_0 + Ae^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4.28)$$

Сталу A визначають з початкової умови: $u_C(0) = u_C(-0) = 0$. У ліву частину рівності (4.28), записаної для моменту комутації, підставляють значення $u_C(0) = 0$, а в праву частину – $t = 0$:

$$u_C(0) = U_0 + Ae^{-\frac{0}{RC}} \quad \text{або} \quad 0 = U_0 + A.$$

Звідси $A = -U_0$.

Таким чином,

$$u_C(t) = U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), \quad (4.28, a)$$

тобто напруга зростає від нуля до значення U_0 .

Струм перехідного процесу:

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{U_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.29)$$

у момент комутації:

$$i(0) = I_0 = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{0}{RC}} = \frac{U_0}{R},$$

тобто струм стрибком одержує значення $\frac{U_0}{R}$ (рис. 4.8, б).

4.2.4. Перехідні процеси в колі з послідовним сполученням R , L , C

4.2.4.1. Загальний випадок перехідного процесу

Розглянемо перехідні процеси в колі, яке має послідовно увімкнені ділянки: резистор R , котушку індуктивності L і конденсатор C (рис. 4.9).

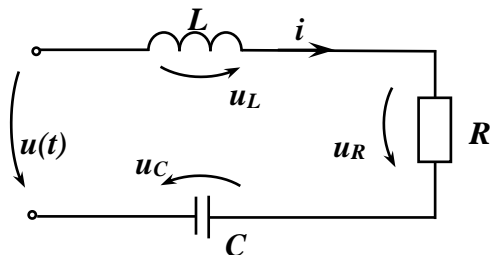


Рис. 4.9

Диференціальне рівняння кола має вигляд:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = u(t). \quad (4.30)$$

Продиференціювавши його по часу, одержимо рівняння другого порядку відносно струму в колі:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt}.$$

Відповідне йому однорідне рівняння, яке визначає вільний струм i'' перехідного процесу, після ділення на L прийме вигляд:

$$\frac{d^2 i''}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di''}{dt} + \frac{i''}{LC} = 0. \quad (4.30, a)$$

Для спрощення позначимо:

$$\frac{R}{L} = 2\delta \quad \text{і} \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

Тоді

$$\frac{d^2 i''}{dt^2} + 2\delta \frac{di''}{dt} + \omega_0^2 i'' = 0. \quad (4.30, б)$$

Характеристичне рівняння кола:

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$$

має два корені

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \quad p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

або

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}; \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Отже, вільний струм буде виражатись сумою двох експонент:

$$i'' = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Тоді струм перехідного процесу запишеться виразом:

$$i(t) = i' + i'' = i' + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (4.31)$$

Струм i' усталеного режиму можна визначити, якщо відомий вид функції вхідної напруги $u(t)$.

Довільні сталі інтегрування A_1 і A_2 визначають з початкових фізичних умов: незмінності струму в котушці індуктивності і напруги на полюсах конденсатора в момент комутації:

$$i_L(0) = i_L(-0); \quad u_C(0) = u_C(-0).$$

Для обчислення сталих інтегрування A_1 і A_2 необхідно знати в момент комутації значення струму в колі і всіх його похідних до $(n-1)$ – ї включно.

Так як в даному випадку маємо рівняння другого порядку ($n = 2$), то необхідно знати значення струму і його першої похідної. Початкове значення струму $i(0)$ в даному випадку задане. Початкове значення першої похідної знайдемо з рівняння кола, використовуючи фізичні початкові умови.

Так, з рівняння (4.30) при $t = 0$, враховуючи, що

$$\frac{1}{C} \int_0^0 i dt = 0, \text{ отримаємо:}$$

$$L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} + Ri(0) + u_C(0) = u(0), \quad (4.30, в)$$

де $u(0)$ – значення вхідної напруги $u(t)$ при $t = 0$.

З рівняння (4.30, в) визначаємо $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}$:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{u(0) - Ri(0) - u_C(0)}{L}. \quad (4.30, з)$$

Продиференціювавши рівняння (4.31), одержимо:

$$\frac{di}{dt} = \frac{di'}{dt} + A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t} \quad (4.32)$$

Підставляючи в рівняння (4.31) для струму i в рівняння (4.32) для його похідної в ліві частини початкове значення струму i його похідної (4.30, з), а в праву частину – $t = 0$, одержимо:

$$i(0) = i'(0) + A_1 + A_2; \quad (4.31, а)$$

$$\frac{u(0) - Ri(0) - u_C(0)}{L} = \left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0} + A_1 p_1 + A_2 p_2, \quad (4.32, а)$$

де $i'(0)$ й $\left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0}$ – значення струму усталеного режиму i

його похідної в початковий момент часу, які відомі зі знайденого вище частинного розв'язку початкового диференціального рівняння (4.30).

Сталі інтегрування визначають з рівнянь (4.31, а) і (4.32, а).

4.2.4.2. Увімкнення R, L, C -кола під постійну напругу

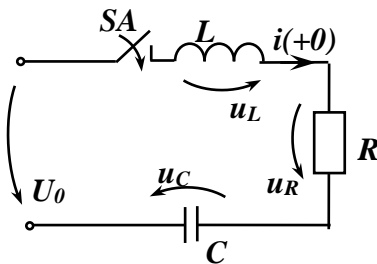


Рис. 4.10

Нехай коло R, L, C (рис. 4.10) вмикається під постійну напругу при нульових початкових умовах, тобто $i(0) = 0$ і $u_C(0) = 0$.

Диференціальне рівняння кола:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = U_0 \quad (4.33)$$

має розв'язок

$$i(t) = i' + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (4.34)$$

У даному випадку струм усталеного режиму буде рівний нулю ($i' = 0$), оскільки послідовно в колі увімкнений конденсатор, зарядиться і через нього постійний струм проходити не буде.

Отже,

$$i(t) = i'' = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (4.34, a)$$

Перехідна напруга на індуктивності:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}). \quad (4.35)$$

Використавши нульові початкові умови для струму, запишемо вираз (4.34, a) для моменту комутації (при $t = 0$):

$$i(0) = 0 = A_1 + A_2. \quad (4.34, б)$$

При $t = 0$ рівняння кола (4.33) запишеться:

$$L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = U_0, \quad (4.33, a)$$

так як $i(0) = 0$ й $\int_0^0 i dt = 0$.

Враховуючи (4.33, a), рівність (4.35) при $t = 0$ прийме вигляд:

$$L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = L(A_1 p_1 + A_2 p_2) = U_0. \quad (4.36)$$

Із виразів (4.34, б) і (4.36) знаходимо сталі інтегрування A_1 та A_2 :

$$A_1 = -A_2 = \frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}.$$

Таким чином, вирази для струму в колі і напруги на ємності для перехідного процесу запишуться:

$$i(t) = \frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} \times (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}); \quad (4.37)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{U_0}{(p_1 - p_2)} \times (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) + U_0. \quad (4.38)$$

Характер переходного процесу в R, L, C – колі залежить від того, чи будуть корені p_1 і p_2 характеристичного рівняння дійсними (при $\delta \geq \omega_0^2$) чи комплексними (при $\delta < \omega_0$). В першому випадку процес зарядки конденсатора аперіодичний (рис. 4.11), а в другому випадку – коливальний (рис. 4.12).

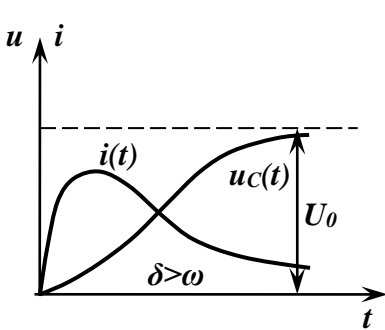


Рис. 4.11

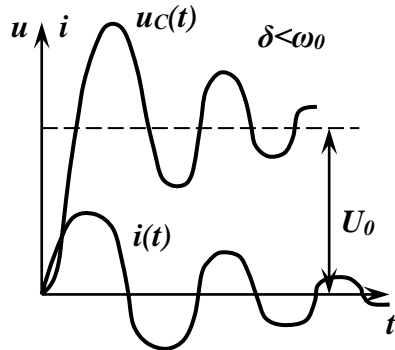


Рис. 4.12

4.2.5. Характеристичне рівняння складного електричного кола

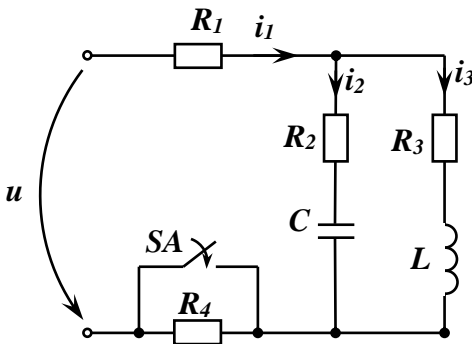


Рис. 4.13

Розглянемо схему на рис. 4.13. Цю схему можна представити у вигляді двох підсхем: однієї для усталеного режиму (рис. 4.14), а другої – для вільного режиму (рис. 4.15).

Джерело енергії увійде тільки в першу підсхему і значення вимушених струмів і напруг будуть залежати від закону зміни напруги джерела живлення.

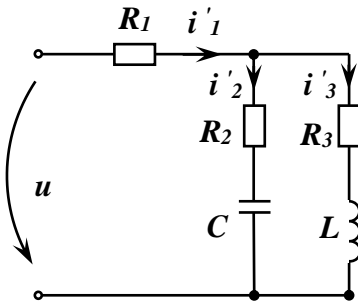


Рис. 4.14

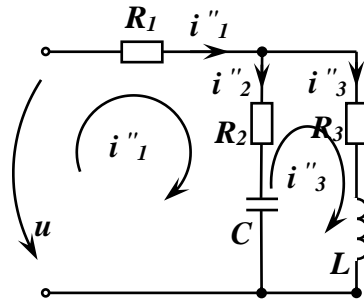


Рис. 4.15

У другій підсхемі (рис. 4.15) протікають вільні струми за рахунок внутрішніх запасів енергії реактивних елементів L і C . Для розрахунку цих струмів складемо систему контурних рівнянь згідно з другим законом Кірхгофа, прийнявши струми i''_1 та i''_3 як контурні:

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_2)i''_1 + \frac{1}{C} \int i''_1 dt - R_2 i''_3 - \frac{1}{C} \int i''_3 dt &= 0; \\ -R_2 i''_1 - \frac{1}{C} \int i''_1 dt + (R_2 + R_3)i''_3 + L \frac{di''_3}{dt} + \frac{1}{C} \int i''_3 dt &= 0. \end{aligned} \right\} (4.39)$$

Розв'язок для вільних складових струмів i''_1 й i''_3 рівний сумі експоненціальних залежностей, причому їх кількість відповідає порядку характеристичного рівняння. Підстановка експоненціальних залежностей для струмів i''_1 та i''_3 , що мають один і той же корінь e^{pt} ,

$$i''_1 = Ae^{pt}; \quad i''_3 = Be^{pt},$$

перетворює останні рівняння в тотожності.

Знайдемо значення похідних та інтегралів струмів i''_1 й i''_3 :

$$\frac{di_3''}{dt} = pBe^{pt} = pi_3'';$$

$$\int i_1'' dt = \int Ae^{pt} dt = \frac{1}{p} Ae^{pt} = \frac{i_1''}{p};$$

$$\int i_3'' dt = \int Be^{pt} dt = \frac{1}{p} Be^{pt} = \frac{i_3''}{p}$$

і, підставивши ці значення в рівняння системи (4.39), одержимо

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_2)i_1'' + \frac{i_1''}{pC} - R_2i_3'' - \frac{i_3''}{pC} &= 0; \\ -R_2i_1'' - \frac{i_1''}{pC} + (R_2 + R_3)i_3'' + pLi_3'' + \frac{i_3''}{pC} &= 0. \end{aligned} \right\} (4.39, a)$$

Рівняння (4.39, a) є алгебраїчними, так як в них відсутні похідні та інтеграли вільних струмів.

Розв'язок системи двох однорідних рівнянь з невідомими i_1'' та i_3'' відмінний від нульового, якщо визначник цієї системи рівний нулю:

$$\Delta p = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{pC} & -(R_2 + \frac{1}{pC}) \\ -(R_2 + \frac{1}{pC}) & (R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC}) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.40)$$

Таким чином, p є коренем рівняння $\Delta p = 0$, яке є характеристичним рівнянням для системи (4.39) диференціальних рівнянь.

Визначник цієї системи може бути також складений так, як і при розрахунку кіл синусоїдного струму методом контурних струмів у комплексній формі, замінивши $j\omega$ на p .

Характеристичне рівняння також можна записати, якщо скласти в залежності від p вхідний опір кола для будь-якої вітки кола.

Наприклад, відносно вітки з ємністю вхідний опір кола:

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + R_2 + \frac{(R_3 + pL)R_1}{R_1 + R_3 + pL}; \quad Z(p) = 0. \quad (4.41)$$

Визначивши корені характеристичного рівняння, можна в залежності від їх виду і кількості записати вирази для вільних струмів.

Так, для схеми з двома реактивними елементами L і C можливі такі випадки:

а) корені дійсні і різні ($p_1 < 0$; $p_2 < 0$; $p_1 \neq p_2$):

$$i''(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \quad (4.42)$$

б) корені дійсні і рівні ($p_1 = p_2 = -\delta$):

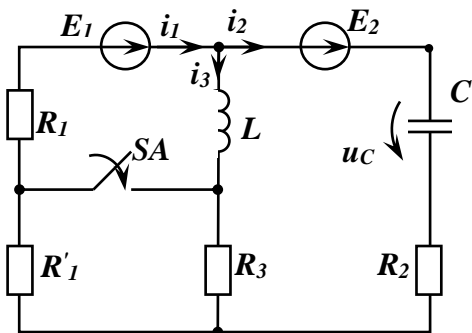
$$i''(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t}; \quad (4.43)$$

в) корені комплексні і спряжені ($p_1 = -\delta + j\omega$; $p_2 = -\delta - j\omega$):

$$i''(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \delta^o). \quad (4.44)$$

4.2.6. Розрахунок перехідного процесу в складному колі класичним методом

У лінійному електричному колі (рис. 4.16) з фізичними параметрами:



$$\begin{aligned} E_1 &= 100 \text{ В}; \\ E_2 &= 60 \text{ В}; \\ R_1 &= R_2 = 10 \text{ Ом}; \\ R_1' &= R_3 = 20 \text{ Ом}; \\ L &= 1,1 \text{ Гн}; \\ C &= 400 \text{ мкФ} \end{aligned}$$

відбувається комутація.

Визначимо

закони зміни в часі струмів у вітках і

напруг на реактивних елементах класичним методом. На підставі отриманих залежностей побудуємо графіки функцій $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_C(t)$ й $u_L(t)$.

Алгоритм розв'язання

1. Розглянемо схему до комутації (рис. 4.16) і визначимо незалежні початкові умови – значення струму індуктивності $i_L(-0)$ та напруги на ємності $u_C(-0)$ в момент комутації.

Для цього задамо умовно-додатні напрямки струмів у вітках і покажемо їх на схемі. Так як безпосередньо перед комутацією був усталений процес, то ємність C була заряджена і струм через неї не проходив, тобто

$$i_C(-0) = i_2(-0) = 0.$$

Тоді

$$i_1(-0) = i_3(-0) = i_L(-0) = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R'_1} = \frac{100}{10 + 20 + 20} = 2 \text{ А}.$$

Записавши рівняння другого закону Кірхгофа для контуру з ЕРС E_2 :

$$u_C(-0) + R_2 i_2(-0) - R_3 i_3(-0) = E_2,$$

одержимо

$$u_C(-0) = R_3 i_3(-0) + E_2 = 20 \times 2 + 60 = 100 \text{ В}.$$

Таким чином, незалежні початкові умови:

$$\left. \begin{aligned} i_L(0) = i_3(0) = i_3(-0) = 2 \text{ А}; \\ u_C(0) = u_C(-0) = 100 \text{ В}. \end{aligned} \right\} (4.45)$$

2. Проведемо комутацію і запишемо систему диференціальних рівнянь для післякомутаційного кола.

Внаслідок комутації опори R'_1 і R_3 запаралеляться і їх еквівалентний опір:

$$R_e = \frac{R'_1 \times R_3}{R'_1 + R_3} = \frac{20 \times 20}{20 + 20} = 10 \text{ Ом}$$

буде сполучений послідовно з опором R_2 .

Схема кола після комутації прийме вигляд, приведений на рис. 4.17,

де
$$R'_2 = R_e + R_2 = 10 + 10 = 20 \text{ Ом}.$$

Згідно з законами Кірхгофа складемо систему диференціальних рівнянь даної схеми на час перехідного процесу:

$$\left. \begin{aligned} \text{контур I: } u_1 + u_3 &= E_1; \\ \text{контур III: } u_1 + u_C + u'_2 &= E_1 + E_2; \\ \text{вузол A: } i_1 &= i_2 + i_3, \end{aligned} \right\}$$

де

$$u_L = L \frac{di_3}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt; \quad u_1 = R_1 i_1; \quad u'_2 = R'_2 i_2,$$

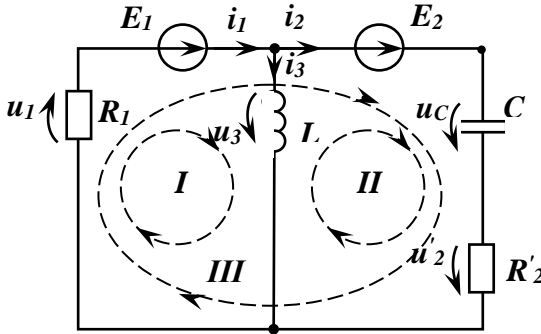


Рис. 4.17

або

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1 + L \frac{di_3}{dt} &= E_1; \\ R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int i_2 dt + R'_2 i_2 &= E_1 + E_2; \\ i_1 &= i_2 + i_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

3. Перехідні струми через індуктивність L і через ємність C будемо шукати у вигляді суми усталених і вільних складових цих струмів:

$$\left. \begin{aligned} i_L &= i_3 = i'_3 + i''_3; \\ i_C &= i_2 = i'_2 + i''_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

Струм усталеного режиму i'_2 післякомутаційного кола (при $t = \infty$) рівний нулю, так як ємність зарядиться і струм через неї проходити не буде; отже, усталений струм буде проходити тільки по контуру I :

$$\left. \begin{aligned} i'_2 &= 0; \\ i'_3 = i'_1 &= \frac{E_1}{R_1} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A.} \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

4. Вільні складові струмів перехідного процесу будемо шукати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} i''_2 &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \\ i''_3 &= B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}, \end{aligned} \right\}$$

де A_1, A_2, B_1, B_2 – сталі інтегрування, які визначаються величинами струмів кола і їх похідних в момент комутації (при $t=0$), а p_1 і p_2 корені характеристичного рівняння післякомутаційного кола (рис. 4.17).

Характеристичне рівняння одержимо з визначника системи контурних рівнянь кола для незалежних контурів I і II (рис. 4.17) при синусоїдному режимі роботи:

$$\Delta(j\omega) = \begin{vmatrix} R_1 + j\omega L & -j\omega L \\ -j\omega L & R'_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \end{vmatrix},$$

замінивши $j\omega$ на p і прирівнявши Δp до нуля:

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= \begin{vmatrix} R_1 + pL & -pL \\ -pL & R'_2 + pL + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 10 + p \times 1 & -p \times 1 \\ -p \times 1 & 20 + p \times 1 + \frac{10^6}{p \times 400} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Розкривши визначник, одержимо характеристичне рівняння кола:

$$p^2 + 90p + 833 = 0. \quad (4.49)$$

Його корені $p_1 = -10,5 c^{-1}$ і $p_2 = -79,5 c^{-1}$ є дійсними і різними числами, а, значить, вирази для вільних складових струмів запишуться у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} i''_2 &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = A_1 e^{-10,5t} + A_2 e^{-79,5t}; \\ i''_3 &= B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} = B_1 e^{-10,5t} + B_2 e^{-79,5t}. \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Для знаходження чотирьох сталих інтегрування A_1, A_2, B_1, B_2 необхідно мати чотири рівняння. Два з них отримаємо, підставивши вирази (4.48) і (4.50) у формули (4.47):

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= i_2' + i_2'' = 0 + A_1 e^{-10,5t} + A_2 e^{-79,5t}; \\ i_3 &= i_3' + i_3'' = 10 + B_1 e^{-10,5t} + B_2 e^{-79,5t}. \end{aligned} \right\} \quad (4.47,a)$$

Ще два рівняння одержимо, продиференціювавши вирази (4.47, a) за часом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_2}{dt} &= -10A_1 e^{-10,5t} - 79,5A_2 e^{-79,5t}; \\ \frac{di_3}{dt} &= -10B_1 e^{-10,5t} - 79,5B_2 e^{-79,5t}. \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Вирази (4.47, a) і (4.51) справедливі для довільного моменту часу, в тому числі й для моменту комутації ($t = 0$). Для зручності запишемо їх попарно для відповідних струмів і їх похідних:

$$\left. \begin{aligned} i_2(0) &= A_1 + A_2; \\ \left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0} &= -10,5A_1 - 79,5A_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

$$\left. \begin{aligned} i_3(0) &= 10 + B_1 + B_2; \\ \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} &= -10,5B_1 - 79,5B_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

Сталі інтегрування A_1, A_2, B_1, B_2 визначаться, коли будуть знайдені значення похідних $\left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0}$ і $\left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0}$.

Визначимо їх з системи диференціальних рівнянь (4.46), записаних для моменту комутації:

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1(0) + L \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} &= E_1; \\ R_1 i_1(0) + u_C(0) + R_2' i_2(0) &= E_1 + E_2; \\ i_1(0) &= i_2(0) + i_3(0). \end{aligned} \right\} (4.46, a)$$

Підставивши в ці рівняння числові значення величин, одержимо

$$\left. \begin{aligned} 10i_1(0) + 1 \times \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} &= 100; \\ 10i_1(0) + 100 + 20i_2(0) &= 160; \\ i_1(0) &= i_2(0) + 2. \end{aligned} \right\} (4.46, б)$$

Розв'язавши сумісно друге і третє рівняння системи (4.46, б):

$$\begin{aligned} 10i_1(0) + 20i_2(0) &= 60; \\ i_1(0) - i_2(0) &= 2, \end{aligned}$$

знаходимо струми:

$$i_1(0) = 3,33 \text{ A}; \quad i_2(0) = 1,33 \text{ A}. \quad (4.54)$$

Тоді з першого рівняння системи (4.46, б):

$$\left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} = 100 - i_1(0) \times 10 = 100 - 10 \times 3,33 = 66,7 \frac{\text{A}}{\text{с}}. \quad (4.55)$$

Продифернціюємо друге і третє рівняння системи (46)

і, підставивши в них $t = 0$, визначимо $\left(\frac{di_1}{dt} \right)_{t=0}$ і $\left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0}$:

$$\left. \begin{aligned} R_1 \left(\frac{di_1}{dt} \right)_{t=0} + \frac{i_2(0)}{C} + R_2' \left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0} &= 0; \\ \left(\frac{di_1}{dt} \right)_{t=0} &= \left(\frac{di_2}{dt} \right)_{t=0} + \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0}. \end{aligned} \right\} (4.56)$$

Підставивши вираз $\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0}$ з другого рівняння системи (4.56) у перше рівняння цієї системи і, звівши подібні члени, одержимо:

$$R_1 \left[\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} + \left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0} \right] + \frac{i_2(0)}{C} + R_2 \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = 0,$$

або

$$(R_1 + R_2) \times \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} + R_1 \left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0} + \frac{i_2(0)}{C} = 0.$$

Після підстановки числових значень в останнє рівняння, визначаємо:

$$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = -133 \frac{A}{c}. \quad (4.57)$$

Враховуючи початкові умови (4.45), (4.54), (4.55) і (4.57), підставляємо у рівняння систем (4.52) і (4.53) обчислені значення струмів $i_2(0)$, $i_3(0)$ та їх похідних

$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}$ й $\left(\frac{di_3}{dt}\right)_{t=0}$ і визначаємо сталі інтегрування:

$$\left. \begin{aligned} 1,33 &= A_1 + A_2; \\ -133 &= -10,5 A_1 - 79,5 A_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.52, a)$$

звідки $A_1 = -0,39 A$; $A_2 = 1,72 A$.

$$\left. \begin{aligned} 2 - 10 &= B_1 + B_2; \\ 66,7 &= -10,5 B_1 - 79,5 B_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.53, a)$$

звідки $B_1 = -8,25 A$; $B_2 = 0,25 A$.

Тепер вирази для перехідних струмів $i_2(t)$ й $i_3(t)$ приймуть вигляд:

$$i_2(t) = -0,39e^{-10,5t} + 1,72e^{-79,5t} A; \quad (4.58)$$

$$i_3(t) = 10 - 8,25e^{-10,5t} + 0,25e^{-79,5t} A. \quad (4.59)$$

5. Знаходимо решту величин перехідного процесу відповідно до схеми післякомутаційного кола (рис. 4.17).

Перехідний струм першої вітки:

$$\begin{aligned}
 i_1(t) &= i_2(t) + i_3(t) = -0,39e^{-10,5t} + 1,72e^{-79,5t} + \\
 &+ 10 - 8,25e^{-10,5t} + 0,25e^{-79,5t} = \quad (4.60) \\
 &= 10 - 8,64e^{-10,5t} + 1,97e^{-79,5t} \text{ A};
 \end{aligned}$$

Перехідна напруга на індуктивності:

$$\begin{aligned}
 u_L(t) &= L \frac{di_3}{dt} = 1 \times (-10,5) \times (-8,25)e^{-10,5t} - \\
 &- 79,5 \times 0,25e^{-79,5t} = \quad (4.61) \\
 &= 86,6e^{-10,5t} - 19,87e^{-79,5t} \text{ В}.
 \end{aligned}$$

З другого рівняння системи (4.46) визначаємо перехідну напругу на ємності:

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= E_1 + E_2 - R_1 i_1(t) - R_2 i_2(t) = \\
 &= 100 + 60 - 10 \times 10 + \\
 &+ 10 \times 8,64e^{-10,5t} - 10 \times 1,97e^{-79,5t} - \quad (4.62) \\
 &- 20 \times (-0,39e^{-10,5t}) - 20 \times 1,72e^{-79,5t} = \\
 &= 60 + 94,2e^{-10,5t} - 54,1e^{-79,5t} \text{ В}.
 \end{aligned}$$

6. Перевірка. Вище були обчислені значення струмів віток та напруги на ємності для моменту комутації:

$$i_1(0) = 3,33 \text{ A};$$

$$i_2(0) = 1,33 \text{ A};$$

$$i_3(0) = 2 \text{ A};$$

$$u_C(0) = 100 \text{ В}.$$

Підставивши у вирази (4.58), ... , (4.62) значення $t = 0$, ми повинні одержати такі ж числові значення.

Отже,

$$\begin{aligned}
 i_2(0) &= -0,39e^{-10,5 \times 0} + 1,72e^{-79,5 \times 0} = \quad (4.58,a) \\
 &= -0,39 + 1,72 = 1,33 \text{ A};
 \end{aligned}$$

аналогічно:

$$i_3(0) = 10 - 8,25 + 0,25 = 2 \text{ A}; \quad (4.59,a)$$

$$i_1(0) = 10 - 8,64 + 1,97 = 3,33 \text{ A}; \quad (4.60,a)$$

$$u_C(0) = 60 + 94 - 54 = 100 \text{ В}. \quad (4.62,a)$$

Напруга на індуктивності в момент комутації отримує стрибок:

$$u_L(0) = 86,6 - 19,87 = 66,13 \text{ В.} \quad (4.61, a)$$

Це є наслідком того, що при розрахунках ми знехтували міжвитковою ємністю котушки індуктивності.

Вимушені (усталені) значення струмів і напруг після комутації встановлюються теоретично через час $t = \infty$:

$$i_2(\infty) = 0, \quad (4.58, б)$$

оскільки ємність заряджена і струму не проводить.

$$i_3(\infty) = 10 - 8,25e^{-10,5 \times \infty} + 0,25e^{-79,5 \times \infty} = 10 \text{ А}; \quad (4.59, б)$$

аналогічно:

$$i_1(\infty) = 10 \text{ А}; \quad (4.60, б)$$

$$u_C(\infty) = 60 \text{ В}; \quad (4.62, б)$$

$$u_L(\infty) = 0 \text{ В}, \quad (4.61, б)$$

що відповідає знайденим вище усталеним значенням струмів та напруг.

7. Тепер, у відповідності з формулами (4.58), ... , (4.62), обчислюємо значення перехідних струмів і напруг для моментів часу: $t = 0$, $t = 0,5\tau$, $t = \tau$, $t = 2\tau$, $t = 3\tau$,

враховуючи, що корені характеристичного рівняння $p_1 = -10,5c^{-1}$ і $p_2 = -79,5c^{-1}$, а постійна часу кола

$$\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{10,5} = 0,095c, \text{ де } \alpha = |p_{min}| = 10,5c^{-1}.$$

Результати обчислень заносимо в табл. 4.1 і будуємо графіки перехідних струмів і напруг (рис. 4.18), враховуючи, що $p_2 = 7,57 p_1$.

Таблиця 4.1

№ ряд- ка	Операції над рядками	Час, с					
		Вираз	0	0,5 τ	1 τ	2 τ	3 τ
1		$e^{p_1 t} = e^{-10,5t} = e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	0,61	0,37	0,13	0,05
2		$e^{p_2 t} = e^{-79,5t} = e^{-\frac{7,57t}{\tau}}$	1	0,02	0,05	0	0
3	$-0,39 \times [1]$	$-0,39 \times e^{-10,5t}$	-0,39	-0,24	-0,14	-0,05	-0,02
4	$1,72 \times [2]$	$1,72 \times e^{-79,5t}$	1,72	0,04	0,01	0	0
5	$[3] + [4]$	$i_2 = -0,39e^{-10,5t} + 1,72e^{-79,5t}$	1,33	0,81	0,49	0,18	0,07
6	$-8,25 \times [1]$	$-8,25e^{-10,5t}$	-8,25	-5,03	-3,04	-1,11	-0,41
7	$0,25 \times [2]$	$0,25e^{-79,5t}$	0,25	0,01	0	0	0
8	$[10] + [6] + [7]$	$i_3 = 10 - 8,25e^{-10,5t} + 0,25e^{-79,5t}$	2,0	5,0	7,0	8,9	9,6
9	$-8,64 \times [1]$	$-8,64e^{-10,5t}$	-8,64	-5,27	-3,18	-1,17	-0,43
10	$1,97 \times [2]$	$1,97e^{-79,5t}$	1,92	0,05	0,01	0	0
11	$[9] + [10]$	$i_4 = 10 - 8,64e^{-10,5t} + 1,97e^{-79,5t}$	3,33	4,78	6,83	8,83	9,57
12	$[5] + [8]$	$i_1 = i_2 + i_3$	3,33	5,79	7,45	9,07	9,26
13	$86,6 \times [1]$	$86,6e^{-10,5t}$	86,6	32,8	31,8	11,7	4,33
14	$19,87 \times [2]$	$19,87e^{-79,5t}$	-19,87	-12,1	-7,31	-2,68	-1,0
15	$[13] + [14]$	$u_L = 86,6e^{-10,5t} - 19,87e^{-79,5t}$	6,73	40,7	24,6	9,02	3,33
16	$94 \times [1]$	$94e^{-10,5t}$	94	57,3	36,4	12,7	4,7
17	$-54 \times [2]$	$54e^{-79,5t}$	-54	-1,24	-0,03	0	0
18	$[16] + [17]$	$u_C = 94e^{-10,5t} - 54e^{-79,5t}$	100	114	84,6	-72,7	-64,7

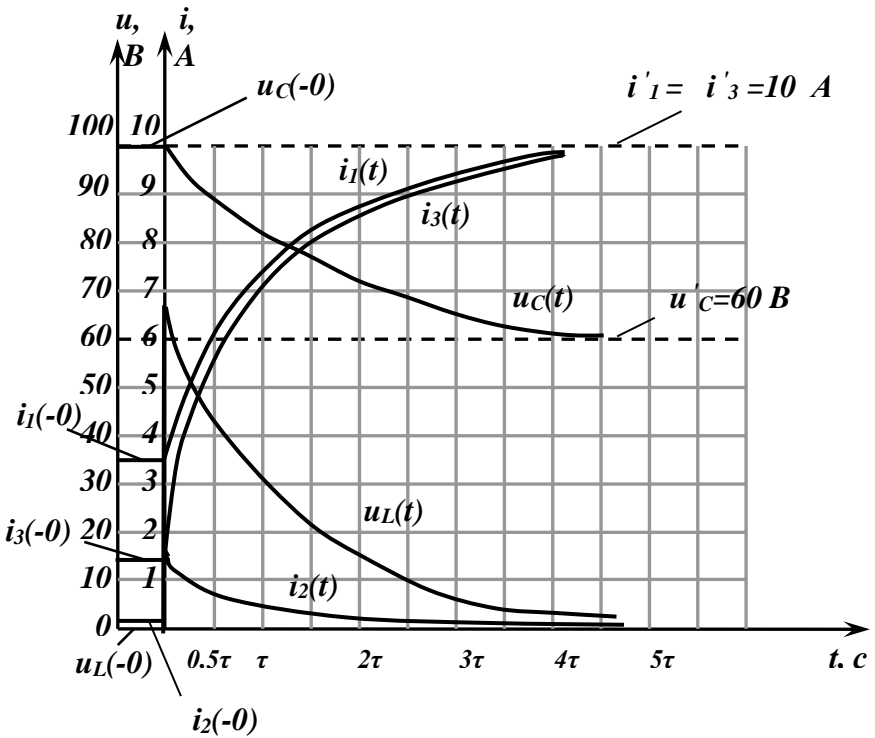


Рис. 4.18

4.3. Операторний метод розрахунку перехідних процесів

4.3.1. Основи операторного методу

Розрахунок перехідних процесів класичним методом зводився до розв'язку інтегрально-диференціальних рівнянь кола. При цьому основні труднощі виникали при визначенні сталих інтегрування.

При використанні операторного методу відпадає необхідність визначення сталих інтегрування.

В операторному методі дійсні функції часу, які називаються оригіналами, замінюють їх операторними зображеннями. Функціональне перетворення вибирають

так, щоб операції диференціювання й інтегрування оригіналів замінювалися алгебраїчними операціями над їх зображеннями. В такому разі диференціальні рівняння оригіналів переходять в алгебраїчні рівняння зображень.

Зв'язок між оригіналом $f(t)$ дійсної функції часу і зображенням $F(p)$ здійснюється за допомогою інтеграла Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (4.63)$$

де $p = \delta + j\omega$ – комплексне число, яке називають оператором Лапласа. Отже, операторне зображення дійсної функції часу є функцією комплексної змінної.

Відповідність між операторним зображенням і його оригіналом записують як

$$F(p) \stackrel{\cdot}{=} f(t). \quad (4.64)$$

4.3.2. Операторні зображення дійсних функцій часу

Операторні зображення функцій знаходять у відповідності з інтегралом (4.63).

1. Зображення сталої величини A має вигляд:

$$A = \int_{+0}^{\infty} A e^{-pt} dt = -\frac{A}{p} e^{-pt} \Big|_{+0}^{\infty} = \frac{A}{p},$$

тобто
$$A \stackrel{\cdot}{=} \frac{A}{p}. \quad (4.65)$$

2. Зображення показникової функції:

$$e^{\alpha t} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p - \alpha}. \quad (4.66)$$

3. Зображення синусоїди:

$$\sin \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (4.67)$$

4. Зображення похідної від дійсної функції часу:

$$f'(t) \stackrel{\cdot}{=} pF(p) - f(0). \quad (4.68)$$

При нульових початкових умовах:

$$f'(t) \doteq pF(p). \quad (4.68,a)$$

5. Напряга на індуктивності:

$$u_L = Ldi/dt.$$

Зображення струму $i(t)$ рівне $I(p)$. Тоді згідно з (4.68) зображення похідної від струму:

$$\frac{di}{dt} \doteq pI(p) - i(0)$$

і зображення напруги на індуктивності:

$$U_L(p) \doteq pLI(p) - Li(0). \quad (4.69)$$

6. Зображення інтеграла від дійсної функції часу:

$$\int_{+0}^t f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (4.70)$$

7. Напряга на ємності:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{+0}^t i dt + u_C(0),$$

де враховано, що до моменту часу t напруга на конденсаторі визначалась не тільки струмом, що протікав через конденсатор в проміжку часу від 0 до t , а й тією напругою $u_C(0)$, яка була на ньому при $t = 0$.

Тоді зображення напруги на ємності:

$$U_C(p) \doteq \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}. \quad (4.71)$$

4.3.3. Перехід від зображень функцій до їх оригіналів

Знаходити оригінал функції за допомогою зворотного перетворення Лапласа дуже складно. Тому на практиці користуються простішим способом, використовуючи так звану теорему розкладання.

Зображення функції спочатку приводять до правильного дробу:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad (4.72)$$

де $F_1(p)$, $F_2(p)$ – поліноми від оператора p . Потім, зважаючи на те, що степінь полінома в чисельнику менший за степінь полінома в знаменнику і, що рівняння $F_2(p) = 0$ не має кратних коренів, а також не має коренів, що дорівнюють кореням рівняння $F_1(p) = 0$. Раціональний дріб (4.72) можна розкладають на простіші дроби:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}, \quad (4.73)$$

де p_k – k -й корінь знаменника; n – кількість коренів знаменника.

Після деяких математичних перетворень зображення (4.73) приводиться до вигляду:

$$F(p) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \times \frac{1}{p - p_k}. \quad (4.73, a)$$

Так як

$$\frac{A_k}{p - p_k} \doteq A_k e^{p_k t},$$

то шуканий оригінал дійсної функції часу запишеться виразом:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (4.74)$$

Це і є математичний запис теореми розкладання.

У частковому випадку, коли один з коренів полінома $F_2(p)$, наприклад p_1 , дорівнює нулеві, то $e^{0 \times t} = 1$ і відповідний член в розкладі (4.74) буде постійною величиною. Виділивши цей член, можна записати:

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2'(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (4.75)$$

Перший доданок в (4.75) – це усталений струм чи напруга. Отже, при $p_1 = 0$ в електричному колі діють відповідні джерела постійної напруги або струму.

Якщо $F_2(p)$ має пару спряжених суто уявних коренів: $p_1 = +j\omega$; $p_2 = -j\omega$, то відповідні доданки:

$$\frac{F_1(j\omega)}{F_2'(j\omega)} e^{j\alpha} + \frac{F_1(-j\omega)}{F_2'(-j\omega)} e^{-j\alpha}$$

визначають синусоїдний струм або синусоїдну напругу усталеного режиму. Це означає, що в колі діють відповідні джерела синусоїдної напруги або струму.

4.3.4. Властивості коренів характеристичного рівняння

У будь-якому складному пасивному колі може відбуватись тільки затухаючий в часі вільний процес, який визначається величиною нагромадженої енергії в магнітних полях індуктивностей та в електричних полях ємностей у початковий момент часу. При застосуванні класичного методу струм у k -й вітці в цьому випадку знаходили в результаті розв'язку однорідного диференціального рівняння.

Оскільки реальний фізичний процес незалежений від того, яким методом його досліджують, то корені характеристичного рівняння класичного методу і корені полінома $F_2(p)$ операторного методу, як такі, що визначають одну й ту ж перехідну реакцію кола, збігаються, а, отже, збігаються і їхні властивості.

Перша властивість цих коренів для пасивного кола полягає в тому, що дійсні частини цих коренів повинні бути від'ємними

$$\operatorname{Re}(p) < 0, \quad (4.76)$$

що є прямим наслідком того, що процес повинен бути затухаючим.

Другою властивістю є та обставина, що всі комплексні корені повинні бути попарно спряженими, так як розв'язки рівняння, які визначають дійсні функції часу (струм $i(t)$ чи напругу $u(t)$), повинні бути дійсними.

Третя властивість полягає в тому, що чисто уявні корені $p_1 = j\omega$ $p_2 = -j\omega$ повинні бути простими.

4.3.5. Основні закони електричних кіл в операторній формі

Перший і другий закони Кірхгофа в операторній формі записуються у вигляді:

$$\sum I_k(p) = 0; \quad \sum E_k(p) = \sum U_k(p).$$

При складанні рівнянь Кірхгофа в операторній формі необхідно задатись додатними напрямками всіх струмів і дотримуватись усіх правил знаків, установлених при складанні рівнянь на підставі законів Кірхгофа для дійсних функцій часу.

Якщо до послідовної *RLC*-вітки (рис. 4.19, а) прикладена напруга $u(t)$, то рівняння другого закону Кірхгофа для неї запишеться у вигляді:

$$u(t) = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0). \quad (4.77)$$

Врахувавши формули (4.69) і (4.71) операторних зображень, які виведені вище для ненульових початкових умов, одержимо (рис. 4.19, б):

$$\begin{aligned} U(p) &= U_R(p) + U_L(p) + U_C(p) = \\ &= RI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} \end{aligned} \quad (4.78)$$

або

$$U(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} = (R + pL + \frac{1}{pC}) \times I(p). \quad (4.78, a)$$

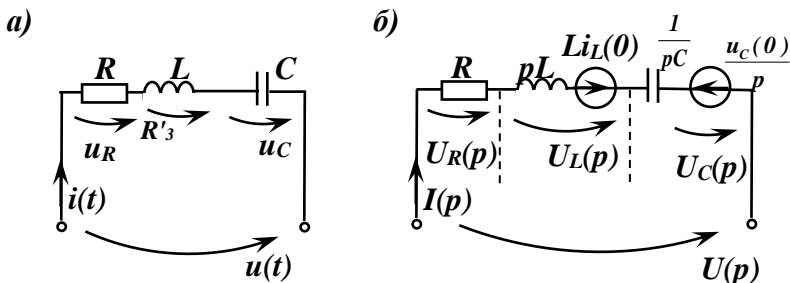


Рис. 4.19

Величину

$$R + pL + \frac{1}{pC} = Z(p) \quad (4.79)$$

називають операторним опором RLC -вітки.

Зважаючи на вищесказане, операторний запис другого закону Кірхгофа в загальному випадку має вигляд:

$$\sum E(p) = \sum \left[Z(p) \times I(p) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} \right]. \quad (4.80)$$

Струм у RLC - вітці і спад напруги на ній в операторній формі зав'язані співвідношенням

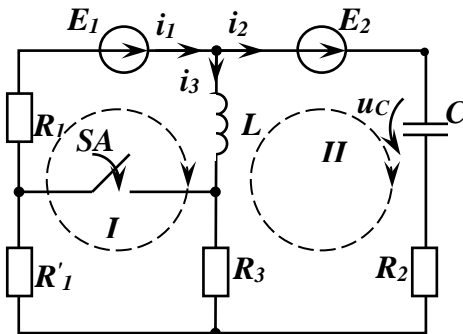
$$I(p) = \frac{U(p) - Li(0) + u_C(0)/p}{Z(p)}, \quad (4.81)$$

яке являє собою закон Ома, узагальнений для випадку перехідного процесу.

Слід зауважити, що операторні рівняння (4.78),..., (4.81) післякомутаційного електричного кола, незважаючи на наявність реактивних елементів, – алгебраїчні. Ці рівняння пов'язані з докомутаційним станом кола за рахунок початкових умов $i_{Lk}(0)$ та $u_{Ck}(0)$.

Розв'язавши операторні рівняння електричного кола, знаходять операторні зображення струмів і напруг. Щоб знайти їх оригінали, використовують теорему розкладання.

4.3.6. Розрахунок перехідного процесу в складному колі операторним методом



В лінійному електричному колі постійного струму (рис. 4.20), фізичні параметри якого:

$$E_1 = 100 \text{ В}; \quad E_2 = 60 \text{ В};$$

$$R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_1' = R_3 = 20 \text{ Ом};$$

Рис. 4.20

$L = 1,1 \text{ Гн}; C = 400 \text{ мкФ}$ відбувається комутація.

Визначимо закони зміни в часі струмів перехідного процесу $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$ та перехідної напруги на ємності $u_C(t)$ операторним методом.

Алгоритм розв'язання

1. Задаємо умовно-додатні напрямки струмів у вітках і позначаємо їх на схемі (рис. 4.20).

2. Визначаємо незалежні початкові умови, тобто значення струму індуктивності $i_L(0)$ і напруги на ємності $u_C(0)$ в момент комутації, розрахувавши докомутаційну схему (рис. 4.20).

Оскільки $i_2(-0) = 0 \text{ А}$ (ємність C заряджена і струму не проводить), то струм буде проходити тільки по першому контуру:

$$i_1(0) = i_3(-0) = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R'_1} = \frac{100}{10 + 20 + 20} = 2 \text{ А.}$$

З рівняння другого закону Кірхгофа для контуру II визначаємо напругу на ємності:

$$u_C(-0) = R_3 \times i_3(-0) + E_2 = 20 \times 2 + 60 = 100 \text{ В.}$$

На підставі законів комутації:

$$i_3(0) = i_3(-0) = 2 \text{ А, } u_C(0) = u_C(-0) = 100 \text{ В.}$$

3. Складемо операторну схему кола (рис. 4.21) для післякомутаційного періоду, в яку увійдуть:

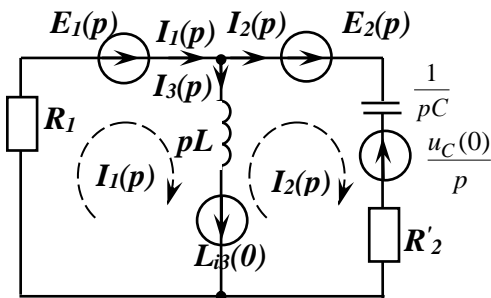


Рис. 4.21

- еквівалентний опір:

$$R'_2 = \frac{R'_1 \times R_3}{R'_1 + R_3} + R_2 = \frac{20 \times 20}{20 + 20} + 10 = 20 \text{ Ом;}$$

- операторний опір індуктивності:

$$p \times L = p \times 1,1 = 1,1p \text{ Ом;}$$

- операторний опір ємності:

$$\frac{I}{p \times C} = \frac{I}{p \times 400 \times 10^{-6}} = \frac{2500}{p} \text{ Ом};$$

- операторні ЕРС:

$$E_1(p) = \frac{E_1}{p} = \frac{100}{p} B \cdot c ; \quad E_2(p) = \frac{E_2}{p} = \frac{60}{p} B \cdot c ;$$

- операторні струми:

$$I_1(p), I_2(p) \text{ й } I_3(p).$$

Завдяки ненульовим початковим умовам ($i_L(0) = 2 \text{ А}$; $u_C(0) = 100 \text{ В}$) в операторній схемі наявні ЕРС додаткових джерел енергії (розрахункові ЕРС): $Li_3(0) = I, I \times 2 = 2,2 \text{ В} \cdot c$ і $u_C(0)/p = (100/p) \text{ В} \cdot c$, які увімкнуті послідовно з індуктивністю L і ємністю C відповідно, причому, напрямок розрахункової ЕРС $Li_3(0)$ співпадає з напрямком операторного струму $I_3(p)$ індуктивності, а розрахункова ЕРС $u_C(0)/p$ спрямована назустріч операторному струму $I_2(p)$ у вітці з ємністю.

4. Знаходимо операторні зображення струмів $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$ і операторну напругу $U_C(p)$ і, спрощуючи їх, приводимо до стандартного вигляду:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}.$$

Розрахуємо операторну схему (рис. 4.21) методом контурних струмів. Вважаючи, що в незалежних контурах течуть операторні струми $I_1(p)$ й $I_2(p)$ запишемо систему контурних рівнянь схеми (рис. 4.21):

$$\left. \begin{aligned} Z_{11}(p)I_1(p) + Z_{12}(p)I_2(p) &= E_{11}(p); \\ Z_{21}(p)I_1(p) + Z_{22}(p)I_2(p) &= E_{22}(p), \end{aligned} \right\} (4.82)$$

де $Z_{11}(p)$ і $Z_{22}(p)$ – операторні опори контурів I і II.

$$Z_{11}(p) = R_1 + pL = 10 + p \times 1 = (10 + p) \text{ Ом};$$

$$Z_{22}(p) = R'_2 + pL + \frac{I}{pC} = 20 + p \times 1 + \frac{10^6}{p \times 400} =$$

$$= \left(20 + p + \frac{2500}{p} \right) \text{ Ом};$$

$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = -p \times I = -p \text{ Ом}$ – операторний опір суміжної міжконтурної вітки;

$E_{11}(p)$ і $E_{22}(p)$ – операторні контурні ЕРС:

$$E_{11}(p) = \frac{E_1}{p} + Li_3(0) = \frac{100}{p} + 1 \times 2 = \left(\frac{100}{p} + 2 \right) \text{ В};$$

$$E_{22}(p) = \frac{E_2}{p} - \frac{u_c(0)}{p} - Li_3(0) = \frac{60}{p} - \frac{100}{p} - 1 \times 2 =$$

$$= \left(-\frac{40}{p} - 2 \right) \text{ В}.$$

Після підстановки числових значень система (4.82) прийме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} [10 + p] \times I_1(p) - p \times I_2(p) &= \frac{100}{p} + 2; \\ -p \times I_1(p) + \left[20 + p + \frac{2500}{p} \right] \times I_2(p) &= -\frac{40}{p} - 2. \end{aligned} \right\} (4.82, a)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (4.82, a) методом детермінантів.

Головний детермінант системи:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} (10 + p) & -p \\ -p & \left(20 + p + \frac{2500}{p} \right) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{30p^2 + 2700p + 2,5 \times 10^4}{p}.$$

Допоміжні детермінанти:

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} \left(\frac{100}{p} + 2\right) & -p \\ -\frac{40}{p} - 2 & \left(20 + p + \frac{2500}{p}\right) \end{vmatrix} = \frac{100p^2 + 70000p + 2,5 \times 10^5}{p^2};$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} (10 + p) & \left(\frac{100}{p} + 2\right) \\ -p & \left(-\frac{40}{p} - 2\right) \end{vmatrix} = \frac{40p - 400}{p}.$$

Операторні зображення струмів знаходимо у вигляді:

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{100p^2 + 7000p + 2,5 \times 10^5}{p(30p^2 + 2700p + 2,5 \times 10^4)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{p \times F_4(p)}; \quad (4.83)$$

$$I_2(p) = \frac{\Delta_2(p)}{\Delta(p)} = \frac{40p - 400}{30p^2 + 2700p + 2,5 \times 10^4} = \frac{F_3(p)}{F_4(p)}. \quad (4.84)$$

Операторе зображення напруги на ємності з врахуванням розрахункової ЄРС:

$$\begin{aligned} U_c(p) &= \frac{1}{pC} \times I_2(p) + \frac{u_c(0)}{p} = \\ &= \frac{1}{pC} \times \frac{40p - 400}{30p^2 + 2700p + 2,5 \times 10^4} + \frac{100}{p} = \\ &= \frac{3 \times 10^3 p^2 + 3,7 \times 10^5 p + 1,5 \times 10^6}{p(30p^2 + 2700p + 2,5 \times 10^4)} = \\ &= \frac{H_1(p)}{H_2(p)} = \frac{H_1(p)}{F_2(p)}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

5. Визначаємо оригінали струмів $i_1(t)$ й $i_2(t)$ та напруги $u_c(t)$ за їхніми операторними зображеннями $I_1(p)$, $I_2(p)$ й $U_c(p)$.

5.1. Проведемо розрахунки для визначення виразу оригіналу струму $i_1(t)$. Для цього згідно з теоремою розкладання прирівнюємо до нуля знаменник $F_2(p)$ виразу (4.83) операторного зображення струму $I_1(p)$:

$$p(30p^2 + 2700p + 2,5 \times 10^4) = 0 \quad (4.86)$$

і обчислимо його корені.

Прирівнявши до нуля перший співмножник цього виразу, одержимо нульовий корінь характеристичного рівняння: $p_1 = 0$.

Прирівнявши до нуля другий співмножник:

$$30p^2 + 2700p + 2,5 \times 10^4 = 0,$$

одержуємо:

$$p_2 = -10,5 \text{ c}^{-1}; \quad p_3 = -79,5 \text{ c}^{-1}.$$

Отже, ненульові корені p_2 і p_3 рівняння (4.86) мають такі ж значення, як і корені характеристичного рівняння (4.49) при розрахунку перехідного процесу класичним методом, що підтверджує правильність проведених обчислень.

Знаходимо похідну $F_2'(p)$ знаменника виразу (4.83) операторного зображення струму $I_1(p)$:

$$\begin{aligned} F_2'(p) &= \frac{d}{dp}(30p^3 + 2700p^2 + 2,5 \times 10^4 p) = \\ &= 90p^2 + 5400p + 2,5 \times 10^4. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Визначимо оригінал струму $i_1(t)$. Для цього обчислимо значення виразів $F_1(p_k)$ і $F_2'(p_k)$, де $k = 1, 2, 3$:

а) $p_1 = 0$;

$$F_1(p_1) = F_1(0) = 2,5 \times 10^5; \quad F_2'(p_1) = F_2'(0) = 2,5 \times 10^4;$$

б) $p_2 = -10,5 \text{ c}^{-1}$;

$$\begin{aligned} F_1(p_2) &= F_1(-10,5) = 100 \times (-10,5)^2 + \\ &+ 7000 \times (-10,5) + 2,5 \times 10^5 = 1,87 \times 10^5; \end{aligned}$$

$$F_2'(p_2) = F_2'(-10,5) = 90 \times (-10,5)^2 + \\ + 5400 \times (-10,5) + 2,5 \times 10^4 = -2,18 \times 10^4;$$

$$\text{в) } p_3 = -79,5 \text{ c}^{-1};$$

$$F_1(p_3) = F_1(-79,5) = 100 \times (-79,5)^2 + \\ + 7000 \times (-79,5) + 2,5 \times 10^5 = 3,25 \times 10^5;$$

$$F_2'(p_3) = F_2'(-79,5) = 90 \times (-79,5)^2 + \\ + 5400 \times (-79,5) + 2,5 \times 10^4 = 1,64 \times 10^4.$$

Згідно з теоремою розкладання перехідний струм $i_1(t)$ запишеться виразом:

$$i_1(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)} e^{p_3 t} = \\ = \frac{2,5 \times 10^5}{2,5 \times 10^4} e^{0 \times t} + \frac{1,87 \times 10^5}{-2,18 \times 10^4} e^{-10,5 \times t} + \\ + \frac{3,25 \times 10^5}{1,64 \times 10^4} e^{-79,5 \times t} = (10 - 8,64 e^{-10,5t} + 1,98 e^{-79,5t}) \text{ A.} \quad (4.88)$$

При обчисленні перехідного струму $i_1(t)$ класичним методом було одержано вираз (4.60):

$$i_1(t) = (10 - 8,25 e^{-10,5t} + 1,97 e^{-79,5t}) \text{ A.}$$

Як видно, розходження між виразами (4.60) і (4.88) невелике.

5.2. Проведемо обчислення з метою визначення виразу для перехідної напруги $u_c(t)$ на ємності.

Так як знаменник виразу (4.85) операторної напруги $U_c(p)$ такий самий, як і вираз (4.83) знаменника струму $I_1(p)$, то, прирівнявши його до нуля, одержимо для рівняння $F_2(p) = 0$ ті ж самі корені: $p_1 = 0$; $p_2 = -10,5 \text{ c}^{-1}$; $p_3 = -79,5 \text{ c}^{-1}$.

Похідна від знаменника $H_2(p)$ виразу (4.85) операторної напруги $U_c(p)$:

$$F_2'(p) = H_2'(p) = 90 p^2 + 5400 p + 2,5 \times 10^4.$$

Обчислюємо значення $H_1(p_k)$ і $H_2(p_k)$, де $k = 1, 2, 3$:

а) $p_1 = 0$;

$$H_1(p_1) = H_1(0) = 1,5 \times 10^6;$$

$$H_2'(p_1) = H_2'(0) = F_2'(0) = 2,5 \times 10^4;$$

б) $p_2 = -10,5 \text{ c}^{-1}$;

$$\begin{aligned} H_1(p_2) &= H_1(-10,5) = 3 \times 10^3 \times (-10,5)^2 + \\ &+ 3,7 \times 10^5 \times (-10,5) + 1,5 \times 10^6 = \\ &= -2,05 \times 10^6; \end{aligned}$$

$$H_2'(p_2) = H_2'(-10,5) = F_2'(-10,5) = -2,18 \times 10^4;$$

в) $p_3 = -79,5 \text{ c}^{-1}$;

$$\begin{aligned} H_1(p_3) &= H_1(-79,5) = 3 \times 10^3 \times (-79,5)^2 + \\ &+ 3,7 \times 10^5 \times (-79,5) + 1,5 \times 10^6 = \\ &= -8,95 \times 10^6; \end{aligned}$$

$$H_2'(p_3) = H_2'(-79,5) = F_2'(-79,5) = 1,64 \times 10^5.$$

Згідно з теоремою розкладання перехідна напруга $u_C(t)$ запишеться виразом:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{H_1(p_1)}{H_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{H_1(p_2)}{H_2'(p_2)} e^{p_2 t} + \\ &+ \frac{H_1(p_3)}{H_2'(p_3)} e^{p_3 t} = \frac{1,5 \times 10^6}{2,5 \times 10^4} e^{0 \times t} + \\ &+ \frac{-2,5 \times 10^6}{-2,18 \times 10^4} e^{-10,5 \times t} + \frac{-8,95 \times 10^6}{1,64 \times 10^4} e^{-79 \times t} = \\ &= (60 + 94,31 e^{-10,5t} - 54,43 e^{-79t}) \text{ В}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

При обчисленні напруги $u_C(t)$ класичним методом було одержано вираз (4.62):

$$u_c(t) = (60 + 94,2e^{-10,5t} - 54,1e^{-79t}) B.$$

Як видно, розходження між виразами (4.62) і (4.89) невелике.

5.3. Проведемо обчислення з метою визначення виразу для перехідного струму $i_2(t)$. Прирівнявши до нуля знаменник $F_4(p)$ виразу (4.84) операторного струму

$$I_2(p): \quad 30p^2 + 2700p + 2,5 \times 10^4 = 0,$$

знаходимо корені: $p_2 = -10,5 c^{-1}$; $p_3 = -79,5 c^{-1}$.

Знаходимо похідну $F_4'(p)$ від знаменника $F_4(p)$ виразу (4.84):

$$F_4'(p) = \frac{d}{dp}(30p^2 + 2700p + 2,5 \times 10^4) = 60p + 2700.$$

Обчислюємо значення $F_3(p_k)$ і $F_4'(p_k)$, де $k = 2, 3$:

а) $p_2 = -10,5 c^{-1}$;

$$F_3(p_2) = F_3(-10,5) = 40 \times (-10,5) - 400 = -820;$$

$$F_4'(p_2) = F_4'(-10,5) = 60 \times (-10,5) + 2700 = 2070;$$

б) $p_3 = -79,5 c^{-1}$;

$$F_3(p_3) = F_3(-79,5) = 40 \times (-79,5) - 400 = -3580;$$

$$F_4'(p_3) = F_4'(-79,5) = 60 \times (-79,5) + 2700 = -2070.$$

Згідно з теоремою розкладання перехідний струм $i_2(t)$ запишеться виразом:

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{F_3(p_2)}{F_4'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{F_3(p_3)}{F_4'(p_3)} e^{p_3 t} = \\ &= \frac{-820}{2070} e^{-10,5t} + \frac{-3580}{-2070} e^{-79,5t} = \quad (4.90) \\ &= (0,4e^{-10,5t} + 1,73e^{-79,5t}) A. \end{aligned}$$

Класичним методом було одержано вираз (4.58):

$$i_2(t) = (-0,39e^{-10,5t} + 1,72e^{-79,5t}) A.$$

Як видно, розходження між виразами (4.58) і (4.90) невелике.

4.4. Розрахунок перехідного процесу в синусоїдному колі класичним методом

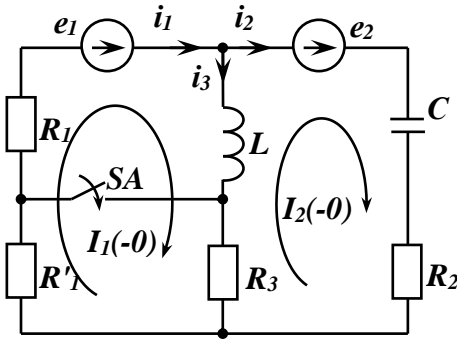


Рис. 4.22

якщо задані діючі значення ЕРС: $E_1 = 90 \text{ В}$; $E_2 = 60 \text{ В}$ і фізичні параметри кола: $R_1 = R'_1 = R_2 = R_3 = 50 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ Гн}$; $C = 500 \text{ мкФ}$; $\psi_{e1} = \psi_{e2} = 45^\circ$; $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$.

Розв'язання

1. Проведемо аналіз схеми до комутації і визначимо незалежні початкові умови.

Обчислимо миттєві значення синусоїдних ЕРС:

$$e_1(t) = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_{e1}) = 90\sqrt{2} \sin(200t + 45^\circ) \text{ В};$$

$$e_2(t) = E_{m2} \sin(\omega t + \psi_{e2}) = 60\sqrt{2} \sin(200t + 45^\circ) \text{ В}.$$

Вважаючи, що в незалежних контурах протікають комплексні струми $\dot{I}_1^{\&(-0)}$ й $\dot{I}_2^{\&(-0)}$, розрахуємо схему методом контурних струмів.

З метою визначення цих струмів запишемо систему контурних рівнянь кола в комплексній формі:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11}(-0) \times \dot{I}_1^{\&(-0)} + \underline{Z}_{12}(-0) \times \dot{I}_2^{\&(-0)} &= E_{11}(-0); \\ \underline{Z}_{21}(-0) \times \dot{I}_1^{\&(-0)} + \underline{Z}_{22}(-0) \times \dot{I}_2^{\&(-0)} &= E_{22}(-0). \end{aligned} \right\} (4.91)$$

В системі (4.91) власні комплексні опори незалежних контурів:

В лінійному електричному колі з синусоїдними ЕРС $e_1(t)$ і $e_2(t)$ відбувається комутація (рис. 4.22).

Визначимо значення струмів у вітках і напруг на реактивних елементах кола в момент комутації (при $t = 0$),

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11}(-0) &= R'_1 + R_1 + R_3 + j\omega L = 150 + j200 \times 0,1 = \\ &= 150 + j20 = 151,3e^{j8^\circ} \text{ Ом};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{22}(-0) &= R_3 + R_2 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = \\ &= 100 + j20 - j\frac{1 \times 10^6}{200 \times 500} = \\ &= 100 + j20 - j10 = 10,5e^{j5,7^\circ} \text{ Ом}.\end{aligned}$$

Комплексний опір суміжної вітки буде від'ємним, так як контурні струми протікають через нього у взаємно протилежних напрямках:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{12}(-0) &= \underline{Z}_{21}(-0) = -(R_3 + j\omega L) = \\ &= -(50 + j20) = -53,9e^{j21,8^\circ} \text{ Ом}.\end{aligned}$$

$\underline{E}_{11}^{\&}(-0)$ і $\underline{E}_{22}^{\&}(-0)$ – комплексні контурні ЕРС незалежних контурів:

$$\begin{aligned}\underline{E}_{11}^{\&}(-0) &= \underline{E}_1^{\&} = E_1 e^{j\psi_{e1}} = 90e^{j45^\circ} \text{ В}; \\ \underline{E}_{22}^{\&}(-0) &= \underline{E}_2^{\&} = E_2 e^{j\psi_{e2}} = 60e^{j45^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Підставимо обчислені значення комплексних опорів і комплексних ЕРС у систему контурних рівнянь (4.91):

$$\left. \begin{aligned}151,3e^{j8^\circ} \times \underline{I}_1^{\&}(-0) - 53,9e^{j21,8^\circ} \times \underline{I}_2^{\&}(-0) &= 90e^{j45^\circ}; \\ -53,9e^{j21,8^\circ} \times \underline{I}_1^{\&}(-0) + 100,5e^{j5,7^\circ} \times \underline{I}_2^{\&}(-0) &= 60e^{j45^\circ}.\end{aligned} \right\} (4.91, a)$$

Розв'яжемо цю систему методом детермінантів (визначників):

$$\begin{aligned}\Delta(-0) &= \begin{vmatrix} 151,3e^{j8^\circ} & -53,9e^{j21,8^\circ} \\ -53,9e^{j21,8^\circ} & 100,5e^{j5,7^\circ} \end{vmatrix} = 15206e^{j13,7^\circ} - 2905e^{j43,6^\circ} = \\ &= 14773 + j3600 - 2104 - j2003 = 12669 + j1597 = \\ &= 12770e^{j7,2^\circ} \text{ Ом}^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1(-0) &= \begin{vmatrix} 90e^{j45^\circ} & -53,9e^{j21,8^\circ} \\ 60e^{j45^\circ} & 100,5e^{j5,7^\circ} \end{vmatrix} = 9045e^{j50,7^\circ} + 3234e^{j66,8^\circ} = \\ &= 5729 + j7000 + 1274 + j2972 = 7003 + j9972 = \\ &= 12185e^{j55^\circ} \text{ В} \cdot \text{Ом}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(-0) &= \begin{vmatrix} 151,3e^{j8^\circ} & 90e^{j45^\circ} \\ -53,9e^{j21,8^\circ} & 60e^{j45^\circ} \end{vmatrix} = 9078e^{j53^\circ} + 4851e^{j66,8^\circ} = \\ &= 5463 + j7250 + 1911 + j4459 = 7374 + j11709 = \\ &= 13838e^{j60^\circ} \text{ В} \cdot \text{Ом}. \end{aligned}$$

Комплексні струми $\dot{I}_1(-0)$ та $\dot{I}_2(-0)$ визначаються, як

$$\begin{aligned} \dot{I}_1(-0) &= \frac{\Delta_1(-0)}{\Delta(-0)} = \frac{12185e^{j55^\circ}}{12770e^{j7,2^\circ}} = 0,95e^{j47,8^\circ} = (0,64 + j0,70) \text{ А}; \\ \dot{I}_2(-0) &= \frac{\Delta_2(-0)}{\Delta(-0)} = \frac{13838e^{j60^\circ}}{12770e^{j7,2^\circ}} = 1,08e^{j52,8^\circ} = (0,65 + j0,86) \text{ А}. \end{aligned}$$

Комплексний струм $\dot{I}_3(-0)$ визначимо згідно з першим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_3(-0) &= \dot{I}_1(-0) - \dot{I}_2(-0) = 0,64 + j0,70 - 0,65 - j0,86 = \\ &= -0,01 - j0,16 = 0,16e^{-j93,6^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Комплексна напруга на ємності:

$$\begin{aligned} \dot{U}_C(-0) &= \underline{Z}_C(-0) \times \dot{I}_2(-0) = -j10 \times 1,08e^{j52,8^\circ} = \\ &= 10e^{-j90^\circ} \times 1,08e^{j52,8^\circ} = 10,8e^{-j37,2^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Миттєві значення струму індуктивності і напруги на ємності:

$$\begin{aligned} i_L(-0) &= i_3(-0) = 0,16 \times \sqrt{2} \sin(200t - 93,6^\circ) \text{ А}; \\ u_C(-0) &= 10,8 \times \sqrt{2} \sin(200t - 37,2^\circ) \text{ В}. \end{aligned}$$

Підставивши в ці вирази значення $t = 0$ (момент комутації) і провівши обчислення одержимо незалежні початкові умови:

$$\left. \begin{aligned} i_L(0) &= 0,16 \times \sqrt{2} \sin(200 \times 0 - 93,6^\circ) = -0,23 \text{ A}; \\ u_C(0) &= 10,8 \times \sqrt{2} \sin(200 \times 0 - 32,2^\circ) = -9,2 \text{ B}. \end{aligned} \right\} (4.92)$$

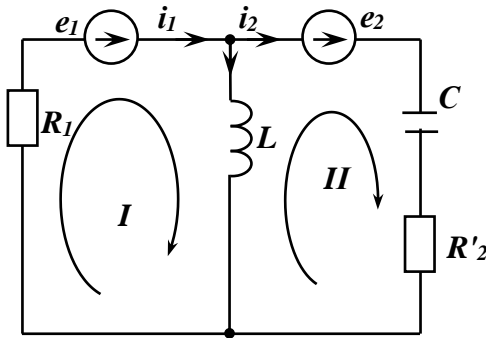


Рис. 4.23

2. Проведемо аналіз післякомутаційної схеми (рис. 4.23), в якій опір R'_2 утворився внаслідок комбінованого з'єднання опорів: R'_1, R_3 і R_2 внаслідок комутації:

$$R'_2 = \frac{R'_1 \times R_3}{R'_1 + R_3} + R_3 = \frac{50 \times 50}{50 + 50} + 50 = 75 \text{ Ом.}$$

Згідно з законами Кірхгофа складемо систему диференціальних рівнянь кола для післякомутаційної схеми:

$$\left. \begin{aligned} i_1(t) &= i_2(t) + i_3(t); \\ R_1 i_1(t) + L \frac{di_3}{dt} &= e_1(t); \\ u_C(t) + R'_2 i_2(t) - L \frac{di_3}{dt} &= e_2(t). \end{aligned} \right\} (4.93)$$

Для моменту комутації (при $t = 0$) система (4.93) прийме вигляд

$$\left. \begin{aligned} i_1(0) &= i_2(0) + i_3(0); \\ R_1 i_1(0) + L \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} &= e_1(0); \\ u_c(0) + R_2' i_2(0) - L \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} &= e_2(0). \end{aligned} \right\} (4.93, a)$$

Обчислимо значення синусоїдних ЕРС в момент комутації

$$e_1(0) = 90\sqrt{2} \sin(200 \times 0 + 45^\circ) = 90\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 90 \text{ В};$$

$$e_2(0) = 60\sqrt{2} \sin(200 \times 0 + 45^\circ) = 60\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 60 \text{ В}.$$

Підставивши в систему рівнянь (4.93, а) числові значення опорів R_1, R_2' , струму $i_L(0)$, напруги $u_c(0)$ і ЕРС $e_1(0)$ та $e_2(0)$, одержимо

$$\left. \begin{aligned} i_1(0) &= i_2(0) + (-0,23); \\ 50i_1(0) + L \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} &= 90; \\ -9,2 + 75i_2(0) - L \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} &= 60. \end{aligned} \right\} (4.93, б)$$

Щоб розв'язати цю систему рівнянь, візьмемо вираз напруги на індуктивності $L \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} = 90 - 50i_1(0)$ з другого рівняння і підставимо в третє рівняння системи (4.93, б):

$$-9,2 + 75i_2(0) - 90 + 50i_1(0) = 60,$$

або
$$50i_1(0) + 75i_2(0) = 159,2. \quad (4.94)$$

Підставимо в рівняння (4.94) вираз $i_1(0) = i_2(0) - 0,23$ з першого рівняння системи (4.93, б):

$$50i_2(0) - 50 \times 0,23 + 75i_2(0) = 159,2.$$

$$125i_2(0) = 170,7 .$$

Звідки
$$i_2(0) = \frac{170,7}{125} = 1,36 \text{ А} .$$

Тоді
$$i_1(0) = i_2(0) - 0,2 = 1,36 - 0,23 = 1,13 \text{ А} .$$

Значення напруги на індуктивності в момент комутації:

$$u_L(0) = L \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} = 90 - 50i_1(0) = 90 - 50 \times 1,13 = 33,5 \text{ В} .$$

Перевірка

Підставивши обчислені значення струму $i_2(0)$ і напруги $u_L(0)$ в третє рівняння системи (4.93, б), одержимо

$$-9,2 + 75i_2(0) - L \left(\frac{di_3}{dt} \right)_{t=0} = 60 ;$$

або

$$\begin{aligned} -9,2 + 75 \times 1,36 - 33,5 &= 60 ; \\ 59,3 \text{ В} &\approx 60 \text{ В} . \end{aligned}$$

Як видно, розходження не велике.