**Лінійні векторні простори**

*План*

1. ***Вектори. Лінійні операції над векторами***
2. ***Проекція вектора на вісь***

***3. Поняття лінійної залежності та незалежності векторів. Базис***

1. ***Вектори. Лінійні операції над векторами***

*Означення .* *Вектором*називається напрямлений відрізок.

Вектор визначається впорядкованою парою точок. Перша з них називається початком, друга – кінцем вектора. Якщо початком вектора є точка $A$, а кінцем точка $B$, то його позначають символом $\vec{AB}$. Іноді використовують позначення у вигляді малої букви латинського алфавіту (наприклад, $\vec{a}$). На рисунку вектор зображають відрізком із стрілкою в кінці вектора.

Вектор, початок та кінець якого співпадають, називається *нульовим*і *Основними характеристиками вектора* є його довжина та напрям.

*Довжиною (модулем) вектора* називають довжину відрізка, яким він зображається. Позначають довжину вектора символом  Наприклад, $\left|\vec{a}\right|$. Якщо довжина вектора рівна одиниці, то його називають *одиничним* або *ортом.* Очевидно, що $\vec{θ}=0$.

Під *напрямом вектора* $\vec{AB}$ розуміють напрям променя $AB.$Нульовому вектору присвоюють довільний напрям.

*Означення.*Два вектори називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

*Означення.*Три вектори називають *компланарними*, якщо вони паралельні деякій площині.

*Означення.*Два колінеарних вектори називають *однаково (протилежно) напрямленими*, якщо вони лежать в одній півплощині (в різних півплощинах) відносно прямої, яка сполучає їхні початки. Якщо два вектори $\vec{AB}$ та $\vec{CD}$ лежать на одній прямій, то їх називають однаково напрямленими, якщо всі точки одного із променів $AB$ або $CD$ належать іншому. Якщо жоден із променів $AB$ та $CD$ цілком не належить іншому, то вектори $\vec{AB}$ та $\vec{CD}$ називають протилежно напрямленими.

Однаково напрямлені вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначають символом $\vec{a}\uparrow \uparrow \vec{b}$. Протилежно напрямлені вектори позначають $\vec{a}\uparrow \downright \vec{b}$ .

Два вектори, які мають однакові довжини та протилежні напрямки, називають *протилежними*. Вектор, протилежний до $\vec{a}$ позначають символом -$\vec{a}$.

*Означення.*Два вектори називають *рівними*, якщо вони однаково напрямлені та мають рівні довжини, позначають $\vec{a}$=$\vec{b}$.

*Означення. Сумою векторів*$\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор, проведений з початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$ при умові, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$ (рис. 2). Суму векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначають символом $\vec{a}$ + $\vec{b}$. Означений таким чином спосіб додавання векторів називають «*правилом трикутника».*

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ відкласти із спільного початку та на одержаних відрізках, як на сторонах, побудувати паралелограм, то вектор, який співпадає з діагоналлю та має початок у спільному початку даних векторів, буде їхньою сумою (рис. 3). Такий спосіб знаходження суми векторів називається *«правилом паралелограма».*













 Рис. 2 Рис. 3

*Означення. Різницею* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають суму векторів $\vec{a}$ та $-\vec{b},$ тобто $\vec{a}$ $- \vec{b}= \vec{a}$ $+(- \vec{b})$.













 Рис. 4 Рис. 5

Нехай заданий деякий вектор $\vec{a}$ та дійсне число $t$.

*Означення. Добутком вектора* $\vec{a}$ *на число* $t$ називають вектор $\vec{c}$ який задовольняє наступні умови:

1) довжина цього вектора $\left|\vec{c}\right|=\left|t\right|\left|\vec{a}\right|,$

2) $\vec{c}\uparrow \uparrow \vec{a},$ якщо $t>0$ та $\vec{c}\uparrow \downright \vec{a}$, якщо $t<0$.

Множення вектора на число має ряд властивостей, зокрема такі:

1) $1∙\vec{a}=\vec{a}$;

2) $-1∙\vec{a}=-\vec{a}$;

3) $0∙\vec{a}=\vec{θ}$;

4) $t∙\vec{θ}=\vec{θ}$;

5) $t\left(l\vec{a}\right)=(tl)\vec{a}$; (асоціативність множення відносно числових множників  та );

6) $t\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=t\vec{a}+t\vec{b};$(дистрибутивність множення відносно числового множника);

7) $\left(t+l\right)\vec{a}=t\vec{a}+l\vec{a};$ (дистрибутивність множення відносно векторного множника).

***2. Проекція вектора на вісь***

Нехай у просторі задано деяку вісь $l$ і вектор $\vec{AB}$. Проведемо через точки $A$ і $B$ площини, перпендикулярно до осі $l$ (рис. 6). Позначимо точки перетину цих площин з віссю *l* відповідно $A^{'}$ і $B^{'}$.



Рис. 6

*Проекцією вектора* $\vec{AB}$ *на вісь* $l$ називається довжина $A^{'}B^{'}$ напрямленого відрізка $\vec{A^{'}B^{'}}$ на осі $l$.

Позначається проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь $l$: $πp\_{l}\vec{AB}$ та $πp\_{l}\vec{AB}=\left|\vec{AB}\right|cosφ,$ де $φ$ — кут між вектором і віссю.

***Теорема.*** *Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь*.

***Теорема.*** *При множенні вектора на число його проекція на цю вісь також множиться на це число*.

***3. Поняття лінійної залежності та незалежності векторів. Базис***

Нехай задані вектори  та числа .

Вектор  називається *лінійною комбінацією векторів* (*вектор  лінійно виражається через вектори*) .

Якщо рівність

  (4.1)

можлива при деяких ненульових коефіцієнтах, то вектори  називають *лінійно залежними*. Якщо ж дана рівність виконується тільки при нульових коефіцієнтах, то вектори  називають *лінійно незалежними*.

***Теорема.*** *Вектори  лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших.*

***Теорема.*** *Якщо серед векторів  є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.*

***Теорема.*** *Якщо деяка система векторів містить лінійно залежну підсистему, то ці вектори лінійно залежні.*

***Теорема.*** *Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.*

***Теорема.*** *Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.*

***Теорема.*** *Будь-які чотири геометричні вектори лінійно залежні.*

Упорядкована трійка лінійно незалежних векторів $\vec{e\_{1}}, \vec{e\_{2}}, \vec{e\_{3}} $в просторі називається його *базисом.* Довільний вектор $\vec{a}$ у просторі можна розкласти за його базисними векторами $\vec{a}=α\vec{e\_{1}}+β\vec{e\_{2}}+γ\vec{e\_{3}},$ де $α, β, γ-$ координати вектора в цьому базисі.

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається *ортонормованим базисом.* Позначають ортонормований базис через вектори $ \vec{i}, \vec{ j}, \vec{k}$, що за напрямом збігаються з осями *Ох*, *Оу*, *Оz* і . Такі вектори надалі називатимемо *одиничними векторами* осей системи координат. Тоді

 (4.2)

є розкладом вектора за базисними векторами $\vec{i}, \vec{ j}, \vec{k},$ а числа $a\_{x}, a\_{y}, a\_{z}$ координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі.

Координати вектора в системі координат $Oxyz$ це його проекції на осі координат $a\_{x}=$ *Прox*$\vec{a}$*,* $a\_{y}=$ *Прoy*$\vec{a}$*,* $a\_{z}=$ *Прoz* $\vec{a}$*.*

Якщо розглянути прямокутну декартову систему координат і точки початку *А* (*х*1, *у*1, *z*1) і кінця *В* (*х*2, *у*2, *z*2) вектора , то проекції вектора  на кожну з осей мають вигляд:

*Ох*: *ах* = *х*2 – *х*1, *Оу*: *ау* = *у*2 – *у*1, *Оz*: *а*z = *z*2 – *z*1.

*Довжина вектора* подається формулою:

  (4.3)

Якщо позначити α, β, γ — кути між вектором і відповідними осями системи координат, то їх косинуси можна знайти за формулами:

 . (4.4)

У подальшому називатимемо їх *напрямними косинусами вектора* $\vec{a}.$ Для напрямних косинусів виконується

cos2α + cos2β + cos2γ = 1.

*Поділ відрізка у заданому відношенні*

Число $δ$ — називається відношенням, в якому точка$M\_{2}$ ділить відрізок $M\_{1}M\_{3}$ (рис. 7), якщо $δ=\frac{\left|M\_{1}M\_{2}\right|}{\left|M\_{2}M\_{3}\right|}$.

Нехай задано $δ$ і координати точок $M\_{1}=\left(x\_{1},y\_{1}\right), M\_{3}=\left(x\_{3},y\_{3}\right),$треба знайти координати точки $M\_{2}=\left(x\_{2},y\_{2}\right)$.



Рис. 7

З рис. 7 і теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, випливають співвідношення:

$$\frac{\left|x\_{2}-x\_{1}\right|}{\left|x\_{3}-x\_{2}\right|}=\frac{\left|M\_{1}M\_{2}\right|}{\left|M\_{2}M\_{3}\right|}=δ.$$

Оскільки числа $x\_{2}-x\_{1}$ і $x\_{3}-x\_{2}$ одного й того самого знака, то $\frac{\left|x\_{2}-x\_{1}\right|}{\left|x\_{3}-x\_{2}\right|}=\frac{x\_{2}-x\_{1}}{x\_{3}-x\_{2}}$. Отже, $\frac{x\_{2}-x\_{1}}{x\_{3}-x\_{2}}=δ$. Звідси:

$$x\_{2}=\frac{x\_{1}+δx\_{3}}{1+δ}; y\_{2}=\frac{y\_{1}+δy\_{3}}{1+δ}.$$

**Добутки векторів**

*План*

1. ***Скалярний добуток векторів***
2. ***Векторний добуток двох векторів***
3. ***Мішаний добуток трьох векторів***
4. ***Скалярний добуток векторів***

*Означення. Скалярним добутком двох ненульових векторів* $\vec{a}$ *і*$ \vec{b}$ називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Отже,

$\vec{a}∙\vec{b}=\left|\vec{a}\right|∙\left|\vec{b}\right|cosφ,$

де ϕ — кут між векторами.

*Властивості скалярного добутку*:

1. $\vec{a}∙\vec{b}=\vec{b}∙\vec{a};$

2. $\left(α\vec{a}\right)\vec{b}=α\left(\vec{a}\vec{b}\right);$

3. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c};$

4. $\left(\vec{a}\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|^{2}; \sqrt{(\vec{a})^{2}}=\left|\vec{a}\right|;$

5. $\vec{a}∙\vec{b}=0, якщо \vec{a} і \vec{b} перпендикулярні, і навпаки \left(\vec{a}\ne 0, \vec{b}\ne 0\right).$

Нехай дано вектори $\vec{a}=a\_{x}\vec{i}+a\_{y}\vec{j}+a\_{z}\vec{k}, \vec{b}=b\_{x}\vec{i}+b\_{y}\vec{j}+b\_{z}\vec{k}.$ Тоді використовуючи властивості скалярного добутку, умови  маємо:

 $\vec{a}∙\vec{b}=\left(a\_{x}\vec{i}+a\_{y}\vec{j}+a\_{z}\vec{k}\right)\left(b\_{x}\vec{i}+b\_{y}\vec{j}+b\_{z}\vec{k}\right)=a\_{x}b\_{x}+a\_{y}b\_{y}+a\_{z}b\_{z}.$ (5.1)

З рівності (5.1) випливає, що:

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ *і*$ \vec{b}$ є $a\_{x}b\_{x}+a\_{y}b\_{y}+a\_{z}b\_{z}=0.$

2. Кут між двома векторами $\vec{a}$ *і*$ \vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$cosφ=\frac{a\_{x}b\_{x}+a\_{y}b\_{y}+a\_{z}b\_{z}}{\sqrt{a\_{x}^{2}+a\_{y}^{2}+a\_{z}^{2}}\sqrt{b\_{x}^{2}+b\_{y}^{2}+b\_{z}^{2}}}.$$

1. ***Векторний добуток двох векторів***

*Означення*. *Векторним добутком вектора* $\vec{a}$ *на вектор*$ \vec{b}$ називається вектор $\vec{c}=\vec{a}×\vec{b,}$ якщо:

1) довжина вектора $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|sinφ, $де ϕ — кут між двома векторами;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ *і*$ \vec{b};$

 Рис. 8

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ *і*$ \vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

***Теорема.*** *Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.*

*Властивості векторного добутку:*

1. $\vec{a}×\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\ne 0,$ і $\vec{b}\ne 0$ — колінеарні вектори.

2. $\vec{a}×\vec{b}=-\vec{b}×\vec{a}$.

3. $\left(α\vec{a}×\vec{b}\right)=α\left(\vec{a}×\vec{b}\right).$

4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)×\vec{c}=\vec{a}×\vec{c}+\vec{b}×\vec{c}.$

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}.$ З колінеарності векторів випливає: $\vec{i}×\vec{i}=\vec{j}×\vec{j}=\vec{k}×\vec{k}=0.$З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо: $\vec{i}×\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{i}×\vec{k}=\vec{j}, \vec{k}×\vec{j}=\vec{i}$.

Знайдемо координати вектора $\vec{c}=\vec{a}×\vec{b},$якщо $\vec{a}=a\_{x}\vec{i}+a\_{y}\vec{j}+a\_{z}\vec{k}, \vec{b}= =b\_{x}\vec{i}+b\_{y}\vec{j}+b\_{z}\vec{k}.$

 $\vec{c}=\vec{a}×\vec{b}=\left|\begin{matrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a\_{x}&a\_{y}&a\_{z}\\b\_{x}&b\_{y}&b\_{z}\end{matrix}\right|$. (5.2)

1. ***Мішаний добуток трьох векторів***

*Означення. Мішаним добутком векторів* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b} і \vec{c}$, тобто $\vec{a}∙(\vec{b}×\vec{c})$.

 

Рис. 9

Розглянемо геометричний зміст змішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед (рис. 9). Знайдемо об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів $S=\left|\vec{b}×\vec{c}\right|=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|sinφ$. Висота дорівнює $\left|\vec{a}\right|cosα.$ Отже, остаточно маємо:

 $V=\left|\vec{a}\right|cosα\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|sinφ=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}×\vec{c}\right|cosα=\left|\vec{a}∙(\vec{b}×\vec{c})\right|.$ (5.3)

З останнього випливає, що модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. З рівності (5.3) маємо умову *компланарності трьох векторів*

$$\left|\vec{a}∙(\vec{b}×\vec{c})\right|=0.$$

Ураховуючи формули знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\vec{a}∙\left(\vec{b}×\vec{c}\right)=\left|\begin{matrix}a\_{x}&a\_{y}&a\_{z}\\b\_{x}&b\_{y}&b\_{z}\\c\_{x}&c\_{y}&c\_{z}\end{matrix}\right|.$$

.