**Лінійні векторні простори**

*План*

1. ***Вектори. Лінійні операції над векторами***
2. ***Проекція вектора на вісь***

***3. Поняття лінійної залежності та незалежності векторів. Базис***

1. ***Вектори. Лінійні операції над векторами***

*Означення .* *Вектором*називається напрямлений відрізок.

Вектор визначається впорядкованою парою точок. Перша з них називається початком, друга – кінцем вектора. Якщо початком вектора є точка , а кінцем точка , то його позначають символом . Іноді використовують позначення у вигляді малої букви латинського алфавіту (наприклад, ). На рисунку вектор зображають відрізком із стрілкою в кінці вектора.

Вектор, початок та кінець якого співпадають, називається *нульовим*і *Основними характеристиками вектора* є його довжина та напрям.

*Довжиною (модулем) вектора* називають довжину відрізка, яким він зображається. Позначають довжину вектора символом  Наприклад, . Якщо довжина вектора рівна одиниці, то його називають *одиничним* або *ортом.* Очевидно, що .

Під *напрямом вектора* розуміють напрям променя Нульовому вектору присвоюють довільний напрям.

*Означення.*Два вектори називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

*Означення.*Три вектори називають *компланарними*, якщо вони паралельні деякій площині.

*Означення.*Два колінеарних вектори називають *однаково (протилежно) напрямленими*, якщо вони лежать в одній півплощині (в різних півплощинах) відносно прямої, яка сполучає їхні початки. Якщо два вектори та лежать на одній прямій, то їх називають однаково напрямленими, якщо всі точки одного із променів або належать іншому. Якщо жоден із променів та цілком не належить іншому, то вектори та називають протилежно напрямленими.

Однаково напрямлені вектори та позначають символом . Протилежно напрямлені вектори позначають .

Два вектори, які мають однакові довжини та протилежні напрямки, називають *протилежними*. Вектор, протилежний до позначають символом -.

*Означення.*Два вектори називають *рівними*, якщо вони однаково напрямлені та мають рівні довжини, позначають =.

*Означення. Сумою векторів* та називають вектор, проведений з початку вектора до кінця вектора при умові, що кінець вектора співпадає з початком вектора (рис. 2). Суму векторів та позначають символом + . Означений таким чином спосіб додавання векторів називають «*правилом трикутника».*

Якщо вектори та відкласти із спільного початку та на одержаних відрізках, як на сторонах, побудувати паралелограм, то вектор, який співпадає з діагоналлю та має початок у спільному початку даних векторів, буде їхньою сумою (рис. 3). Такий спосіб знаходження суми векторів називається *«правилом паралелограма».*













Рис. 2 Рис. 3

*Означення. Різницею* векторів та називають суму векторів та тобто .













Рис. 4 Рис. 5

Нехай заданий деякий вектор та дійсне число .

*Означення. Добутком вектора на число* називають вектор який задовольняє наступні умови:

1) довжина цього вектора

2) якщо та , якщо .

Множення вектора на число має ряд властивостей, зокрема такі:

1) ;

2) ;

3) ;

4) ;

5) ; (асоціативність множення відносно числових множників  та );

6) (дистрибутивність множення відносно числового множника);

7) (дистрибутивність множення відносно векторного множника).

***2. Проекція вектора на вісь***

Нехай у просторі задано деяку вісь і вектор . Проведемо через точки і площини, перпендикулярно до осі (рис. 6). Позначимо точки перетину цих площин з віссю *l* відповідно і .



Рис. 6

*Проекцією вектора* *на вісь* називається довжина напрямленого відрізка на осі .

Позначається проекція вектора на вісь : та де  — кут між вектором і віссю.

***Теорема.*** *Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь*.

***Теорема.*** *При множенні вектора на число його проекція на цю вісь також множиться на це число*.

***3. Поняття лінійної залежності та незалежності векторів. Базис***

Нехай задані вектори  та числа .

Вектор  називається *лінійною комбінацією векторів* (*вектор  лінійно виражається через вектори*) .

Якщо рівність

 (4.1)

можлива при деяких ненульових коефіцієнтах, то вектори  називають *лінійно залежними*. Якщо ж дана рівність виконується тільки при нульових коефіцієнтах, то вектори  називають *лінійно незалежними*.

***Теорема.*** *Вектори  лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших.*

***Теорема.*** *Якщо серед векторів  є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.*

***Теорема.*** *Якщо деяка система векторів містить лінійно залежну підсистему, то ці вектори лінійно залежні.*

***Теорема.*** *Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні.*

***Теорема.*** *Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.*

***Теорема.*** *Будь-які чотири геометричні вектори лінійно залежні.*

Упорядкована трійка лінійно незалежних векторів в просторі називається його *базисом.* Довільний вектор у просторі можна розкласти за його базисними векторами де координати вектора в цьому базисі.

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається *ортонормованим базисом.* Позначають ортонормований базис через вектори , що за напрямом збігаються з осями *Ох*, *Оу*, *Оz* і . Такі вектори надалі називатимемо *одиничними векторами* осей системи координат. Тоді

(4.2)

є розкладом вектора за базисними векторами а числа координати вектора в цьому базисі.

Координати вектора в системі координат це його проекції на осі координат  *Прox, Прoy, Прoz .*

Якщо розглянути прямокутну декартову систему координат і точки початку *А* (*х*1, *у*1, *z*1) і кінця *В* (*х*2, *у*2, *z*2) вектора , то проекції вектора  на кожну з осей мають вигляд:

*Ох*: *ах* = *х*2 – *х*1, *Оу*: *ау* = *у*2 – *у*1, *Оz*: *а*z = *z*2 – *z*1.

*Довжина вектора* подається формулою:

 (4.3)

Якщо позначити α, β, γ — кути між вектором і відповідними осями системи координат, то їх косинуси можна знайти за формулами:

. (4.4)

У подальшому називатимемо їх *напрямними косинусами вектора*  Для напрямних косинусів виконується

cos2α + cos2β + cos2γ = 1.

*Поділ відрізка у заданому відношенні*

Число — називається відношенням, в якому точка ділить відрізок (рис. 7), якщо .

Нехай задано і координати точок треба знайти координати точки .



Рис. 7

З рис. 7 і теореми про пропорційні відрізки, що відтинають паралельні прямі на сторонах кута, випливають співвідношення:

Оскільки числа і одного й того самого знака, то . Отже, . Звідси:

**Добутки векторів**

*План*

1. ***Скалярний добуток векторів***
2. ***Векторний добуток двох векторів***
3. ***Мішаний добуток трьох векторів***
4. ***Скалярний добуток векторів***

*Означення. Скалярним добутком двох ненульових векторів і* називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Отже,

де ϕ — кут між векторами.

*Властивості скалярного добутку*:

1.

2.

3.

4.

5.

Нехай дано вектори Тоді використовуючи властивості скалярного добутку, умови  маємо:

(5.1)

З рівності (5.1) випливає, що:

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів  *і* є

2. Кут між двома векторами  *і* можна знайти за формулою:

1. ***Векторний добуток двох векторів***

*Означення*. *Векторним добутком вектора на вектор* називається вектор якщо:

1) довжина вектора де ϕ — кут між двома векторами;

2) вектор перпендикулярний до кожного з векторів  *і*

 Рис. 8

3) вектор спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори  *і*, то поворот вектора до вектора відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

***Теорема.*** *Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.*

*Властивості векторного добутку:*

1. , якщо і — колінеарні вектори.

2. .

3.

4.

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів З колінеарності векторів випливає: З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо: , .

Знайдемо координати вектора якщо

. (5.2)

1. ***Мішаний добуток трьох векторів***

*Означення. Мішаним добутком векторів* називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора на векторний добуток векторів , тобто .



Рис. 9

Розглянемо геометричний зміст змішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах , вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед (рис. 9). Знайдемо об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах . Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів . Висота дорівнює Отже, остаточно маємо:

(5.3)

З останнього випливає, що модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах . З рівності (5.3) маємо умову *компланарності трьох векторів*

Ураховуючи формули знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

.