**Невизначений інтеграл**

План

1. Поняття первісної.

2. Властивості невизначеного інтеграла.

3. Основні методи інтегрування.

**1. Поняття первісної**

Функція називається *первісною* для функції  на проміжку , якщо для кожного  виконується рівність 

**Приклад.** Функція  є первісною для функції  на  тому що при будь-якому *х*: 

Якщо  – первісна для , то функція де *С* – деяка стала, також є первісною для функції , тому що для будь-якого числа *.* Наприклад, для  первісної є не тільки , але й функція ,тому що 

**Означення.** Якщо функція  – первісна для функції , то множина функцій  де  – довільна стала, називається *невизначеним інтегралом від функції* й позначається символом



При цьому функція  називається *підінтегральною функцією, * – *підінтегральним виразом,* а *dx* – *диференціал* *змінної інтегрування*.

Операція знаходження первісних для функції *f*(*x*) називається *інтегруванням f*(*x*).Інтегрування – операція, обернена диференціюванню.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що їх немає.

**Теорема  (Коші).** Для існування невизначеного інтеграла для функції *f*(*x*) на певному проміжку достатньо, щоб *f*(*x*) була неперервною на цьому проміжку.

**2. Властивості невизначеного інтеграла**



**3. Основні методи інтегрування**

**Безпосереднє інтегрування.** Обчислення інтегралів за допомогою таблиці найпростіших інтегралів й основних властивостей невизначених інтегралів називається *безпосереднім інтегруванням.*

Таблиця невизначених інтегралів

1. ;

2. ;

3.;

4. ;

5. ;

6. ; ;

7. ;

8. ;

9. ;

10. ;

11. ;

12. ;

13..

*Метод безпосереднього інтегрування.* Коли  є лінійною функцією, тобто , дістаємо:

.

*Зауваження.*Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

**Приклад.** **



*Метод підстановки (заміна змінної інтегрування).*Мета методу підстановки – перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

**Теорема .** Якщо  – неперервна, а  має неперервну похідну, то:

****

*Наслідок.*



**Приклад***.*



*Метод інтегрування частинами.**Формулою інтегрування частинами у невизначеному інтегралі* називається формула



де *u* й *v* – диференцфійовні функції по *х*.

На практиці функції *u*(*x*) та *v*(*x*) рекомендується вибирати за таким правилом: при інтегруванні частинами підінтегральний вираз  розбивають на два множники типу *u* ⋅ *dv*, тобто ; при цьому функція *u*(*x*) вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за *dv* беруть залишок підінтегрального виразу, який містить *dx*, інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

**Приклад.**



**Інтегрування дробово-раціональних функцій**

План

1. Основні означення.

2. Інтегрування дробово-раціональних функцій.

3. Методика інтегрування раціональних функцій

**1. Основні означення**

**Означення.** Відношення двох многочленів  називаєть­ся *раціональним дробом.*

**Означення.** Раціональний дріб  називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто *n* < *m*; якщо *n* ≥ *m*, то дріб називається *неправильним*.

**Теорема 5.** Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

Всякий правильний правильний дріб можна розкласти на суму простих: І.; ІІ. ; ІІІ. ; IV. , де ,

. Це роблять методом невизначених коефіцієнтів.

***Метод невизначених коефіцієнтів***

Метод невизначених коефіцієнтів дає алгоритм для знаходження коефіцієнтів розкладу правильного раціонального дробу на суму простих.

**Приклад.**



.

Це приклад розкладу правильного раціонального дробу на суму простих, де  – невизначені коефіцієнти. Зводимо праву частину рівності до спільного знаменника. Прирівнюємо відповідні коефіцієнти чисельника лівої частини з коефіцієнтами чисельника правої. Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язки її є коефіцієнтами розкладу.

**2. Інтегрування дробово-раціональних функцій**

І. ;

ІІ. 

;

ІІІ. 



Обчислимо обидва інтеграли. В першому зробимо заміну   одержимо інтеграл

.

Відносно другого маємо



.

Завдяки цьому

.

**Приклад.** Знайти .

На практиці інтеграли такого типу обчислюють, виділивши в знаменнику повний квадрат .





.

IV.  – інтегрується за допомогою рекурентної формули



## 3. Методика інтегрування раціональних функцій

1. Якщо підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.
2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.
3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

**Інтегрування тригонометричних та деяких**

**ірраціональних функцій**

План

1. Інтегрування тригонометричних функцій.
2. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

**1. Інтегрування тригонометричних функцій**

Розглянемо ,, де *R* – раціональна функція відносно sin*x*, cos*x*, тобто над sin*x*, cos*x* виконуються лише арифметичні дії та піднесення до цілого степеня.

Існують такі підстановки, що за їх допомогою інтеграл  завжди може бути зведений до інтеграла від раціональної функції ,, загальну схему інтегрування якої розроблено.

І. Універсальна тригонометрична підстановка .



.

**.**

**Приклад***.* 

.

*Зауваження.*На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо sin *x*, cos *x* входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

ІІ. Підінтегральна функція – непарна відносно sin *x*, тоді роблять підстановку cos *x* = *t*.

**Приклад.** 



.

ІІІ. Підінтегральна функція – непарна відносно cos *x* раціоналізується за допомогою підстановки sin *x* = *t*.

**Приклад.** 



.

IV. Підінтегральна функція  – парна відносно sin *x* і cos *x* разом, тобто ..

У цьому випадку використовують підстановку  або .**.**

V. Підінтегральна функція  раціоналізується підстановкою .

*Зауваження.* В інтегралах  рекомендується скористатись формулами пониження степеня:

.

**Приклад**.

.

*Зауваження.*При інтегруванні інтегралів типу:

, ,   ,, користуються формулами:  ,

,

.

**Приклад.**

.

**2. Інтегрування деяких ірраціональних функцій**

Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів ірраціональних функцій, при цьому символ *R*(*x*; *y*) означає раціональну залежність від змінних *х* та *у*.

І.

**Приклад.** 

.

ІІ. .

**Приклад.**







.

ІІІ. 

.

**Приклад.** 



.