**Поняття похідної. Основні правила диференціювання**

*План*

***1. Поняття похідної, її геометричний і механічний зміст***

***2. Диференціювання суми, добутку, частки двох функцій***

***3. Диференціювання складної, оберненої, параметрично заданої та неявної функції***

***1. Поняття похідної, її геометричний і механічний зміст***

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку$ x\_{0}$ з цього проміжку, надамо аргументу $x\_{0}$ довільного приросту $∆x,$ але такого, щоб точка $x\_{0}+∆x$ належала проміжку. Тоді функція набуде приросту $∆y=f\left(x\_{0}+∆x\right)-f\left(x\_{0}\right). $Розглянемо відношення приросту функції $∆y$ до приросту аргументу $∆x$ і перейдемо до границі при $∆x\rightarrow 0:$

 $\lim\_{∆x\to 0}\frac{∆y}{∆x}=\lim\_{∆x\to 0}\frac{f\left(x\_{0}+∆x\right)-f\left(x\_{0}\right)}{∆x}.$ (14.1)

Якщо границя (14.1) існує і скінченна, вона називається *похідною функції* $y=f(x)$ *в точці* $x\_{0}$ і позначається $y^{'}, y\_{x}^{'}, \frac{dy}{dx}, f^{'}\left(x\_{0}\right), \frac{df(x\_{0})}{dx}.$

*Означення.* *Похідною* *функції* $y=f(x)$ *в точці* $x\_{0}$ називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

**Приклад**. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $f(x)=x^{2}$ в точці $x\_{0}.$

Знайдемо приріст функції:

$$∆f=f\left(x\_{0}+∆x\right)-f\left(x\_{0}\right)=(x\_{0}+∆x)^{2}-x\_{0}^{2}=2x\_{0}∆x+∆x^{2}.$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{∆f}{∆x}=2x\_{0}+∆x.$$

Відшукаємо границю

$$\lim\_{∆x\to 0}\frac{∆f}{∆x}=\lim\_{∆x\to 0}\left(2x\_{0}+∆x\right)=2x\_{0}.$$

Таким чином, $f^{'}\left(x\_{0}\right)=2x\_{0}.$

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійноі її координата змінюється за законом $s=s\left(t\right),$ то швидкість її руху $v(t)$ в момент часу $t$ дорівнює похідній $s^{'}\left(t\right): v\left(t\right)=s^{'}\left(t\right).$ В цьому полягає **механічний зміст похідної**.

Значення похідної функції $y=f(x)$ в точці $x\_{0}$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою $x\_{0}:$

$$f^{'}\left(x\_{0}\right)=k=tgα.$$

Це і є **геометричний зміст похідної**.

***2. Диференціювання суми, добутку, частки двох функцій***

***Теорема.*** *Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо* $y=c$*, де с = const, то* $y^{'}=0.$

***Теорема.*** *Якщо функції* $u\left(x\right), v(x)$ *є диференційованими в точці* $x\_{0},$ *то в цій точці є диференційованими їх сума, різниця, добуток і частка (у випадку* $v\left(x\_{0}\right)\ne 0$*). При цьому мають місце рівності:*

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)^{'}=u^{'}\left(x\right)\pm v^{'}\left(x\right);$$

$$\left(uv\right)^{'}=u^{'}v+v^{'}u;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{'}=\frac{u^{'}v-v^{'}u}{v^{2}}.$$

***Теорема.*** *Сталий множник можна виносити за знак похідної:*

$$(cu)^{'}=cu^{'}, c=const.$$

**Приклад.** Обчислити похідну для функції $y=tgx.$

$$(tgx)^{'}=\left(\frac{sinx}{cosx}\right)^{'}=\frac{(sinx)^{'}cosx-(cosx)^{'}sinx}{cos^{2}x}=\frac{1}{cos^{2}x}.$$

Таким чином, $(tgx)^{'}=\frac{1}{cos^{2}x}.$

***3. Диференціювання складної, оберненої, параметрично заданої та неявної функції***

**Похідна складної функції.** Нехай $y=f\left(u\right),$ де $u=φ\left(x\right),$ тоді $y=f\left(φ\left(x\right)\right).$ Функція $f\left(u\right)$ називається *зовнішньою*, а функція $φ\left(x\right)$ — *внутрішньою*, або *проміжним аргументом*.

***Теорема.*** *Якщо* $y=f\left(u\right)$ *та* $u=φ\left(x\right)$ *— диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює* $y\_{x}^{'}=f\_{u}^{'}u\_{x}^{'}.$

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

**Похідна неявної функції.** Нехай рівняння $F\left(x,y\right)=0$ визначає *у* як неявну функцію від *х*. Надалі будем вважати, що ця функція диференційовна.

Продиференціювавши за *х* обидві частини рівняння $F\left(x,y\right)=0$, дістанемо рівняння першого степеня відносно $y^{'}$. З цього рівняння легко знайти $y^{'},$ тобто похідну неявної функції.

**Приклад.** Знайти $y\_{x}^{'}$ з рівняння $x^{2}+y^{2}=4$.

Оскільки $y$ є функцією від $x,$ то $y^{2} $розглядатимемо як складну функцію від $x$, тобто $(y^{2})^{'}=2yy^{'}.$ Продиференціювавши по $x$ обидві частини заданого рівняння, дістанемо $2x+2yy^{'}=0$. Звідси $y^{'}=-\frac{x}{y}.$

**Похідна оберненої функції.** Нехай задані дві взаємно обернені диференційовні функції $y=f\left(x\right), x=φ\left(y\right) \left(f\left(φ\left(y\right)\right)=y\right).$

***Теорема.*** *Похідна* $x\_{y}^{'}$ *оберненої функції* $x=φ\left(y\right)$ *по змінній у дорівнює оберненій величині похідної* $y\_{x}^{'}$ *від прямої функції* $y=f\left(x\right): x\_{y}^{'}=\frac{1}{y\_{x}^{'}}.$

**Похідна параметрично заданої функції.** Нехай функцію $y$ від $x$ задано параметричним рівнянням:

$$\left\{\begin{array}{c}x=φ\left(t\right)\\y=ω\left(t\right)\end{array} \left(t\_{1}<t<t\_{2}\right).\right.$$

Треба знайти $y\_{x}^{'}=\frac{dy}{dx}.$ Нехай функції $φ\left(t\right), ω\left(t\right)$ диференційовні і при цьому $φ^{'}\left(t\right)\ne 0,$ тоді користуючись означенням диференціала $dy=ω^{'}\left(t\right)dt, $ $dx=φ^{'}\left(t\right)dt.$ Отже, маємо

$$y\_{x}^{'}=\frac{dy}{dx}=\frac{ω^{'}\left(t\right)dt}{φ^{'}\left(t\right)dt}=\frac{ω^{'}\left(t\right)}{φ^{'}\left(t\right)}.$$

 **Похідні функції. Диференціал**

*План*

***1. Таблиця похідних***

***2. Диференціал функції та його застосування***

***3. Похідні вищих порядків***

***4. Диференціали вищих порядків***

***5. Основні теореми диференціального числення***

***1. Таблиця похідних***

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

9. ; 10. ;

11. ; 12. ;

13. ; 14. .

**Приклад.** .

Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо теорему 2: , .

**Приклад.** .

Задана функція є степенево-показниковим виразом виду , де . Прологарифмуємо функцію за основою *е*: Оскільки  і  — складні функції, після диференціювання обох частин рівності дістанемо:. Звідси .

Таким чином, дістали формулу для знаходження похідної від степенево-показникової функції . У даному випадку маємо

.

***2. Диференціал функції та його застосування***

Нехай функція  диференційована в точці $x\_{0}$. Тоді її приріст у цій точці можна подати у вигляді $∆y=A∆x+α\left(∆x\right)∙∆x,$

де $α\left(∆x\right)\rightarrow 0$ при $∆x\rightarrow 0.$ Отже, доданок $A∆x$ є головною частиною приросту функції, яка лінійно залежить від $∆x.$

*Диференціалом функції*  в точці $x\_{0}$ називається головна частина приросту функції в цій точці, яка лінійно залежить від $∆x.$

Диференціал функції позначається так: $dy=A∆x.$Враховуючи, що $A=f^{'}(x\_{0})$, маємо $dy=f^{'}\left(x\_{0}\right)∆x.$ Диференціалом незалежної змінної $x$ називається її приріст: $dx=∆x.$ Отже,

$$dy=f^{'}\left(x\_{0}\right)dx.$$

Із останньої формули випливає, що похідну $f^{'}\left(x\_{0}\right)$ можна обчислити як відношення диференціалів:

$$f^{'}\left(x\_{0}\right)=\frac{dy}{dx}.$$

Оскільки диференціал $dy$ функції $y=f(x)$ є головною частиною її приросту, то це дає можливість застосувати диференціал функції в наближених обчисленнях: із наближеної рівності $∆y=dy$, тобто

$f\left(x\_{0}+∆x\right)-f\left(x\_{0}\right)≈f^{'}\left(x\_{0}\right)dx, f\left(x\_{0}+∆x\right)≈f\left(x\_{0}\right)+f^{'}\left(x\_{0}\right)dx.$ (15.1)

**Приклад.** Знайти наближено $\sqrt{4,001}$. Розглянемо функцію $y=\sqrt{x}$. Покладемо $x\_{0}=4, ∆x=0,001.$Тоді $\sqrt{4,001}=\sqrt{x\_{0}+∆x}. $Далі маємо

$$f\left(x\_{0}\right)=\sqrt{4}=2, f^{'}\left(x\_{0}\right)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$

Отже, $\sqrt{4,001}≈2+\frac{1}{4}∙0,001=2,00025.$.

Нехай тепер маємо складену функцію $y=f\left(u\right), u=φ\left(x\right), $де $f\left(u\right), φ(x)$ диференційовані функції в точках $x\_{0}$ і $u\_{0}=φ(x\_{0})$. Тоді

$$dy=\left(f(φ(x\_{0}))\right)\_{x}^{'}dx.$$

Так як

$(f(φ(x\_{0})))\_{x}^{'}=f\_{u}^{'}\left(u\_{0}\right)u\_{x}^{'},$ то $dy=f\_{u}^{'}\left(u\_{0}\right)u\_{x}^{'}dx.$

Оскільки $u\_{x}^{'}dx=du,$ то маємо $dy=f\_{u}^{'}\left(u\_{0}\right)du.$

Таким чином, якщо функція складена, то форма диференціалу не змінює свого виду. Цю властивість називають *інваріантністю форми диференціалу*.

***3. Похідні вищих порядків***

Похідна  від функції  називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Мож­ливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку  називається похідною *другого порядку від функції*  і позначається  .

Похідна від похідної другого порядку  називається *похід­ною третього порядку* і означається , .

Похідна від похідної (*n* – 1)-го порядку  називається *похідною n-го порядку* і позначається . Таким чином, 

**Приклад.** Знайти похідну третього порядку для функції .

.

 ***4. Диференціали вищих порядків***

Нехай функція *y = f* (*x*) диференційована в кожній точці $x$ деякого проміжку $X$. Її диференціал першого порядку *dy =f ′*(*x*)*dx* є функцією двох змінних: аргументу $x$ і диференціала $dx$. Нехай $f^{'}(x)$ також диференційована в кожній точці $x$ деякого проміжку $X$. Будемо розглядати у виразі $dy=f^{'}\left(x\right)dx$ диференціал $dx$ як постійний множник. Тоді

$$d\left(dy\right)=d\left(f^{'}\left(x\right)dx\right)=(f^{'}\left(x\right)dx)^{'}dx=f^{''}\left(x\right)dxdx=f^{''}\left(x\right)dx^{2}.$$

Диференціал $d\left(dy\right)$ називається диференціалом другого порядку і позначається $d^{2}y$. Отже, $d^{2}y=f^{''}\left(x\right)dx^{2}.$

Диференціал $d(d^{n-1}y)$ від диференціала $d^{n-1}y$, взятий при постійному $dx$ називається диференціалом $n-$го порядку функції *y = f* (*x*) і позначається $d^{n}y$. Методом математичної індукції можна встановити, що $d^{n}y==f^{\left(n\right)}\left(x\right)\left(dx\right)^{n}. $Із останньої формули випливає, що $y^{\left(n\right)}\left(x\right)=\frac{d^{n}y}{dx^{n}}.$

***5. Основні теореми диференціального числення***

***Теорема Ферма.*** *Нехай функція* $f(x)$ *визначена на інтервалі* $(a,b)$ *і в деякій точці* $x\_{0}\in (a,b)$ *має найбільше або найменше значення. Тоді, якщо в цій точці існує похідна* $f^{'}(x\_{0})$*, то вона рівна нулю, тобто* $f^{'}(x\_{0})$*=0.*

***Теорема Ролля.*** *Якщо функція* $f(x)$ *визначена на відрізку* $\left[a,b\right]$ *і вона*

1. *неперервна в кожній точці відрізка* $\left[a,b\right]$*,*
2. *диференційована на інтервалі* $(a,b)$*,*
3. *на кінцях відрізка* $\left[a,b\right] $ *приймає рівні значення* $f\left(a\right)=f(b)$*, то існує точка* $C\in (a,b)$ *така, що* $f^{'}(C)$*=0.*

***Теорема Лагранжа.*** *Якщо функція* $f(x)$ *визначена на відрізку* $\left[a,b\right]$ *і вона*

1. *неперервна в кожній точці відрізка*$ \left[a,b\right]$*,*
2. *диференційована на інтервалі* $\left(a,b\right),$ *то існує точка* $C\in (a,b)$ *така, що*

$$f^{'}\left(C\right)=\frac{f\left(b\right)-f(a)}{b-a}.$$

***Теорема Коші.*** *Якщо функції* $f(x)$ *і* $g(x)$

*1) неперервні на відрізку* $\left[a,b\right]$*,*

*2) диференційовані на інтервалі* $(a,b)$*, і* $g^{'}(x)\ne 0$*,* $x\in \left(a,b\right), $*то існує точка*$ C\in (a,b)$ *така, що* $\frac{f\left(b\right)-f(a)}{g\left(b\right)-g(a)}=\frac{f^{'}(C)}{g^{'}(C)}.$