**Поняття похідної. Основні правила диференціювання**

*План*

***1. Поняття похідної, її геометричний і механічний зміст***

***2. Диференціювання суми, добутку, частки двох функцій***

***3. Диференціювання складної, оберненої, параметрично заданої та неявної функції***

***1. Поняття похідної, її геометричний і механічний зміст***

Нехай функція визначена на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку з цього проміжку, надамо аргументу довільного приросту але такого, щоб точка належала проміжку. Тоді функція набуде приросту Розглянемо відношення приросту функції до приросту аргументу і перейдемо до границі при

(14.1)

Якщо границя (14.1) існує і скінченна, вона називається *похідною функції*  *в точці* і позначається

*Означення.* *Похідною* *функції*  *в точці* називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

**Приклад**. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції в точці

Знайдемо приріст функції:

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу

Відшукаємо границю

Таким чином,

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійноі її координата змінюється за законом то швидкість її руху в момент часу дорівнює похідній В цьому полягає **механічний зміст похідної**.

Значення похідної функції в точці дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою

Це і є **геометричний зміст похідної**.

***2. Диференціювання суми, добутку, частки двох функцій***

***Теорема.*** *Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо , де с = const, то*

***Теорема.*** *Якщо функції є диференційованими в точці то в цій точці є диференційованими їх сума, різниця, добуток і частка (у випадку ). При цьому мають місце рівності:*

***Теорема.*** *Сталий множник можна виносити за знак похідної:*

**Приклад.** Обчислити похідну для функції

Таким чином,

***3. Диференціювання складної, оберненої, параметрично заданої та неявної функції***

**Похідна складної функції.** Нехай де тоді Функція називається *зовнішньою*, а функція — *внутрішньою*, або *проміжним аргументом*.

***Теорема.*** *Якщо та — диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює*

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

**Похідна неявної функції.** Нехай рівняння визначає *у* як неявну функцію від *х*. Надалі будем вважати, що ця функція диференційовна.

Продиференціювавши за *х* обидві частини рівняння , дістанемо рівняння першого степеня відносно . З цього рівняння легко знайти тобто похідну неявної функції.

**Приклад.** Знайти з рівняння .

Оскільки є функцією від то розглядатимемо як складну функцію від , тобто Продиференціювавши по обидві частини заданого рівняння, дістанемо . Звідси

**Похідна оберненої функції.** Нехай задані дві взаємно обернені диференційовні функції

***Теорема.*** *Похідна оберненої функції по змінній у дорівнює оберненій величині похідної від прямої функції*

**Похідна параметрично заданої функції.** Нехай функцію від задано параметричним рівнянням:

Треба знайти Нехай функції диференційовні і при цьому тоді користуючись означенням диференціала Отже, маємо

**Похідні функції. Диференціал**

*План*

***1. Таблиця похідних***

***2. Диференціал функції та його застосування***

***3. Похідні вищих порядків***

***4. Диференціали вищих порядків***

***5. Основні теореми диференціального числення***

***1. Таблиця похідних***

За аналогією з попередніми прикладами можна дістати похідні від основних елементарних функцій:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

9. ; 10. ;

11. ; 12. ;

13. ; 14. .

**Приклад.** .

Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому використовуємо теорему 2: , .

**Приклад.** .

Задана функція є степенево-показниковим виразом виду , де . Прологарифмуємо функцію за основою *е*: Оскільки  і  — складні функції, після диференціювання обох частин рівності дістанемо:. Звідси .

Таким чином, дістали формулу для знаходження похідної від степенево-показникової функції . У даному випадку маємо

.

***2. Диференціал функції та його застосування***

Нехай функція  диференційована в точці . Тоді її приріст у цій точці можна подати у вигляді

де при Отже, доданок є головною частиною приросту функції, яка лінійно залежить від

*Диференціалом функції*  в точці називається головна частина приросту функції в цій точці, яка лінійно залежить від

Диференціал функції позначається так: Враховуючи, що , маємо Диференціалом незалежної змінної називається її приріст: Отже,

Із останньої формули випливає, що похідну можна обчислити як відношення диференціалів:

Оскільки диференціал функції є головною частиною її приросту, то це дає можливість застосувати диференціал функції в наближених обчисленнях: із наближеної рівності , тобто

(15.1)

**Приклад.** Знайти наближено . Розглянемо функцію . Покладемо Тоді Далі маємо

Отже, .

Нехай тепер маємо складену функцію де диференційовані функції в точках і . Тоді

Так як

то

Оскільки то маємо

Таким чином, якщо функція складена, то форма диференціалу не змінює свого виду. Цю властивість називають *інваріантністю форми диференціалу*.

***3. Похідні вищих порядків***

Похідна  від функції  називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Мож­ливі випадки, коли ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку  називається похідною *другого порядку від функції*  і позначається  .

Похідна від похідної другого порядку  називається *похід­ною третього порядку* і означається , .

Похідна від похідної (*n* – 1)-го порядку  називається *похідною n-го порядку* і позначається . Таким чином, 

**Приклад.** Знайти похідну третього порядку для функції .

.

***4. Диференціали вищих порядків***

Нехай функція *y = f* (*x*) диференційована в кожній точці деякого проміжку . Її диференціал першого порядку *dy =f ′*(*x*)*dx* є функцією двох змінних: аргументу і диференціала . Нехай також диференційована в кожній точці деякого проміжку . Будемо розглядати у виразі диференціал як постійний множник. Тоді

Диференціал називається диференціалом другого порядку і позначається . Отже,

Диференціал від диференціала , взятий при постійному називається диференціалом го порядку функції *y = f* (*x*) і позначається . Методом математичної індукції можна встановити, що Із останньої формули випливає, що

***5. Основні теореми диференціального числення***

***Теорема Ферма.*** *Нехай функція визначена на інтервалі і в деякій точці має найбільше або найменше значення. Тоді, якщо в цій точці існує похідна , то вона рівна нулю, тобто =0.*

***Теорема Ролля.*** *Якщо функція визначена на відрізку і вона*

1. *неперервна в кожній точці відрізка ,*
2. *диференційована на інтервалі ,*
3. *на кінцях відрізка приймає рівні значення , то існує точка така, що =0.*

***Теорема Лагранжа.*** *Якщо функція визначена на відрізку і вона*

1. *неперервна в кожній точці відрізка,*
2. *диференційована на інтервалі то існує точка така, що*

***Теорема Коші.*** *Якщо функції і*

*1) неперервні на відрізку ,*

*2) диференційовані на інтервалі , і , то існує точка така, що*