**Системи лінійних алгебраїчних рівнянь**

*План*

1. ***Основні означення***

***2. Матричний метод***

***3. Метод Крамера***

***4. Метод Гаусса***

***5. Однорідна система лінійних рівнянь***

1. ***Основні означення***

Системою *т* лінійних рівнянь із *п* невідомими *х1, х2, …, хп*, або *лінійною системою*, називають систему рівнянь вигляду

  (3.1)

Числа *аij*називаються *коефіцієнтами*, а числа *bi* ­­­ − вільними членами системи.

Система рівнянь (3.1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени нулі, і *неоднорідною*, якщо хоча б один з них відмінний від нуля.

Розв’язати систему рівнянь означає знайти всі її розв’язки або довести, що їх не має. *Розв’язком системи* рівнянь з *п* невідомими є *п* чисел *х1, х2, …, хп*, які перетворюють кожне рівняння системи в правильну числову рівність, тобто задовольняють її.

Система називається *сумісною*, якщо вона має принаймні один розв’язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв’язків. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв’язок, і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв’язків.

Дві системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними*, якщо вони мають одну і ту ж множину розв’язків.

***2. Матричний метод***

Розглянемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими:

  (3.2)

З коефіцієнтів при невідомих складемо матриці:

− *основна* *матриця*, − *розширена* *матриця*. Вільні члени і невідомі запишемо у вигляді матриць-стовпців:



Тоді система (3.2) запишеться в *матричній формі*

 ******.(3.3)

Або в розгорнутому вигляді маємо

  (3.4)

Вважаємо , тоді для неї існує . Помножимо обидві частини (3.3) на , тоді Використовуючи сполучний закон добутку матриць маємо звідки але , тоді

*Алгоритм розв’язку матричного рівняння* (3.4):

1. Знайти обернену матрицю .
2. Обчислити добуток оберненої матриці на матрицю-стовпець *В* із вільних членів.
3. Користуючись рівністю матриць записати відповідь.

**Приклад.** Розв’язати систему рівнянь матричним методом:



Складаємо матричне рівняння:

, *AX=B.*

Обчислюэмо визначник матриці.



Щоб знайти обернену матрицю, знаходимо алгебраїчні доповнення *Aij*:

; ; ;

; ; ;

; ; 



Знаходимо добуток *А-1В.*



Отже *x1=1.5, x2=0.5, x3=2*.

***3. Метод Крамера***

Розглянемо систему (3.2) *n* лінійних рівнянь і з *n* невідомими.

***Теорема.*** *Якщо головний визначник складений із коефі­цієнтів при невідомих системи (3.2), відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв’язок (сумісна і визначена), який обчислюється за формулами Крамера:*

*,*

*де — головний визначник системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (3.2); — визначник, який утворюється заміною j-го стовпця в головному визначнику на стовпець із вільних членів*.

 Можуть трапитись наступні випадки:

1. а принаймні один із визначників  відмінний від нуля. Тоді система (3.2) несумісна.
2.  і всі  тоді система (3.2) невизначена.

**Приклад.**. Розв’язати систему методом Крамера.



Обчислимо визначники системи:

;





***4. Метод Гаусса***

Довільні системи лінійних рівнянь розвʼязуються за методом Гаусса (метод послідовного виключення невідомих). Він полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система зводиться до еквівалентної системи східчастого або трикутного вигляду, з якої послідовно, починаючи з останніх за номером невідомих, знаходимо всі інші невідомі.

Метод Гаусса зручно використовувати, працюючи з розширеною матрицею системи замість самих рівнянь. Розширену матрицю в цьому випадку записують з вертикальною прямою рискою, яка відділяє коефіцієнти біля невідомих від вільних членів. Стовпець вільних членів міняти місцями з іншими стовпцями розширеної матриці не можна.

Виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, після певної кількості кроків, отримаємо один із можливих випадків.

Перший випадок:

Остання система східчастого вигляду вказує на два можливі випадки:

1. якщо будь-яке тоді, коли ліва частина рівняння дорівнює нулю, то вихідна система розвʼязку не має.
2. якщо усі тоді, коли ліва частина рівняння дорівнює нулю, то маємо тотожності. Ці нульові рядки відкидаємо. Тоді одержуємо один з двох випадків:

а) кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих ‒ система рівнянь має єдиний розвʼязок;

б) кількість рівнянь менша кількості невідомих ‒ система має безліч розвʼязків.

Другий випадок ̶ система звелась до трикутного вигляду:

Це вказує на те, що система має єдиний розвʼязок, який шукаємо починаючи з останнього рівняння.

***5. Однорідна система лінійних рівнянь***

Нехай задано однорідну систему  лінійних рівнянь з  невідомими:

Дана система завжди має нульовий розвʼязок тому що підстановка нулів замість невідомих в кожне з рівнянь перетворює їх в тотожності. Ненульові розвʼязки (якщо вони існують) системи можна знайти методом Гаусса.

Однорідна система  рівнянь з  невідомими має єдиний нульовий розвʼязок, якщо визначник системи відмінний від нуля Якщо  то система має безліч розвʼязків.