**Матриці та операції над ними**

*План*

1. ***Основні поняття теорії матриць***
2. ***Дії над матрицями***

***1. Основні поняття теорії матриць***

*Означення*. *Матрицею* називається прямокутна таблиця чисел, яка має *m* рядків і *n* стовпців

.

Числа  називаються *елементами матриці*, а запис  означає її *розмір*. Зауважимо, що на першому місці в цьому записі зазначено кількість рядків матриці, а на другому — кількість стовпців. Наприклад, запис розміру матриці  означає, що в ній п’ять рядків і три стовпці. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається *квадратною*. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком.*

Матриця, яка складається з одного рядка — *матриця-рядок*, з одного стовпця — *матриця стовпець*.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Якщо в матриці стовці замінити відповідними рядками, то дістанемо *транспоновану* до матриці  матрицю .

Елементи з двома однаковими індексами *a*11, *a*22, *a*33, *... ann* утворюють *головну діагональ* матриці. Якщо то матриця називається *симетричною*. Квадратна матриця, в якої всі елементи, що знаходяться поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називається *діагональною матрицею*. Квадратна матриця, в якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, називається *одиничною матрицею*:

.

Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця *називається трикутною.*

*Нульовою матрицею*  називається матриця у якої всі елементи нулі.

Кожній квадратній матриці можна поставити у відповідність визначник, який складається з тих самих елементів, позначається

.

Якщо такий визначник відмінний від нуля, то матриця називається *неособливою*, або *невиродженою*. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця *особлива*, або *вироджена*.

***2. Дії над матрицями***

1. *Сумою матриць одного й того самого порядку* і називається матриця того самого порядку будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць :
2. *Добутком матриці на деяке число* називається така матриця *С*, кожен елемент якої утворюється множенням відповідних елементів матриці на
3. *Різниця матриць* і визначається як сума і

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності:

1. .

*Добутком матриці*  розміру на матрицю розміру називається така матриця розміру , кожний елемент якої можна знайти за формулою:

.

Кожний елемент матриці *С* утворюється як сума добутків відповідних елементів *і*-го рядка матриці на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці .

Очевидно, що для множення матриць виконуються рівності:

**Визначники та їх властивості. Обернена матриця. Ранг матриці**

*План*

1. ***Визначники другого і третього порядків, їх властивості***
2. ***Мінори та алгебраїчні доповнення***
3. ***Обчислення визначників***
4. ***Обернена матриця***
5. ***Ранг матриці***
6. ***Визначники другого і третього порядків, їх властивості***

*Визначником* *(детермінантом)* *другого порядку* називається вираз

.

*Визначником (детермінантом)* *третього порядку* називається вираз:

. (2.1)

Для запам’ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему *(правило трикутників)*:



Рис.1

Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» — це добутки елементів *a*11*, a*22*, a*33, розміщених на головній діагоналі визначника, і добутки елементів *a*13*, a*21*, a*32і *a*12*, a*23, *a*31, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, що є добутками елементів *a*13, *a*22, *a*31, розміщених на бічній діагоналі визначника, та у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні бічній діагоналі визначника — *a*11, *a*23, *a*32 і *a*12, *a*21, *a*33.

Запропонуємо ще одне правило обчислення визначника третього порядку *(правило Саррюса).*У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:



Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на бічній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Визначник:

,

рядки якого є стовпцями попереднього визначника, є *транспонованим* щодо визначника (2.1).

*Основні властивості визначників:*

*Властивість 1*. Визначник не змінюється в результаті тран­спонування.

З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, котре справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.

*Властивість 2.* Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

*Властивість 3.* Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

*Властивість 4.* Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

*Властивість 5.* Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на стале число *С*, то й визначник помножиться на *С*.

З останньої властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.

*Властивість 6.* Визначник, який має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

*Властивість 7.* Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

*Властивість 8.* Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені не деяке число.

***2. Мінори та алгебраїчні доповнення***

Нехай визначник має *n* рядків і *n* стовпців.

*Мінором k-го порядку* *k*[1; *n*–1] називається визначник, утворений з елементів, розміщених на перетині будь-яких *k* рядків і *k* стовпців визначника. Зрозуміло, що мінор першого порядку — це будь-який елемент визначника.

*Доповняльним мінором* для мінора *k*-го порядку називається такий мінор, який лишається у визначнику після викреслювання тих *k* рядків і тих *k* стовпців, на перетині яких містяться елементи, що утворили мінор *k*-го порядку.

Нехай мінор *k-*го порядку утворено з елементів, розміщених на перетині *i*1, *i*2, ..., *ik* рядків і *j*1, *j*2, ..., *jk* стовпців.

*Алгебраїчним доповненням*до мінора *k*-го порядку є доповняльний мінор (*n*–*k*)*-*го порядку, узятий зі знаком , де  Якщо сума  номерів рядків і стовпців парна, то береться знак «+», якщо непарна — то знак «–».

Далі важливу роль відіграватиме алгебраїчне доповнення до мінора першого порядку. Нехай  — будь-який елемент-мінор першого порядку у визначнику *n*-го порядку, тоді  буде алгебраїчним доповненням до мінора . Тут — доповняльний мінор (*n*–1)-го порядку, утворений викреслюванням *i*-рядка і *j*-стовпця в початковому визначнику *n*-го порядку.

***3. Обчислення визначників***

*Означення*. *Визначником n-го порядку* називається число , яке дорівнює алгебраїчній сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні їм алгебраїчні доповнення:


  (2.2)

Алгебраїчні доповнення, що входять до формули (2.2), за якою обчислюють визначник, є, у свою чергу, мінорами, узятими з відповідними знаками, тобто визначниками (*n*–1)-го порядку. Отже, обчислення визначника *n*-го порядку зводиться до обчислення *n* визначників (*n*–1)-го порядку.

Але з формули (2.2) випливає, що за наявності у визначнику нульових елементів відповідні алгебраїчні доповнення обчислювати не потрібно.

Згідно з властивістю 8, яка справджується для визначників будь-якого порядку, можна визначник перетворити так, щоб у його рядках або стовпцях усі елементи, крім одного, дорівнювали нулю. І тоді, розклавши визначник за елементами цього рядка або стовпця, *зведемо задачу знаходження визначника n-го порядку до знаходження* ***одного*** *визначника n–1-го порядку.*

***4. Обернена матриця***

Нехай дано квадратну матрицю *А*.

*Означення*.*Матриця* *А*–1 називається *оберненою матрицею* до квадратної невиродженої матриці *А*, якщо виконується співвідношення: .

Обернена матриця знаходиться за формулою

,

де  ‒ алгебраїчні доповнення елемента визначника матриці 

***5. Ранг матриці***

Розглянемо матрицю *А* розміром 



*Означення*. *Рангом* *матриці А* розміром  називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора, утвореного з елементів цієї матриці. Зрозуміло, що , а найбільший можливий ранг матриці може дорівнювати меншому з чисел *m* і *n*.

Обчислюючи ранг матриці, потрібно переходити від мінорів менших порядків, відмінних від нуля, до мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено відмінний від нуля мінор *М* *k*-го порядку, то достатньо обчислити лише мінори -го порядку, що обводять мінор *М*. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює *k.* Якщо серед них знайдеться такий, що відмінний від нуля, то далі для нього будуються обвідні мінори -го порядку і т. д.

*Означення*. *Елементарними перетвореннями матриці А* називаються такі її перетворення:

1. заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;
2. множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;
3. додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помноженого на деяке число.

***Теорема.*** *Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.*

Далі матриці, які мають рівні ранги, називатимемо *еквівалентними* матрицями. Еквівалентні матриці об’єднуватимемо знаком «~» («тильда»).