**Визначений інтеграл**

План

1. Означення визначеного інтеграла.

2. Властивості визначеного інтеграла.

**1. Означення визначеного інтеграла**

Нехай функція  визначена на відрізку , . Розіб’ємо відрізок  на *n* довільних частин так, щоб



Сукупність точок  назвемо *Т*-розбиттям відрізка  на частини. Для кожного з частинних відрізків визначимо його довжину  та значення функції  у довільній точці . Позначимо через  – найбільшу довжину серед довжин частинних відрізків, тобто . Утворимо суму , яка називається *інтегральною сумою* функції  на відрізку .

**Означення 1.** Якщо існує скінченна границя інтегральних сум  при , яка не залежить ні від способу розбиття відрізка  на частини , ні від вибору точок  у кожному з частинних відрізків, то вона називається *визначеним інтегралом*функції  на відрізку  і позначається символом . Отже, згідно з означенням,

.

Числа *а* і *b* називають відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування; функція  – підінтегральна функція;  – підінтегральний вираз; *dx* – диференціал змінної інтегрування.

**Означення 2*.*** Функція, для якої на  існує визначений інтеграл  називається *інтегровною на цьому проміжку*.

*Геометричний зміст визначеного інтеграла*полягає в тому, що визначений інтеграл від невід’ємної та інтегровної на відрізку функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції , відрізками прямих ,  та віссю :

****

*Необхідною умовою існування визначеного інтеграла*є обмеженість функції  на відрізку .

*Достатньою умовою існування визначеного інтеграла*є неперервність функції  на цьому ж відрізку.

**2. Властивості визначеного інтеграла**

І. Якщо , то 

ІІ. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто 

ІІІ. Якщо  та  інтегровні на , то



IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто



V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю 

VI. Якщо  — інтегровна в будь-якому із проміжків: , , , то 

VII. Якщо  і інтегровна для  то 

VIII. Якщо ,  – інтегровні та  для   то 

IX. Якщо  – інтегровна та  для   то



Х. **Теорема (про середнє):** Якщо функція  – неперервна для   то знайдеться така точка  що:

****

 **Обчислення визначених інтегралів**

План

1. Інтеграл зі змінною верхньою межею**.**

2. Формула Ньютона-Лейбніца.

3. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.

4. Метод інтегрування частинами.

**1. Інтеграл зі змінною верхньою межею**

Нехай функція  інтегровна на відрізку . Тоді вона інтегровна і на будь-якому відрізку , де , тобто для будь-якого  має зміст інтеграл .

Розглянемо функцію



Ця функція визначена на відрізку  і називається *інтегралом зі змінною верхньою межею*.

**Теорема 1*.*** Похідна інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, що дорівнює верхній межі, тобто



**2. Формула Ньютона-Лейбніца**

**Теорема 2. (Основна теорема інтегрального числення)**. Нехай функція  неперервна на відрізку . Якщо функція  є довільною її первісною на цьому відрізку, то

 .

Ця формула називається *формулою Ньютона-Лейбніца.*

**Приклад.**

.

**3. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі**

**Теорема.** Якщо: 1)  – неперервна для ; 2)   3)  та  – неперервні для  4) при  то

****

*Зауваження.*При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

**Приклад**. 

=

**4. Метод інтегрування частинами**

**Теорема.** Якщо функції  та  мають неперервні похідні для , то

****

Приклад.

.