**Правило Лопіталя розкриття неозначеностей**

*План*

***1. Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя***

***2. Застосування правила Лопіталя при розкритті невизначеностей вигляду ***

***1. Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя***

***Теорема 1 ( правило Лопіталя).*** *Нехай функції і визначені в проміжку і . Нехай, крім того, в проміжку існують скінченні похідні і , причому Тоді, якщо існує границя , то існує й границя , причому*

**Зауваження.** Якщо похідні  і *,* задовольняють умовам, котрі накладаються в наведеній теоремі на функції і , то правило Лопіталя можна застосувати повторно, тобто

Теорема 1 справджується й тоді, коли Нехай функції і визначені в проміжку , і в проміжку , існують скінчені похідні  *і ,* де . Тоді, якщо існує границя , то існує й границя , причому

***Теорема 2 (правило Лопіталя).*** *Нехай функції* і  *визначені в проміжку і в проміжку існують скінчені похідні і ,* де *. Тоді, якщо існує границя , то існує й границя , причому*

Теорема 2 має місце також, коли .

Правило Лопіталя дає можливість розкривати невизначеності типу .

***2. Застосування правила Лопіталя при розкритті невизначеностей вигляду .***

Правило Лопіталя можна застосовувати при розкритті невизначеностей вигляду .

**Застосування похідної до дослідження функції**

*План*

***1. Ознака монотонності функції***

***2. Точки екстремуму***

***3. Необхідні й достатні умови існування екстремуми функції***

***4.Знаходження найбільшого й найменшого значення функції на відрізку***

***1. Ознака монотонності функції***

***Теорема.*** *Якщо функція диференційована на інтервалі і на , то функція зростає (спадає).*

***2.Точки екстремуму***

Точка називається точкою *локального максимуму (мінімуму)* функції якщо існує окіл точки такий, що для будь-якої відмінної від точки . При цьому саме значення називається *локальним максимумом (мінімумом)* функції .

Точки максимуму і мінімуму функції називаються *точками екстремуму або екстремальними точками* функції.

***3. Необхідні й достатні умови існування екстремуми функції***

**Необхідна умова існування локального екстремуму функції.** Якщо в точці функція має екстремум, то існує окіл точки, в якому значення є найбільшим або найменшим. Отже, якщо в точці функція диференційована, то згідно теореми Ферма =0.

Зазначимо, що коли функція диференційована в точці і , то або , тобто функція зростає, або і функція спадає. Звідси випливає, що функція може мати екстремум лише в тих точках, у яких її похідна рівна нулю, або не існує.

Точки, в яких похідна функції рівна нулю, називаються *стаціонарними*. Стаціонарні точки й точки, в яких функція визначена, але її похідна не існує називаються *критичними*.

Отже, для того, щоб функція мала в точці екстремум, необхідно, щоб ця точка була критичною.

# Достатні умови існування екстремуму функції.

**Теорема.** Нехай − критична точка функції , неперервна в точці і має похідну в усіх точках околу за виключенням, можливо самої точки . Тоді

1. якщо для і для , то точка є точкою максимуму функції .
2. Якщо для і то точка є точкою мінімуму функції .
3. Якщо в околі має один і той же знак, то не є точкою екстремуму функції .

Із сказаного випливає правило дослідження функції на екстремум. Щоб дослідити функцію на екстремум треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти − першу похідну функції .
3. Розв’язати рівняння та визначити ті значення , при яких або не існує. Нехай після виконання цих дій одержано точки , які знаходяться в інтервалі () області визначення функції.
4. У кожному з інтервалів взяти довільну точку і визначити в ній знак першої похідної. Який знак матиме похідна у вибраній точці, такий же знак вона матиме й у відповідному інтервалі.
5. Розглянути знак у сусідніх інтервалах, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього. Якщо при цьому знаки у двох сусідніх інтервалах різні. То в критичній точці є екстремум: максимум, якщо знак змінюється з “+” на “-“, мінімум, якщо знак змінюється з “-“ на “+”. Якщо ж у двох сусідніх інтервалах знак першої похідної не змінюється. То екстремуму у відповідній критичній точці немає.

**Приклад.** Дослідити наекстремум функцію

1. Функція визначена в інтервалі .

2. .

3. Розв’язками рівняння є

4. В інтервалі функція спадає; в інтервалі функція зростає; інтервалі функція спадає; в інтервалі функція зростає.

5. Точки є точками мінімуму, а точка є точкою максимуму даної функції.

6.

**Теорема.**  Нехай − стаціонарна точка функції і в цій точці існує похідна другого порядку . Тоді, якщо , то точка є точкою мінімуму функції , а якщо , то – максимуму.

**Теорема.** Якщо в стаціонарній точці функції перша відмінна від нуля похідна є похідною парного порядку, то точка є точкою екстремуму функції: точкою мінімуму, якщо і точкою максимуму, якщо Якщо ж перша відмінна від нуля похідна є похідною непарного порядку, то точка не є точкою екстремуму функції.

***4. Знаходження найбільшого й найменшого значення функції на відрізку***

Для знаходження найбільшого й найменшого значення функції , неперервної на відрізку , потрібно знайти всі її локальні екстремуми на цьому відрізку та її значення на кінцях відрізка, тобто . Потім з одержаних значень вибрати найменше й найбільше.

**Асимптоти. План дослідження функції і побудова графіка**

*План*

1. ***Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину***
2. ***Асимптоти графіка функції***
3. ***Загальна схема дослідження функцій і побудови їх графіків***

***1. Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину***

Нехай функція визначена на інтервалі і в кожній точці цього інтервалу має скінчену похідну. Тоді в кожній точці графіка цієї функції можна провести дотичну, не паралельну осі . Крива, яка є графіком цієї функції, називається гладкою.

Якщо крива, яка є графіком функції , розміщена не нижче будь-якої дотичної на інтервалі , то вона називається *вгнутою догори* або просто вгнутою на цьому інтервалі. Іноді її ще називають *опуклою вниз* (рис. 20). Якщо крива, яка є графіком функції , розміщена не вище будь-якої дотичної на інтервалі , то вона називається *вгнутою донизу* або просто опуклою на цьому інтервалі. Таку криву ще називають *опуклою вгору* (рис. 21).

Точка називається точкою перегину гладкої кривої , якщо існує окіл точки такий, що в інтервалах і крива , має опуклість різних напрямків.



























Рис. 20

Рис. 21

***Теорема.*** *Нехай функція* , *визначена на інтервалі і в кожній точці цього інтервалу має похідні до другого порядку включно. Тоді, якщо у всіх точках то графік функції* , *на інтервалі вгнутий (опуклий вниз), якщо ж у всіх точках , то графік функції опуклий (опуклий вгору).*

Установимо необхідну умову існування точки перегину графіка функції . Нехай функція визначена і має неперервні похідні до другого порядку включно на інтервалі . Тоді. Якщо в кожній точці то графік функції на інтервалі вгнутий (опуклий вниз). Якщо , , − то графік опуклий (опуклий вгору).

Отже, якщо на інтервалі , то графік функції точок перегину на цьому інтервалі не має. Отже, умова є необхідною, для того, щоб точка була точкою перегину графіка функції .

Установимо достатню умову існування точки перегину графіка функції . Нехай точка така, що й існує таке , що в інтервалах і друга похідна має різні знаки. Тоді точка є точкою перегину.

**Зауваження.** Точка є точкою перегину графіка функції і в тому випадку, коли в точці існує дотична до графіка функції , друга похідна в самій точці не існує, але існує в деякому -околі точки , причому в інтервалах і має різні знаки.

***2. Асимптоти графіка функції***

Пряма називається асимптотою кривої якщо відстань від точки кривої до прямої при віддаленні точки у нескінченність прямує до нуля.

Із наведеного означення випливає, що асимптоти можуть існувати лише у тих кривих, які мають як завгодно віддалені точки, тобто у “нескінчених” кривих.

Надалі розрізнятимемо похилі і вертикальні асимптоти. До похилих асимптот належать також і горизонтальні асимптоти.

Якщо функція визначена на нескінченості і існують границі

то пряма є похилою асимптотою кривої при .

Із означення асимптоти кривої випливає, що пряма є вертикальною асимптотою, якщо принаймні одна з границь або рівна

***3. Загальна схема дослідження функцій і побудови їх графіків***

При дослідженні функцій і побудові їх графіків може бути застосована, наприклад, наступна схема:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки розриву та визначити їх тип.
3. Знайти асимптоти графіка функцій.
4. Знайти похідну функції і за її допомогою встановити інтервали зростання і спадання функції.
5. Знайти точки максимуму і мінімуму функції, а також максимальне й мінімальне значення функції.
6. Знайти другу похідну і за її допомогою визначити інтервали опуклості й точки перегину графіка функції.
7. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
8. Враховуючи одержані результати, побудувати графік функції.