**Правило Лопіталя розкриття неозначеностей**

*План*

***1. Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя***

***2. Застосування правила Лопіталя при розкритті невизначеностей вигляду ***

***1. Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя***

***Теорема 1 ( правило Лопіталя).*** *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *визначені в проміжку* $(a,b]$ *і* $\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=\lim\_{x\to a}g\left(x\right)=0$*. Нехай, крім того, в проміжку* $(a,b]$ *існують скінченні похідні* $f^{'}(x)$ *і* $g^{'}(x)$*, причому* $g^{'}(x)\ne 0.$ *Тоді, якщо існує границя* $\lim\_{x\to a}\frac{f^{'}(x) }{g^{'}(x)}$*, то існує й границя* $\lim\_{x\to a}\frac{f(x) }{g(x)}$*, причому*

$$\lim\_{x\to a}\frac{f(x) }{g(x)}=\lim\_{x\to a}\frac{f^{'}(x) }{g^{'}(x)}.$$

**Зауваження.** Якщо похідні $f^{'}(x)$ і $g^{'}(x)$*,* задовольняють умовам, котрі накладаються в наведеній теоремі на функції $f(x)$ і $g(x)$, то правило Лопіталя можна застосувати повторно, тобто

$$\lim\_{x\to a}\frac{f(x) }{g(x)}=\lim\_{x\to a}\frac{f^{'}(x) }{g^{'}(x)}=\lim\_{x\to a}\frac{f^{''}(x) }{g^{''}(x)}.$$

Теорема 1 справджується й тоді, коли $x\rightarrow \pm \infty .$ Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проміжку $[a,+\infty )$, $\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=\lim\_{x\to \infty }g\left(x\right)=0$ і в проміжку $[a,+\infty )$, існують скінчені похідні $f^{'}(x)$ *і* $g^{'}(x)$*,* де $g^{'}(x)\ne 0$. Тоді, якщо існує границя $\lim\_{x\to \infty }\frac{f^{'}(x) }{g^{'}(x)}$, то існує й границя $\lim\_{x\to \infty }\frac{f(x) }{g(x)}$, причому

$$\lim\_{x\to \infty }\frac{f(x) }{g(x)}=\lim\_{x\to \infty }\frac{f^{'}(x) }{g^{'}(x)}.$$

***Теорема 2 (правило Лопіталя).*** *Нехай функції*$ f(x)$ і $g(x)$ *визначені в проміжку*$ \left(a,b\right],$$\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=\lim\_{x\to a}g\left(x\right)=\infty $ *і в проміжку* $\left(a,b\right]$ *існують скінчені похідні* $f^{'}(x)$ *і* $g^{'}(x)$*,* де $g^{'}(x)\ne 0$*. Тоді, якщо існує границя* $\lim\_{x\to a}\frac{f^{'}(x) }{g^{'}(x)}$*, то існує й границя* $\lim\_{x\to a}\frac{f(x) }{g(x)}$*, причому*

$$\lim\_{x\to a}\frac{f(x) }{g(x)}=\lim\_{x\to a}\frac{f^{'}(x) }{g^{'}(x)}.$$

Теорема 2 має місце також, коли $x\rightarrow \pm \infty $.

Правило Лопіталя дає можливість розкривати невизначеності типу $\frac{0}{0}, \frac{\infty }{\infty }$.

***2. Застосування правила Лопіталя при розкритті невизначеностей вигляду .***

Правило Лопіталя можна застосовувати при розкритті невизначеностей вигляду .

**Застосування похідної до дослідження функції**

*План*

***1. Ознака монотонності функції***

***2. Точки екстремуму***

***3. Необхідні й достатні умови існування екстремуми функції***

***4.Знаходження найбільшого й найменшого значення функції на відрізку***

***1. Ознака монотонності функції***

***Теорема.*** *Якщо функція* $f(x)$ *диференційована на інтервалі* $(a,b)$ *і* $f^{'}\left(x\right)>0 (f^{'}\left(x\right)<0)$ *на* $(a,b)$*, то функція* $f(x)$ *зростає (спадає).*

***2.Точки екстремуму***

Точка $x\_{0}$ називається точкою *локального максимуму (мінімуму)* функції $f\left(x\right),$ якщо існує $δ-$окіл $(x\_{0}-δ,x\_{0}+δ)$ точки $x\_{0}$ такий, що $f\left(x\_{0}\right)>f\left(x\right) $ $\left(f\left(x\_{0}\right)>f\left(x\right)\right) $для будь-якої відмінної від $x\_{0}$ точки $x\in (x\_{0}-δ,x\_{0}+δ)$. При цьому саме значення $f\left(x\_{0}\right)$ називається *локальним максимумом (мінімумом)* функції $f\left(x\right)$.

Точки максимуму і мінімуму функції $f\left(x\right)$ називаються *точками екстремуму або екстремальними точками* функції.

***3. Необхідні й достатні умови існування екстремуми функції***

**Необхідна умова існування локального екстремуму функції.** Якщо в точці $x\_{0}$ функція $f\left(x\right)$ має екстремум, то існує окіл $(x\_{0}-δ,x\_{0}+δ)$ точки$ x\_{0}$, в якому значення $f\left(x\_{0}\right)$ є найбільшим або найменшим. Отже, якщо в точці $ x\_{0} $функція $f\left(x\right)$ диференційована, то згідно теореми Ферма $f\left(x\_{0}\right)$ =0.

Зазначимо, що коли функція $f\left(x\right)$ диференційована в точці $x\_{0}$ і $f\left(x\_{0}\right)\ne 0$, то або $f\left(x\_{0}\right)>0$, тобто функція зростає, або $f\left(x\_{0}\right)<0$ і функція спадає. Звідси випливає, що функція $f\left(x\right)$ може мати екстремум лише в тих точках, у яких її похідна рівна нулю, або не існує.

Точки, в яких похідна функції рівна нулю, називаються *стаціонарними*. Стаціонарні точки й точки, в яких функція визначена, але її похідна не існує називаються *критичними*.

Отже, для того, щоб функція $f\left(x\right)$ мала в точці $x\_{0}$ екстремум, необхідно, щоб ця точка була критичною.

# Достатні умови існування екстремуму функції.

**Теорема.** Нехай $x\_{0}$ − критична точка функції $f\left(x\right)$, $f\left(x\right) $неперервна в точці $x\_{0}$ і має похідну $f^{'}\left(x\right)$ в усіх точках околу $(x\_{0}-δ,x\_{0}+δ)$за виключенням, можливо самої точки $x\_{0}$. Тоді

1. якщо $f^{'}\left(x\right)>0$ для $x\in (x\_{0}-δ,x\_{0})$ і $f^{'}\left(x\right)<0$ для $x\in (x\_{0},x\_{0}+δ)$, то точка $x\_{0}$ є точкою максимуму функції $f\left(x\right)$.
2. Якщо $f^{'}\left(x\right)<0$ для $x\in (x\_{0}-δ,x\_{0})$ і $f^{'}\left(x\right)>0 для x\in \left(x\_{0},x\_{0}+δ\right),$ то точка $x\_{0}$ є точкою мінімуму функції $f\left(x\right)$.
3. Якщо $f^{'}\left(x\right)$ в околі $(x\_{0}-δ,x\_{0}+δ)$ має один і той же знак, то $x\_{0}$ не є точкою екстремуму функції $f\left(x\right)$.

Із сказаного випливає правило дослідження функції на екстремум. Щоб дослідити функцію $f\left(x\right)$ на екстремум треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти $f^{'}\left(x\right)$ − першу похідну функції $f\left(x\right)$.
3. Розв’язати рівняння $f^{'}\left(x\right)=0$ та визначити ті значення $x$, при яких $f^{'}\left(x\right)=\infty $ або $f^{'}\left(x\right)$ не існує. Нехай після виконання цих дій одержано точки $x\_{1}<x\_{2}<…<x\_{n}$, які знаходяться в інтервалі ($a,b$) області визначення функції.
4. У кожному з інтервалів $\left(a,x\_{1}\right),\left(x\_{1},x\_{2}\right),..,\left(x\_{n-1},x\_{n}\right) $ взяти довільну точку і визначити в ній знак першої похідної. Який знак матиме похідна у вибраній точці, такий же знак вона матиме й у відповідному інтервалі.
5. Розглянути знак $f^{'}\left(x\right)$ у сусідніх інтервалах, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього. Якщо при цьому знаки $f^{'}\left(x\right)$ у двох сусідніх інтервалах різні. То в критичній точці є екстремум: максимум, якщо знак змінюється з “+” на “-“, мінімум, якщо знак змінюється з “-“ на “+”. Якщо ж у двох сусідніх інтервалах знак першої похідної не змінюється. То екстремуму у відповідній критичній точці немає.

**Приклад.** Дослідити наекстремум функцію $y=\frac{1}{4}x^{4}-\frac{2}{3}x^{3}-\frac{3}{2}x^{2}+2.$

1. Функція визначена в інтервалі $(-\infty ,+\infty )$.

2. $y^{'}=x^{3}-2x^{2}-3x$.

3. Розв’язками рівняння $x^{3}-2x^{2}-3x=0$ є $x\_{1}=-1, x\_{2}=0, x\_{3}=3.$

4. В інтервалі $(-\infty ,-1)$ $y^{'}<0,$функція спадає; в інтервалі $\left(-1,0\right)$ $y^{'}>0,$ функція зростає; інтервалі $\left(0,3\right) y^{'}<0, $функція спадає; в інтервалі $(3,\infty )y^{'}>0,$ функція зростає.

5. Точки $x\_{1}=-1, x\_{3}=3$ є точками мінімуму, а точка $x\_{2}=0$ є точкою максимуму даної функції.

 6. $y\_{min}=1\frac{5}{12};y\_{min}=-9\frac{1}{4};y\_{max}=2. $

**Теорема.**  Нехай $x\_{0}$− стаціонарна точка функції $f\left(x\right)$ і в цій точці існує похідна другого порядку $f^{''}(x)\ne 0$. Тоді, якщо $f^{''}\left(x\right)>0$, то точка $x\_{0}$ є точкою мінімуму функції $f\left(x\right)$, а якщо $f^{''}\left(x\right)<0$, то – максимуму.

**Теорема.** Якщо в стаціонарній точці $x\_{0}$ функції $f\left(x\right)$ перша відмінна від нуля похідна $f^{\left(n\right)}(x\_{0})$ є похідною парного порядку, то точка $x\_{0}$ є точкою екстремуму функції: точкою мінімуму, якщо $f^{\left(n\right)}\left(x\_{0}\right)>0$ і точкою максимуму, якщо $f^{\left(n\right)}\left(x\_{0}\right)<0.$ Якщо ж перша відмінна від нуля похідна $f^{\left(n\right)}(x\_{0})$ є похідною непарного порядку, то точка $x\_{0}$ не є точкою екстремуму функції.

***4. Знаходження найбільшого й найменшого значення функції на відрізку***

Для знаходження найбільшого й найменшого значення функції $f(x)$, неперервної на відрізку $\left[a,b\right]$, потрібно знайти всі її локальні екстремуми на цьому відрізку та її значення на кінцях відрізка, тобто $f\left(a\right), f(b)$. Потім з одержаних значень вибрати найменше й найбільше.

**Асимптоти. План дослідження функції і побудова графіка**

*План*

1. ***Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину***
2. ***Асимптоти графіка функції***
3. ***Загальна схема дослідження функцій і побудови їх графіків***

***1. Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину***

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на інтервалі $(a,b)$ і в кожній точці цього інтервалу має скінчену похідну. Тоді в кожній точці $M(x,f(x))$ графіка цієї функції можна провести дотичну, не паралельну осі $Oy$. Крива, яка є графіком цієї функції, називається гладкою.

Якщо крива, яка є графіком функції $y=f(x)$, розміщена не нижче будь-якої дотичної на інтервалі $(a,b)$, то вона називається *вгнутою догори* або просто вгнутою на цьому інтервалі. Іноді її ще називають *опуклою вниз* (рис. 20). Якщо крива, яка є графіком функції $y=f(x)$, розміщена не вище будь-якої дотичної на інтервалі $(a,b)$, то вона називається *вгнутою донизу* або просто опуклою на цьому інтервалі. Таку криву ще називають *опуклою вгору* (рис. 21).

Точка $M\_{0}(x\_{0},f(x\_{0}))$ називається точкою перегину гладкої кривої $y=f(x)$, якщо існує $δ-$окіл точки $x\_{0}$ такий, що в інтервалах $(x\_{0}-δ,x\_{0})$ і $(x\_{0},x\_{0}+δ)$ крива $y=f(x)$, має опуклість різних напрямків.



























Рис. 20

Рис. 21

***Теорема.*** *Нехай функція* $y=f(x)$, *визначена на інтервалі* $(a,b)$ *і в кожній точці цього інтервалу має похідні до другого порядку включно. Тоді, якщо* $f^{''}\left(x\right)>0$ *у всіх точках* $x\in \left(a,b\right),$ *то графік функції* $y=f(x)$, *на інтервалі* $(a,b)$ *вгнутий (опуклий вниз), якщо ж* $f^{''}\left(x\right)<0$ *у всіх точках* $x\in \left(a,b\right)$*, то графік функції опуклий (опуклий вгору).*

 Установимо необхідну умову існування точки перегину графіка функції $y=f(x)$. Нехай функція $y=f(x)$ визначена і має неперервні похідні до другого порядку включно на інтервалі $(a,b)$. Тоді. Якщо в кожній точці $x\in \left(a,b\right) f^{''}\left(x\right)>0,$ то графік функції $y=f(x)$ на інтервалі $(a,b)$вгнутий (опуклий вниз). Якщо $f^{''}\left(x\right)<0$, $x\in \left(a,b\right)$, − то графік опуклий (опуклий вгору).

Отже, якщо на інтервалі $(a,b) f^{''}\left(x\right)\ne 0$, то графік функції $y=f(x)$ точок перегину на цьому інтервалі не має. Отже, умова $ f^{''}\left(x\right)=0$ є необхідною, для того, щоб точка $M\_{0}(x\_{0},f(x\_{0}))$ була точкою перегину графіка функції $y=f(x)$.

Установимо достатню умову існування точки перегину графіка функції $y=f(x)$. Нехай точка $M\_{0}(x\_{0},f(x\_{0}))$ така, що $ f^{''}\left(x\right)=0$ й існує таке $δ$, що в інтервалах $(x\_{0}-δ,x\_{0})$ і $(x\_{0},x\_{0}+δ)$ друга похідна $ f^{''}\left(x\right)$ має різні знаки. Тоді точка $M\_{0}(x\_{0},f(x\_{0}))$ є точкою перегину.

**Зауваження.** Точка $M\_{0}(x\_{0},f(x\_{0}))$ є точкою перегину графіка функції $y=f(x)$ і в тому випадку, коли в точці $M\_{0}$ існує дотична до графіка функції $y=f(x)$, друга похідна в самій точці $x\_{0}$ не існує, але існує в деякому $δ$-околі точки $x\_{0}$, причому в інтервалах $(x\_{0}-δ,x\_{0})$ і $(x\_{0},x\_{0}+δ)$ має різні знаки.

***2. Асимптоти графіка функції***

Пряма $L$ називається асимптотою кривої $y=f\left(x\right),$ якщо відстань від точки $M$ кривої до прямої $L$ при віддаленні точки $M$ у нескінченність прямує до нуля.

Із наведеного означення випливає, що асимптоти можуть існувати лише у тих кривих, які мають як завгодно віддалені точки, тобто у “нескінчених” кривих.

Надалі розрізнятимемо похилі і вертикальні асимптоти. До похилих асимптот належать також і горизонтальні асимптоти.

Якщо функція $f\left(x\right)$ визначена на нескінченості і існують границі

 $\lim\_{x\to \infty }\frac{f(x)}{x}=k, \lim\_{x\to \infty }\left(f\left(x\right)-kx\right)=b, $

то пряма $y=kx+b$ є похилою асимптотою кривої $y=f\left(x\right)$ при $x\rightarrow \infty $.

Із означення асимптоти кривої $y=f\left(x\right)$ випливає, що пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою, якщо принаймні одна з границь $\lim\_{x\to a-0}f(x)$ або $\lim\_{x\to a+0}f(x)$ рівна $+\infty або-\infty .$

***3. Загальна схема дослідження функцій і побудови їх графіків***

При дослідженні функцій і побудові їх графіків може бути застосована, наприклад, наступна схема:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки розриву та визначити їх тип.
3. Знайти асимптоти графіка функцій.
4. Знайти похідну функції і за її допомогою встановити інтервали зростання і спадання функції.
5. Знайти точки максимуму і мінімуму функції, а також максимальне й мінімальне значення функції.
6. Знайти другу похідну і за її допомогою визначити інтервали опуклості й точки перегину графіка функції.
7. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
8. Враховуючи одержані результати, побудувати графік функції.