**Міністерство освіти та науки України**

**Луцький національний технічний університет**



**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

Методичні вказівки до практичних занять

для здобувачів фахової передвищої освіти

освітньо-професійної програми «Комп’ютерна інженерія»

галузі знань 12 Інформаційні технології

спеціальностей 123 Комп’ютерна інженерія,

126 Інформаційні системи та технології

та освітньо-професійної програми «Менеджмент»

галузі знань 07 Управління та адміністрування

спеціальності 073 Менеджмент

денної форми навчання

**Луцьк 2023**

УДК 377.016:51](072)

В 83

До друку

Електронна копія друкованого видання передана для внесення в репозитарій   
ТФК ЛНТУ

Бібліотекар \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Оксана РОМАНЮК

Рекомендовано до видання Навчально-методичною радою ТФК ЛНТУ, протокол   
№ \_\_\_ від «\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 202\_\_ року.

Голова НМР \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Світлана БУСНЮК

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової комісії природничо-математичних дисциплін ТФК ЛНТУ, протокол № \_\_\_ від « » 2023 року.

Голова ЦК \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Неля Стефанська

Укладач: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Юлія Боровська, викладач ТФК ЛНТУ.

Рецензент: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Юрій Харкевич, кандидат фізико-математичних наук, професор факультету інформаційних систем, фізики та математики ВНУ імені Лесі Українки.

|  |  |
| --- | --- |
| В 83 | **Вища математика** [Текст]: методичні вказівки до практичних занять для здобувачів фахової передвищої освіти освітньо-професійної програми «Комп’ютерна інженерія» галузі знань 12 Інформаційні технології спеціальностей 123 Комп’ютерна інженерія, 126 Інформаційні системи та технології та освітньо-професійної програми «Менеджмент» галузі знань 07 Управління та адміністрування спеціальності 073 Менеджмент денної форми навчання / уклад. Ю. В. Боровська. – Луцьк : ТФК Луцького НТУ, 2023. – 80 с. |

Методичне видання до практичних занять складене відповідно до робочої програми з дисципліни «Вища математика» та вміщує короткі теоретичні відомості з кожної теми, приклади розв’язань типових задач та перелік завдань для контролю знань. Мета цієї розробки – допомогти студентам при підготовці до практичних занять, краще засвоїти основні поняття та методи розв’язання задач з вищої математики при самостійній підготовці.

© Ю.В.Боровська, 2023

**ЗМІСТ**

[ВСТУП 4](#_Toc126092168)

[РОЗДІЛ I. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА 5](#_Toc126092169)

[Тема 1. Визначники та їх обчислення 5](#_Toc126092170)

[Тема 2. Матриці та дії над ними 9](#_Toc126092171)

[Тема 3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь 14](#_Toc126092172)

[РОЗДІЛ II. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ 18](#_Toc126092173)

[Тема 4.Вектори та операції над ними 18](#_Toc126092174)

[Тема 5. Добутки векторів 22](#_Toc126092176)

[РОЗДІЛ III. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ 25](#_Toc126092177)

[Тема 6. Пряма на площині 25](#_Toc126092178)

[Тема 7. Пряма та площина в просторі 28](#_Toc126092179)

[РОЗДІЛ IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ 33](#_Toc126092180)

[Тема 8. Обчислення границь 33](#_Toc126092181)

[Тема 9. Дослідження функцій на неперервність. 36](#_Toc126092182)

[РОЗДІЛ V. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ 39](#_Toc126092184)

[Тема 10. Комплексні числа, дії над ними 39](#_Toc126092185)

[РОЗДІЛ VI. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ 42](#_Toc126092186)

[Тема 11. Похідна функції 42](#_Toc126092187)

[Тема 12. Диференціювання функцій: складної,](#_Toc126092188) [заданої неявно та параметрично. Обчислення границь функцій](#_Toc126092189) [за правилом Лопіталя 46](#_Toc126092190)

[Тема 13.Застосування диференціального числення 52](#_Toc126092191)

[РОЗДІЛ VII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ](#_Toc126092193) [ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ 57](#_Toc126092194)

[Тема 14. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування 57](#_Toc126092195)

[Тема 15. Інтегрування раціональних, ірраціональних](#_Toc126092196) [та тригонометричних функцій 61](#_Toc126092197)

[Тема 16. Визначений інтеграл 65](#_Toc126092198)

[Розділ VIII. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ 70](#_Toc126092199)

[Тема 17. Функції багатьох змінних. 70](#_Toc126092200)

[Диференціювання функцій багатьох змінних 70](#_Toc126092201)

[Тема 18. Похідні та диференціали вищих порядків. 73](#_Toc126092202)

[СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 77](#_Toc126092203)

**ВСТУП**

В сучасних умовах навчальний процес вимагає постійного вдосконалення. Так як і в освіті, в науці відбувається зміна пріоритетів і

соціальних цінностей: науково-технічний прогрес все більше усвідомлюється як засіб досягнення такого рівня виробництва, який найбільшою мірою відповідає задоволенню потреб людини, розвитку духовного багатства особистості. Тому підготовка фахівців технічного спрямування – це одне із найважливіших загальнодержавних завдань і в тому числі завдання нашої системи освіти. Саме вона закладає основи розвитку виробництва, науки, техніки. В кінцевому рахунку саме освіта створює основи добробуту народу і його незалежності.

Для підготовки висококваліфікованих спеціалістів, конкуренто-спроможних на світовому ринку праці, для господарської діяльності та науки слід забезпечити належний рівень математичної підготовки здобувачів освіти, тому що математика відіграє важливу роль у формуванні таких якостей сучасного фахівця, як професіональна компетентність, творче мислення, навички до самостійної наукової роботи. Математика є мовою інженерних досліджень та розрахунків, основою вивчення фізики, астрономії, хімії, загальнотехнічних і спеціальних дисциплін. Математичні методи та математичне моделювання широко використовуються для розв’язання практичних задач різних галузей науки, техніки, економіки, виробництва.

Сьогодні перед викладачем стоїть завдання не просто навчити студентів опановувати певний обсяг знань, а виробляти вміння вчитися, застосовувати набуті знання у практичній діяльності.

Методичний посібник включає короткі теоретичні відомості з кожної теми, приклади розв’язання типових задач, перелік задач з кожної теми.

Подані завдання дозволяють підготуватись студентам до практичних занять та перевірити знання.

**РОЗДІЛ I. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА**

**Тема 1.** **Визначники та їх обчислення**

**Теоретичні відомості**

*Визначником (детермінантом) другого порядку* є число, що обчислюється за правилом:

.

*Визначником (детермінантом) третього порядку* називається число, що можна обчислити за правилом трикутника:

.

Для запам’ятовування правила обчислення визначника третього порядку зручно користуватись схемою:



*Мінором * елемента  визначника третього порядку ** називається визначник другого порядку, який утворюється з  в результаті викреслювання *і*-го рядка і *j*-стовпця.

*Алгебраїчним доповненням* елемента  визначника третього порядку називають його мінор **,взятий зі знаком , тобто

.

**Теорема.** Кожний визначник можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Обчислити визначники другого порядку:

а)  б) ; в) .

***Розв’язання.***

а) 

б) ;

в) .

***Приклад 2.*** Обчислити визначники третього порядку:

а) ; б) ; в) .

***Розв’язання.***

а) ;

б) 



в) 

В даник прикладах для обчислення визначників застосовували правило трикутника.

***Приклад 3.*** Обчислити визначник четвертого порядку:



=

=



Даний визначник було розкладено за елементами четвертого стовпця.

***Приклад 4.*** Знайти алгебраїчні доповнення елементів  визначника



***Розв'язання.***



***Приклад 5.*** Обчислити визначник четвертого порядку:







Для утворення нулів у рядку або стовпчику зручно мати розв’язу­вальний елемент, що дорівнює одиниці. Даний визначник такого еле­мента не має. Для його утворення можна, наприклад, помножити останній рядок визначника на (–1) і додати до передостаннього, при цьому визначник не зміниться.

Помножимо елементи першого стовпчика спочатку на (–1) і складемо з відповідними елементами другого стовпчика, тоді на місці елемента  утвориться нуль. Далі множимо всі елементи того ж першого стовпчика на (–3) і складаємо з елементами третього стовпчика. На місці елемента знову утворився нуль. У такий же спосіб, помноживши перший стовпчик на (–1) і склавши з останнім, на місці елемента  також утвориться нуль. Слід зазначити, що для утворення нулів у рядку працюють з елементами стовпчиків, а для утворення нулів у стовпчиках — з елементами рядків.

Далі, використовуючи теорему Лапласа, розкладаємо визначник 4-го порядку за елементами третього рядка і одержуємо визначник третього порядку. Для його знаходження можна застосувати відповідне правило, але ми ще раз утворимо нулі.

Для одержання одиниці до елементів першого стовпчика додамо відповідні елементи третього стовпчика. На місці елемента  утворилася (–1). Далі помножимо елементи першого рядка на 7 і складемо з відповідними елементами другого рядка, одержимо нуль на місці елемента . Аналогічно, помноживши елементи першого рядка на 2 і склавши з елементами третього рядка, одержимо нуль на місці елемента . Після застосування теореми Лапласа одержуємо визначник другого порядку і остаточний результат.

**Задачі**

1. Обчислити визначники:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

9. ; 10. ;

11. ; 12. .

2. Розкладаючи за другим рядком, обчислити визначник:

.

**Тема 2. Матриці та дії над ними**

**Теоретичні відомості**

*Матрицею* називається прямокутна таблиця чисел (елементів матриці), що містить деяку кількість рядків та стовпців. Елемент в -му рядку та -му стовпці матриці позначають .

*Сумою матриць* *А* і *В* є матриця *С* з елементами . Операція додавання матриць можлива лише для матриць однакового розміру.

*Добутком матриці А* на число є матриця *В* з елементами .

*Різниця матриць* *А* і *В* визначається як сума *А* і (–*В*).

*Добутком матриці А* розміру  на матрицю *В* розміру  є матриця *С*, розміром , елементи якої обчислюються за формулою



(тобто елемент , який стоїть в *і*-му рядку та *j*-му стовпці матриці *С*, дорівнює сумі добутків елементів *і*-го рядка матриці *А* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *В*). Операція множення двох матриць можлива лише за умови, коли кількість стовпців першої матриці *А* дорівнює кількості рядків другої матриці *В*.

Діагональна матриця, всі елементи якої, що містяться на головній діагоналі, дорівнюють одиниці, називається *одиничною* матрицею.

Прикладом одиничної матриці третього порядку є матриця:

.

*Нульовою* матрицею називається матриця, всі елементи якої – нулі. Позначається .

Якщо в матриці *А* поміняти місцями рядки і стовпці, одержимо матрицю, яка називається *транспонованою до матриці* *А* і позначається .

*Обернена* матриця знаходиться за формулою

, (2.1)

де .

*Рангом* матриці *А* називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля, (позначається )*.*

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Знайти матрицю , якщо

, .

***Розв’язання.***Кількість стовпців матриці  дорівнює кількості рядків матриці , тому за означенням маємо



***Приклад 2*.** Знайти значення матричного поліному, якщо



***Розв’язання.***

1. 



2. 

3. 

4. 

***Приклад 3*.** Знайти матрицю , обернену до матриці

.

***Розв’язання.*** Обчислимо визначник матриці :

.

Матриця  невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (2.1). Знайдемо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

 ; ;

;  

 ; 

Складемо обернену матрицю

.

***Приклад 4.*** Обчислити ранг матриці 

***Розв'язання.***

1. Поміняємо перший і другий рядок місцями для того, щоб елемент 

2. Щоб отримати в першому стовпці всі решта нулі, пер­ший рядок домножимо на (-1) і додамо до третього рядка; пер­ший рядок домножимо на (-2) і додамо до четвертого рядка;

3. Елемент . Щоб отримати нулі, другий рядок до­дамо до третього рядка; другий рядок домножимо на 3 і додамо до четвертого рядка;

4. Вилучимо нульові рядки.



.

Отже, ранг матриці 

**Задачі**

1. Знайти добутки матриць:

1. ; 2. ;

3. ; 4. .

2. Знайти значення полінома  від матриці

.

3. Знайти значення полінома  від матриці

.

4. Знайти обернені до таких матриць:

1. . 2. .

3. . 4. .

5. . 6. .

5. Обчислити ранги матриць:

1. . 2. .

**Тема 3. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь**

**Теоретичні відомості**

***Метод Крамера***

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими , , 

 (3.1)

При розв’язуванні системи рівнянь (3.1) можуть бути такі три випадки:

1. Δ ≠ 0, тоді система (3.1) має єдиний розв’язок:



де ; ; ; .

Останні формули називають *формулами Крамера*.

2. Якщо ∆ = 0, а принаймні один із визначників Δ1, Δ2, Δ3 не дорівнює нулю, то система (2) розв’язків не має.

3. Якщо Δ = 0, і Δ1 = 0, Δ2 = 0, Δ3 = 0, то система (3.1) має безліч розв’язків.

***Матричний метод***

Введемо матриці

; ; .

Тоді згідно з правилом множення матриць систему (3.1) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею *Х*: *.*

Якщо матриця *А* має обернену матрицю , то .

Отже, щоб розв’язати систему рівнянь (3.1), досить знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її справа на матрицю з вільних членів.

***Метод Гауса***

Довільні системи лінійних рівнянь розвʼязуються за методом Гауса (метод послідовного виключення невідомих). Він полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система зводиться до еквівалентної системи східчастого або трикутного вигляду, з якої послідовно, починаючи з останніх за номером невідомих, знаходимо всі інші невідомі.

Метод Гауса зручно використовувати, працюючи з розширеною матрицею системи замість самих рівнянь. Розширену матрицю в цьому випадку записують з вертикальною прямою рискою, яка відділяє коефіцієнти біля невідомих від вільних членів. Стовпець вільних членів міняти місцями з іншими стовпцями розширеної матриці не можна.

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Розв'язати методом Крамера систему лі­нійних рівнянь



***Розв'язання.***Обчислимо визначник системи: 

, , 

Використаємо формули 



Відповідь. (3; 2; 1).

***Приклад 2.*** Записати і розв'язати в матричній формі систему рівнянь



***Розв'язання.***Позначимо через 

Система лінійних рівнянь запишеться у матричній формі . Матричний розв'язок системи буде .

Для знаходження оберненої матриці :

1. Обчислюємо визначник матриці : .

Оскільки ,то для матриці  існує обернена , а значить, можна знайти єдиний розв'язок вихідної системи.

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці :

; ;

; ;

; ;

; ;

.

3. Обернена матриця має вигляд:

.

Знаходимо розв'язок заданої системи:

.

Розв'язок системи лінійних рівнянь: .

*Відповідь.* (-1; 1; 3).

***Приклад 3.*** Розв'язати методом Гауса систему ліній­них рівнянь



***Розв'язання.***

1. Виконуємо перетворення над розширеною матрицею системи:







Оскільки ранги основної і розширеної матриці співпада­ють () і ранг системи дорівнює кількості невідомих, то сис­тема має один розв'язок.

2. За останньою матрицею складаємо систему рівнянь.

(2; 1; -2 ) - розв'язок системи.

*Відповідь.* (2; 1;-2).

**Задачі**

1. Розв’язати системи лінійних рівнянь за правилом Крамера.

1.  2. 

1. Розв’язати систему лінійнихрівнянь двома з трьох методів: методом Крамера, методом Гауса, матричним методом.
2.  2. 
3.  4. 
4.  6. 
5.  8. 

**РОЗДІЛ II. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ**

**Тема 4.Вектори та операції над ними**

**Теоретичні відомості**

*Вектором*називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано початок і кінець . Позначення вектора: або .

*Довжина вектора* дорівнює:

 (4.1)

Якщо початок вектора  міститься в точці *А* (*х*1, *у*1, *z*1), а кінець – в точці *В* (*х*2, *у*2, *z*2), то координати вектора шукаємо з формул:

,

тобто .

Тоді з формули (4.1) знаходимо довжину вектора :

.

Цією формулою користуються для знаходження відстані між точками *А* і *В*.

Умовою колінеарності двох векторів  та  є пропорційність однойменних координат

 (4.2)

Позначаючи через  кути вектора  з осями координат, отримуємо:

 (4.3)

 називаються *напрямними косинусами* вектора .

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Дано вектор  з початком в т.. Знайти координати кінця вектора т..

***Розв'язання.***Оскільки

,

то маємо

,

звідки .

*Відповідь.* .

***Приклад 2.*** Чи колінеарні вектори  і 

***Розв'язання.***Підставивши координати векторів в умову колінеарності (4.2) маємо:



Отримали , а отже, вектори колінеарні. Оскільки , вектори протилежно напрямлені.

***Приклад 3.*** Знайти координати вектора , який колінеарний вектору 

***Розв'язання.***З умови (4.2) колінеарності векторів маємо 

Отже, 

***Приклад 4.*** Дано точки  і . Знайти напрямні косинуси вектора .

***Розв'язання.***Знайдемо координати вектора  та його довжину.





Підставимо отримані значення в формули напрямних косинусів:



***Приклад 5.*** Обчислити довжину вектора , якщо .

***Розв’язання.***Знайдемо координати векторів:

;





Тоді довжина шуканого вектора дорівнює:



***Приклад 6.*** Знайти напрямні косинуси вектора , а також кути, що утворює вектор з осями координат, якщо 

***Розв’язання.***Запишемо координати вектора і знайдемо його довжину



Напрямні косинуси дорівнюють:



Тоді 

***Приклад 7.*** Показати, що вектори , ,  утворюють базис у тривимірному простору.

***Розв’язання.***За визначенням три вектори тривимірного простору утворюють базис, якщо вони лінійно незалежні, тобто, якщо з рівності нулю їх лінійної комбінації



випливає .

Запишемо векторну рівність у координатній формі:



Розв’яжемо систему за формулами Крамера:



Обчислюємо визначник системи

.

Легко побачити, що

,

тому .

З цього випливає, що вектори  лінійно незалежні і тому утворюють базис.

**Задачі**

1.Визначити відстань точки від початку координат і від осей координат.

2.Знайти початок вектора , якщо його кінець точка .

3. Обчислити довжину вектора  і кути, які він утворює з осями.

4. Дано вектори .Знайти довжини векторів: а); б) 

5. Вектор утворює з двома осями системи координат кути, що рівні . Під яким кутом він нахилений до третьої осі?

6. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін 

7. Точки  є вершинами паралелограма, причому *А* і *С* – протилежні вершини. Знайдіть четверту вешину *D*, а також периметр паралелограма.

**Тема 5. Добутки векторів**

**Теоретичні відомості**

Розв’язуючи задачі, пов’язані з нелінійними операціями з   
векторами, використовують формули

* знаходження скалярного добутку векторів  та :

; ,

* кута ϕ між векторами:

,

* умову перпендикулярності двох векторів:

.

Для векторного добутку векторів  та маємо:



Мішаний добуток трьох векторів обчислюється за формулою:

.

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1*.** Дано три точки *А* (1;1;1), *В* (2;2;1) і *С* (2;1;2). Знайти кут .

***Розв’язання.***Знайдемо вектори , . Згідно з формулою кута між векторами маємо:

, отже, ϕ = 60°.

***Приклад 2.*** Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах  і , якщо відомо, що .

***Розв’язання.***З визначення операції додавання векторів відомо, що одна діагональ паралелограма , а друга . Довжина довільного вектора визначається за формулою: . Тоді:





***Приклад 3.*** Знайти площу і висоту  трикутника, вершинами якого є точки: .

***Розв’язання.***Знайдемо вектори  і . Модуль їх векторного добутку буде дорівнювати подвоєній площі трикутника: звідки .

Знайдемо висоту трикутника: .

***Приклад 4.*** Для піраміди з вершинами ,  обчислити об’єм, площу грані *АВС* і висоту, опущену на цю грань.

***Розв’язання.*** Знайдемо координати векторів  :

 .

Модуль мішаного добутку

у шість разів більший за об’єм піраміди, побудованої на векторах , тобто  Для обчислення площі грані *АВС* знайдемо векторний добуток

.

Тоді , а висота піраміди .

**Задачі**

1.Знайти .

2.Знайти 

3.Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах , якщо  і .

4.Обчислити об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах .

5. Дані координати вершин піраміди, , , . Треба знайти: а) довжину ребра *А1А2* та *А1А4*; б)кут між ребрами *А1А2* та *А1А4*; в) площу грані *А1А2А3*

6. Чи знаходяться точки   в одній площині?

7. Дано піраміду з вершинами  і . Обчислити її об’єм і висоту, опущену на грань *АВС*.

8. Обчислити висоту  і площу трикутника з вершинами в точках  і .

**РОЗДІЛ III. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

**Тема 6. Пряма на площині**

**Теоретичні відомості**

Нехай пряма на площині проходить через задану точку  паралельно заданому ненульовому вектору , який називається *напрямним вектором прямої*. Тоді *канонічне рівняння прямої*:

 (6.1)

де  – координати довільної точки прямої.

З (6.1) легко дістати *параметричне рівняння прямої:*

, (6.2)

де – параметр, який може набувати довільних дійсних значень.

*Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки  та :*

 (6.3)

*Рівняння з кутовим коефіцієнтом:*

 (6.4)

де   – кут, який утворює пряма з додатнім напрямом осі ;  –відрізок, що відтинається прямою на осі  (рис. 6.1).

*Загальне рівняння прямої* на площині:



*b*

*x*

*y*

0

 (6.5)

де   – координати вектора  перпендикулярного (нормального) до даної прямої.

Рис. 6.1

*Рівняння прямої у відрізках на осях координат:*

.

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки  і .

***Розв'язання.***Використаємо рівняння (6.3):



Отже,  – шукане рівняння.

*Відповідь.* 

***Приклад 2.*** Пряму задано рівнянням 3*х* – 5*у* + 15 = 0. Перевірити, які з точок *А* (– 2, 3), *В* (0, 3), *С* (5, 6), належать заданій прямій, знайти її рівняння з кутовим коефіцієнтом і у відрізках на осях.

***Розв'язання.***Для перевірки того, чи лежать точки *А*, *В*, *С* на прямій, підставимо їхні координати в рівняння прямої:

*А*: 3(– 2) – 53 + 15 ≠ 0, *В*: 30 – 35 + 15 = 0, *С*: 35 – 56 + 15 = 0.

Таким чином, точка *А*  не лежить на прямій, а точки *В* і *С* лежать на прямій.

Поділимо рівняння прямої почленно на коефіцієнт при *у*:

,

а далі запишемо його у вигляді  — рівняння з кутовим коефіцієнтом.

Поділивши рівняння почленно на вільний член, дістанемо шукане рівняння у відрізках на осях:

, або ,

***Приклад 3.*** Дано трикутник . Знайти відстань від вершини *В* до медіани, що проходить через точку *А*.

***Розв'язання.***Знайдемо координати основи медіани:

 .

Запишемо рівняння медіани як прямої, що проходить через дві задані точки:

, або .

Відстань від точки  до медіани знайдемо за формулою:

.

***Приклад 4.***Записати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими  і 

***Розв'язання.***Використаємо відому властивість бісектриси кута про те, що на ній лежить множина точок, рівновіддалених від сторін кута. Нехай *М*(*х*, *у*) — точка, яка належить цій множині. Тоді за формулою відстані від точки до прямої записуємо:



Звідси маємо два рівняння бісектрис:  і  або, після перетворень: 

**Задачі**

1. Написати рівняння перпендикулярів до прямої  в точках її перетину з осями системи координат.

2. У трикутнику з вершинами  проведені висота  і медіана  Написати рівняння сторони *АС*, медіани *ВМ* і висоти .

3. Написати рівняння прямої, що проходить через початок системи координат і при цьому:

1) паралельна прямій ;

2) перпендику­лярна прямій ;

3) утворює кут, що дорівнює 45°, з прямою ;

4) нахилена під кутом в 60° до прямої .

4. Визначити вершини і кути трикутника, сторони якого задано рівняннями: .

5. Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника —  та . Скласти рівняння третьої сторони, якщо вона проходить через початок системи координат.

6. Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо  — рівняння гіпотенузи, а  — вершина прямого кута.

7. Знайти точки перетину медіан і висот трикутника з вершинами в точках:  і .

8. Написати рівняння прямих, що проходять через вершини трикутника  і паралельні його сторонам.

9. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо  — його вершини, а  — точка перетину медіан.

10. Знайти відстані точок  від прямої .

11. Знайти відстань між прямими  і .

12. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від початку координат і прямої .

13. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точку  на відстані 4 одиниць від точки .

14. Скласти рівняння прямої, паралельної прямим    
і , що проходить посередині між ними.

**Тема 7. Пряма та площина в просторі**

**Теоретичні відомості**

***Рівняння площини***

*Загальне рівняння площини*:



*Рівняння площини у відрізках на осях координат*має вигляд:

,

де за параметри, які визначають площину, обрані відрізки *а, b* і *с*, що відтинаються цією площиною на осях координат.

*Канонічне рівняння площини*. Рівняння площини, яка проходить через задану точку  і має напрямні вектори , :



*Рівняння площини, яка проходить через три дані точки*. Рівняння площини, яка проходить через три дані точки ,  і , що не лежать на одній прямій має вигляд:



***Пряма у просторі***

*Канонічне рівняння прямої*. Нехай у системі координат *Охуz* задано пряму *l* і ненульовий вектор , колінеарний цій прямій. Точка  належить прямій, а напрямний вектор . Рівняння (7.1) називається *канонічним рівнянням прямої* у просторі:

. (7.1)

*Параметричне рівняння*. Якщо в рівнянні прямої (7.1) позначити через *t*  кожне з рівних відношень, то дістанемо *параметричне рівняння* прямої в просторі:



*Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.* Нехай дві точки  і  належать прямій у просторі. Тоді вектор  можна розглядати як напрямний вектор прямої. Замінюючи ним вектор  у рівнянні (7.1), дістанемо шукане рівняння прямої у просторі

.

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.***Записати рівняння площини, яка проходить через точки (1;1;1), (2;3;4), (4;3;1).

***Розв'язання.***



Розкривши визначник, дістанемо: .

Отже,  – шукане рівняння площини.

*Відповідь.* .

***Приклад 2.*** Знайти довжину висоти піраміди, за­даної координатами своїх вершин:

.

***Розв'язання.***Висоту  знайдемо як відстань від точки  до площини .

Знайдемо рівняння площини : 

Розкривши визначник, маємо . Знайдемо довжину висоти :



*Відповідь. *

***Приклад 3.*** Знайти кут між площинами 3*х* – 4*у* – *z* – 1 = 0 і

2*х* + 3*у* – 6*z* – 2 = 0.

***Розв’язання.*** Маємо



Оскільки , то площини будуть перпендикулярними одна до одної .

***Приклад 4.*** Знайти рівняння прямої , яка проходить через точку , перпендикулярно до площини 

***Розв'язання.***Оскільки пряма  перпендикулярна до площини, то за напрямний вектор цієї прямої можна взяти нормальний вектор площини: . Тепер одержуємо рівняння прямої :

.

*Відповідь. *

***Приклад 5.*** Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дві дані точки  і .

***Розв’язання.*** Рівняння прямої, що проходить через дані точки



Отже, маємо  або 

***Приклад 6.*** У площині *Охz* знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої

.

***Розв’язання*.** Знайдемо напрямний вектор шуканої прямої. Оскільки пряма лежить у площині *Охz*, її напрямний вектор перпендикулярний   
до осі *Оу,* тобто . З умови перпендикулярності маєм , отже, *m* = 1, *р* = – 3. Шукане рівняння має вигляд: .

***Приклад 7.*** Скласти рівняння площини, що проходить через дану точку  паралельно до прямих



***Розв’язання.*** Використаємо рівняння площини, що проходить через дану точку :

 (7.2)

у якому *А, В, С* – координати нормального вектора до площини. Задача зводиться до знаходження цього нормального вектора.

Очевидно, в ролі нормального вектора можна взяти вектор, що є векторним добутком напрямних векторів даних прямих, або колінеарних до нього.

Отже, знайдемо .



Покладемо . Тоді з рівняння (7.2) маємо:

9(*х* – 1) + 11(*у* – 2) + 5(*z* + 3) = 0 ⇒ 9*x* + 11*y* + 5*z* – 16 = 0.

**Задачі**

1. Обчислити висоту піраміди, опущену з вершини , якщо .

2. Обчислити відстань між площинами  і .

3. Через лінію перетину площин  і  провести площину, що: 1) проходить через точ­ку , 2) паралельна осі *OY*, 3) перпендикулярна до площини .

4. Перевірити, чи лежать точки  на одній прямій.

5. Визначити кут між прямими  і .

6. Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої



7. Через точку  провести пряму:

1) паралельно прямій ;

2) паралельно прямій 

8. У площині *Оxz* знайти пряму, що проходить через початок системи координат і перпендикулярна до прямої 

9. Чи перетинаються прямі:

1)  і ;

2)  і 

10. Написати рівняння площини, що проходить через пряму  і точку .

11. Знайти проекцію точки () на пряму .

12. Через пряму  провести площину, перпендикулярну до площини .

13.Через точку  провести пряму, паралельну прямій



14.З усіх прямих, що перетинають дві прямі:

 і ,

знайти ту, яка паралельна прямій .

15.Визначити кут між двома прямими

 і 

**РОЗДІЛ IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

**Тема 8. Обчислення границь**

**Теоретичні відомості**

**Теорема (арифметичні властивості границь).** Якщо існують границі , , то існують границі суми, різниці, добутку та частки (остання за умови ), причому

**

**

**

Як наслідок, **, тобто сталий множник можна виносити за знак границі.

*Перша особлива границя:* **.

Границі – наслідки першої особливості границі:

1.  2.  3.  4. 

*Друга особлива границя:* .

Границі – наслідки другої особливої границі:

1.   2. ;  3. ; 4. .

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Обчислити 

***Розв’язання.*** Оскільки функція  є елементарною, то для обчислення її границі підставимо в аналітичний вираз функції замість аргументу його граничне значення. Одержимо,

.

***Приклад 2.*** Обчислити .

***Розв’язання.*** Розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники.

****

****

****

***Приклад 3.*** Обчислити .





***Приклад 4.* **

****

***Приклад 5.* **.

***Приклад 6****.*



***Приклад 7****.*



***Приклад 8***. Знайти 

Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу:



**Задачі**

1. Знайти границі функцій:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

9. ; 10. ;

11. ; 12. ;

13. ; 14. ;

15. ; 16. ;

17. ; 18. ;

19. ; 20. ;

21. ; 22. ;

23. ; 24. .

**Тема 9.** **Дослідження функцій на неперервність**

**Теоретичні відомості**

*Функція неперервна в точці* якщо

Для неперервності функції в точці необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність:

де ліва границя функції, права границя, значення функції в точці .

Точки, в яких функція не є неперервною називаються *точками розриву*.

Точка  називається *точкою розриву 2-го роду* функції , якщо в цій точці хоча б одна з односторонніх границь не існує або рівна нескінченності.

Точка  називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив неусувний) для функції , якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто .

Точка  називається *точкою розриву 1-го роду* (розрив усувний) для функції , якщо односторонні границі функції в цій точці існують, рівні між собою, але не дорів­нюють значенню функції в цій точці або функція у цій точці не існує, тобто 

Дослідження функції на неперервність полягає в знаходженні точок, в яких можливий розрив, з подальшою перевіркою умов неперервності функції. Перевірка умов переважно зводиться до знаходження односторонніх границь функції, коли *х* прямує до можливої точки розриву зліва або справа, і до подальшого порівняння значень цих границь, якщо вони існують.

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Дослідити на неперервність функцію .

***Розв'язання.***

.

Можливі точки розриву (функція невизначена в цих точках): . Оскільки функція парна, то її поведінка в околі цих точок однакова. Дослідимо точку . Функція визначена в околі цієї точки, знайдемо  і . Отже, односторонні границі рівні нескінченності, тому в точці  і аналогічно в точці  функція має розрив другого роду.

***Приклад 2.*** Довести неперервність функції  в точці .

***Розв'язання.***



Оскільки , то задана функція неперервна в точці , що і треба було довести.

***Приклад 3.*** Дослідити на неперервність функцію 

***Розв'язання.***

1. Точка  є "підозрілою" на розрив, оскільки в ній функція змінює закон визначеності (на проміжку  маємо , на проміжку  - іншу залежність:).
2. Функція неперервна на проміжку  і .
3. Знаходимо .
4. , тому за означенням функція - має в точці *х* = 1 неусувний розрив 1-го роду.

***Приклад 4****.* Показати, що при *х* = 4 функція  має розрив.

***Розв'язання.*** Якщо  то  Якщо  то  Таким чином, при  функція має ліву та праву скінченні границі, причому ці границі різні. Звідси, *х* = 4 є точкою розриву 1-го роду.

**Задачі**

1. Дослідити на неперервність функції:

1. . 2. .

3. . 4. .

2.Знайти точки розриву функції .

3.Який характер розриву функції  в точці *х* = 1?

4. Розрив якого роду мають нижченаведені функції?

1. . 2. .

3. . 4. .

5. Дослідити на неперервність, визначити характер точок розриву, побудувати графіки функцій:

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

# **РОЗДІЛ V. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ**

**Тема 10. Комплексні числа, дії над ними**

**Теоретичні відомості**

***Алгебраїчна форма комплексного числа***

*Комплексним числом* називається число виду , де *a*, *b* – дійсні числа, . Число *а* називається *дійсною частиною*, *bi* – *уявною частиною*, *і* – *уявною одиницею*.

***Тригонометрична форма комплексного числа***

Запис

 (10.1)

є *тригонометричною формою комплексного числа*. Довжина  називається *модулем комплексного числа*, а кут  – *його аргументом* і позначається , . Для обчислення головного значення аргумента числа  користуються формулами:

 (10.2)

Для того, щоб перетворити в тригонометричну форму комплексне число, подане в звичайній алгебраїчній формі, знайдемо  і  за даними *a* і *b*. З трикутника *ОАМ* (мал. 2) маємо:

, , (10.3)

, 

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Знайти модуль і аргумент комплексного чис­ла .

***Розв'язання.*** Скориставшись формулою (10.3) знайдемо модуль комплексного числа.

**

За формулою (10.2) знаходимо значення аргумента, при умові *a* > 0, *b* > 0.



Отже,

*Відповідь.* 4, .

***Приклад 2.*** Для комплексних чисел  та  знайти суму, різницю, добуток та частку.

***Розв’язання.***

;

;

;

.

***Приклад 3.*** Подати в тригонометричній формі число .

***Розв'язання.*** З формул (10.2) та (10.3) маємо:

,



Отримані значення підставимо в формулу (10.1):



***Приклад 4****.* Піднести до куба число *z* = 2 (cos 20° + *i* sin 20°).

***Розв'язання.***Матимемо:

.

***Приклад 5.***Нехай *z* = *x* + *iy*. Записати в алгебраїчній формі вираз

.

***Розв'язання.***Згідно з означеннями дій із комплексними числами маємо:



.

***Приклад 6.*** Обчислити .

***Розв'язання.***Числа  і  представимо у вигляді:

, .

Тоді .

**Задачі**

1.Знайти модуль і аргумент таких комплексних чисел:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. (– 4 + 3*і*)3.

1. Записати в тригонометричній та показниковій формах комплексні числа  і . Обчислити .

1. , , , ;

2. , , , ;

3. , , ,.

3.Подати в алгебраїчній формі число .

4. Знайти модуль і аргумент комплексного числа .

5. Знайти всі розв’язки рівнянь:

1. ; 2. *z*2 = 3 – 4*i*;

3. *z*8 = 1 + *i*; 4. 

5.  6. *z*6 = 64.

**РОЗДІЛ VI. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

**Тема 11. Похідна функції**

**Теоретичні відомості**

***Основні правила диференціювання***

**Теорема 1.** Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо *у* = *с*, де , то .

**Теорема 2.** Якщо функції  та  диференційовані в точці , то в цій точці є диференційованими їх сума, різниця, добуток і частка (у випадку ). При цьому мають місце такі рівності:

;

;

.

**Теорема 3.** Сталий множник можна виносити за знак похідної:

****, де ****.

Рівняння дотичної до кривої  в точці  має вигляд:

.

*Похідні від основних елементарних функцій*

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

9. ; 10. ;

11. ; 12. ;

13. ; 14. .

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Користуючись означенням похідної, знайти похід­ні функцій в точці *х* = 3:

а); б)  *у* = *х*2 .

***Розв’язання.***

а) надамо *х* приросту , тоді *у* набуде приросту :



За означенням похідної маємо:

;

Похідна функції в точці .

б) надамо аргументу *х* приросту , тоді функція набуде приросту



За означенням похідної маємо:

. Таким чином, .

Похідна в точці .

***Приклад 2.*** Складіть рівняння дотичної до графіка функції  в точці .

***Розв’язання.***

1. - рівняння шуканої дотичної.

2. .

3. 

Підставляємо значення  у рівняння дотичної:

, або або .

***Приклад 3.*** Який кут утворює з віссю *Ох* дотична до кривої , проведена в точці з абсцисою *х* = 1?

***Розв’язання.***Знаходимо похідну ; при *х* = 1, , таким чином , звідки .

***Приклад 4.*** Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні функцій:

а) 

б);

в);

г) 

д).

***Розв’язання.***

а) 



б) задана функція є степеневою, що стає очевидним, коли записати її у вигляді . Застосовуючи правило диференціювання степеневої функції, знаходимо:

;

в) задана функція *y* є добутком двох функцій , де  , . Отже, застосовуємо правило диференціювання добутку функцій:



;

г) 

д) 



**Задачі**

1. Знайти відношення  для функцій:

1)  при 

2)  при 

2. Використовуючи означення похідної як , знайти похідні функцій:

1) ; 2) ;

3) ; 4) ;

4. Скласти рівняння дотичних до кривої :

1) в точці ;

2) в точці перетину з віссю *OY*.

5. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

1. ; 2. 

3.  4. 

5. ; 6. 

7. ; 8. 

9.  10. 

**Тема 12. Диференціювання функцій: складної,**

**заданої неявно та параметрично. Обчислення границь функцій**

**за правилом Лопіталя**

**Теоретичні відомості**

***Похідна складної функції.*** Нехай *у* = *f* (*u*), де , тобто . Функція  називається *зовнішньою*, а функція  — *внутрішньою*, або *проміжним аргументом*.

**Теорема.** Якщо *у* = *f* (*u*) та  — диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює .

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції на похідну внутрішньої.

***Похідна неявної функції.*** Нехай рівняння *F* (*x*; *y*) = 0 визначає *у* як неявну функцію від *х*. Надалі будем вважати, що ця функція — диференційовна.

Продиференціювавши по *х* обидві частини рівняння *F* (*x*; *y*) = 0, дістанемо рівняння першого степеня відносно . З цього рівняння легко знайти , тобто похідну неявної функції.

***Похідна параметрично заданої функції****.* Нехай функцію  від  задано параметричними рівняннями:

, тоді 

***Правила Лопіталя***

**Теорема 1 (Перше правило Лопіталя).** Нехай функції  є неперервними і диференційованими в деякому околі точки , за винятком, можливо, самої точки , причому

, .

Тоді, якщо існує , то обов’язково 

**Теорема.**  Нехай функції  визначені при  є диференційованими на цій множині і . Тоді, якщо існує , то обов’язково .

**Теорема 2 (Друге правило Лопіталя).** Нехай функції  і  визначені і диференційовні в околі точки х0 і в цьому околі



Тоді, якщо існує границя  то існує границя  і



**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Знайти похідну складеної функції .

***Розв’язання.*** – складена функція. Позначимо , де , тоді . Отже,

.

При обчисленні похідної складеної функції явне введення допоміжної букви *и* для позначення проміжного аргументу не є обов’язковим. Тому похідну даної функції знаходять відразу як добуток похідної степеневої функції  на похідну від функції ;



***Приклад 2.*** Знайти похідну функції, заданої параметрично: 

***Розв'язання.***

Використаємо формулу .



***Приклад 3.*** Знайти похідну функції , заданї неявно рі­внянням .

***Розв'язання.***









Отже, .

***Приклад 4.*** Знайти похідні складених функцій:

а) 

б) 

в) ;

г) ;

д) .

***Розв’зання.***

а) 

б) 

в) 

;

г) 

;

д) 

;

***Приклад 5.*** Знайти похідну 3-го порядку функції .

***Розв'язання.***

;

***Приклад 6.*** Задано функцію . Знайти 

***Розв'язання.***

Маємо: .

,

.

***Приклад 7.*** Знайти .

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду . Застосовуємо правило Лопіталя:

.

***Приклад 8.*** Знайти .

***Розв'язання.*** Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду . Застосовуємо правило Лопіталя:



(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду , а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

.

***Приклад 9.*** Знайти .

***Розв'язання.*** Тут маємо невизначеність вигляду . Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність , застосуємо правило Лопіталя:



**Приклад 10.** Знайти границю .

***Розв'язання.*** Маємо невизначеність виду . Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності , а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:





**Задачі**

1. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

9. ; 10. .

2. Знайти похідні функцій, заданих неявно:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. .

3. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1. ; .

2. ; .

3. ; .

4. ; .

5. ; .

6. ; .

7. ; .

8. ; .

9. ; .

4. Знайти диференціали функцій:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. .

5. Знайти похідні вищих порядків:

1. ; 

2. ; 

3. ; 

4. ; 

5. ; 

6. ; 

7. ; 

8. ; 

6. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі функцій:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. .

**Тема 13.Застосування диференціального числення**

**до дослідження функцій**

**Теоретичні відомості**

**Теорема 1(умова монотонності функції).** Для того, щоб диференційована функція  на проміжку  була зростаючою (спадною), необхідно і достатньо, щоб на цьому проміжку виконувалась нерівність

 ().

**Теорема 2(достатня умова екстремуму).** Нехай функція  неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка *х*0, і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки *х*0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:

1) змінює знак з «+» на «–», то при *х* = *х*0 функція має максимум;

2) змінює знак «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;

3) не змінює свого знака, то функція в точці *х* = *х*0 екстремуму не має.

Якщо треба знайти найбільше(найменше) значення неперервної функції на проміжку , то необхідно:

1) знайти всі максимуми функції на проміжку;

2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити  і ;

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше(найменше): воно й буде найбільшим(найменшим) значенням функції на проміжку.

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Дослідити на максимум і мінімум функцію .

***Розв'язання.***

1. 

2. Знаходимо критичні точки 1-го роду





Звідки .

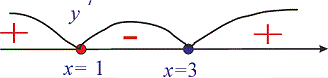
3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції  здобутими критичними точками розбиваємо на три інтервали , (1, 3), ().

Виберемо в кожному інтервалі по одній точці і обчислимо значення похідної в цих точках:

;

;

.



Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу (табл. 1).

На інтервалі:

1)  — функція зростає;

2) (1, 3) — спадає;

3)  — зростає.

З таблиці видно: при переході (зліва направо) через значення  
*х* = 1 похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси, при *х* = 1 функція має максимум:

.

Табл. 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | (– ∞, 1) | 1 | (1, 3) | 3 | (3, + ∞) |
|  | + | 0 | – | 0 | + |
| *у* |  |  |  |  |  |

При переході через значення *х* = 3 похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси, при *х* = 3 функція має мінімум:

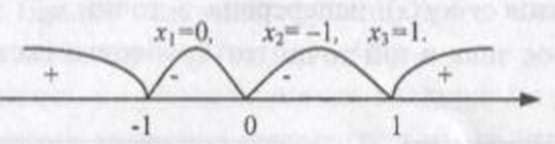
.

***Приклад 2.*** Дослідити функцію  на проміжки монотонності та екстремуми.

***Розв'язання.***

1. ;
2. 
3. Шукаємо критичні точки 1-го роду



1. 
2.  зростає при  спадає при 



***Приклад 3.*** Знайти найбільше та найменше значення функції при .

***Розв'язання.***

, 

1. 
2. 

**

1. 
2. 
3.  

*Відповідь,*  

***Приклад 4.* Знайти точки перегину і інтервали опуклості та вгнутості графіків функції:** 

***Розв'язання.***

1. ;
2. Шукаємо критичні точки 2-го роду







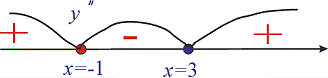
За теоремою Вієта() квадратне рівняння матиме корені 

Вони розбивають область визначення на 3 інтервали опуклості або вгнутості 

1. Визначаємо знак похідної підстановкою значень з інтервалів;

;





З аналізу знаків випливає, що функція вгнута на інтервалах  та опукла при . Точки **є точками перегину**, оскільки друга похідна в них змінює знак.

1. Обчислюємо значення функції





Точки перегину 

***Приклад 5.***Визначити асимптоти кривої .

***Розв'язання.***

1. Перша особливість, яку потрібно перевірити – це знаменник дробових функцій. Прирівняємо його до нуля: *х* = 0. Оскільки

,

то пряма *х* = 0 (вісь *Ох*) є *вертикальною асимптотою*.

2. Нехай похила асимптота має рівняння , тоді



Отже, пряма є *похилою асимптотою*.

***Приклад 6.*** Знайти асимптоти функції .

***Розв'язання.***

1. Прирівняємо знаменник функції до нуля: Знайдемо одну із односторонніх границь функції в точці :



 – точка розриву другого роду заданої функцій

Отже,  – *вертикальна* асимптота.

2. Знайдемо похилу асимптоту , використавши формули





Оскільки , то  – *горизонтальна* асимптота.

**Задачі**

1. Знайти інтервали монотонності функцій:

1. . 2. .

3. . 4. .

5. 6. .

7. . 8. .

2. Визначити екстремуми функцій:

1. . 2. .

3. . 4. .

5. . 6. .

3. Знайти найбільше і найменше значення функцій у заданих проміжках:

1. . 2. .

3. 4. .

5. . 6. .

4. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіків функцій:

1. . 2. .

3. . 4. .

5. . 6. .

5. Знайти асимптоти ліній:

1. . 2. .

3. . 4. .

5. . 6. .

**РОЗДІЛ VII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ**

**ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

**Тема 14. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування**

**Теоретичні відомості**

*Таблиця невизначених інтегралів*

1. ;

2. ;

3.;

4. ;

5. ;

6. ; ;

7. ;

8. ;

9. ;

10.;

11.;

12.;

13..

*Метод безпосереднього інтегрування.* Коли  є лінійною функцією, тобто дістаємо:

 (14.1)

*Метод інтегрування частинами.**Формулою інтегрування частинами у невизначеному інтегралі* називається формула

 (14.2)

де *u* й *v* – диференцфійовні функції по *х*.

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.***  Знайти невизначений інтеграл



***Розв’язання.***



***Приклад 2.***  За допомогою безпосереднього інтегрування знайти невизначені інтеграли:

а) ; б) 

***Розв’язання.***

Використавши формулу безпосереднього інтегрування (14.1), отримаємо

а) 

б) 

***Приклад 3(інтегрування частинами).***





***Приклад 4(інтегрування частинами).***







***Приклад 5(інтегрування частинами).***







Отже, маємо:

 або ;



***Приклад 6(метод заміни).***





**Задачі**

1. Знайти інтеграли:

1.  2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

9. ; 10. ;

11. ; 12. .

2. Зайти інтеграли:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

9. ; 10. .

3. Інтегруванням частинами знайти інтеграли:

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

4. Методом підстановки знайти інтеграли:

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

**Тема 15. Інтегрування раціональних, ірраціональних**

**та тригонометричних функцій**

**Теоретичні відомості**

***Інтегрування дробово-раціональних функцій***

І. ;

ІІ. 

;

ІІІ..

IV.  – інтегрується за допомогою рекурентної формули



***Інтегрування тригонометричних функцій***

Щодо інтегрування тригонометричних функції, існують такі підстановки, за допомогою яких, інтеграл  завжди може бути зведений до інтеграла від раціональної функції , загальну схему інтегрування якої розроблено.

І. Універсальна тригонометрична підстановка .

ІІ. Підінтегральна функція – непарна відносно sin *x*, тоді роблять підстановку cos *x* = *t*.

ІІІ. Підінтегральна функція – непарна відносно cos *x* раціоналізується за допомогою підстановки sin *x* = *t*.

IV. Підінтегральна функція  – парна відносно sin *x* і cos *x* разом, тобто ..

У цьому випадку використовують підстановку  або .

V. Підінтегральна функція  раціоналізується підстановкою .

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Знайти інтеграл .

***Розв'язання.***



***Приклад 2.*** 

.

***Приклад 3.***

.

***Приклад 4.*** 



**.**

***Приклад 5****.* 



.

***Приклад 6.* **

****

***Приклад 7.*** 

.

**Задачі**

1. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

7.  8. 

2. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

7.  8. 

9.  10. 

11.  12. 

13.  14. 

3. Знайти інтеграли:

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

7.  8. 

**Тема 16. Визначений інтеграл**

**Теоретичні відомості**

**Теорема (Основна теорема інтегрального числення)**. Нехай функція  неперервна на відрізку . Якщо функція  є довільною її первісною на цьому відрізку, то

.

Ця формула називається *формулою Ньютона-Лейбніца.*

Визначений інтеграл від додатної неперервної функції  ***,*** заданої на відрізку , чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції  і прямими  (рис.16.1):

.

Площу фігури, обмеженої кривими  та  і прямими  (рис.16.2)за умови, що  знаходять за формулою

.

***y = f2 (x)***

***y = f1 (x)***

***a***

***b***

***y***

***y = f (x)***

***x***

***0***

***a***

***b***

Рис. 16.1 Рис. 16.2

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.***.

***Приклад 2.* **



***Приклад 3.*** 

.

***Приклад 4****. *

=

***Приклад 5.***

****



***Приклад 6.*** 

.

***Приклад 7.*** Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) .

***Розв’язання.***

Побудуємо дані лінії і визначимо фігуру, площу якої треба знайти.

Площа шуканої фігури (рис. 16.3) визначається за формулою :

***x***

***0***

***y***

***y = 0***

***7***

***y=3x+1***

***x = 2***

***2***



***x = 0***

 кв. од.

Рис. 16.3

б) .

***Розв’язання.***

Фігура обмежена параболою  і прямою .

***-2 0 2***

***y = 4***

***y***

***x***

**y=**

Щоб визначити межі інтегрування, знайдемо абсциси точок перетину ліній  та :

, звідки.

Як бачимо, фігура симетрична відносно осі (рис.16.4), тому обчислимо площу її правої половини, а загальний результат подвоємо.

Будемо мати:

Рис. 16.4

 кв. од.

**Задачі**

1. Обчислити визначені інтеграли:

1.  2. 

3.  4. 

2. Використовуючи метод підстановки, обчислити:

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

7.  8. 

3. Інтегруванням частинами обчислити такі визначені інтеграли:

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

7.  8. 

4. Знайти довжини дуг ліній, що задані рівняннями:

1. 

2. 

3. 

5. За допомогою визначених інтегралів обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

1.  2. 

3.  4. 

5.  6. 

7.  8. 

9.  10. 

6. Обчислити об’єми тіл, утворених обертанням плоских фігур навколо координатних осей:

1. , , , , ?

2. , ,  ?

3. , ,  ?

**Розділ VIII. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

**Тема 17.** **Функції багатьох змінних.**

**Диференціювання функцій багатьох змінних**

**Теоретичні відомості**

Якщо існує скінченна границя виду , то вона називається *частинною похідною по змінній х (по у)* функції  у точці  і позначається , або , або (, або , або ).

Із означення частинних похідних матимемо, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам’ятати, що при знаходженні  змінна *у* вважається сталою, а при знаходженні  сталою вважається змінна *х*.

**Теорема 14(необхідна умова диференційовності функції)**:Якщо функція  диференційовна в точці , то в цій точці існують частинні похідні  і .

Повний диференціал функції  можна обчислити за формулою

.

Аналогічно повний диференціал функції трьох аргументів  обчислюється за формулою

.

**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1****.* Знайти область визначення функції двох змінних та надати їй геометричну інтерпретацію:

а) ;

б) ;

в) .

***Розв’язання.***

а) Функція визначена, якщо , тобто . Це є коло з центром (0; 0) та радіусом 1 (рис. 17.1).

б) Функція визначена, якщо , тобто  (рис. 17.2).

в) Функція визначена, якщо , тобто   (рис. 17.3).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| Рис. 17.1 | Рис. 17.2 | Рис. 17.3 |

***Приклад 2.*** Знайти  і  для функції  .

***Розв’язання.***Знайдемо . Вважаючи, що  дістанемо:

.

При знаходженні  вважаємо, що  Дістанемо:

.

***Приклад 3.***Знайти повний диференціал функції двох змінних:.

***Розв’язання.*** Знайдемо  і .

,

.

Отже, .

**Задачі**

1. Знайти та зобразити області визначення функцій двох змінних:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. .

2. Знайти частинні похідні функцій:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. .

3. Обчислити частинні похідні функцій:

1.  у точці .

2.  у точці .

3.  у точці .

4. Знайти повні диференціали першого порядку функцій:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. .

5. Знайти , якщо: .

6. Знайти  та , якщо: .

**Тема 18.** **Похідні та диференціали вищих порядків.**

**Теоретичні відомості**

*Похідні другого порядку* позначаються:

 або ,

 або ,

 або ,

 або .

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків, наприклад:

, .

*Диференціалом другого порядку* від функції  називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто .

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків



..........



**Приклади розв’язання задач**

***Приклад 1.*** Знайти похідну від неявної функції  в точці , .

***Розв’язання.*** Маємо , , звідки

.

Для ,  маємо .

***Приклад 2.*** Знайти , якщо .

***Розв’язання.***



***Приклад 3.*** Знайти  для функції 

***Розв’язання.***

***Приклад 4.***Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

 .

***Розв’язання.***

1. Знайдемо  і :

, .

2. Необхідна умова екстремуму: .

Отже, (0; 0) — стаціонарна точка.

3. Знайдемо , , :

, , .

**Приклад 5.** Знайти найбільше та найменше значення функції  в області, обмеженій прямими , , , .

***Розв’язання.***

 1. Дослідимо поводження функції всередині області *KLMP*. Знайдемо перші частинні похідні функції : , . Прирівнявши їх до нуля, дістанемо стаціонарні точки  та .

1. Дослідимо поводження функції на межі області (рис.18.1). Відрізок  має рівняння , . Підставивши  у задану функцію, дістанемо .

Рис.18.1

Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку .

Маємо , отже, функція зростає і тому досягає найбільшого значення на кінцях відрізка, тобто в точках  і .

Відрізок *LM* має рівняння , . Підставивши  у задану функцію, дістанемо функцію *z* як функцію від змінної *у*: . Маємо  на відрізку .

Отже, функція  досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках  і .

Відрізок  має рівняння , . Підставивши  у задану функцію, дістанемо функцію *z* як функцію від змінної *х*: , тобто . Маємо , звідки  при . Отже, на відрізку  функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках ,  та .

Відрізок  має рівняння , . Підставивши  у задану функцію, дістанемо . Маємо , отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках , .

Таким чином, функція  може досягти найбільшого та найменшого значень тільки в таких точках: , , , , , , .

Знаходимо , , , , , , .

Отже, , і це значення досягається в точці , , і це значення досягається в точці .

**Задачі**

1. Знайти похідні другого порядку  для таких   
функ­цій:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

2. Знайти повний диференціал другого порядку , якщо:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. .

3. Дослідити на екстремум функції:

1. ;

2. ;

3. ;

4. ;

5.  ;

6. ;

7. .

4. Знайти найбільше та найменше значення функції у заданих об­ластях:

1. , якщо: 

2. , якщо: ;

3. , якщо: 

4. , якщо: .

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Дубчак В. М. Вища математика в прикладах та задачах. Навчальний посібник / В.М.Дубчак, В.М.Пришляк, Л.І.Новицька. – Вінниця: ВНАУ, 2018. – 254 c.
2. Харченко А.П. Вища математика в прикладах і задачах, частина I: Навчальний посібник / А.П.Харченко, В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська. – Х:НТМТ, 2017. – 194 с.
3. Харченко А.П. Вища математика в прикладах і задачах, частина II: Навчальний посібник / А.П.Харченко, В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська. – Х:НТМТ, 2017. – 233 с.
4. Вища математика: базовий підручник для вузів / В.С.Пономаренка. – Х.: Фоліо, 2016. – 669 с.
5. Вища математика: Збірник задач. У 2 ч. Ч.1, 2: Навчальний посібник / Х.І. Гавринченко, С.П. Понушкін, П.С. Кропивянський та ін.; за заг. ред. д-ра техн. наук проф. П.П. Овчинникова. — 2-ге вид., стереотип. — К.: Техніка, 2020 — 279 с.
6. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах / В.С.Герасимчук, Г.С.Васильченко, В.І.Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2018. – 470 с.
7. Лютий О. І., Макаренко О. І. Збірник задач з вищої математики: Навч. посібник. — К.: КНЕУ, 2003. — 305 с.
8. Практикум з вищої математики: Навчальний посібник / За ред. В.О.Коваля. – Ж: ЖДТУ, 2008. – 448 с.
9. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. / А.Д.Тевяшев, О.Г.Литвин. URL: <https://www.twirpx.com/file/277182/> (дата звернення 12.05.2021)
10. Вища математика. Збірник задач: Навчальний посібник / В.П.Дубовик. URL: <https://issuu.com/erudytnet/docs/1dubovik_v_p_yurik_i_i_vishcha_mate> (дата звернення 12.05.2021)

ДЛЯ НОТАТОК

|  |  |
| --- | --- |
| В 83 | **Вища математика** [Текст]: методичні вказівки до практичних занять для здобувачів фахової передвищої освіти освітньо-професійної програми «Комп’ютерна інженерія» галузі знань 12 Інформаційні технології спеціальностей 123 Комп’ютерна інженерія, 126 Інформаційні системи та технології та освітньо-професійної програми «Менеджмент» галузі знань 07 Управління та адміністрування спеціальності 073 Менеджмент денної форми навчання / уклад. Ю. В. Боровська. – Луцьк : ТФК Луцького НТУ, 2023. – 80 с. |

Методичне видання до практичних занять складене відповідно до робочої програми з дисципліни «Вища математика» та вміщує короткі теоретичні відомості з кожної теми, приклади розв’язань типових задач та перелік завдань для контролю знань. Мета цієї розробки – допомогти студентам при підготовці до практичних занять, краще засвоїти основні поняття та методи розв’язання задач з вищої математики при самостійній підготовці.

Комп’ютерний набір Ю.В.Боровська

Редактор Ю.В.Боровська

Підп. до друку «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_202\_\_ р.

Формат 60х84/16. Папір офс. Гарнітура Таймс.

Ум. друк. арк. \_\_\_. Тираж \_\_\_ прим.

Відокремлений структурний підрозділ

«Технічний фаховий коледж

Луцького національного технічного університету»

43023 м. Луцьк, вул. Конякіна, 5