ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Інтернет-підтримка

10

Є. П. Нелін

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b = 0)$$

УДК [512+514:37.016](075.3)
Н49

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Нелін Є. П.

Н49 Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 328 с.

ISBN 978-617-09-4356-9

УДК [512+514:37.016](075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-4356-9

Шановні десятикласники і десятикласниці!

Ви продовжуєте вивчати математику. Курс математики 10 класу (рівень стандарту) складається з двох частин: «Алгебра і початки аналізу» і «Геометрія».

Алгебра і початки аналізу є новим для вас предметом, який об'єднує матеріал кількох галузей математичної науки. Поряд із розв'язуванням знайомих вам з курсу алгебри завдань, у 10 класі ви познайомитеся з новими видами функцій — степеневими і тригонометричними, відповідними рівняннями й нерівностями, а також принципово новим поняттям — похідною. Саме вивчення похідної і є одним із завдань математичного аналізу.

У курсі **геометрії** ви починаєте вивчати розділ, який називається *стереометрією*. На відміну від попередніх класів ви тепер розглядатимете просторові об'єкти, завдяки чому розвинете просторову уяву, вміння подумки моделювати нові геометричні фігури й будувати їх зображення, а головне — оволодієте системою математичних знань, навичок і умінь, які необхідні для вивчення інших шкільних дисциплін і стануть вам у пригоді в повсякденному житті, майбутній діяльності.

Засвоюючи стереометрію, ви ознайомитеся з новими геометричними поняттями і закономірностями, багато з яких люди здавна застосовують у виробничій діяльності, використовують в архітектурі, живописі тощо.

Як користуватися підручником

Підручник містить дві частини: «Алгебра і початки аналізу» і «Геометрія». Кожна частина складається з трьох розділів, кожний розділ — із параграфів (у першій частині деякі параграфи поділяються на пункти). Параграфи і пункти, як правило, складаються з таких структурних блоків.

Довідкові таблиці наведені на початку більшості параграфів і містять основні означення, ознаки та властивості розглядуваних понять теми, систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів з розв'язування завдань*. Радимо опрацювати цей матеріал у першу чергу, а вже після цього переходити до наступного блоку.

Пояснення й обґрунтування являють собою докладне викладення теоретичного матеріалу, наведеного в таблицях. Таке подання навчального матеріалу (спочатку структурованого у вигляді таблиць, а потім описаного детально) дозволить кожному з вас вибирати свій власний рівень ознайомлення з обґрунтуваннями, будуючи власну освітню траєкторію.

Приклади розв'язування завдань (задач) ознайомлять вас із основними ідеями щодо розв'язування завдань, допоможуть усвідомити й засвоїти способи дій з основними математичними поняттями, набути необхідних предметних компетентностей. Для того щоб виділити орієнтовні основи діяльності з розв'язування завдань (загальні орієнтири), у прикладах власне розв'язання супроводжуються коментарями, які допоможуть вам скласти план розв'язування аналогічних завдань.

Розв'язання	Коментар
Як можна записати розв'язання задачі або завдання	Як можна міркувати під час розв'язування таких задач або завдань

За такого подання коментар не заважає сприйняттю основної ідеї розв'язання завдань певного типу і дає змогу за потреби отримати детальну консультацію щодо розв'язування, яка міститься в коментарі.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу наприкінці кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ.

Запитання для контролю допоможуть вам пригадати й осмислити вивчене, звернути увагу на головне, оцінити рівень засвоєння матеріалу параграфа.

Вправи подано за трьома рівнями складності:

- *задачі середнього рівня* мають позначку «°»;
- *задачі достатнього рівня* (дещо складніші) подано без позначки;
- *задачі високого рівня* мають позначку «*».

До більшості вправ наприкінці підручника наведено *відповіді*.

У рубриці **«Виявіть свою компетентність»** наведено задачі практичного змісту та завдання, які для отримання розв'язку вимагають аналізу та узагальнення набутих знань.

Зверніть також увагу на запропоновані в тексті параграфів супроводжуючі запитання, що спонукають до більш глибокого самостійного осмислення навчального матеріалу, та завдання, виконання яких, на нашу думку, сприятиме формуванню певних предметних та ключових компетентностей. Ці запитання та завдання мають відповідні позначення. Матеріали рубрик **«Відомості з історії»**, **«Видатні математики»** допоможуть вам дослідити розвиток математики як науки та дізнатися про досягнення видатних учених України.

Для того щоб підручник допоміг вам у повній мірі, радимо ознайомитися із системою умовних позначень:

▶... ■ початок і закінчення обґрунтування твердження, розв'язання завдання;

? запитання до учнів;

! цікава інформація або така, яку варто обміркувати;

i матеріали, пов'язані з ІКТ та інтернет-підтримкою підручника;

завдання, які вимагають самостійного опрацювання, сприяють активізації розумової діяльності;

діяльність, розрахована на роботу в команді.

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1

ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

У цьому розділі ви:

- дізнаєтеся про числові функції та їх властивості;
- ознайомитеся з основними принципами розв'язування рівнянь і нерівностей;
- навчитеся обчислювати й порівнювати значення виразів, які містять степені з раціональними показниками, корені;
- навчитеся розпізнавати й схематично зображувати графіки степеневих функцій, моделювати реальні процеси за допомогою степеневих функцій.

§ 1. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Числові множини

Таблиця 1

1. Числові множини

Дійсні числа R

Числа, які можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу

Раціональні числа Q

Можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число.

Записують у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу $\left(\frac{1}{3}=0{,}333\ldots=0{,}(3)\right)$

Ірраціональні числа

Не можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число.

Записують у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу $\left(\sqrt{2}=1{,}4142135\ldots\right)$

Цілі числа Z

Включають натуральні числа, числа, їм протилежні, та число 0

Дробові числа

Числа, складені із цілого числа часток одиниці ($\frac{2}{5}$ — звичайний дріб; $1{,}23$ — десятковий дріб: $1{,}23=\frac{123}{100}$)

Натуральні числа N (цілі додатні)

У шкільному курсі математики натуральне число — основне неозначуване поняття

Число 0

Таке число, що будь-яке число при додаванні до нього не змінюється $(a+0=0+a=a)$

Цілі від'ємні числа

Числа, протилежні натуральним

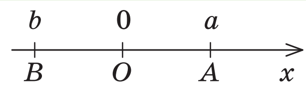
2. Модуль дійсного числа та його властивості

Означення

Модулем додатного числа називається саме це число; **модулем від'ємного числа** називається число, йому протилежне; **модуль нуля** дорівнює нулю.

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases}$$

Геометричний зміст модуля

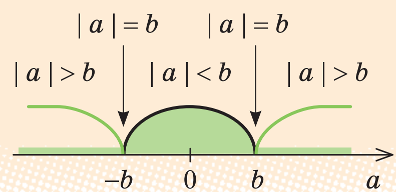


$$|a| = OA, \quad |b| = OB,$$

$$|a - b| = AB.$$

На координатній прямій **модуль** — це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число.
Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій

Властивості

1. $\lvert a \rvert \geqslant 0$.	Модуль будь-якого числа — невід'ємне число
2. $\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert$.	Модулі протилежних чисел рівні
3. $a \leqslant \lvert a \rvert$, тобто $-\lvert a \rvert \leqslant a \leqslant \lvert a \rvert$.	Величина числа не перевищує величини його модуля
4. При $b > 0$ $\lvert a \rvert \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$	
5. При $b > 0$ $\lvert a \rvert \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b$ або $a \geqslant b$	
6. $\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$.	Модуль добутку дорівнює добутку модулів множників
7. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$ $(b \neq 0)$.	Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю)
8. $\lvert a^n \rvert = \lvert a \rvert^n$, $\lvert a \rvert^2 = a^2$, $\lvert a \rvert^{2k} = a^{2k}$	
9. $\lvert a + b \rvert \leqslant \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$, $\lvert a_1 + a_2 + \ldots + a_n \rvert \leqslant \lvert a_1 \rvert + \lvert a_2 \rvert + \ldots + \lvert a_n \rvert$.	Модуль суми не перевищує суми модулів доданків

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Числові множини

У табл. 1 розглянуто числові множини, відомі з курсу математики 5–9 класів. Детальніше з характеристикою цих множин можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

2. Модуль дійсного числа та його властивості

Означення. **Модулем додатного числа називається саме це число; модулем від'ємного числа — число, йому протилежне; модуль нуля дорівнює нулю.**

Це означення можна коротко записати декількома способами:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a < 0, \end{cases}$$

$$\text{або} \quad |a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0. \end{cases}$$

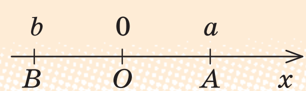
За потреби ми будемо користуватися будь-яким із цих записів означення модуля. Для того щоб знайти $|a|$, за означенням необхідно знати знак числа a і використати відповідну формулу.

Наприклад, $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$, $\left|\sqrt{3} - 2\right| = -\left(\sqrt{3} - 2\right) = 2 - \sqrt{3}$.

Геометричний зміст модуля

На координатній прямій модуль числа — це відстань від початку координат до точки, що зображує це число.

Рис. 1.1.1



Дійсно, якщо $a > 0$ (рис. 1.1.1), то відстань $OA = a = |a|$. Якщо $b < 0$, то відстань $OB = -b = |b|$.

З обґрунтуванням інших властивостей модуля (табл. 1) можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Доведіть, що **сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка (якщо дільник не дорівнює нулю) двох раціональних чисел завжди є раціональним числом.**

Розв'язання

Нехай задано два раціональні числа $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ і $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, де m_1 і m_2 — цілі, а n_1 і n_2 — натуральні числа. Оскільки сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка двох звичайних дробів завжди є звичайним дробом, то одержаний результат завжди буде раціональним числом. Наприклад,

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2},$$

де $m_1 n_2 + n_1 m_2$ — ціле число, а $n_1 n_2$ — натуральне.

Коментар

Будь-яке раціональне число можна записати як дріб $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне числа.

Щоб обґрунтувати твердження задачі, достатньо довести, що сума, різниця, добуток і частка двох дробів виду $\frac{m}{n}$ буде дробом такого самого виду.

Приклад 2. Доведіть, що **для будь-якого натурального числа n число $\sqrt{n}$ або натуральне, або ірраціональне.**

Із розв'язанням можна ознайомитись, звернувшися до інтернет-підтримки підручника.

Наприклад, оскільки числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ не є натуральними числами ($1 < \sqrt{3} < 2$, $3 < \sqrt{10} < 4$), то $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ — ірраціональні числа.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $|2x+5| = 7$.

Розв'язання

I спосіб:

$2x+5=7$ або $2x+5=-7$;

$2x=2$ або $2x=-12$;

Коментар

Задане рівняння має вигляд $|t| = 7$ (у даному випадку $t = 2x+5$). Його зручно розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля:

$x=1$ або $x=-6$.

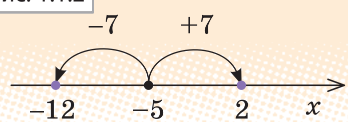
Відповідь: 1; −6. ■

$|2x+5|$ — це відстань від точки 0 до точки $2x+5$. Але відстань 7 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 7), так і ліворуч (одержуємо число −7). Отже, рівність $|2x+5|=7$ можлива тоді і тільки тоді, коли $2x+5=7$ або $2x+5=-7$.

▶ *II спосіб:*

$|2x-(-5)|=7;$

Рис. 1.1.2



$2x=2$ або $2x=-12$;

$x=1$ або $x=-6$.

Відповідь: 1; −6. ■

Виходячи з геометричного змісту модуля, $|a-b|$ — відстань між точками a і b на координатній прямій. Запишемо задане рівняння у вигляді $|2x-(-5)|=7$. Ця рівність означає, що відстань від точки $2x$ до точки −5 дорівнює 7. На відстані 7 від точки −5 розташовані точки 2 і −12 (рис. 1.1.2). Отже, задана рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $2x=2$ або $2x=-12$, тобто задане рівняння рівносильне сукупності цих рівнянь.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $|x^2-5x|\leqslant 6$.

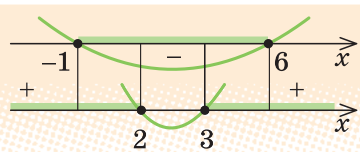
Розв'язання

▶ $-6\leqslant x^2-5x\leqslant 6$,

$\begin{cases} x^2-5x\leqslant 6, \\ x^2-5x\geqslant -6; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-5x-6\leqslant 0, \\ x^2-5x+6\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)(x-6)\leqslant 0, \\ (x-2)(x-3)\geqslant 0. \end{cases}$

Розв'язуючи ці нерівності (рис. 1.1.3), отримуємо: $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 6, \\ x\leqslant 2 \text{ або } x\geqslant 3. \end{cases}$

Рис. 1.1.3



Отже, $-1\leqslant x\leqslant 2$ або $3\leqslant x\leqslant 6$.

Відповідь: $[-1;2]\cup[3;6]$. ■

Коментар

Задана нерівність має вигляд $|t|\leqslant 6$ (у даному випадку $t=x^2-5x$), і її можна розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. Виходячи з геометричного змісту модуля, $|t|$ — це відстань від точки 0 до точки t. На відстані 6 від 0 розташовані числа 6 і −6. Тоді нерівність $|t|\leqslant 6$ задовольняють усі ті й тільки ті точки, які містяться у проміжку $[-6;6]$, тобто $-6\leqslant t\leqslant 6$. Для розв'язування одержаної подвійної нерівності її зручно замінити відповідною системою нерівностей.

ⓘ Детальніше із розв'язуванням рівнянь і нерівностей з модулями можна ознайомитися, звернувшися до інтернет-підтримки підручника.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, які числа входять до множин цілих, раціональних і дійсних чисел. Наведіть приклади. Зобразіть відповідні точки на координатній прямій.
2. Поясніть, чим відрізняються записи раціонального та ірраціонального чисел у вигляді нескінченного десяткового дробу.
3. Дайте означення модуля дійсного числа.
4. Сформулюйте властивості модуля дійсного числа.

ВПРАВИ

1.1.1. Поясніть, чому задане дійсне число не може бути раціональним:

1) $1+\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{10}$; 5) $2-\sqrt{5}$.
2) $\sqrt{3}-5$; 4) $\sqrt{7}+3$;

1.1.2*. Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка раціонального та ірраціонального чисел завжди є числом ірраціональним (добуток і частка тільки у випадку, коли задане раціональне число не дорівнює нулю).

1.1.3*. Доведіть, що задане дійсне число є ірраціональним:

1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$.

1.1.4. Користуючись геометричним змістом модуля, зобразіть на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність:

1°) $|x| \leqslant 2$; 2°) $|x| > 5$; 3) $|x-3| \leqslant 0,5$; 4) $|x+1| < 0,3$.

1.1.5. Розв'яжіть рівняння:

1) $|3x+1|=4$; 2) $|4x-2|=6$; 3*) $||x-1|-2|=1$; 4*) $||2x+3|-5|=3$.

1.1.6. Розв'яжіть нерівність:

1) $|2x-7| \leqslant 1$; 2) $|3x+5| > 7$; 3*) $||2x-1|+3| \geqslant 5$; 4*) $||4x+7|-11| < 4$.

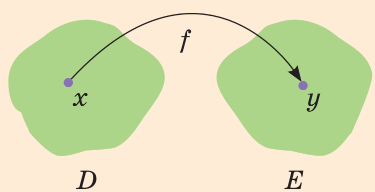
Виявіть свою компетентність

1.1.7. Які значення слова «модуль» вам відомі? Як, на вашу думку, вони пов'язані з математичним поняттям «модуль»? Знайдіть у мережі Інтернет інформацію з цієї теми, обговоріть її з друзями та подругами.

1.2. Числові функції та їх найпростіші властивості

Таблиця 2

1. Поняття числової функції



Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D (області визначення) ставиться у відповідність єдине число y.

Записують цю відповідність так: $y = f(x)$.

$D(f)$ — область визначення;

$E(f)$ — область значень;

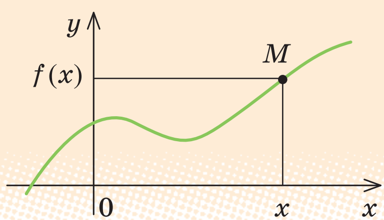
x — аргумент (незалежна змінна);

y — функція (залежна змінна);

f — функція;

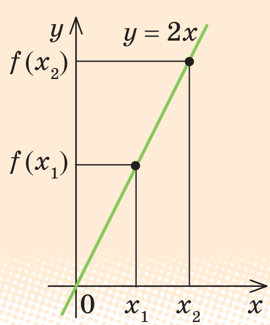
$f(x_0)$ — значення функції f у точці x_0

2. Графік функції



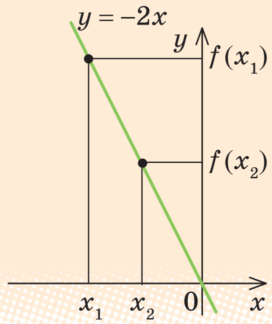
Графіком функції f називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x

3. Зростаючі й спадні функції



Функція $f(x)$ **зростаюча на множині P:**

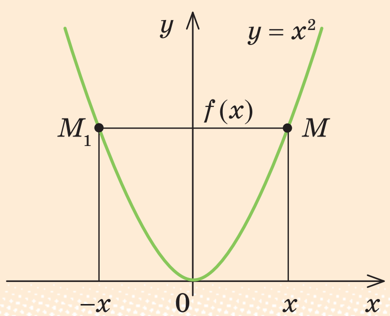
якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ для всіх $x \in P$, тобто більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції (при збільшенні аргумента відповідні точки графіка «піднімаються»)



Функція $f(x)$ **спадна на множині P:**

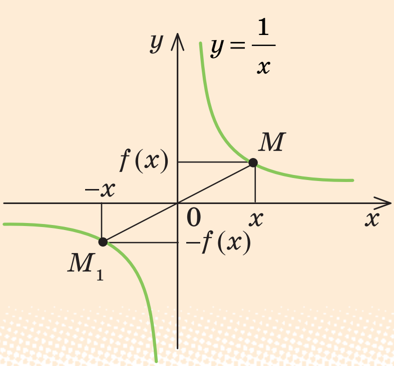
якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$ для всіх $x \in P$, тобто більшому значенню аргумента відповідає менше значення функції (при збільшенні аргумента відповідні точки графіка «опускаються»)

4. Парні й непарні функції



Функція $f(x)$ **парна**: $f(-x)=f(x)$ для всіх x із області визначення.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy



Функція $f(x)$ **непарна**: $f(-x)=-f(x)$ для всіх x із області визначення.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат — точки O

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Поняття функції

Із поняттям функції ви ознайомилися в курсі алгебри. Нагадаємо, що *залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.*

У курсі алгебри і початків аналізу ми будемо користуватися таким означенням числової функції.

Функція — від латин. *function* — виконання, здійснення.

Означення. Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D ставиться у відповідність єдине число y.

Функції позначають латинськими (іноді грецькими) буквами. Розглянемо довільну функцію f. Число y, яке відповідає числу x (на рисунку до п. 1 табл. 2 це показано стрілкою), називають *значенням функції f у точці x* і позначають $f(x)$.

Область визначення функції f — це множина тих значень, яких може набувати аргумент x. Її позначають $D(f)$.

Область значень функції f — це множина, яка складається з усіх чисел $f(x)$, де x належить області визначення. Її позначають $E(f)$.

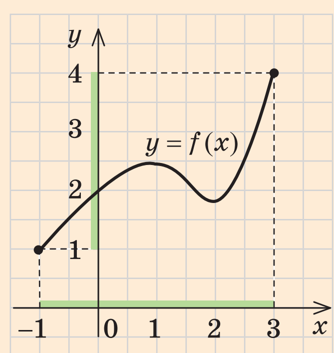
Найчастіше функцію задають **за допомогою формули.** Якщо немає додаткових обмежень, то *областю визначення функції, заданої формулою, вважають множину всіх значень змінної, при яких ця формула має зміст*. Наприклад, якщо функція задана формулою $y=\sqrt{x}+1$, то її область визначення $x \geqslant 0$, тобто $D(y)=[0;+\infty)$, а область значень $y \geqslant 1$, тобто $E(y)=[1;+\infty)$.

Іноді функція може задаватися різними формулами на різних множинах значень аргумента. Наприклад, $y=|x|=\begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x<0. \end{cases}$

Функцію можна задати не тільки за допомогою формули, а й **за допомогою таблиці, графіка** чи **словесного опису.**

Наприклад, на рис. 1.2.1 графічно задано функцію $y=f(x)$ з областю визначення $D(f)=[-1;3]$ і множиною значень $E(f)=[1;4]$.

Рис. 1.2.1



Означення. **Найбільшим (найменшим) значенням функції $f(x)$ на множині M, на якій ця функція задана, називається значення функції $f(x)$ у деякій точці x_0 множини M, якщо ні в якій іншій точці множини функція не має більшого (меншого) значення.**

Тобто для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x) \leqslant f(x_0)$ (відповідно $f(x) \geqslant f(x_0)$ для найменшого значення).

Іноді це записують так: $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$ (відповідно $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$).

Наприклад, для функції $y = f(x)$, графічно заданої на проміжку $[-1; 3]$ на рис. 1.2.1, найменше значення дорівнює 1, а найбільше — 4. Тобто $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 4$; $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = 1$.

2. Графік функції

Нагадаємо означення графіка функції.

Означення. **Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x.**

На рисунках до п. 4 табл. 2 наведено графіки функцій $y = x^2$ та $y = \frac{1}{x}$, а на рис. 1.2.2 — графік функції $y = |x|$.

Наведемо також графік функції $y = [x]$, де $[x]$ — позначення *цілої частини* числа x, тобто найбільшого цілого числа, яке не перевищує x (рис. 1.2.3). Область визначення цієї функції $D(y) = \mathbf{R}$ — множина всіх дійсних чисел, а область значень $E(y) = \mathbf{Z}$ — множина всіх цілих чисел.

На рис. 1.2.4 наведено графік функції $y = \{x\}$, де $\{x\}$ — позначення *дробової частини* числа x (за означенням $\{x\} = x - [x]$).

Рис. 1.2.2

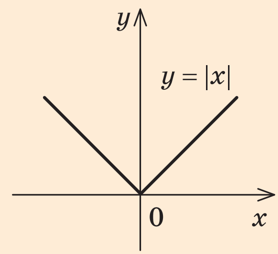


Рис. 1.2.3

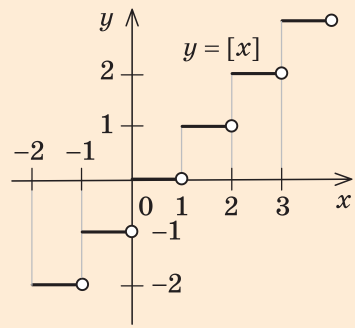
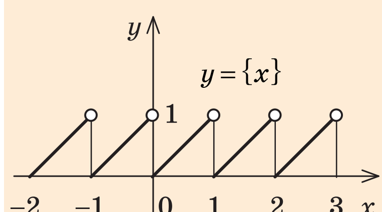
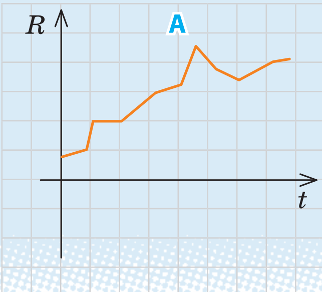
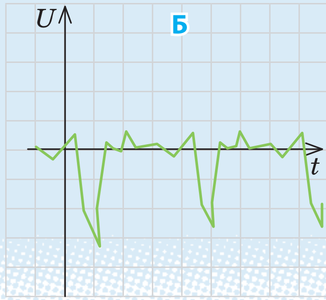


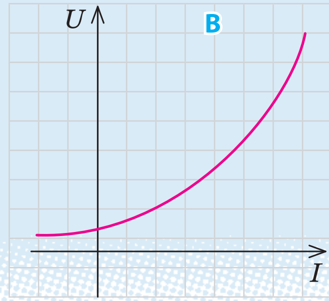
Рис. 1.2.4



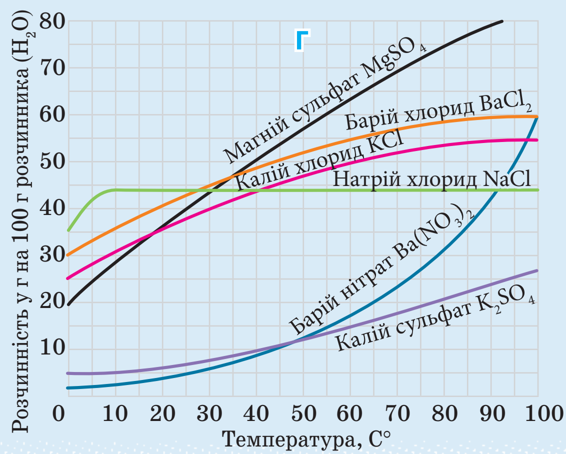
Звертаючись до фізики, хімії, економіки, медицини, можемо знайти зразки графіків функцій. Наприклад:





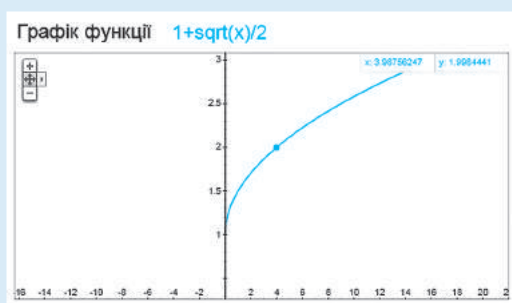


- графік **А** відображує динаміку курсу долара — залежність вартості R долара у гривнях від часу t;
- фрагмент кардіограми **Б** — залежність різниці потенціалів U на поверхні шкіри пацієнта від часу t;
- вольт-амперна характеристика **В** діода — залежність напруги від сили струму;
- залежність **Г** розчинності твердих речовин від температури.



Сьогодні для побудови графіків усе частіше використовують спеціальне програмне забезпечення. Графіки можна будувати за допомогою програм GeoGebra, Graph тощо.

Чи не найпростішим для користувачів є сервіс Google. За його допомогою можна будувати графіки функцій, заданих аналітично. У рядок пошуку треба ввести формулу, якою задано функцію, наприклад $1+\mathrm{sqr}(x)/2$, і натиснути клавішу «Enter». (Формули записують певним чином, про це вам відомо з уроків інформатики.) У результаті отримаємо графік функції $y=1+\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ (див. рисунок).



3. Зростаючі та спадні функції

Важливими характеристиками функцій є їх зростання та спадання.

Означення. **Функція $f(x)$ називається зростаючою на множині P, якщо більшому значенню аргумента із цієї множини відповідає більше значення функції.**

Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 із множини P:

$$\text{якщо } x_2 > x_1, \text{ то } f(x_2) > f(x_1).$$

Наприклад, функція $f(x) = 2x$ зростаюча (на всій області визначення, тобто на множині R), оскільки якщо $x_2 > x_1$, то $2x_2 > 2x_1$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

Відповідні точки графіка зростаючої функції при збільшенні аргумента «піднімаються» (рис. 1.2.5).

На рис. 1.2.6 наведено графік зростаючої функції $y = x^3$. Дійсно, при $x_2 > x_1$ маємо $x_2^3 > x_1^3$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

Означення. **Функція $f(x)$ називається спадною на множині P, якщо більшому значенню аргумента із цієї множини відповідає менше значення функції.**

Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 із множини P:

$$\text{якщо } x_2 > x_1, \text{ то } f(x_2) < f(x_1).$$

Наприклад, функція $f(x) = -2x$ спадна (на всій області визначення, тобто на множині R), оскільки якщо $x_2 > x_1$, то $-2x_2 < -2x_1$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$. Відповідні точки графіка спадної функції при збільшенні аргумента «опускаються» (рис. 1.2.7).

Рис. 1.2.5

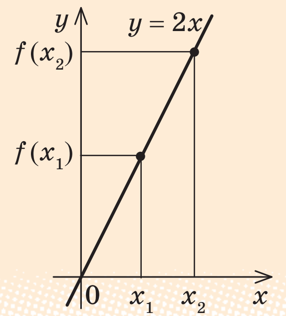


Рис. 1.2.6

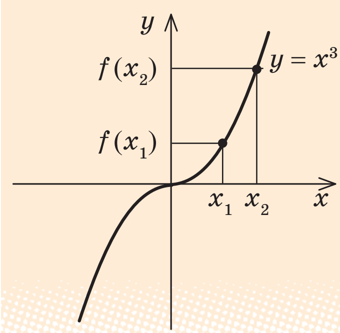
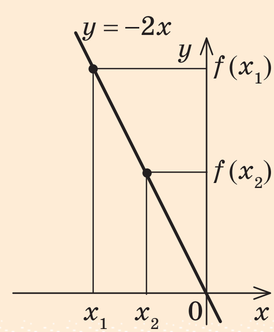
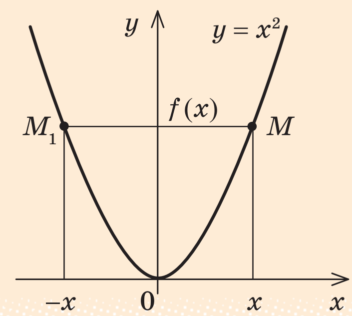


Рис. 1.2.7



Розглядаючи графік функції $y=x^2$ (рис. 2.1.8), бачимо, що на всій області визначення ця функція не є ні зростаючою, ні спадною. Але можна виділити проміжки області визначення, де ця функція зростає і де спадає. Так, на проміжку $[0;+\infty)$ функція $y=x^2$ зростає, а на проміжку $(-\infty;0]$ — спадає.

Рис. 1.2.8



Зазначимо, що для зростаючих і спадних функцій виконуються **властивості,** обернені до тверджень, що містяться в означеннях.

В **Якщо функція зростає, то більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента.**

В **Якщо функція спадає, то більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента.**

Доведення. Обґрунтуємо першу із цих властивостей методом від супротивного. Нехай функція $f(x)$ зростає і $f(x_2)>f(x_1)$. Припустимо, що аргумент x_2 не більший за аргумент x_1, тобто $x_2 \leqslant x_1$. Із цього припущення одержуємо: якщо $x_2 \leqslant x_1$ і $f(x)$ зростає, то $f(x_2)\leqslant f(x_1)$, що суперечить умові $f(x_2)>f(x_1)$. Отже, наше припущення неправильне і, якщо $f(x_2)>f(x_1)$, то $x_2>x_1$, що і потрібно було довести.

Аналогічно можна обґрунтувати і другу властивість. ■

Наприклад, якщо $x^3>8$, тобто $x^3>2^3$, то, враховуючи зростання функції $f(x)=x^3$, одержуємо $x>2$.

4. Парні й непарні функції

Розглянемо функції, області визначення яких симетричні відносно початку координат, тобто разом із кожним числом x містять і число $-x$. Для таких функцій визначено поняття парності й непарності.

О **Означення.** **Функція f називається парною, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x)=f(x)$.**

Наприклад, функція $y=x^2$ (тобто функція $f(x)=x^2$) — парна, оскільки $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ парна, то до її графіка разом із кожною точкою M із координатами $(x; y) = (x; f(x))$ входить також і точка M_1 із координатами $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно осі Oy (рис. 1.2.9), тому й **графік парної функції розміщений симетрично відносно осі Oy**.

Наприклад, графік парної функції $y = x^2$ (див. рис. 1.2.8) симетричний відносно осі Oy.

Означення. Функція f називається непарною, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ (тобто функція $f(x) = \frac{1}{x}$) — непарна, оскільки $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ непарна, то до її графіка разом із кожною точкою M із координатами $(x; y) = (x; f(x))$ входить також і точка M_1 із координатами $(-x; y) = (-x; -f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно початку координат (рис. 1.2.10), тому й **графік непарної функції розміщений симетрично відносно початку координат.**

Наприклад, графік непарної функції $y = \frac{1}{x}$ (див. п. 4 табл. 2) симетричний відносно початку координат, тобто відносно точки O.

Рис. 1.2.9

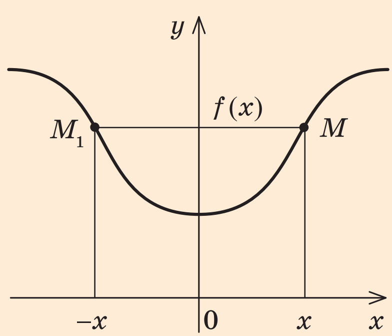
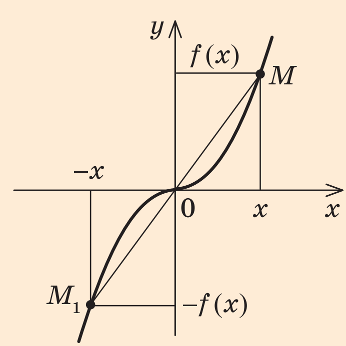


Рис. 1.2.10



ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \frac{x}{x^2 + x}$; 3) $y = \sqrt{x+5}$.

Розв'язання

1) ▶ Обмежень для знаходження значень виразу $x^2 + x$ немає, отже, $D(y) = \boldsymbol{R}$. ■

2) ▶ Область визначення функції $y = \frac{x}{x^2 + x}$ задана обмеженням $x^2 + x \neq 0$, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю. З'ясуємо, коли $x^2 + x = 0$. Маємо: $x(x+1) = 0$, якщо $x = 0$ або $x = -1$. Тоді область визначення можна задати обмеженнями $x \neq 0$, $x \neq -1$ або записати так: $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. ■

3) ▶ Область визначення функції $y = \sqrt{x+5}$ задана обмеженням $x + 5 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -5$, оскільки під знаком квадратного кореня повинен стояти невід'ємний вираз. Отже, $D(y) = [-5; +\infty)$. ■

Коментар

Оскільки всі функції задано формулами, то їхні області визначення — це множини всіх значень змінної x, при яких має зміст відповідна формула, тобто вираз, який стоїть у правій частині формули $y = f(x)$.

У курсі алгебри зустрічалися тільки два **обмеження**, які необхідно враховувати **під час знаходження області визначення:**

1) **якщо вираз записано у вигляді дробу $\frac{A}{B}$, то знаменник $B \neq 0$;**

2) **якщо запис виразу містить квадратний корінь $\sqrt{A}$, то підкореневий вираз $A \geqslant 0$.**

У всіх інших випадках, які вам доводилося розглядати, областю визначення виразу були всі дійсні числа.[1]

Приклад 2*. Знайдіть область значень функції $y = x^2 - 3$.

Розв'язання

▶ Складаємо рівняння $x^2 - 3 = a$. Воно рівносильне рівнянню $x^2 = a + 3$, яке має розв'язки,

Коментар

Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто $x^2 - 3$) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x

* Надалі в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу ми розглядатимемо нові вирази з обмеженнями: $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$, $\arcsin a$, $\arccos a$, $\sqrt[n]{a}$, a^{α}, де α — неціле число.

якщо $a+3 \geqslant 0$, тобто при $a \geqslant -3$. Усі ці числа і складуть область значень функції.

Отже, область значень заданої функції $E(f)=[-3;+\infty)$ (тобто $y \geqslant -3$). ■

(тобто таке значення x, при якому значення $f(x)=a$).

Тоді всі числа a, для яких існує хоча б один корінь рівняння $f(x)=a$, увійдуть до області значень функції $f(x)$. Множина всіх таких a і складе область значень функції $f(x)$.

Корисно пам'ятати, що **область значень функції $y=f(x)$ збігається з множиною тих значень а, при яких рівняння $f(x)=a$ має розв'язки.**

Приклад 3*. Доведіть, що **лінійна функція $y=kx+b$ при $k>0$ є зростаючою, а при $k<0$ — спадною.**

Розв'язання

Нехай $x_2>x_1$, тоді $x_2-x_1>0$. Розглянемо різницю $f(x_2)-f(x_1)=kx_2+b-(kx_1+b)=k(x_2-x_1)$.

Оскільки $x_2-x_1>0$, то при $k>0$ маємо $f(x_2)-f(x_1)>0$, отже, $f(x_2)>f(x_1)$ — функція зростає.

При $k<0$ маємо $f(x_2)-f(x_1)<0$, отже, $f(x_2)<f(x_1)$ — функція спадає. ■

Коментар

Задана функція $f(x)=kx+b$ буде зростаючою, якщо з нерівності $x_2>x_1$ випливатиме нерівність $f(x_2)>f(x_1)$, а для доведення останньої нерівності достатньо знайти знак різниці $f(x_2)-f(x_1)$. Аналогічно обґрунтовують і спадання функції.

Обґрунтовуючи зростання або спадання функції, корисно пам'ятати, що для доведення нерівності $f(x_2)>f(x_1)$ чи $f(x_2)<f(x_1)$ достатньо знайти знак різниці $f(x_2)-f(x_1)$.

Приклад 4*. Доведіть, що:

1) **сума двох зростаючих на множині P функцій завжди є зростаючою функцією на цій множині;**

2) **сума двох спадних на множині P функцій завжди є спадною функцією на цій множині.**

Розв'язання

1) Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючими на одній і тій самій множині P. Якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ і $g(x_2) > g(x_1)$.

Додаючи почленно останні нерівності, одержуємо $f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1)$.

Це й означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючою функцією на множині P.

2) Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є спадними на множині P. Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ маємо: $f(x_2) < f(x_1)$ і $g(x_2) < g(x_1)$. Після почленного додавання останніх нерівностей одержуємо: $f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1)$, а це й означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є спадною функцією на множині P.

Коментар

Для доведення зростання суми двох зростаючих функцій $f(x)$ і $g(x)$ достатньо довести, що на множині P з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність

$f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1)$.

Аналогічно для доведення того, що сума двох спадних функцій є спадною функцією, достатньо довести:

якщо $x_2 > x_1$, то

$f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1)$.

Приклад 5. Доведіть, що **зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.**

Розв'язання

Нехай функція $f(x)$ є зростаючою і

$$f(x_1) = f(x_2). \qquad (1)$$

Припустимо, що $x_1 \neq x_2$.

Якщо $x_1 \neq x_2$, то або $x_1 > x_2$, або $x_1 < x_2$. Ураховуючи зростання функції $f(x)$, у випадку $x_1 > x_2$ маємо $f(x_1) > f(x_2)$, що суперечить рівності (1). У випадку $x_1 < x_2$ маємо $f(x_1) < f(x_2)$, що також суперечить рівності (1).

Коментар

Доведемо це твердження методом від супротивного. Для цього достатньо припустити, що виконується протилежне твердження (функція може набувати одного й того самого значення принаймні у двох точках), і одержати суперечність.

Отже, наше припущення неправильне, і рівність $f(x_1)=f(x_2)$ можлива тільки при $x_1=x_2$.

Тобто зростаюча функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.

Аналогічно доводиться твердження і для спадної функції.

Це означатиме, що наше припущення неправильне, а правильним є задане твердження.

Приклад 6. Дослідіть, чи є задана функція парною, непарною або ні парною, ні непарною:

1) $y=\frac{1}{x+1}$; 2) $y=x^4$; 3) $y=x^3+x$.

Розв'язання

1) Область визначення функції $y=\frac{1}{x+1}$: $x\neq -1$, тобто вона не симетрична відносно точки O (точка $x=1$ входить до області визначення, а $x=-1$ не входить — див. рис. 1.2.11).

Отже, задана функція не може бути ні парною, ні непарною.

2) Область визначення функції $y=x^4$: $D(y)=\boldsymbol{R}$, тобто вона симетрична відносно точки O.

$f(-x)=(-x)^4=f(x)$, отже, функція парна.

3) Область визначення функції $y=x^3+x$: $D(y)=\boldsymbol{R}$,

отже, вона симетрична відносно точки O.

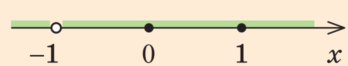
$f(-x)=(-x)^3+(-x)=-x^3-x=$
$-(x^3+x)=-f(x)$,

отже, функція непарна.

Коментар

Для дослідження функції $y=f(x)$ на парність чи непарність достатньо, по-перше, упевнитися, що область визначення цієї функції симетрична відносно точки O (разом із кожною точкою x містить і точку $-x$) і, по-друге, порівняти значення $f(-x)$ і $f(x)$.

Рис. 1.2.11



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення числової функції. Наведіть приклади таких функцій.
2. На прикладах поясніть, що таке область визначення функції, область значень функції, найбільше та найменше значення функції на множині M. Які обмеження необхідно врахувати, щоб знайти область визначення функції $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$? Знайдіть її область визначення.
3. Що називається графіком функції $y=f(x)$? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається зростаючою? Наведіть приклади.
5. Яка функція називається спадною? Наведіть приклади.
6. Яка функція називається парною? Наведіть приклади. Як розміщено графік парної функції на координатній площині? Наведіть приклади.
7. Яка функція називається непарною? Наведіть приклади. Як розміщено графік непарної функції на координатній площині? Наведіть приклади.

ВПРАВИ

1.2.1°. Знайдіть значення функції у вказаних точках:

1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ у точках 2; –1; 3; a $(a\neq 0)$;
2) $g(x)=x^2-3$ у точках 0; 1; –2; b;
3) $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$ у точках 0; 3; –1; m $(m>0)$.

1.2.2. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1°) $y=2x+3$; 3°) $y=\frac{1}{x+1}$; 5) $y=\sqrt{x^2-1}$; 7) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$;
2°) $y=\sqrt{x+3}$; 4) $y=\frac{x}{x^2+1}$; 6) $y=\sqrt{x^2+1}$; 8) $y=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$.

1.2.3. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

1) $f(x)=5$; 3) $f(x)=x^2$; 5*) $y=-3x+1$; 7*) $y=|x|+3$.
2) $f(x)=x$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$; 6*) $y=x^2-5$;

1.2.4°. Для функцій, які задано своїми графіками (рис. 1.2.12), укажіть область визначення, область значень, найбільше та найменше значення на всій області визначення, проміжки зростання і спадання та значення кожної функції при $x=1$.

1.2.5. Обґрунтуйте, що задана функція є зростаючою (на її області визначення):

1) $y=3x$; 2) $y=x+5$; 3*) $y=x^3$; 4*) $y=\sqrt{x}$.

1.2.6. Обґрунтуйте, що задана функція є спадною (на її області визначення):

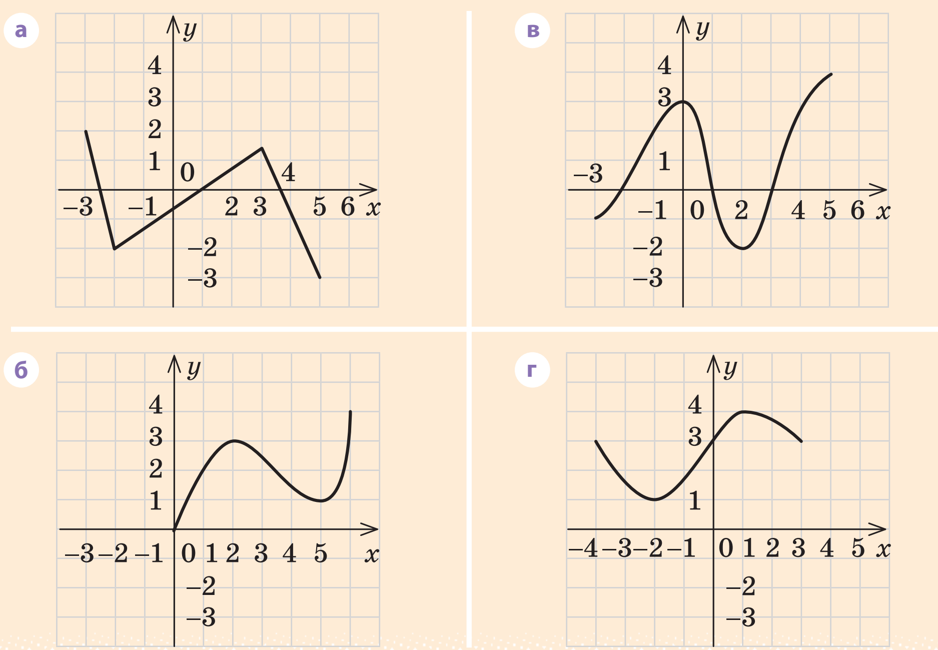
1) $y=-3x$; 2) $y=-x-1$; 3*) $y=-x^3$; 4*) $y=-x^5$.

1.2.7*. Доведіть, що функція $y=x^2$ на проміжку $[0;+\infty)$ зростає, а на проміжку $(-\infty;0]$ спадає.

1.2.8*. Користуючись твердженнями, доведеними у прикладі 4 до п. 1.2, визначте, чи є задана функція зростаючою або спадною:

1) $y=x^3+x$; 2) $y=-x-x^5$; 3) $y=x+\sqrt{x}$; 4) $y=-x^3-x^5$.

Рис. 1.2.12



1.2.9*. Користуючись твердженнями, доведеними в прикладі 5 до п. 1.2: 1) обґрунтуйте, що рівняння $x^3+x=10$ має єдиний корінь $x=2$; 2) підберіть корінь рівняння $\sqrt{x}+x=6$ і доведіть, що інших коренів це рівняння не має.

1.2.10. Обґрунтуйте, що задана функція є парною:

1) $y=x^6$; 2) $y=\frac{1}{x^2}+1$; 3) $y=\sqrt{x^2+1}$; 4) $y=\sqrt{|x|+x^4}$.

1.2.11. Обґрунтуйте, що задана функція є непарною:

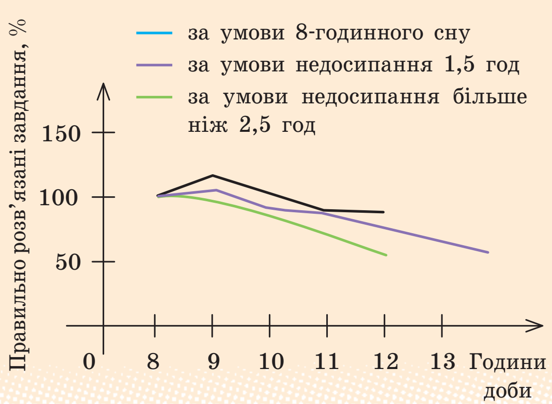
1) $y=x^5$; 2) $y=-\frac{1}{x^3}$; 3) $y=x|x|$; 4) $y=x^3-x$.

Виявіть свою компетентність

1.2.12. Медичними працівниками встановлено, що дитина віком a років $a<18$, для нормального розвитку повинна спати протягом t год на добу, де t визначається за формулою $t=16-\frac{a}{2}$. Знайдіть $t(16), t(15), t(14)$.

1.2.13. На рис. 1.2.13 зображено графіки зміни розумової працездатності учнів залежно від тривалості сну, наведені в підручнику для медичних закладів вищої освіти. Охарактеризуйте за кожним графіком, як змінюється кількість правильно розв'язаних завдань (у %) з 8 до 12 год однієї доби. Які висновки ви можете зробити?

Рис. 1.2.13

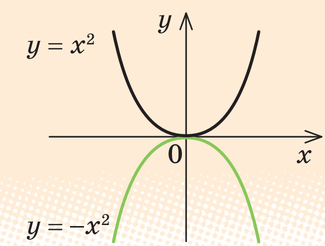
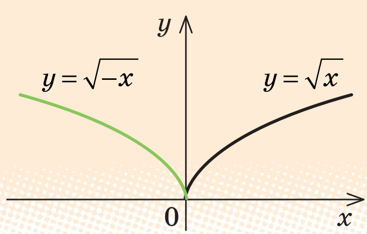
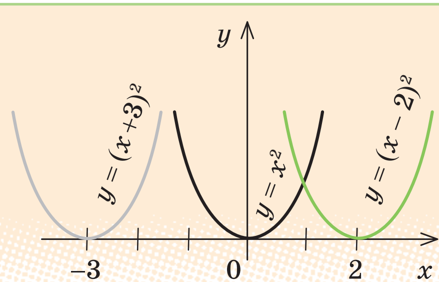


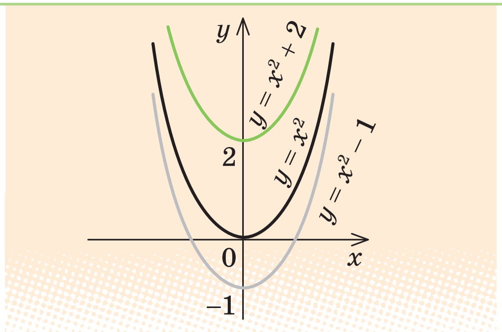
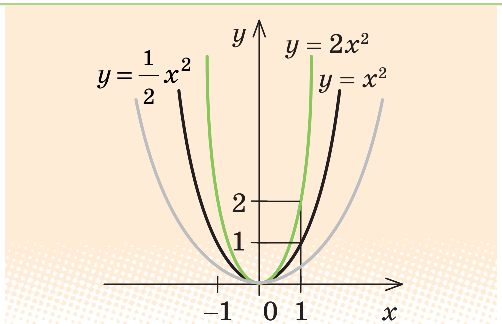
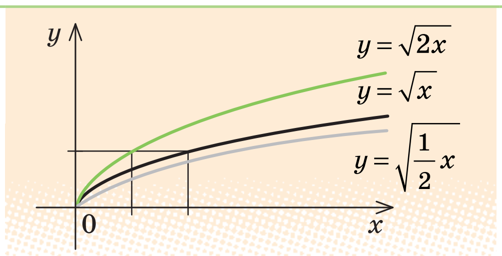
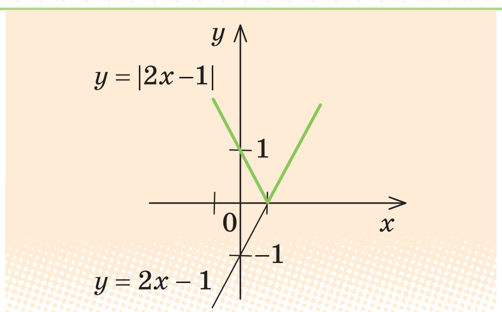
Відомості з історії

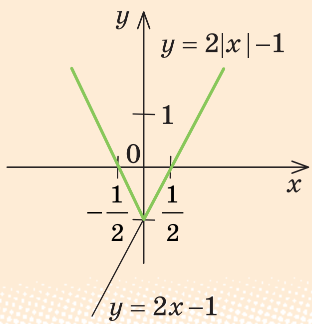
Термін «функція» вперше вжив видатний німецький філософ, математик, логік Ґотфрід Вільгельм Лейбніц у 1673 р. у листі до Християна Гюйгенса, відомого нідерландського фізика, механіка, математика, астронома.

1.3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій

Таблиця 3

<table>
<tr><th colspan="4">Перетворення графіка функції $y = f(x)$</th></tr>
<tr><th>№ з/п</th><th>Формула залежності</th><th>Приклад</th><th>Перетворення</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$y = -f(x)$</td><td>
</td><td>Симетрія відносно осі Ox</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$y = f(-x)$</td><td>
</td><td>Симетрія відносно осі Oy</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$y = f(x - a)$</td><td>
</td><td>Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць</td></tr>
</table>

4	$y=f(x)+c$		Паралельне перенесення графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Oy на c одиниць
5	$y=kf(x)$ $(k>0)$		Розтяг або стиск графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Oy (при $k>1$ розтяг, при $0<k<1$ — стиск)
6	$y=f(\alpha x)$ $(\alpha>0)$		Розтяг або стиск графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Ox (при $\alpha>1$ — стиск, при $0<\alpha<1$ — розтяг)
7	$y=\lvert f(x)\rvert$		Вище від осі Ox (і на самій осі) графік функції $y=f(x)$ — без зміни, нижче від осі Ox — симетрія відносно осі Ox

8	$y = f(\lvert x \rvert)$		Праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік функції $y = f(x)$ — без зміни, і та сама частина графіка — симетрія відносно осі Oy

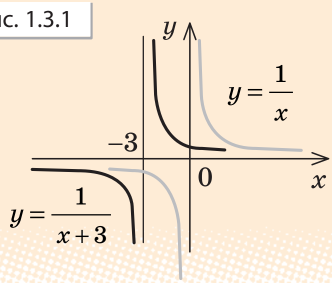
З обґрунтуванням геометричних перетворень графіків функцій, наведених у табл. 3, можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = \dfrac{1}{x+3}$.

Розв'язання

Рис. 1.3.1



Коментар

Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ (рис. 1.3.1). Тоді графік функції $y = \dfrac{1}{x+3} = f(x+3) = f(x-(-3))$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на –3 одиниці (тобто вліво).

Відповідний план перетворення графіка зручно записати так: $\dfrac{1}{x} \to \dfrac{1}{x+3}$.

Приклад 2*. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{4-|x|}$.

Розв'язання

Запишемо рівняння заданої функції так:

$$y=\sqrt{4-|x|}=\sqrt{-(|x|-4)}.$$

Послідовно будуємо графіки:

1) $y=\sqrt{x}$

2) $y=\sqrt{-x}$

3) $y=\sqrt{-(x-4)}$

4) $y=\sqrt{-(|x|-4)}$

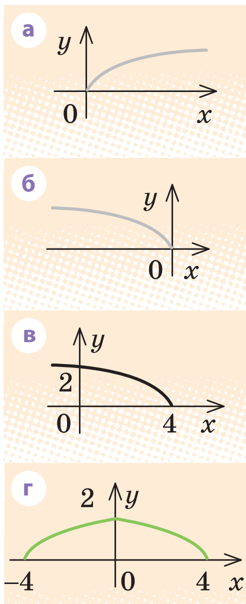


Рис. 1.3.2

Коментар

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції. (Для того щоб можна було скористатися перетвореннями графіків, наведеними в табл. 3, підкореневий вираз функції запишемо так: $y=\sqrt{-(|x|-4)}$.)

Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\sqrt{x}$ (рис. 1.3.2, *а*).

Потім можна побудувати графік функції $y=g(x)=\sqrt{-x}=f(-x)$ (симетрія графіка функції $f(x)$ відносно осі Oy) (рис. 1.3.2, *б*).

Після цього можна побудувати графік функції $y=\varphi(x)=\sqrt{-(x-4)}=g(x-4)$ (паралельне перенесення графіка функції $g(x)$ уздовж осі Ox на 4 одиниці) (рис. 1.3.2, *в*).

Потім уже можна побудувати графік заданої функції $y=\sqrt{-(|x|-4)}=\varphi(|x|)=$ $=\sqrt{4-|x|}$ (праворуч від осі Oy відповідна частина графіка функції $y=\varphi(x)$ залишається без зміни, і та сама частина відображується симетрично відносно осі Oy) (рис. 1.3.2, *г*).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, як можна з графіка функції $y=f(x)$ одержати графік функції:

1) $y=-f(x)$;
2) $y=f(-x)$;
3) $y=f(x-a)$;
4) $y=f(x)+c$;
5) $y=kf(x)$, де $k>0$;
6) $y=f(\alpha x)$, де $\alpha>0$;
7) $y=|f(x)|$;
8) $y=f(|x|)$.

ВПРАВИ

У завданнях 1.3.1–1.3.7 побудуйте графіки функцій та рівнянь.

1.3.1. 1) $y=|x-5|$; 2) $y=|x|-5$; 3) $y=||x|-5|$; 4*) $|y|=x-5$.

1.3.2. 1°) $y=x^2-9$; 2) $y=|x^2-9|$; 3) $y=|x^2|-9$; 4*) $|y|=x^2-9$.

1.3.3. 1°) $y=(x+1)^2$; 2) $y=(|x|+1)^2$; 3) $y=(x+1)^2-3$; 4) $y=|(x+1)^2-3|$.

1.3.4. 1°) $y=\frac{1}{x+2}$; 2) $y=\left|\frac{1}{x+2}\right|$; 3) $y=\frac{1}{|x|+2}$; 4*) $|y|=\frac{1}{x+2}$.

1.3.5. 1°) $y=-\frac{2}{x}$; 2°) $y=3-\frac{2}{x}$; 3) $y=-\frac{2}{x-1}$; 4) $y=-\frac{2}{|x|}$.

1.3.6. 1°) $y=\sqrt{x-3}$; 3) $y=\sqrt{|x|-3}$; 5*) $y=\left|\sqrt{|x|}-3\right|$; 7*) $|y|=\sqrt{x}-3$.

2°) $y=\sqrt{x}-3$; 4) $y=\left|\sqrt{x}-3\right|$; 6*) $|y|=\sqrt{x-3}$;

1.3.7. 1°) $y=-\sqrt{x}$; 2°) $y=-\sqrt{x}+4$; 3) $y=-\sqrt{|x|}$; 4) $y=-\sqrt{x-1}$.

1.3.8. Функція $y=f(x)$ задана на проміжку $[0;14]$, її графік зображений на рис. 1.3.3. Побудуйте графік функції або рівняння:

1) $y=-f(x)$; 6*) $y=f(2x)$;

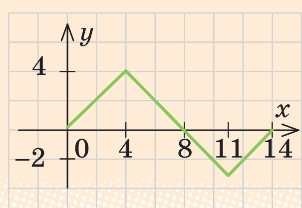
2) $y=f(-x)$; 7*) $y=\frac{1}{2}f(x)$;

3) $y=|f(x)|$; 8*) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$;

4) $y=f(|x|)$; 9*) $|y|=f(x)$;

5*) $y=2f(x)$; 10*) $|y|=f(|x|)$.

Рис. 1.3.3



Виявіть свою компетентність

1.3.9. На рис. 1.3.4 зображено графіки зміни розумової працездатності учнів залежно від тривалості активного відпочинку на свіжому повітрі, наведені в підручнику для медичних закладів вищої освіти. Охарактеризуйте за кожним графіком, як змінюється кількість правильно розв'язаних завдань (у %) з 8 до 20 год однієї доби. Які висновки ви можете зробити?

1.3.10. На графіках (рис. 1.3.5) проілюстровано залежність світлового потоку різних типів ламп від їх потужності. Оцініть потужність світлодіодної лампи, необхідну для отримання такого самого світлового потоку, як від лампи розжарювання потужністю 100 Вт.
Знайдіть у мережі Інтернет вартість лампи розжарювання, вартість відповідної світлодіодної лампи і вартість 1 кВт-год електроенергії та підрахуйте, за який час окупиться заміна лампи розжарювання світлодіодною лампою, якщо вони працюватимуть по 6 год на день. Врахуйте, що лампа розжарювання розрахована на 1000 год роботи, а світлодіодна — на 20 000 год.

Рис. 1.3.4

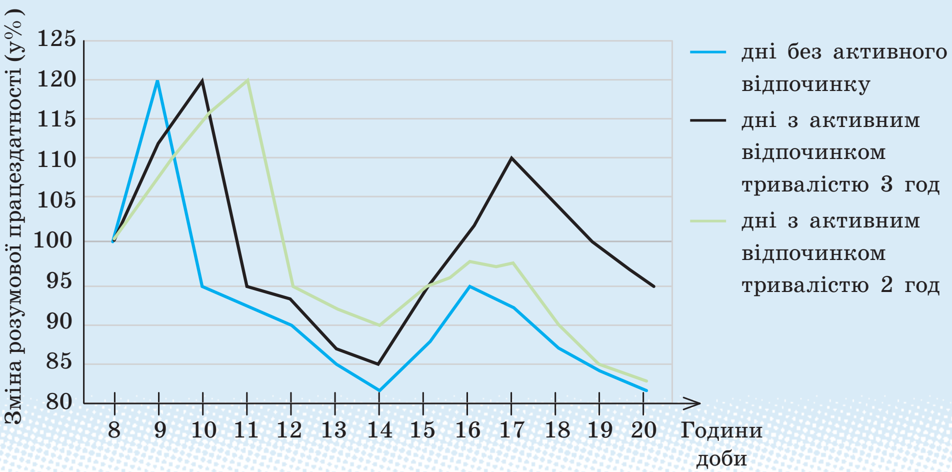
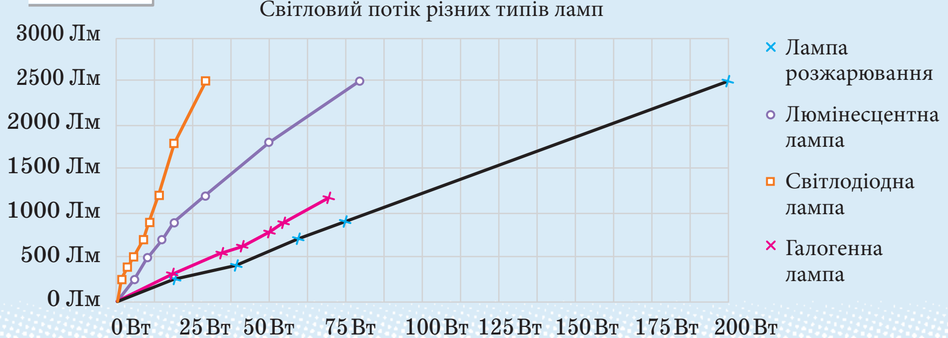


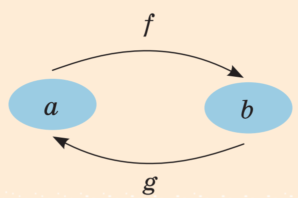
Рис. 1.3.5



1.4. Обернена функція

Таблиця 4

1. Поняття оберненої функції

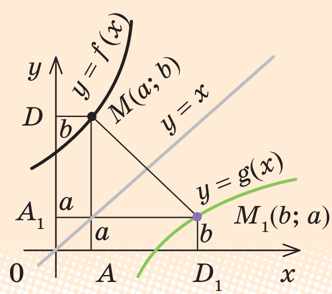


Якщо функція $y=f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення, то можна задати функцію $y=g(x)$, яка називається оберненою до функції $y=f(x)$**:** для кожного $a \in D(f)$, якщо $f(a)=b$, то $g(b)=a$.

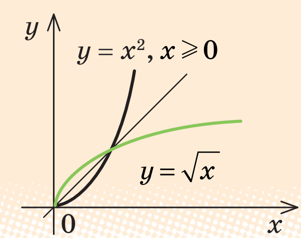
$E(f)=D(g)$; $D(f)=E(g)$.

Функції $f(x)$ і $g(x)$ взаємно обернені

2. Властивості оберненої функції



1) Графіки прямої та оберненої функцій симетричні відносно прямої $y=x$



2) Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо $f(x)$ зростає, і спадає, якщо $f(x)$ спадає

3. Практичний спосіб знаходження формули функції, оберненої до функції $y=f(x)$

Алгоритм	Приклад
1) **З'ясувати, чи буде функція $y=f(x)$ оборотною на всій області визначення:** для цього достатньо з'ясувати, чи має рівняння $y=f(x)$ єдиний корінь відносно змінної x. **Якщо ні, то виділити (якщо можливо) проміжок, де існує обернена функція** (наприклад, це може бути проміжок, де функція $y=f(x)$ зростає або спадає). 2) **Із рівності $y=f(x)$ виразити x через y.** 3) **В одержаній формулі ввести традиційні позначення — аргумент позначити через x, а функцію — через y.**	Знайдіть функцію, обернену до функції $y=2x+4$. ▶ Із рівності $y=2x+4$ можна однозначно виразити x через y: $x=\frac{1}{2}y-2$. Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Позначимо в одержаній формулі аргумент через x, а функцію — через y. Маємо функцію $y=\frac{1}{2}x-2$, обернену до функції $y=2x+4$. ■

Більш детально зміст оберненої функції, обґрунтування її властивостей та приклади знаходження обернених функцій розглянуто в інтернет-підтримці підручника.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. За якої умови для заданої функції $y=f(x)$ можна побудувати обернену функцію?
2. Як розміщено графіки прямої і оберненої функцій, якщо їх побудовано в одній системі координат? Проілюструйте відповідну властивість графіків на прикладі.
3. Чи існує функція, обернена до функції $y=x^2$, де $x\leqslant 0$? Поясніть це, спираючись на відповідні властивості оберненої функції. Якщо обернена функція існує, то задайте її формулою вигляду $y=g(x)$.

ВПРАВИ

1.4.1. Запишіть формулу, яка задає функцію $y=g(x)$, обернену до заданої. Укажіть область визначення й область значень функції $g(x)$:

1°) $y=3x-6$; 3) $y=\frac{2}{x}$; 5) $y=\sqrt{x}$;

2°) $y=-3x-6$; 4) $y=-\frac{1}{x}$; 6) $y=-\sqrt{x}$.

1.4.2. На одному рисунку побудуйте графік даної функції і функції, оберненої до даної:

1°) $y=2x$; 3) $y=-\frac{1}{x}$; 5*) $y=\sqrt{x+1}$.

2°) $y=x-2$; 4*) $y=\frac{1}{x-1}$;

1.4.3*. Знайдіть функцію, обернену до даної на заданому проміжку, і побудуйте на одному рисунку графіки даної функції і функції, оберненої до неї:

1) $y=\frac{1}{4}x^2$ при $x\geqslant 0$; 3) $y=(x-2)^2$ при $x\geqslant 2$;

2) $y=\frac{1}{4}x^2$ при $x\leqslant 0$; 4) $y=x^2-2$ при $x\leqslant 0$.

Виявіть свою компетентність

1.4.4. Вартість поїздки в таксі включає оплату подання автомобіля 25 грн та вартість пройденої відстані в розмірі 5 грн за кожний кілометр.
1) Складіть функцію, яка визначає вартість поїздки в таксі залежно від пройденої відстані.
2) Знайдіть вартість поїздки, якщо пасажир проїхав 30 км.

1.4.5. Складіть функцію, яка визначає залежність витрат на поїздку власним автомобілем від відстані подорожі, якщо ваш автомобіль споживає 7,5 л бензину на шляху 100 км. Скільки грошей вам знадобиться на купівлю бензину для автомобіля, щоб доїхати з Харкова до Києва? Дізнайтеся вартість квитка на потяг і порівняйте витрати на транспорт в обох випадках. За яких умов подорож автомобілем може бути економнішою?

§ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

2.1. Рівняння і нерівності

Таблиця 5

1. Область допустимих значень (ОДЗ) рівнянь і нерівностей	
Областю допустимих значень (або областю визначення) рівняння (або нерівності) називають спільну область визначення для всіх функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння (або нерівності)	Для рівняння $\sqrt{x+2}=x$ (нерівностей $\sqrt{x+2}<x$ чи $\sqrt{x+2}>x$) ОДЗ: $x+2\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -2$, оскільки область визначення функції $f(x)=\sqrt{x+2}$ визначається умовою $x+2\geqslant 0$, а областю визначення функції $g(x)=x$ є множина всіх дійсних чисел

2. Рівняння-наслідки	
Означення й орієнтир	Приклад
Якщо кожний корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння називають **наслідком** першого. Якщо з правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, одержуємо рівняння-наслідки. *При цьому можлива поява сторонніх коренів*. Тому при використанні рівнянь-наслідків **перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння** є складовою розв'язування	Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+2}=x$. *Розв'язання* ▶ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2$; $x+2=x^2$; $x^2-x-2=0$; $x_1=2$, $x_2=-1$. Перевірка. $x=2$ — корінь; $x=-1$ — сторонній корінь. *Відповідь*: 2. ■

3. Рівносильні рівняння і нерівності

Означення	Найпростіші теореми
Два рівняння (нерівності) називаються *рівносильними на деякій множині*, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки. Тобто кожний розв'язок першого рівняння (нерівності) є розв'язком другого, і навпаки, кожний розв'язок другого є розв'язком першого (схеми такого розв'язування рівнянь і нерівностей наведено в п. 4 і 6 цієї таблиці)	1. Якщо з однієї частини рівняння (нерівності) перенести в другу доданки з протилежним знаком, одержимо рівняння (нерівність), рівносильне заданому (на будь-якій множині). 2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне і те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого)

4. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь

Розв'язування рівнянь

за допомогою **рівнянь-наслідків**

1 ↓ 2 Перетворення, що гарантують збереження правильної рівності

Перевірка коренів підстановкою в початкове рівняння

за допомогою **рівносильних перетворень**

Урахування ОДЗ початкового рівняння

1 ↑↓ 2 Збереження на ОДЗ правильної рівності при прямих і зворотних перетвореннях

застосуванням властивостей функцій

1 — початкове рівняння

2 — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

5. Заміна змінних

Орієнтир	Приклад
Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною).	Розв'яжіть рівняння $x^4-3x^2-4=0$. *Розв'язання* ▶ *Заміна*: $x^2=t$ (тоді $x^4=\left(x^2\right)^2=t^2$). $t^2-3t-4=0$; $t_1=-1$, $t_2=4$. 1. При $t=-1$ маємо $x^2=-1$ — коренів немає. 2. При $t=4$ маємо $x^2=4$, тоді $x=\pm2$. *Відповідь*: ±2. ■

6. Схема пошуку плану розв'язування нерівностей

Розв'язування нерівностей

за допомогою **рівносильних перетворень**

Урахування ОДЗ початкової нерівності

(1) ↑↓ (2) Збереження на ОДЗ правильної нерівності при прямих і зворотних перетвореннях

за допомогою **методу інтервалів** $f(x)\gtrless 0$

1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі функції: $f(x)=0$.
3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які ОДЗ розбивається нулями.
4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.

(1) — початкова нерівність

(2) — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

7. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)

План

1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі функції: $f(x)=0$.
3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які ОДЗ розбивається нулями.
4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності

Записуючи відповідь до нестрогої нерівності, слід урахувати, що всі нулі функції повинні увійти до відповіді (у наведеному прикладі — це числа –1 і 1).

Приклад

Розв'яжіть нерівність $\dfrac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$.

Розв'язання

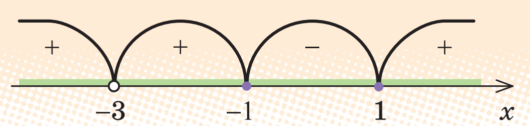
▸ Нехай $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+3)^2}$.

1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -3$.

2. Нулі функції: $f(x)=0$. $\dfrac{x^2-1}{(x+3)^2}=0$; $x^2-1=0$;

$x_1=-1$, $x_2=1$ (входять до ОДЗ).

3.



Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$. ■

8. Теореми про рівносильність нерівностей

1. **Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число** (*або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності*), **не змінюючи знак нерівності, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)**

2. **Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число** (*або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності*) **і змінити знак нерівності на протилежний, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)**

Детальна інформація про методи розв'язування рівнянь і нерівностей, зокрема про метод інтервалів, наведена в інтернет-підтримці підручника.

Розгляньте в інтернет-підтримці підручника розв'язування однієї й тієї самої дробово-раціональної нерівності двома способами: методом інтервалів і за допомогою рівносильних перетворень. Який із запропонованих способів, на вашу думку, доцільніше використовувати під час розв'язування заданої нерівності?

Самостійно опрацюйте таблицю «Причини появи сторонніх коренів та втрати коренів під час розв'язування рівнянь» і навчальний матеріал, присвячений розв'язуванню рівнянь і нерівностей з модулями та рівнянь і нерівностей з параметрами, скориставшись інтернет-підтримкою підручника. Наведіть власні приклади розв'язування відповідних рівнянь і нерівностей.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть зміст понять: «корінь рівняння», «розв'язок нерівності», «розв'язати рівняння чи нерівність», «область допустимих значень рівняння чи нерівності», «рівносильні рівняння чи нерівності».
2. Сформулюйте відомі вам теореми про рівносильність рівнянь та рівносильність нерівностей. Проілюструйте їх на прикладах.
3. Сформулюйте план розв'язування нерівностей методом інтервалів. Проілюструйте використання цього плану на прикладі.
4. Поясніть на прикладах, як можна виконувати рівносильні перетворення рівнянь та нерівностей у тих випадках, які не описуються відомими теоремами про рівносильність рівнянь та рівносильність нерівностей.
5. Дайте означення рівняння-наслідку заданого рівняння. Поясніть на прикладі, як можна розв'язувати рівняння за допомогою рівнянь-наслідків.

ВПРАВИ

2.1.1°. Знайдіть область допустимих значень (ОДЗ) рівняння:

1) $\frac{x-5}{x+2}-\frac{2x-3}{x}=0$;

2) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x}{x^2+1}=0$;

3) $\sqrt{x}=\frac{3x-6}{x-1}$;

4) $\sqrt{x^2+5}-\frac{x-5}{x+4}=0$.

2.1.2. З'ясуйте, чи є друге рівняння наслідком першого, чи є ці рівняння рівносильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) $2x^2-8x-9=0$ і $x^2-4x-4,5=0$; 2) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=0$ і $x^2-4=0$.

2.1.3°. Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:

1) $5x-8=7-3x$ і $5x+3x=7+8$;

2) $(2x-1)(x^2+5)=x(x^2+5)$ і $2x-1=x$.

2.1.4°. Обґрунтуйте, що задані рівняння не є рівносильними:

1) $x^2+\dfrac{1}{x+3}=9+\dfrac{1}{x+3}$ і $x^2=9$;

2) $(2x-1)(x^2-5)=x(x^2-5)$ і $2x-1=x$.

2.1.5°. Поясніть, які перетворення було використано при переході від першого рівняння до другого і чи можуть вони приводити до порушення рівносильності:

1) $3x+1,1=6,8-2x$ і $3x+2x=6,8-1,1$;

2) $\dfrac{x^2-81}{x+9}+3x^2-1=0$ і $x-9+3x^2-1=0$.

2.1.6. Розв’яжіть рівняння за допомогою рівнянь-наслідків і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:

1) $3x+\sqrt{x-2}=5x-1+\sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{2x+5}=x+1$;

3) $\sqrt{3-2x}=1-x$;

4) $\sqrt{5+x^2}=x-4$.

Розв’яжіть нерівності 2.1.7, 2.1.8. двома способами: за допомогою рівносильних перетворень і методом інтервалів.

2.1.7°. 1) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4}\geqslant 0$;

2) $\dfrac{2}{x+2}<\dfrac{1}{x-3}$;

3) $\dfrac{x^2-25}{(x+5)(x-4)}\leqslant 0$;

4) $\dfrac{x^2+12}{x^2-2x-8}\geqslant 1$.

2.1.8°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-4}}$;

2) $y=\sqrt{\dfrac{2x-x^2-1}{x^2+3x+2}}$;

3) $y=\sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$;

4) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

Виявіть свою компетентність

2.1.9. Перебуваючи за кордоном, ви можете користуватися послугами одного з двох мобільних операторів. Перший пропонує сплачувати 10 грн за першу хвилину і 2 грн за кожну наступну хвилину розмов, а другий — 7 грн за першу хвилину і 3 грн за кожну наступну хвилину.

1) Складіть функції, які виражають вартість розмови залежно від її тривалості для кожного оператора.

2) Побудуйте в одній системі координат графіки обох функцій, вважаючи, що тривалість розмови не перевищує 6 хв. Який висновок можна зробити стосовно доцільності використання послуг кожного оператора?

2.1.10. За температури 0 °С металева рейка має довжину $l_0 = 25$ м, а проміжок між сусідніми рейками дорівнює 12 мм. Унаслідок зростання температури відбувається теплове розширення рейки, при цьому її довжина змінюється за законом $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, де $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ °С$^{-1}$ — коефіцієнт теплового розширення, t — температура (у градусах Цельсія). За якої температури проміжок між рейками зникне? Відповідь виразіть у градусах Цельсія.

2.1.11. Розгляньте графік (рис. 2.1.1), що ілюструє виробництво електроенергії в Україні (млрд кВт·год).

1) Знайдіть область визначення функції, що зображена на графіку.

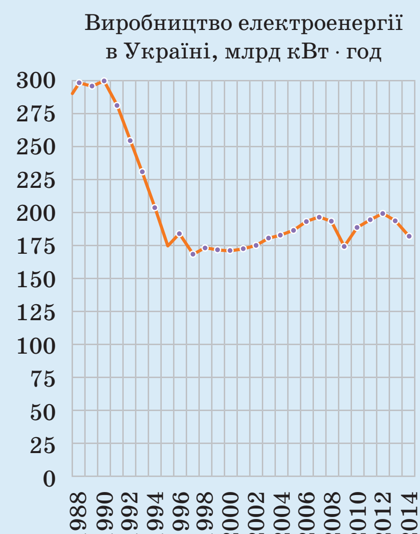
2) Яка кількість електроенергії вироблялася в Україні в 1995 р.?

3) У який ще рік вироблялося стільки ж електроенергії, як у 1995 р.?

4) Чи були роки, коли електроенергії вироблялося менше ніж 150 млрд кВт·год?

5) У які роки електроенергії вироблялося більше ніж 200 млрд кВт·год?

Рис. 2.1.1



2.2. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь

Таблиця 6

<table>
<tr><th colspan="2">1. Скінченна ОДЗ</th></tr>
<tr><th>Орієнтир</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається зі скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення</td><td>$$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}.$$
▶ ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 2-2x^2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 1, \\ x^2\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x\pm 1.$
Перевірка.
$x=1$ — корінь ($\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0}$; $1=1$),
$x=-1$ — не є коренем $\left(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0}\right)$.
Відповідь: 1. ■</td></tr>
<tr><th colspan="2">2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння</th></tr>
<tr><th>Орієнтир</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>$$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\geqslant a \\ g(x)\leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}}$$
Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді й тільки тоді, коли $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a</td><td>$$1-x^2=\sqrt{1+\sqrt{|x|}}.$$
▶ $f(x)=1-x^2\leqslant 1$,
$g(x)=\sqrt{1+\sqrt{|x|}}\geqslant 1$ (оскільки $\sqrt{|x|}\geqslant 0$).
Отже, задане рівняння рівносильне системі
$\begin{cases} 1-x^2=1, \\ \sqrt{1+\sqrt{|x|}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$
Відповідь: 0. ■</td></tr>
</table>

$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0. \end{cases}$	
$f_1(x)\geqslant 0,$ $f_2(x)\geqslant 0,$ $\ldots\ldots\ldots$ $f_n(x)\geqslant 0$	

Сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю

$$\sqrt{x-2}+\left|x^2-2x\right|+\left(x^2-4\right)^2=0.$$

$f_1(x)=\sqrt{x-2}\geqslant 0,$

$f_2(x)=\left|x^2-2x\right|\geqslant 0,$

$f_3(x)=\left(x^2-4\right)^2\geqslant 0.$

Отже, задане рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ \left|x^2-2x\right|=0, \\ \left(x^2-4\right)^2=0. \end{cases}$$

Із першого рівняння одержуємо $x=2$, що задовольняє й решту рівнянь системи.

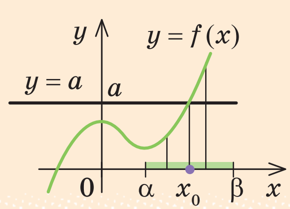
Відповідь: 2.

3. Використання зростання та спадання функцій

Схема розв'язування рівняння

1. *Підбираємо один або декілька коренів рівняння.*
2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має* (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частин рівняння)

Теорема про корінь рівняння



1. Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $\sqrt{x}+2x^3=3$ має єдиний корінь $x=1$ ($\sqrt{1}+2\cdot 1^3=3$, тобто $3=3$), оскільки функція $f(x)=\sqrt{x}+2x^3$ зростає на всій області визначення ($x\geqslant 0$)

З обґрунтуванням способів застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь, наведених в табл. 6, та з додатковими прикладами їх застосування можна ознайомитися, звернувшися до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x}+x^3=\sqrt{y}+y^3,\\ x^2+3y^2=36.\end{cases}$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$ Розглянемо функцію $f(t)=\sqrt{t}+t^3$. На своїй області визначення $(t\geqslant 0)$ ця функція є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій). Тоді перше рівняння заданої системи, яке має вигляд $f(x)=f(y)$, рівносильне рівнянню $x=y$. Отже, на ОДЗ задана система рівнянь рівносильна системі

$$\begin{cases}x=y,\\ x^2+3y^2=36.\end{cases}$$

Підставляючи $x=y$ у друге рівняння системи, маємо $4y^2=36$; $y^2=9$; $y=\pm 3$. Ураховуючи, що на ОДЗ $y\geqslant 0$, одержуємо $y=3$. Тоді $x=y=3$.

Відповідь: $(3;3)$.

Коментар

Іноді властивості функцій удається використати під час розв'язування систем рівнянь. Якщо помітити, що в лівій і правій частинах першого рівняння заданої системи стоять значення однієї і тієї ж функції, яка є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то *рівність* $f(x)=f(y)$ *для зростаючої функції можлива тоді й тільки тоді, коли* $x=y$, *оскільки однакових значень зростаюча функція може набувати тільки при одному значенні аргумента.* (Зауважимо, що така сама властивість матиме місце і для спадної функції.)

Коротко твердження, яке було обґрунтовано в коментарі до прикладу 2, можна сформулювати так: *якщо функція* $f(x)$ *є зростаючою (або спадною) на певній множині, то на цій множині*

$$f(\alpha)=f(\beta)\Leftrightarrow \alpha=\beta.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть на прикладах, як можна використати властивості функцій до розв'язування рівнянь.

ВПРАВИ

Розв'яжіть рівняння 2.2.1–2.2.4, використовуючи властивості відповідних функцій.

2.2.1°. 1) $\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{8-4x}+x+2$;

2) $2x+\sqrt{x^2-9}=x^2+\sqrt{18-2x^2}-3$;

3) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+3x}+\sqrt{4x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-1}-2y+3$.

2.2.2°. 1) $\sqrt{4+x^2}=2-x^4$; 2) $1+\left|x^5+3x\right|=\sqrt{1-x^2}$.

2.2.3. 1) $\left|x^2-7x+12\right|+\left|x^2-9\right|+\left|6-2x\right|=0$;

2) $\left|x+2\right|+\left|y-5\right|+\left|2x^2-8\right|=0$;

3) $\sqrt{1-y}+\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-3x}=0$;

4) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x}=0$.

2.2.4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}=2$; 3) $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}=5-x$;

2) $x+\sqrt{x}+x^9=3$; 4) $\sqrt{x-2}+x=\dfrac{40}{x-1}$.

2.2.5*. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+x^5=y+y^5, \\ x^2+3y=10; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3-y^3=y^5-x^5, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{-x}-x=\sqrt{-y}-y, \\ x^3+y^3=-16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{-3x}-\sqrt{-3y}=x-y, \\ 3x^2-y^2=8. \end{cases}$

§ 3. КОРІНЬ n-го СТЕПЕНЯ. АРИФМЕТИЧНИЙ КОРІНЬ n-го СТЕПЕНЯ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

3.1. Корінь n-го степеня та його властивості. Функція $y=\sqrt[n]{x}$ та її графік

Таблиця 7

<table>
<tr><th colspan="3">1. Означення</th></tr>
<tr><th>Квадратний корінь</th><th colspan="2">Корінь n-го степеня</th></tr>
<tr><td>Квадратним коренем із числа a називається таке число b, квадрат якого дорівнює a.
Якщо $a=b^2$, то b — квадратний корінь із числа a.</td><td colspan="2">Коренем n-го степеня з числа a називається таке число b, n-й степінь якого дорівнює a.
Якщо $a=b^n$ $(n\in N,\ n\neq 1)$, то b — корінь n-го степеня з числа a.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Арифметичний корінь — невід'ємне значення кореня.
При $a\geqslant 0$: $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$ — позначення арифметичного значення кореня.</td></tr>
<tr><td>$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2=a}$</td><td colspan="2">$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a}$</td></tr>
<tr><th colspan="3">2. Область допустимих значень (ОДЗ)</th></tr>
<tr><th>Квадратний корінь</th><th colspan="2">Корінь n-го степеня</th></tr>
<tr><td>$\sqrt{a}$ існує тільки при $a\geqslant 0$</td><td colspan="2">$\sqrt[2k]{a}$ існує тільки при $a\geqslant 0$ $(k\in N)$;
$\sqrt[2k+1]{a}$ існує при будь-яких значеннях a</td></tr>
<tr><th colspan="3">Запис розв'язків рівняння $x^n=a$ $(n\in N)$</th></tr>
<tr><td>$n=2k+1$ — непарне $(k\in N)$</td><td colspan="2">$n=2k$ — парне $(k\in N)$</td></tr>
<tr><td>При будь-яких значеннях a рівняння $x^{2k+1}=a$ має єдиний корінь $x=\sqrt[2k+1]{a}$</td><td>При $a<0$ рівняння $x^{2k}=a$ не має коренів</td><td>При $a\geqslant 0$ усі корені рівняння $x^{2k}=a$ можна записати так: $x=\pm\sqrt[2k]{a}$</td></tr>
</table>

Приклади

Рівняння $x^5=3$ має єдиний корінь $x=\sqrt[5]{3}$	Рівняння $x^8=-7$ не має коренів	Рівняння $x^8=7$ має корені $x=\pm\sqrt[8]{7}$

3. Властивості кореня *n*-го степеня

$n=2k+1$ — непарне число	$n=2k$ — парне число
1) $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$. 2) $\boxed{\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a}$.	$\boxed{\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[2k]{a^{2k}}=\lvert a\rvert}$.

Для довільних значень n і k ($n\in N$, $n\neq1$, $k\in N$)

3) При $a\geqslant0$ $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}}$.

4) При $a\geqslant0$ $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}}$.

5) При $a\geqslant0$, $b\geqslant0$ $\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$.

Наслідки

При $a\geqslant0$, $b\geqslant0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}}$ — *винесення множника з-під знака кореня.*	При $a\geqslant0$, $b\geqslant0$ $\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}}$ — *внесення множника під знак кореня.*

6) При $a\geqslant0$, $b>0$ $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$.

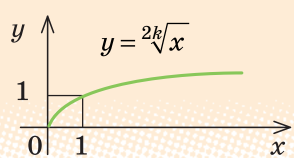
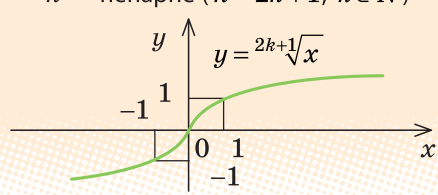
7) При $a\geqslant0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}}$ — основна властивість кореня.

Значення кореня зі степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник степеня підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне й те саме натураль не число.

8) При $a\geqslant0$, $b\geqslant0$, якщо $a>b$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

4. Функція $y=\sqrt[n]{x}$ та її графік

Графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ ($n\in N$, $n\geqslant2$)

n — парне ($n=2k$, $k\in N$)	n — непарне ($n=2k+1$, $k\in N$)
	

Властивості функції $y=\sqrt[n]{x}$

n — парне ($n=2k,\ n\in N$)	n — непарне ($n=2k+1,\ n\in N$)
1. *Область визначення*: $x\geqslant 0$, тобто $D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$.	1. *Область визначення*: $x\in \boldsymbol{R}$ (x — будь-яке дійсне число), тобто $D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=\boldsymbol{R}$.
2. *Область значень*: $y\geqslant 0$, тобто $E\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$.	2. *Область значень*: $y\in \boldsymbol{R}$ (y — будь-яке дійсне число), тобто $E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=\boldsymbol{R}$.
3. *Найбільшого значення функція* $y=\sqrt[2k]{x}$ *не має; найменше значення* — $y=0$ (при $x=0$).	3. Найбільшого і найменшого значень функція $y=\sqrt[2k+1]{x}$ не має.
4. *Функція ні парна, ні непарна.*	4. *Функція* **непарна**: $\sqrt[2k+1]{-x}=-\sqrt[2k+1]{x}$, *отже, графік функції симетричний відносно початку координат.*
5. *Точки перетину з осями координат*: $Oy\ \begin{cases}x=0,\\ y=0;\end{cases}$ $Ox\ \begin{cases}y=0,\\ x=0.\end{cases}$ ***Графік проходить через початок координат.***	
6. *Проміжки зростання і спадання: на всій області визначення функція зростає.*	
7. *Проміжки знакосталості:* при $x>0$ значення $y>0$	7. *Проміжки знакосталості:* при $x>0$ значення $y>0$, при $x<0$ значення $y<0$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Означення кореня n-го степеня

Поняття кореня квадратного з числа a вам відоме: це таке число, квадрат якого дорівнює a. Аналогічно означають і корінь n-го степеня з числа a, де n — довільне натуральне число, більше за 1.

О **Означення.** ***Коренем n-го степеня з числа a*** **називається таке число, n-й степінь якого дорівнює a.**

Наприклад, корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, оскільки $3^3=27$; корінь третього степеня з числа -27 дорівнює -3, оскільки $(-3)^3=-27$. Числа 2 і -2 є коренями четвертого степеня з 16, оскільки $2^4=16$ і $(-2)^4=16$.

При $n=2$ та при $n=3$ корені n-го степеня називають також відповідно квадратним та кубічним коренями.

Як і для квадратного кореня, для кореня n-го степеня вводять поняття арифметичного кореня.

Означення. ***Арифметичним коренем n-го степеня з числа a* називається невід'ємне число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.**

При $a\geqslant 0$ для арифметичного значення кореня n-го степеня з числа a існує спеціальне позначення*: $\sqrt[n]{a}$; число n називають *показником кореня*, а саме число a — *підкореневим виразом*. Знак $\sqrt[n]{}$ і вираз $\sqrt[n]{a}$ називають також *радикалом*.

Наприклад, те, що корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, записують так: $\sqrt[3]{27}=3$; те, що корінь четвертого степеня із 16 дорівнює 2, записують так: $\sqrt[4]{16}=2$. Але для запису того, що корінь четвертого степеня із 16 дорівнює -2, позначення немає.

При $a<0$ значення кореня n-го степеня з числа a існує тільки при непарних значеннях n (оскільки не існує такого дійсного числа, парний степінь якого буде від'ємним числом). У цьому випадку корінь непарного степеня n із числа a теж позначають $\sqrt[n]{a}$. Наприклад, те, що корінь третього степеня з числа -27 дорівнює -3, записують так: $\sqrt[3]{-27}=-3$. Оскільки -3 — від'ємне число, то $\sqrt[3]{-27}$ не є арифметичним значенням кореня. Але корінь непарного степеня з від'ємного числа можна виразити через арифметичне значення кореня за допомогою формули

$$\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}.$$

Щоб довести наведену формулу, зауважимо, що за означенням кореня n-го степеня ця рівність буде правильною, якщо $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=-a$. Дійсно, $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=(-1)^{2k+1}\cdot\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=-a$, а це й означає, що $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$. ■

Наприклад, $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$; $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}=-2$.

Зазначимо також, що ***значення*** $\sqrt[2k+1]{a}$ ***має той самий знак, що й число a***, оскільки при піднесенні до непарного степеня знак числа не змінюється.

---

* Усі властивості виразів виду $\sqrt[n]{a}$ наведено для випадку $n\in N$, $n\geqslant 2$. При $n=1$ домовилися вважати, що $\sqrt[n]{a}=\sqrt[1]{a}=a$.

Також за означенням кореня n-го степеня можна записати, що в тому випадку, коли існує значення $\sqrt[n]{a}$, виконується рівність

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \text{ і, зокрема, при } a \geqslant 0 \ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

2. Область допустимих значень виразів із коренями n-го степеня. Розв'язки рівняння $x^n = a \ (n \in N)$

Зазначимо, що ***значення*** $\sqrt[2k+1]{a}$ ***— кореня непарного степеня з числа а — існує при будь-яких значеннях а.***

Тоді можна записати розв'язки рівняння $x^n = a$ для непарних значень $n = 2k+1$: **при будь-яких значеннях** a **рівняння** $x^{2k+1} = a$ $(k \in N)$ **має єдиний корінь** $x = \sqrt[2k+1]{a}$.

Наприклад, рівняння $x^5 = 3$ має єдиний корінь $x = \sqrt[5]{3}$, а рівняння $x^7 = -11$ має єдиний корінь $x = \sqrt[7]{-11}$ (ураховуючи, що $x = \sqrt[7]{-11} = -\sqrt[7]{11}$, корінь для рівняння $x^7 = -11$ можна записати так: $x = -\sqrt[7]{11}$).

Значення $\sqrt[2k]{a}$ ***— кореня парного степеня з числа а — існує тільки при*** $a \geqslant 0$.

Дійсно, у тому випадку, коли $\sqrt[2k]{a} = x$, за означенням кореня n-го степеня $a = x^{2k}$. Отже, $a \geqslant 0$.

Розглянемо розв'язки рівняння $x^n = a$ для парних значень $n = 2k$ $(k \in N)$.

Рівняння $x^{2k} = a$ $(k \in N)$ **при** $a < 0$ **не має коренів** (оскільки парний степінь будь-якого числа не може бути від'ємним).

При $a = 0$ **рівняння** $x^{2k} = 0$ $(k \in N)$ **має єдиний корінь** $x = 0$ (оскільки парний степінь будь-якого відмінного від нуля числа — число додатне, тобто не рівне нулю, а $0^{2k} = 0$).

При $a > 0$ за означенням кореня $2k$-го степеня $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$. Отже, $x = \sqrt[2k]{a}$ — корінь рівняння $x^{2k} = a$. Але $\left(-\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = \left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$, тому $x = -\sqrt[2k]{a}$ — теж корінь рівняння $x^{2k} = a$. Інших коренів це рівняння не має, оскільки властивості функції $y = x^{2k}$ аналогічні властивостям функції $y = x^2$: при $x \geqslant 0$ функція зростає, отже, значення a вона може набувати тільки при одному значенні аргумента $\left(x = \sqrt[2k]{a}\right)$. Аналогічно при $x \leqslant 0$ функція $y = x^{2k}$ спадає, тому значення a вона може набувати тільки при одному значенні аргумента $\left(x=-\sqrt[2k]{a}\right)$. Таким чином, **рівняння** $x^{2k}=a$ **при** $a>0$ **має тільки два корені:** $x=\pm\sqrt[2k]{a}$.

Наприклад, рівняння $x^{10}=-1$ не має коренів, а рівняння $x^6=5$ має корені $x=\pm\sqrt[6]{5}$.

3. Властивості кореня n-го степеня

Зазначені в табл. 7 властивості можна обґрунтувати, спираючись на означення кореня n-го степеня.

Нагадаємо, що за означенням кореня n-го степеня для доведення рівності $\sqrt[n]{A}=B$ (при $A\geqslant 0$, $B\geqslant 0$) достатньо перевірити рівність $B^n=A$. Наприклад, властивість кореня $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$ при $a\geqslant 0$ випливає з рівності $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k=\left(a^m\right)^k=a^{mk}$. Зокрема, $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$ (показник кореня і показник степеня підкореневого виразу поділили на натуральне число 3).

За допомогою формули $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ ($a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$) можна одержати важливі наслідки: формули винесення множника з-під знака кореня або внесення множника під знак кореня.

Дійсно, при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ $\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}$. Розглядаючи одержану формулу зліва направо, маємо *формулу винесення невід'ємного множника з-під знака кореня*:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}},$$

а справа наліво — *формулу внесення невід'ємного множника під знак кореня*:

$$\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}}.$$

Наприклад, $\sqrt[5]{96}=\sqrt[5]{32\cdot 3}=\sqrt[5]{2^5\cdot 3}=2\sqrt[5]{3}$.

Зазначимо ще одну властивість коренів n-го степеня: для будь-яких невід'ємних чисел a і b, *якщо* $a>b$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$. Наприклад, ураховуючи, що $21>16$, одержуємо $\sqrt[4]{21}>\sqrt[4]{16}$. Оскільки $\sqrt[4]{16}=2$, маємо, що $\sqrt[4]{21}>2$.

4. Графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ $(n\in N,\ n\geqslant 2)$

Графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ $(n\in N,\ n\geqslant 2)$ для парних і непарних значень n та основні властивості цієї функції наведені в п. 4 табл. 7.

На рис. 3.1.1 в одній і тій самій системі координат зображено графіки функцій $y=\sqrt[3]{x}$ та $y=\sqrt[5]{x}$ і для порівняння — графік функції $y=x$.

Зауважимо, що графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ можна побудувати, використовуючи графік функції $y=x^n$. Наприклад, функцію $y=\sqrt[3]{x}$ можна розглядати як обернену до функції $y=x^3$, а отже, побудувати її графік (рис. 3.1.2) як криву, симетричну кубічній параболі $y=x^3$ відносно прямої $y=x$.

Рис. 3.1.1

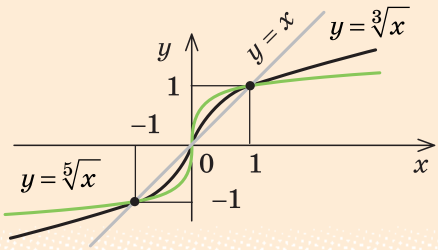
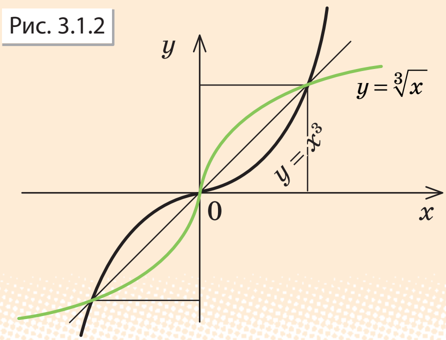


Рис. 3.1.2



Детальніше про корінь n-го степеня та його властивості, перетворення виразів з коренями n-го степеня, розв'язки рівняння $x^n=a$ $(n\in N)$, графік функції $y=\sqrt[n]{x}$ можна дізнатися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt[4]{625}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▸ $\sqrt[4]{625}=5$, оскільки $5^4=625$. ■ 2) ▸ $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}$, оскільки $\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27}$; ■ 3) ▸ $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$, оскільки $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$. ■	Використаємо означення кореня n-го степеня. Запис $\sqrt[n]{a}=b$ означає, що $b^n=a$.

Приклад 2. Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt[3]{27\cdot125}$; 2) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$.

Коментар

Використаємо властивості кореня n-го степеня і врахуємо, що кожну формулу, яка виражає ці властивості, можна застосувати як зліва направо, так і справа наліво. Наприклад, для розв'язування завдання 1 скористаємося формулою $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, а для розв'язування завдання 2 — цією самою формулою, але записаною справа наліво, тобто $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (при $a\geqslant0$, $b\geqslant0$).

Розв'язання

1) ▸ $\sqrt[3]{27\cdot125}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=3\cdot5=15$; ■

2) ▸ $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\cdot8}=\sqrt[4]{16}=2$. ■

Приклад 3. Порівняйте числа: 1) $\sqrt[4]{50}$ і $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[3]{3}$.

Розв'язання

1) ▸ $\sqrt{7}=\sqrt[4]{7^2}=\sqrt[4]{49}$. Оскільки $50>49$, то $\sqrt[4]{50}>\sqrt[4]{49}$, тобто $\sqrt[4]{50}>\sqrt{7}$; ■

2) ▸ $\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$. Оскільки $27<81$, то $\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{81}$, тобто $\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{3}$. ■

Коментар

Для порівняння заданих чисел у кожному завданні достатньо привести всі корені до одного показника кореня і врахувати, що *для будь-яких невід'ємних чисел a і b, якщо* $a>b$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Дайте означення кореня n-го степеня з числа a. Наведіть приклади.
2. Дайте означення арифметичного кореня n-го степеня з числа a. Наведіть приклади.
3. При яких значеннях a існують вирази $\sqrt[2k]{a}$ та $\sqrt[2k+1]{a}$ $(k\in N)$?
4. Запишіть властивості кореня n-го степеня для невід'ємних значень підкореневих виразів.
5. При яких значеннях a має корені рівняння:
   1) $x^{2k+1}=a$ $(k\in N)$, 2) $x^{2k}=a$ $(k\in N)$?

6. Запишіть усі розв'язки рівняння:
1) $x^{2k+1}=a$ $(k\in N)$; 2) $x^{2k}=a$ $(k\in N)$:
а) при $a>0$; б) при $a<0$; в) при $a=0$.
Наведіть приклади таких рівнянь і розв'яжіть їх.

7. Побудуйте графік функції $y=\sqrt[2k]{x}$, де $k\in N$, та сформулюйте її властивості.

8. Побудуйте графік функції $y=\sqrt[2k+1]{x}$, де $k\in N$, та сформулюйте її властивості.

ВПРАВИ

3.1.1. Перевірте правильність рівності:
1°) $\sqrt[3]{64}=4$; 3) $\sqrt[10]{1024}=2$; 5°) $\sqrt[5]{-32}=-2$;
2°) $\sqrt[9]{-1}=-1$; 4°) $\sqrt[25]{0}=0$; 6°) $\sqrt[13]{1}=1$.

3.1.2°. Обчисліть:
1) $\sqrt[3]{-8}$; 3) $\sqrt[13]{-1}$; 5) $\sqrt[3]{125}$;
2) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; 4) $\sqrt[5]{32}$; 6) $\sqrt[4]{81}$.

У завданнях 3.1.3–3.1.7 знайдіть значення виразу.

3.1.3. 1°) $\sqrt[3]{8\cdot1000}$; 2°) $\sqrt[4]{16\cdot625}$; 3) $\sqrt[3]{24\cdot9}$; 4) $\sqrt[5]{48\cdot81}$.

3.1.4. 1) $\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{27}$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; 3) $\sqrt[7]{8}\cdot\sqrt[7]{-16}$; 4) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}$.

3.1.5. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{-5}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[6]{1024}}{\sqrt[6]{16}}$.

3.1.6°. 1) $\sqrt[3]{7^3\cdot11^3}$; 2) $\sqrt[6]{2^6\cdot3^6}$; 3) $\sqrt[7]{3^7\cdot5^7}$; 4) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot10^5}$.

3.1.7°. 1) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot3^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{5^6\cdot2^9}$; 3) $\sqrt[4]{(0,1)^4\cdot3^8}$; 4) $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{30}\cdot6^{20}}$.

3.1.8. Порівняйте числа:
1°) $\sqrt[9]{0,1}$ і 0; 2°) $\sqrt[11]{1,3}$ і 1; 3) $\sqrt[4]{23}$ і $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{4}$ і $\sqrt[3]{3}$.

3.1.9°. Визначте, при яких x має зміст вираз:
1) $\sqrt[5]{5x+1}$; 2) $\sqrt[4]{2x-6}$; 3) $\sqrt[6]{x+2}$; 4) $\sqrt[8]{\frac{5}{x}}$.

3.1.10. Подайте вираз у вигляді дробу, знаменник якого не містить кореня n-го степеня:

1) $\dfrac{3}{\sqrt[7]{2}}$; 2) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-1}$; 3*) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+3}$; 4*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$.

3.1.11. Винесіть множник з-під знака кореня ($a>0$, $b>0$):

1) $\sqrt[5]{a^{11}b^7}$; 2) $\sqrt[4]{a^7b^{13}}$; 3) $\sqrt[3]{-27a^5b^{14}}$; 4) $\sqrt[6]{128a^9b^{17}}$.

3.1.12*. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{a^4b^{14}}$; 2) $\sqrt[7]{a^9b^8}$; 3) $\sqrt[6]{64a^{12}b^7}$; 4) $\sqrt[8]{a^{17}b^9}$.

3.1.13. Внесіть множник під знак кореня ($a>0$, $b>0$):

1) $a\cdot\sqrt[3]{7}$; 2) $-b\cdot\sqrt[4]{ab}$; 3) $ab\cdot\sqrt[7]{5}$; 4) $ab^2\cdot\sqrt[6]{\dfrac{a}{b^{11}}}$.

3.1.14*. Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\cdot\sqrt[4]{7}$; 2) $a^3\cdot\sqrt[7]{ab}$; 3) $ab\cdot\sqrt[6]{\dfrac{2b}{a^5}}$; 4) $-b\sqrt[8]{-3b^3}$.

3.1.15. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{a^8}$ при $a<0$; 2) $\sqrt[7]{a^7}+\sqrt[6]{a^6}$ при $a<0$.

3.1.16°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3=7$; 3) $x^5=-5$; 5) $x^4=16$;

2) $x^6=3$; 4) $x^8=-13$; 6) $x^3=-64$.

3.1.17. Побудуйте графік функції:

1°) $y=\sqrt[4]{x}$; 3°) $y=\sqrt[7]{x}$; 5) $y=\sqrt[3]{|x|}$; 7) $y=\sqrt[4]{-x}$.

2°) $y=\sqrt[5]{x}$; 4°) $y=\sqrt[6]{x}$; 6) $y=-\sqrt[3]{x}$;

3.1.18. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt[3]{x}=2-x$; 2) $\sqrt{x}=6-x$; 3) $\sqrt[3]{x-2}=4-x$; 4) $\sqrt{-x}=x+2$.

Перевірте підстановкою, що значення x дійсно є коренем рівняння.

3.1.19*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 3.1.18, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

Виявіть свою компетентність

3.1.20. Перевірте правильність виконання завдання 3.1.18, побудувавши відповідні графіки за допомогою комп'ютерних програм.

3.2. Застосування властивостей кореня n-го степеня до розв'язування ірраціональних рівнянь

Таблиця 8

Поняття ірраціонального рівняння

Рівняння, у яких змінна міститься під знаком кореня, називають *ірраціональними*. Для того щоб розв'язати задане ірраціональне рівняння, його найчастіше зводять до раціонального рівняння за допомогою деяких перетворень.

Розв'язування ірраціональних рівнянь

1. За допомогою піднесення обох частин рівняння до одного степеня

При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ).

Приклад 1

Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-1}=2$.

▸ $\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=2^3$, $x-1=8$, $x=9$.

Відповідь: 9. ■

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені, які відсіюють перевіркою.

Приклад 2

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+3}=x$.

▸ $\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=x^2$, $x^2-2x-3=0$, $x_1=-1$, $x_2=3$.

Перевірка. При $x=-1$ маємо: $\sqrt{1}=-1$ — неправильна рівність, отже, $x=-1$ — сторонній корінь.

При $x=3$ маємо: $\sqrt{9}=3$ — правильна рівність, отже, $x=3$ — корінь заданого рівняння.

Відповідь: 3. ■

2. За допомогою заміни змінних

Якщо до рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).

Приклад 3

Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=2$.

▸ Позначимо $\sqrt[3]{x}=t$. Тоді $\sqrt[3]{x^2}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=t^2$.

Одержуємо рівняння: $t^2+t=2$, $t^2+t-2=0$, $t_1=1$, $t_2=-2$.

Виконуємо обернену заміну: $\sqrt[3]{x}=1$, тоді $x=1$ або $\sqrt[3]{x}=-2$, звідси $x=-8$.

Відповідь: 1; –8. ■

З поясненням і обґрунтуванням розв'язування ірраціональних рівнянь та додатковими прикладами їх розв'язування можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь. Наведіть приклади застосування відповідних методів.
2. Поясніть, чому для розв'язування рівнянь $\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[5]{x}-4=0$, $\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2=0$ зручно використати заміну змінної. Укажіть заміну для кожного рівняння. Розв'яжіть ці рівняння.

ВПРАВИ

Розв'яжіть рівняння 3.2.1–3.2.6.

3.2.1. 1) $\sqrt{x-2}=1$; 2) $\sqrt{x-1}=-3$; 3) $\sqrt[3]{x-1}=-3$; 4) $\sqrt[3]{x^2+125}=5$; 5) $\sqrt[4]{2x-9}=3$.

3.2.2. 1) $\sqrt{x+1}=x-5$; 2) $\sqrt{3x-2}+x=4$; 3) $\sqrt[3]{x-x^3}=-x$; 4) $\sqrt[3]{x^3+x}-x=0$.

3.2.3. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5}=3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15}=5$; 3) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$; 4) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

3.2.4. 1) $\sqrt[3]{x^3-2x+6}=x$; 2) $\sqrt[3]{x-x^3+5}=-x$; 3) $\sqrt{3-\sqrt[3]{x+10}}=2$; 4) $\sqrt[3]{2+\sqrt{x^2+3x-4}}=2$.

3.2.5. 1) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$; 2) $\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}=3$; 3) $3\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[8]{x+1}=4$; 4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt[4]{x^2-1}=2$.

3.2.6*. 1) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

3.2.7. Розв'яжіть систему рівнянь.

1) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6, \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=7, \\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ 2x-y=7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=7, \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=4. \end{cases}$

§ 4. СТЕПІНЬ З РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 9

1. Степінь з натуральним і цілим показниками

$\boxed{a^1 = a}$

$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}}$ $a \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$ $(n \geqslant 2)$

$\boxed{a^0 = 1}$ $a \neq 0$

$\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ $a \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$

2. Степінь з дробовим показником

$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $a \geqslant 0$

$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $a > 0$, $n \in \boldsymbol{N}$ $(n \geqslant 2)$, $m \in \boldsymbol{Z}$

3. Властивості степенів

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Вам відомі поняття степенів з натуральним і цілим показниками. Нагадаємо їх означення та властивості.

Якщо n — натуральне число, більше за 1, то для будь-якого дійсного числа a $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}}$, тобто a^n дорівнює добутку n співмножників, кожен із яких дорівнює a.

При $n=1$ вважають, що $\boxed{a^1=a}$.

Якщо $a\neq 0$, то $\boxed{a^0=1}$ і $\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$, де n — натуральне число.

Наприклад, $(-5)^3=(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)=-125$, $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$.

Також вам відомі основні властивості степенів, наведені в п. 3 табл. 9.

Узагальнимо *поняття* степеня для виразів виду $3^{\frac{2}{7}}$; $6^{0,2}$; $5^{-\frac{1}{3}}$ і т. п., тобто *для степенів з раціональними показниками*. Відповідне означення бажано дати так, щоб степені з раціональними показниками мали ті самі властивості, що й степені з цілими показниками.

Наприклад, якщо ми хочемо, щоб виконувалася властивість $(a^p)^q=a^{pq}$, то повинна виконуватися рівність $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$. Але за означенням кореня n-го степеня остання рівність означає, що число $a^{\frac{m}{n}}$ є коренем n-го степеня з числа a^m. Це приводить нас до такого означення.

Означення. ***Степенем числа $a>0$ з раціональним показником $r=\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне число $(n>1)$, називається число $\sqrt[n]{a^m}$.***

Також за означенням приймемо, що при $r>0$ $\boxed{0^r=0}$.

Наприклад, за означенням степеня з раціональним показником:

$$3^{\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{3^2}=\sqrt[7]{9};\ 5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5};\ 2^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{8}};\ 0^{\frac{2}{5}}=0.$$

Значення степеня з раціональним показником $a^{\frac{m}{n}}$ (де $n>1$) не означають при $a<0$.

Можна показати (див. інтернет-підтримку підручника), що для введеного означення степеня із раціональним показником зберігаються всі властивості степенів із цілими показниками (відмінність полягає в тому, що наведені далі властивості є правильними тільки для додатних основ).

Для будь-яких раціональних чисел r і s та будь-яких додатних чисел a і b виконуються рівності:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;
2) $a^r : a^s = a^{r-s}$;
3) $(a^r)^s = a^{rs}$;
4) $(ab)^r = a^r b^r$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

1) $\sqrt[3]{7^5}$; 2) $\sqrt[4]{5^{-3}}$; 3) $\sqrt[7]{a^2}$ при $a \geqslant 0$; 4*) $\sqrt[7]{a^2}$.

Розв'язання

1) $\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}$; ■

2) $\sqrt[4]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{4}}$; ■

3) при $a \geqslant 0$ $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$; ■

4) $\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[7]{|a|^2} = |a|^{\frac{2}{7}}$. ■

Коментар

За означенням степеня з раціональним показником для $a > 0$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

Для завдання 3 врахуємо, що вираз $a^{\frac{2}{7}}$ означений також і при $a = 0$.

У завданні 4 при $a < 0$ ми не маємо права користуватися формулою (1). Але якщо врахувати, що $a^2 = |a|^2$, то для основи $|a|$ формулою (1) уже можна скористатися, оскільки $|a| \geqslant 0$.

Приклад 2. Спростіть вираз $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$.

Розв'язання

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}. \text{ ■}$$

Коментар

Оскільки задані приклади вже містять вирази $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, то $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Тоді в завданні 1 невід'ємні числа a і b можна подати як квадрати: $a = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, $b = \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ і використати формулу різниці квадратів: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння: 1) $\sqrt[3]{x^2}=1$; 2*) $x^{\frac{2}{3}}=1$.

Розв'язання

1) ▶ $\sqrt[3]{x^2}=1$. ОДЗ: $x\in\boldsymbol{R}$,

$x^2=1$;

$x=\pm1$.

Відповідь: ±1. ■

2*) ▶ $x^{\frac{2}{3}}=1$. ОДЗ: $x\geqslant0$.

$x^2=1$;

$x=\pm1$.

Ураховуючи ОДЗ, одержуємо $x=1$.

Відповідь: 1. ■

Коментар

Область допустимих значень рівняння $\sqrt[3]{x^2}=1$ — усі дійсні числа, а рівняння $x^{\frac{2}{3}}=1$ — тільки $x\geqslant0$.

При піднесенні обох частин рівняння до куба одержуємо рівняння, рівносильне заданому на його ОДЗ. Отже, перше рівняння задовольняють усі знайдені корені, а друге — тільки невід'ємні.

(У завданні 1 також ураховано, що $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3=x^2$, а в завданні 2 — що $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3=x^{\frac{2}{3}\cdot3}=x^2$).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Дайте означення степеня з натуральним, цілим від'ємним та нульовим показниками. Наведіть приклади обчислення таких степенів.

2. Дайте означення степеня з раціональним показником $r=\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне, не рівне 1. Наведіть приклади обчислення таких степенів. При яких значеннях a існують значення виразу $a^{\frac{m}{n}}$ Укажіть область допустимих значень виразів $a^{\frac{2}{5}}$ і $a^{-\frac{2}{5}}$.

ВПРАВИ

4.1°. Подайте вираз у вигляді кореня з числа:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $3^{-\frac{2}{5}}$; 3) $5^{0{,}25}$; 4) $4^{-\frac{3}{7}}$; 5) $2^{1{,}5}$; 6) $7^{-\frac{2}{3}}$.

4.2. Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

1°) $\sqrt[6]{3^5}$; 3°) $\sqrt{7^{-9}}$; 5) $\sqrt[4]{2b}$ при $b\geqslant0$;

2°) $\sqrt[5]{4}$; 4) $\sqrt[9]{a^{-2}}$ при $a>0$; 6*) $\sqrt[11]{c^4}$.

4.3°. Чи має зміст вираз:

1) $(-3)^{\frac{1}{2}}$; 2) $(-5)^{-2}$; 3) $4^{\frac{2}{7}}$; 4) 0^{-5}?

4.4. Знайдіть область допустимих значень виразу:

1) $x^{\frac{1}{5}}$; 3) $(x-1)^{-\frac{2}{3}}$; 5) $(x^2-1)^0$;

2) x^{-3}; 4) $(x+3)^{\frac{3}{7}}$; 6) x^3-5.

4.5. Знайдіть значення числового виразу:

1) $243^{0,4}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$;

2) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 25^{\frac{1}{2}}-81^{\frac{1}{2}}\cdot 125^{-\frac{1}{3}}$;

3) $16^{\frac{5}{4}}$; 6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}-2^{-1}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}$.

4.6. Розкладіть на множники:

1) $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}$; 3) $3+3^{\frac{1}{2}}$;

2) $a-a^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

4.7. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$; 2) $\dfrac{p^{\frac{1}{2}}-5}{p-25}$; 3) $\dfrac{c+c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}+d}{c^{\frac{3}{2}}-d^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\dfrac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$.

Спростіть вирази 4.8–4.9.

4.8. 1) $\left(1+c^{\frac{1}{2}}\right)^2-2c^{\frac{1}{2}}$; 3) $\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$;

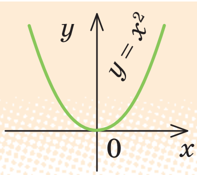
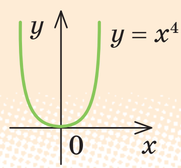
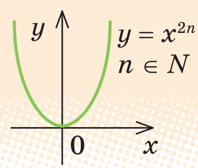
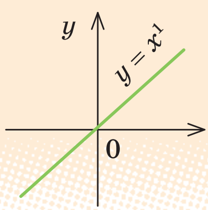
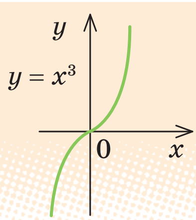
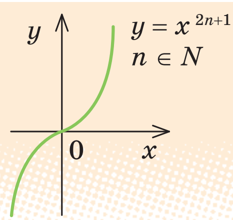
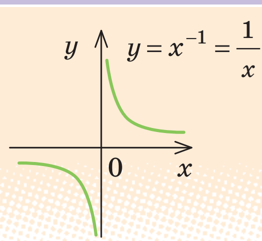
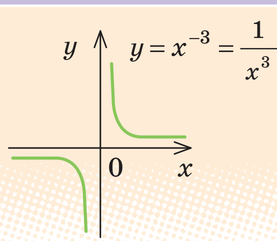
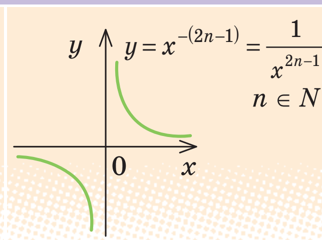
2) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$; 4) $\left(k^{\frac{1}{4}}+l^{\frac{1}{4}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}}+l^{\frac{1}{8}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}}-l^{\frac{1}{8}}\right)$.

4.9. 1) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$; 2) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 3) $\dfrac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$; 4) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

4.10. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\frac{3}{5}}=1$; 2) $x^{\frac{1}{7}}=2$; 3) $x^{\frac{2}{5}}=2$; 4) $\sqrt[5]{x^2}=2$.

§ 5. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

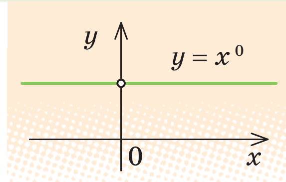
Графіки і властивості		
Графік		
1. $y = x^{\alpha}$,		
		
2. $y = x^{\alpha}$,		
		
3. $y = x^{\alpha}$,		
		

Таблиця 10

Означення. Функція виду $y = x^{\alpha}$, де α — будь-яке дійсне число, називається *степеневою функцією*.

Особливий випадок $(\alpha = 0)$

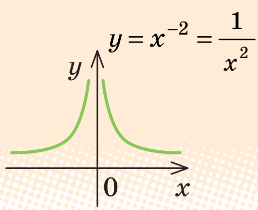
Якщо $\alpha = 0$, то $y = x^{\alpha} = x^{0} = 1$ (при $x \neq 0$).

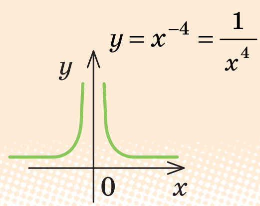


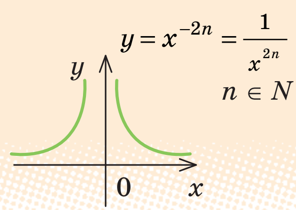
функції $y = x^{\alpha}$ (при $\alpha \neq 0$)

Властивості			
D(*y*)	*E*(*y*)	парність і непарність	зростання і спадання
α — парне натуральне число ($y = x^{2n}$, $n \in N$)			
R	$[0; +\infty)$	Парна	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$
α — непарне натуральне число ($y = x$ та $y = x^{2n+1}$, $n \in N$)			
R	R	Непарна	Зростає
α — непарне від'ємне число ($y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in N$)			
$x \neq 0$	$y \neq 0$	Непарна	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

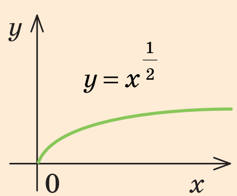
Графік
4. $y = x^{\alpha}$,

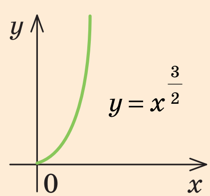


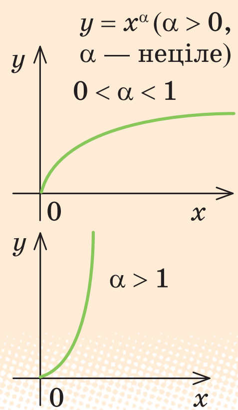




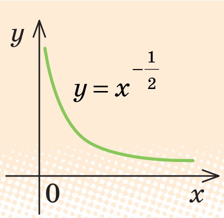
5. $y = x^{\alpha}$,

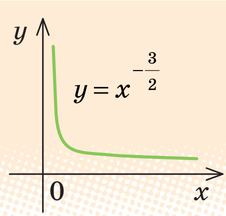


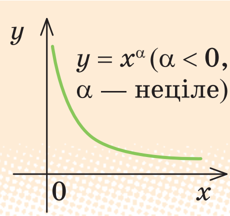




6. $y = x^{\alpha}$,







Продовження таблиці 10

Властивості			
D(*y*)	*E*(*y*)	парність і непарність	зростання і спадання
α — парне від'ємне число ($y - x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, $n \in N$)			
$x \neq 0$	$(0; +\infty)$	Парна	Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$
α — неціле додатне число			
$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Ні парна, ні непарна	Зростає
α — неціле від'ємне число			
$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	Ні парна, ні непарна	Спадає

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Степеневими функціями називають функції виду $y = x^{\alpha}$, де α — будь-яке дійсне число.

З окремими видами таких функцій ви вже ознайомилися в курсі алгебри 7–9 класів. Це, наприклад, функції $y = x^1 = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. При довільному α графіки і властивості функції $y = x^{\alpha}$ аналогічні відомим вам графікам і властивостям указаних функцій. Графіки та основні властивості степеневих функцій наведено в табл. 10.

Із обґрунтуванням відповідних властивостей степеневих функцій можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x-3)^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

Розв'язання

1) ► $x - 3 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant 3$, отже, $D(y) = [3; +\infty)$ ■

2) ► $x + 1 > 0$, тобто $x > -1$, отже, $D(y) = (-1; +\infty)$ ■

Коментар

Ураховуємо, що вираз $a^{\frac{1}{3}}$ означений при $a \geqslant 0$, а вираз $a^{-\frac{1}{2}}$ — тільки при $a > 0$.

Корисно знати

Розв'язуючи прикладну задачу математичними методами, спочатку створюють її математичну модель. *Математична модель* — це система математичних співвідношень, яка наближено в абстрактній формі описує досліджуваний об'єкт, процес або явище. *Модель* — від франц. *modele* — копія, зразок.

Приклад 2. Побудуйте графік функції:

$$1)\ y=x^5+1; \qquad 2)\ y=(x+2)^{\frac{1}{3}}.$$

Розв'язання

1) ▶ Будуємо графік $y=x^5$ (рис. 5.1, *а*), а потім паралельно переносимо його вздовж осі Oy на $+1$ (рис. 5.1, *б*). ■

2) ▶ Будуємо графік $y=x^{\frac{1}{3}}$ (рис. 5.2, *а*), а потім паралельно переносимо його вздовж осі Ox на -2 (рис. 5.2, *б*). ■

Коментар

Графіки заданих функцій можна отримати із графіків функцій:

1) $y=x^5$, 2) $y=x^{\frac{1}{3}}$ за допомогою паралельного перенесення:

1) на +1 уздовж осі Oy;

2) на –2 вздовж осі Ox.

Рис. 5.1

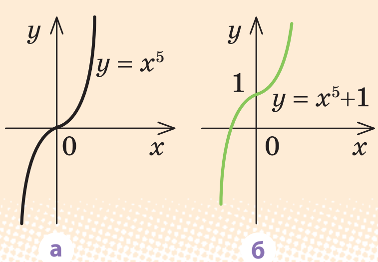
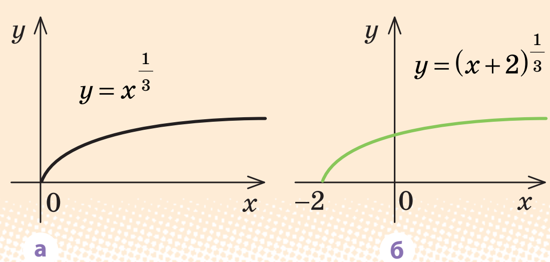


Рис. 5.2



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Користуючись графіком відповідної функції, охарактеризуйте властивості функції $y=x^{\alpha}$, якщо:
   1) α — парне натуральне число;
   2) α — непарне натуральне число;
   3) α — непарне від'ємне число;
   4) α — парне від'ємне число;
   5) α — неціле від'ємне число;
   6) α — неціле додатне число.

2*. Обґрунтуйте властивості степеневої функції в кожному з випадків, указаних у завданні 1.

ВПРАВИ

5.1. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y=x^7$; 3°) $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$; 5) $y=(x^2-x)^{\frac{5}{3}}$;

2°) $y=x^{-3}$; 4°) $y=x^{-\frac{2}{7}}$; 6) $y=(x^2-x+1)^{-\frac{9}{2}}$.

5.2. Побудуйте графік функції:

1°) $y=x^4$; 5) $y=x^{\frac{1}{4}}$; 8*) $y=x^{\frac{1}{5}}-3$;

2°) $y=x^7$; 6) $y=x^{\frac{5}{4}}$; 9*) $y=|x|^{\frac{1}{3}}$;

3) $y=x^{-3}$; 7) $y=(x+1)^4$; 10*) $y=|x^5-1|$.

4) $y=x^{-4}$;

5.3. Побудуйте і порівняйте графіки функцій:

1) $y=\sqrt[3]{x}$ і $y=x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=\sqrt[4]{x}$ і $y=x^{\frac{1}{4}}$.

5.4. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^{\frac{1}{2}}=6-x$; 3) $x^{\frac{5}{2}}=2-x$;

2) $x^{-\frac{1}{3}}=x^2$; 4) $x^{-\frac{1}{4}}=2x-1$.

Перевірте підстановкою, що значення x дійсно є коренем рівняння.

5.5*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 4, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

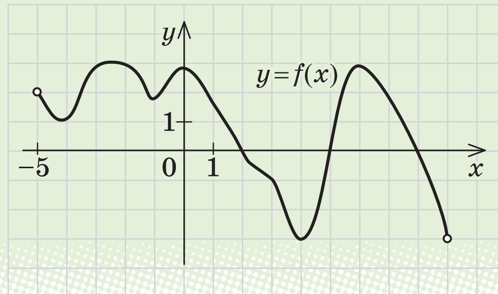
Виявіть свою компетентність

5.6. Висловіть свою думку з приводу того, представникам яких із наведених професій може стати у пригоді знання теми «Степенева функція, її властивості та графік»: інженер-консультант з альтернативної енергетики, інженер з утилізації, аналітик природних катаклізмів, медичний консультант з активного і здорового способу життя, проектувальник індивідуальної фінансової траєкторії.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тест № 1

1. Знайдіть область визначення функції, графік якої зображено на рисунку.



А $(-3; 3)$ В $(-5; 9)$

Б $[-3; 3]$ Г $[-5; 9]$

2. Знайдіть область значень функції, графік якої зображено на рисунку до завдання 1.

А $(-3; 3)$ Б $[-3; 3]$ В $(-5; 9)$ Г $[-5; 9]$

3. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

А $(-\infty; +\infty)$ Б $(-\infty; 1)\cup(1; +\infty)$ В $(-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$ Г $(-1; 1)$

4. Знайдіть область значень функції, заданої формулою $f(x)=x^2+1$.

А $(-\infty; +\infty)$ Б $(-\infty; 1]$ В $[1; +\infty)$ Г $[0; +\infty)$

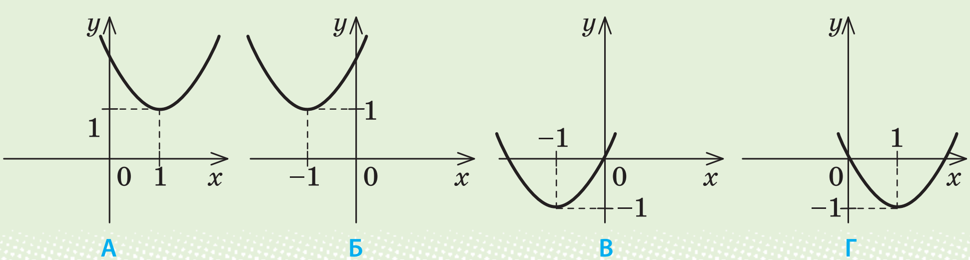
5. Укажіть кількість коренів рівняння $(x^2-25)\sqrt{x-4}=0$.

А 0 Б 1 В 2 Г 3

6. Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt[3]{64}+\sqrt[4]{81}\right)\cdot\sqrt[5]{32}$.

А 7 Б 14 В 28 Г 34

7. Укажіть рисунок, на якому зображено графік функції $y=(x-1)^2+1$.



8. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

А $\frac{16}{81}$ **Б** $\frac{3}{2}$ **В** $\frac{4}{9}$ **Г** $\frac{9}{4}$

9. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (запишіть розв’язання).

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Навчальний проект

ФУНКЦІЇ НАВКОЛО НАС

Для виконання проекту учні класу об’єднуються в декілька груп: «історики», «архітектори і дизайнери», «теоретики», «фахівці з ІТ-технологій» тощо. Кожний учень може взяти участь у роботі однієї або двох проектних груп.

«*Історики*» вивчають виникнення та використання поняття функції, готують коротке повідомлення чи презентацію з конкретними означеннями і відомостями про їх авторів та цитатами про функції та їхні властивості. Наприклад, таке: «*Немає жодної галузі людського знання, куди не входили б поняття про функції та їх графічне зображення*» (*К. Ф. Лебединцев*).

«*Архітектори і дизайнери*» з’ясовують, де і як саме використовують елементи графіків функцій у художньо-технічному проектуванні в архітектурі, оздобленні одягу тощо, наводять приклади таких функцій.

«*Фахівці з ІТ-технологій*» демонструють, як за допомогою пакетів математичних програм можна будувати графіки складних функцій, вивчати їхні властивості й розв’язувати рівняння, нерівності та їх системи. Наприклад, будують графіки функцій за допомогою програм Excel, GRAN чи GeoGebra.

«*Теоретики*» вивчають такі властивості функції, які не розглядаються у шкільному курсі. Наприклад, узагальнене поняття функції як відповідності між елементами множин; функції цілої і дробової частин числа; гіперболічні функції та формули, пов’язані з ними, тощо.

Теми навчальних проектів

1. Фінансова математика.
2. Застосування симетрії під час розв’язування алгебраїчних задач.
3. Побудова ліній у полярній системі координат.

Розділ 2

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

§ 6. Радіанне вимірювання кутів.

§ 7. Тригонометричні функції кута і числового аргумента.

§ 8. Властивості тригонометричних функцій.

§ 9. Графіки функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса та їх властивості.

§ 10. Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргумента.

§ 11. Формули додавання та їх наслідки.

§ 12. Найпростіші тригонометричні рівняння.

У цьому розділі ви:

- ознайомитеся з тригонометричними функціями кута і числового аргумента та властивостями цих функцій;
- навчитеся будувати графіки тригонометричних функцій;
- дізнаєтеся про формули тригонометрії.
- навчитеся розв’язувати тригонометричні рівняння.

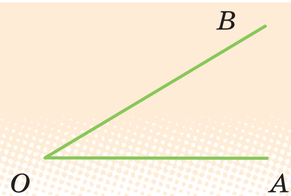
§ 6. РАДІАННЕ ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ

Таблиця 11

1. Поняття кута

У геометрії

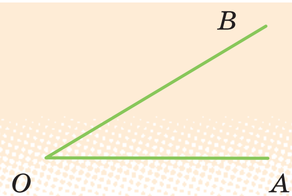
Кут — геометрична фігура, утворена двома променями, які виходять з однієї точки.



$\angle AOB$ утворений променями OA і OB

У тригонометрії*

Кут — фігура, утворена унаслідок повороту променя на площині навколо початкової точки.



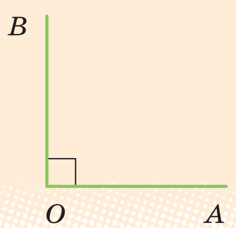
$\angle AOB$ утворений унаслідок повороту променя OA навколо точки O

2. Вимірювання кутів

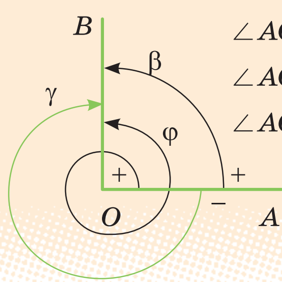
Градусна міра кута ($1^\circ = \dfrac{1}{180}$ частина розгорнутого кута)

Кожному куту ставиться у відповідність градусна міра $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$.

$\angle AOB = 90^\circ$



Кожному куту як фігурі ставиться у відповідність кут повороту, за допомогою якого утворено цей кут (проти годинникової стрілки — додатний, за годинниковою стрілкою — від'ємний). Кут повороту $\alpha \in (-\infty; +\infty)$.



$\angle AOB = \beta = 90^\circ$

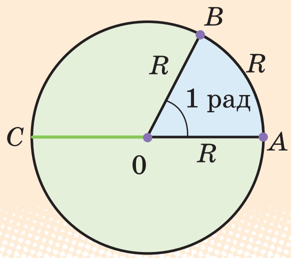
$\angle AOB = \gamma = -270^\circ$

$\angle AOB = \varphi = 90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$

---

* Походження та зміст терміна «тригонометрія» див. у «Відомостях з історії», наведених в інтернет-підтримці підручника.

Радіанна міра кута



1 *радіан* — центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.

$\angle AOB = 1$ рад. Це означає, що $\cup AB = OA = R$.

$\angle AOC = 180° = \pi$ (радіан).

$\angle AOC$ — розгорнутий.

1 радіан $= \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$; $1° = \dfrac{\pi}{180}$ радіан

Детальніше про поняття кута та вимірювання кутів можна дізнатися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Виразіть у радіанній мірі величини кутів: 30°; 45°; 60°; 90°; 270°; 360°.

Розв'язання

Оскільки 30° — це $\dfrac{1}{6}$ частина кута 180°, то з рівності $180° = \pi$ (рад) одержуємо, що $30° = \dfrac{\pi}{6}$ (рад).

Аналогічно можна обчислити й величини інших кутів.

У загальному випадку враховуємо, що $1° = \dfrac{\pi}{180}$ радіан, тоді:

$45° = \dfrac{\pi}{180} \cdot 45 = \dfrac{\pi}{4}$ (рад); $60° = \dfrac{\pi}{180} \cdot 6 = \dfrac{\pi}{3}$ (рад); $90° = \dfrac{\pi}{2}$ (рад); $270° = \dfrac{3\pi}{2}$ (рад); $360° = 2\pi$ (рад). ■

Ураховуючи, що радіанними мірами розглянутих кутів доводиться користуватися досить часто, запишемо одержані результати у вигляді довідкової таблиці (табл. 12).

Таблиця 12

Кут у градусах	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Кут у радіанах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Найчастіше у записі радіанної міри кутів назву одиниці виміру «радіан» (або скорочено рад) не пишуть. Наприклад, замість рівності $90° = \frac{\pi}{2}$ радіан пишуть $90° = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Виразіть у градусній мірі величини кутів: $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; 5.

Розв'язання

Оскільки $\frac{\pi}{10}$ — це $\frac{1}{10}$ частина кута π, то з рівності $\pi = 180°$ одержуємо, що $\frac{\pi}{10} = 18°$. Аналогічно можна обчислити і величини кутів $\frac{2\pi}{3}$ та $\frac{3\pi}{4}$. У загальному випадку враховуємо, що 1 радіан $= \frac{180°}{\pi}$, тоді $\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 120°$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 135°$; $5 = 5 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{900°}{\pi} \approx 286°$. ■

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, як можна означити кут за допомогою повороту променя. Як при такому означенні вимірюють кути?
2. Як ви розумієте такі твердження: «Величина кута дорівнює $450°$», «Величина кута дорівнює $-225°$»? Зобразіть ці кути.
3. Як можна означити кут в $1°$?
4. Дайте означення кута в 1 радіан.
5. Чому дорівнює градусна міра кута в n радіан?

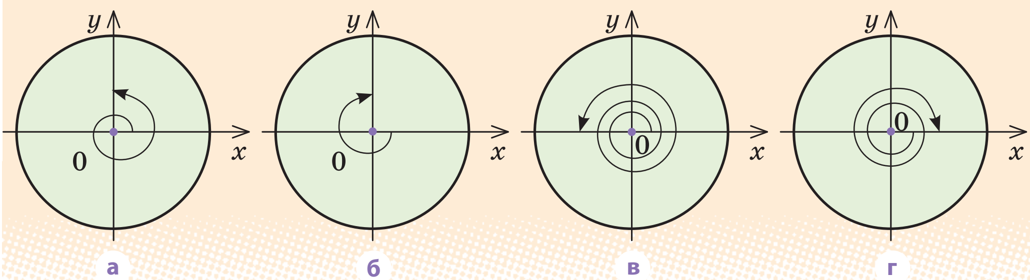
6. Поясніть на прикладах, як за радіанною мірою кута знайти його градусну міру і навпаки — за градусною мірою кута знайти його радіанну міру.

ВПРАВИ

6.1°. Зобразіть кут, утворений поворотом променя *OA* навколо точки *O* на:
1) 270°; 3) 720°; 5) 225°; 7) 540°; 9) 360°;
2) –270°; 4) –90°; 6) –45°; 8) –180°; 10) –60°.

6.2°. Чому дорівнюють кути повороту, показані на рис. 6.1?

Рис. 6.1



6.3. Виразіть у радіанній мірі величини кутів:
1°) 225°; 3) 100°; 5) –22,5°;
2°) 36°; 4) –240°; 6) –150°.

6.4. Виразіть у градусній мірі величини кутів:

1) 3π; 3) $\frac{-2\pi}{5}$; 5) $-\frac{\pi}{18}$; 7) $-\frac{\pi}{8}$;

2) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$; 6) $\frac{11\pi}{6}$; 8) 3.

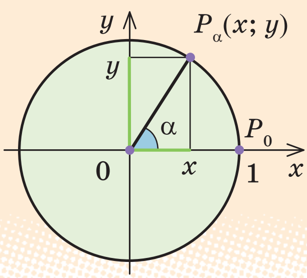
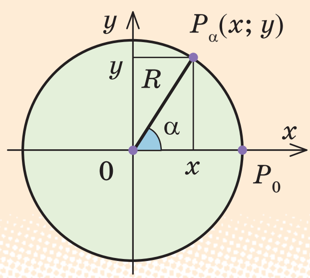
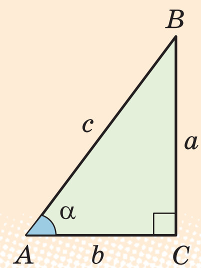
6.5. За допомогою калькулятора (або таблиць) знайдіть радіанні міри кутів:
1) 27°; 2) 132°; 3) 43°; 4) 114°.

6.6. За допомогою калькулятора (або таблиць) знайдіть градусні міри кутів:
1) 0,5585; 2) 0,8098; 3) 3,1416; 4) 4,4454.

§ 7. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ КУТА І ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Таблиця 13

1. Означення тригонометричних функцій

через одиничне коло $(R=1)$	через довільне коло (R — радіус кола)	через прямокутний трикутник (для гострих кутів)
		
$\sin\alpha = y$ — ордината точки P_α	$\sin\alpha = \frac{y}{R}$	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$
$\cos\alpha = x$ — абсциса точки P_α	$\cos\alpha = \frac{x}{R}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$
$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

2. Тригонометричні функції числового аргумента

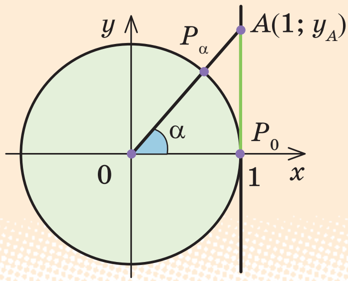
sin (числа α) = sin (кута в α радіан)

cos (числа α) = cos (кута в α радіан)

tg (числа α) = tg (кута в α радіан)

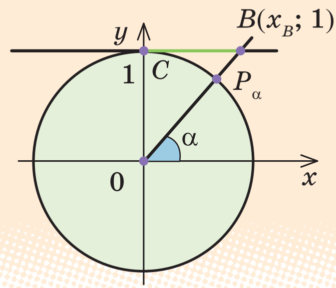
ctg (числа α) = ctg (кута в α радіан)

3. Лінії тангенсів і котангенсів



AP_0 — лінія тангенсів $(AP_0 \parallel Oy)$

$\text{tg}\,\alpha = y_A$ — ордината відповідної точки лінії тангенсів



CB — лінія котангенсів $(CB \parallel Ox)$

$\text{ctg}\,\alpha = x_B$ — абсциса відповідної точки лінії котангенсів

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Означення тригонометричних функцій

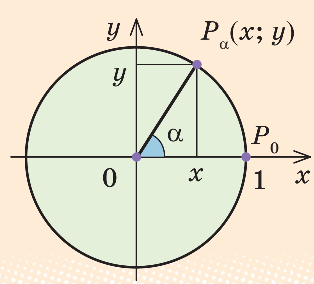
Із курсу геометрії вам відомі означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику та означення тригонометричних функцій кутів від $0°$ до $180°$ через коло радіуса R з центром у початку координат (див. табл. 13). Аналогічно можна дати означення тригонометричних функцій довільного кута, але для спрощення означень найчастіше вибирають радіус відповідного кола таким, що дорівнює 1 (з більш детальними відповідними поясненнями можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника).

Коло радіуса 1 із центром у початку координат будемо називати одиничним колом.

Нехай при повороті на кут α точка $P_0(1; 0)$ переходить у точку $P_\alpha(x; y)$ (тобто при повороті на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α) (рис. 7.1).

Нагадаємо, що при $\alpha > 0$ радіус OP_0 повертають проти годинникової стрілки, а при $\alpha < 0$ — за нею.

Рис. 7.1



Означення 1. ***Синусом кута*** α **називається ордината точки** $P_\alpha(x; y)$ **одиничного кола:**

$$\sin\alpha = y.$$

Означення 2. ***Косинусом кута*** α **називається абсциса точки** $P_\alpha(x; y)$ **одиничного кола:**

$$\cos\alpha = x.$$

Означення 3. ***Тангенсом кута*** α **називається відношення ординати точки** $P_\alpha(x; y)$ **одиничного кола до її абсциси, тобто відношення** $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$**.**

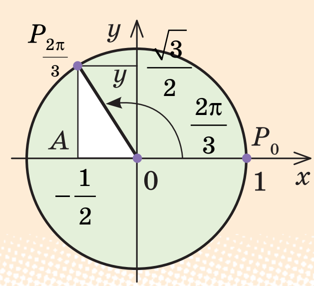
Отже, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ **(де** $\cos\alpha \neq 0$**).**

Означення 4. ***Котангенсом кута*** α **називається відношення абсциси точки** $P_\alpha(x; y)$ **одиничного кола до її ординати, тобто відношення** $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Отже, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ **(де** $\sin\alpha \neq 0$**).**

Приклад. Користуючись цими означеннями, знайдемо синус, косинус, тангенс і котангенс кута $\frac{2\pi}{3}$ радіан.

Рис. 7.2



Розглянемо одиничне коло (рис. 7.2). Унаслідок повороту на кут $\frac{2\pi}{3}$ радіус OP_0 переходить у радіус $OP_{\frac{2\pi}{3}}$ (а точка P_0 переходить у точку $P_{\frac{2\pi}{3}}$). Координати точки $P_{\frac{2\pi}{3}}$ можна знайти, використовуючи властивості прямокутного трикутника $OAP_{\frac{2\pi}{3}}$ (з кутами $60°$ і $30°$ та гіпотенузою 1): $x = -OA = -\frac{1}{2}$; $y = AP_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді: $\sin\frac{2\pi}{3} = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{2\pi}{3} = x = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Аналогічно знаходять значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів, указаних у верхньому рядку табл. 14.

Зазначимо, що таким чином можна знайти тригонометричні функції тільки деяких кутів. Тригонометричні функції довільного кута зазвичай знаходять за допомогою калькулятора або таблиць.

Таблиця 14

α									
α	**градуси**	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
	радіани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$		не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0	не існує

2. Тригонометричні функції числового аргумента

Уведені означення дозволяють розглядати не тільки тригонометричні функції кутів, а й тригонометричні функції числових аргументів, якщо розглядати тригонометричні функції числа α як відповідні тригонометричні функції кута в α радіан. Таким чином:

синус числа α — це синус кута в α радіан;

косинус числа α — це косинус кута в α радіан.

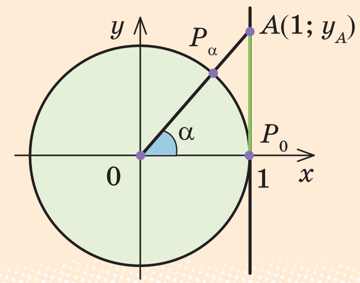
Наприклад, $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\text{ рад}\right) = \sin 30° = \frac{1}{2}$ (див. також п. 2 табл. 13).

3. Лінії тангенсів і котангенсів

Для розв'язування деяких задач корисно мати уявлення про лінії тангенсів і котангенсів.

Проведемо через точку P_0 одиничного кола пряму AP_0, паралельну осі Oy (рис. 7.3). Цю пряму називають *лінією тангенсів*.

Рис. 7.3



Нехай α — довільне число (чи кут), для якого $\cos\alpha \neq 0$. Тоді точка P_α не лежить на осі Oy і пряма OP_α перетинає лінію тангенсів у точці A.

Оскільки пряма OP_α проходить через початок координат, то її рівняння $y = kx$. Але ця пряма проходить через точку P_α з координатами $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, отже, координати точки P_α задовольняють рівняння прямої $y = kx$, тобто $\sin\alpha = k\cos\alpha$. Звідси

$$k = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

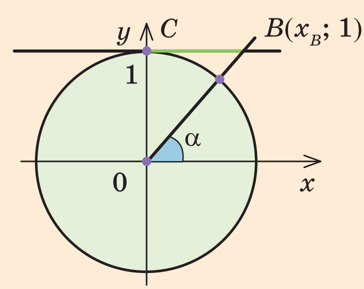
Таким чином, рівняння прямої OP_α таке: $y = (\operatorname{tg}\alpha)x$.

Рівняння прямої AP_0 $x = 1$. Щоб знайти ординату точки A, достатньо в рівняння прямої OP_α підставити $x = 1$. Одержуємо $y_A = \operatorname{tg}\alpha$.

Отже, ***тангенс кута (числа)*** α ***— це ордината відповідної точки на лінії тангенсів.***

Аналогічно вводять і поняття *лінії котангенсів*: це пряма CB, що проходить через точку $C(0;1)$ одиничного кола паралельно осі Ox (рис. 7.4).

Рис. 7.4



Якщо α — довільне число (чи кут), для якого $\sin\alpha \neq 0$ (тобто точка P_α не лежить на осі Ox), то пряма OP_α перетинає лінію котангенсів у деякій точці $B(x_B;1)$.

Аналогічно попередньому обґрунтовують, що $x_B = \operatorname{ctg}\alpha$. Отже, ***котангенс кута (числа)*** α ***— це абсциса відповідної точки на лінії котангенсів.***

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику.
2. Сформулюйте означення тригонометричних функцій довільного кута: 1) використовуючи коло радіуса R із центром у початку координат; 2) використовуючи одиничне коло.
3. Що мають на увазі, коли говорять про синус, косинус, тангенс і котангенс числа α?

ВПРАВИ

7.1°. Побудуйте на одиничному колі точку P_α, у яку переходить точка $P_0(1;0)$ одиничного кола унаслідок повороту на кут α. У якій координатній чверті розташована точка P_α у завданнях 3–6?

1) $\alpha = 3\pi$; 3) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$;

2) $\alpha = -4\pi$; 4) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 6) $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

7.2. Знайдіть значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ (якщо вони існують) при:

1) $\alpha = 3\pi$; 3) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; 5*) $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$;

2) $\alpha = -4\pi$; 4) $\alpha = \frac{5\pi}{2}$; 6*) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

7.3°. Користуючись означенням синуса і косинуса, за допомогою одиничного кола вкажіть знаки $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо:

1) $\alpha = \frac{6\pi}{5}$; 2) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; 4) $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.

7.4*. Користуючись лінією тангенсів, укажіть знак $\operatorname{tg}\alpha$, якщо:

1) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = \frac{11\pi}{6}$; 4) $\alpha = -\frac{7\pi}{6}$.

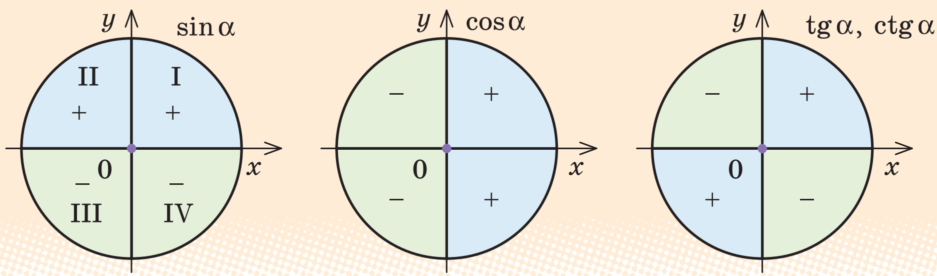
7.5*. Користуючись лінією котангенсів, укажіть знак $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо:

1) $\alpha = -\frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha = -\frac{11\pi}{6}$; 4) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

§ 8. ВЛАСТИВОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Таблиця 15

1. Знаки тригонометричних функцій



2. Парність і непарність

Косинус — парна функція:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Синус, тангенс і котангенс — непарні функції:

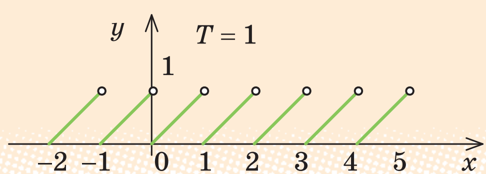
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

3. Періодичність

Функція $f(x)$ називається *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого *x* з області визначення функції числа $(x+T)$ і $(x-T)$ також належать області визначення і виконується рівність

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

$y = \{x\}$ — дробова частина числа x



Через проміжки довжиною T (на осі Ox) вигляд графіка періодичної функції повторюється

Якщо T — період функції, то $\pm T$, $\pm 2T$, $\pm 3T$, ..., $\pm kT$ — також періоди цієї функції $(k \in \boldsymbol{Z})$

$\sin(x+2\pi)=\sin x$; $\cos(x+2\pi)=\cos x$ Функції $\sin x$ і $\cos x$ мають період $T=2\pi$	$T=2\pi$ — спільний період для всіх функцій: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x$ Функцій $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ мають період $T=\pi$	

Спираючись на означення тригонометричних функцій, легко обґрунтувати властивості тригонометричних функцій, наведених в табл. 15 (з відповідними обґрунтуваннями можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Користуючись періодичністю, парністю і непарністю тригонометричних функцій, знайдіть:

1) $\sin\frac{21\pi}{2}$; 2) $\cos(-405°)$; 3) $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}$.

Розв'язання

1) $\sin\frac{21\pi}{2}=\sin\left(10\pi+\frac{\pi}{2}\right)=$
$=\sin\left(5\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$

2) $\cos(-405°)=\cos 405°=$
$=\cos(360°+45°)=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

3) $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(5\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$

Коментар

1) Ураховуючи, що значення функції $\sin x$ повторюються через період 2π, виділимо в заданому аргументі число, кратне періоду (тобто 10π), а потім скористаємося рівністю $\sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha$ $(k\in \boldsymbol{Z})$.

2) Спочатку враховуємо парність косинуса: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, а потім його періодичність із періодом $2\pi=360°$: $\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha$.

3) Функція тангенс періодична з періодом π, тому виділяємо в заданому аргументі число, кратне періоду (тобто 5π), а потім використовуємо рівність $\operatorname{tg}(\alpha+\pi k)=\operatorname{tg}\alpha$.

Приклад 2*. Доведіть твердження: **якщо функція $y=f(x)$ періодична з періодом T, то функція $y=Af(kx+b)$ також періодична з періодом $\frac{T}{|k|}$** (A, k, b — деякі числа і $k\neq 0$).

Із доведенням цього твердження можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Використаємо твердження, доведене в прикладі 2, для знаходження періодів функцій.

Наприклад,

1) якщо функція $\sin x$ має період $T=2\pi$, то функція $\sin 4x$ має період $T_1=\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$;

2) якщо функція $\operatorname{tg} x$ має період $T=\pi$, то функція $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ має період $T_1=\frac{T}{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. 1) Назвіть знаки тригонометричних функцій у кожній із координатних чвертей.
   2*) Обґрунтуйте знаки тригонометричних функцій у кожній із координатних чвертей.
2. Які з тригонометричних функцій є парними, а які — непарними? Наведіть приклади використання парності і непарності для обчислення значень тригонометричних функцій.
3. Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади. Укажіть найменший додатний період для синуса, косинуса, тангенса і котангенса.
4. Поясніть, як знайти періоди функцій $\sin(kx)$, $\cos(kx)$, $\operatorname{tg}(kx)$, $\operatorname{ctg}(kx)$.

ВПРАВИ

8.1. Користуючись періодичністю, парністю і непарністю тригонометричної функції, знайдіть:

1) $\cos\frac{19\pi}{3}$;
2) $\sin(-750°)$;
3) $\mathrm{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$;
4) $\mathrm{ctg}\,945°$;
5) $\sin\frac{25\pi}{4}$;
6) $\cos(-3630°)$;
7) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$;
8) $\mathrm{tg}\,600°$.

8.2*. Серед заданих функцій знайдіть періодичні й укажіть найменший додатний період для кожної з них:

1) $f(x)=x^2$;
2) $f(x)=\sin 2x$;
3) $f(x)=|x|$;
4) $f(x)=\mathrm{tg}\,3x$;
5) $f(x)=3$.

8.3. Знайдіть найменший додатний період кожної із заданих функцій:

1) $y=\cos 2x$;
2) $y=\mathrm{tg}\,5x$;
3) $y=\sin\frac{x}{3}$;
4) $y=\mathrm{ctg}\,3x$;
5) $y=\cos\frac{2x}{5}$.

8.4. На кожному з рисунків 8.1–8.4 наведено частину графіка деякої періодичної функції з періодом T. Продовжте графік на відрізок $[-2T; 3T]$.

Виявіть свою компетентність

8.5. Як, на вашу думку, періодичність функцій пов'язана з професійною діяльністю лікаря-кардіолога?

Рис. 8.1

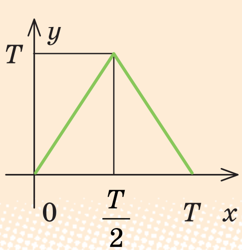


Рис. 8.2

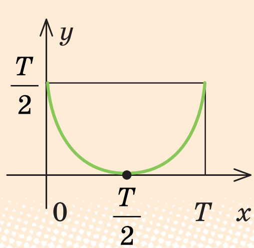


Рис. 8.3

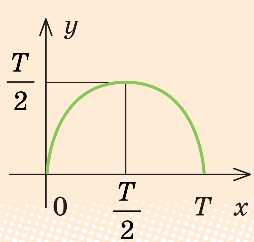
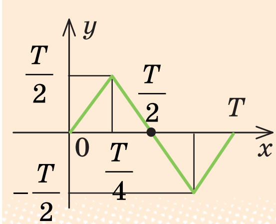


Рис. 8.4

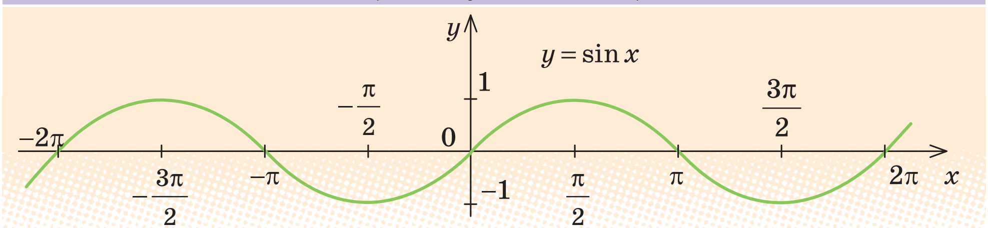


§ 9. ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА І КОТАНГЕНСА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

9.1. Графік функції $y = \sin x$ та її властивості

Таблиця 16

Графік функції $y = \sin x$ (синусоїда)



Властивості функції $y = \sin x$

1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x — будь-яке дійсне число). $\boxed{D(\sin x) = \boldsymbol{R}}$

2. *Область значень*: $y \in [-1; 1]$. $\boxed{E(\sin x) = [-1; 1]}$

3. Функція **непарна**: $\sin(-x) = -\sin x$ (графік симетричний відносно початку координат).

4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = 2\pi}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:
   $\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7. *Проміжки зростання і спадання*:
   функція $\sin x$ **зростає на кожному з проміжків** $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$,
   і **спадає на кожному з проміжків** $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8. **Найбільше значення** функції дорівнює 1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
   Найменше значення функції дорівнює –1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Характеризуючи властивості тригонометричних функцій, ми будемо виділяти такі їх характеристики:

1) область визначення;
2) область значень;
3) парність чи непарність;
4) періодичність;
5) точки перетину з осями координат;
6) проміжки знакосталості;
7) проміжки зростання і спадання;
8) найбільше і найменше значення функції.

Абсциси точок перетину графіка функції з віссю Ox (тобто ті значення аргумента, при яких функція дорівнює нулю) називають *нулями функції*.

Нагадаємо, що значення синуса — це ордината відповідної точки одиничного кола (рис. 9.1.1). Оскільки ординату можна знайти для будь-якої точки одиничного кола, то область визначення функції $y=\sin x$ — усі дійсні числа. Це можна записати так: $D(\sin x)=R$.

Для точок одиничного кола ординати набувають усіх значень від -1 до 1, отже, область значень функції $y=\sin x$: $y\in[-1;1]$. Це можна записати так:

$$E(\sin x)=[-1;1].$$

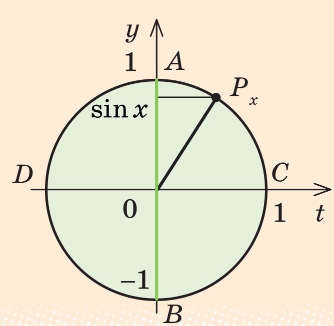
Як бачимо, *найбільше значення функції* $\sin x$ дорівнює одиниці. Цього значення функція досягає тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка A, тобто при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

Найменше значення функції $\sin x$ дорівнює мінус одиниці, якого вона досягає тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка B, тобто при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

Як було показано в § 8, синус — *непарна функція*: $\sin(-x)=-\sin x$, отже, її графік симетричний відносно початку координат.

У § 8 було обґрунтовано також, що синус — *періодична* функція з найменшим додатним періодом $T=2\pi$: $\sin(x+2\pi)=\sin x$,

Рис. 9.1.1



отже, через проміжки довжиною 2π вигляд графіка функції $\sin x$ повторюється. Тому для того щоб побудувати графік цієї функції, достатньо побудувати її графік на будь-якому проміжку довжиною 2π, а потім одержану лінію паралельно перенести праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстані $kT = 2\pi k$, де k — будь-яке натуральне число.

Щоб знайти *точки перетину графіка функції з осями координат*, згадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Тоді відповідне значення $y = \sin 0 = 0$, тобто графік функції $y = \sin x$ проходить через початок координат.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x, при яких $\sin x$, тобто ордината відповідної точки одиничного кола, дорівнюватиме нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола буде точка C або D (рис. 9.1.1), тобто при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості. Як було обґрунтовано в § 8, значення функції синус додатні (тобто ордината відповідної точки одиничного кола додатна) у I і II координатних чвертях (рис. 9.1.2). Отже, $\sin x > 0$ при $x \in (0; \pi)$, а також, ураховуючи період, при всіх $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Значення функції синус від'ємні (тобто ордината відповідної точки одиничного кола від'ємна) у III і IV чвертях, отже, $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки зростання і спадання

▸ Ураховуючи періодичність функції $\sin x$ з періодом $T = 2\pi$, достатньо дослідити її на зростання і спадання на будь-якому проміжку довжиною 2π, наприклад на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 9.1.3, *а*), то при збільшенні аргумента x $(x_2 > x_1)$ ордината відповідної точки одиничного кола збільшується

Рис. 9.1.2

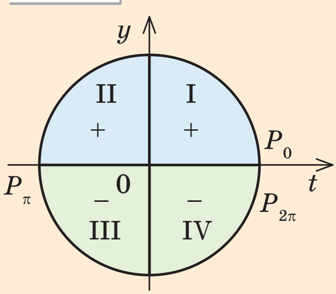
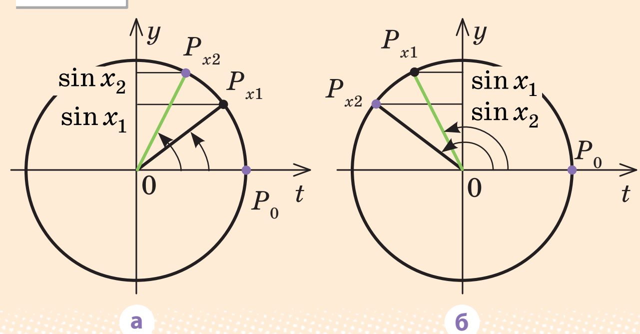


Рис. 9.1.3

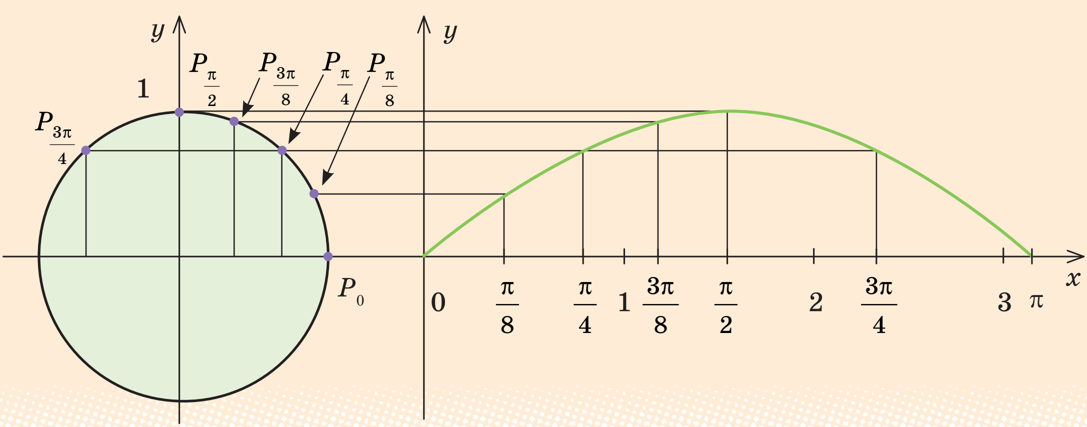


(тобто $\sin x_2 > \sin x_1$, отже, у цьому проміжку функція $\sin x$ зростає. Ураховуючи періодичність, робимо висновок, що вона також зростає в кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Якщо $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис. 9.1.3, *б*), то при збільшенні аргумента x $(x_2 > x_1)$ ордината відповідної точки одиничного кола зменшується (тобто $\sin x_2 < \sin x_1$), отже, у цьому проміжку функція $\sin x$ спадає. Ураховуючи періодичність, робимо висновок, що вона також спадає в кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ■

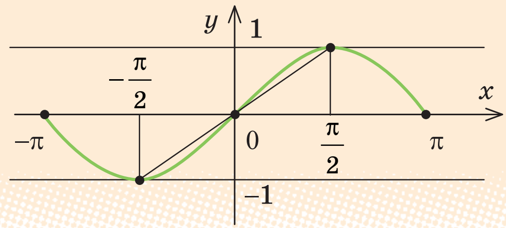
Проведене дослідження дозволяє обґрунтовано побудувати графік функції $y = \sin x$. Ураховуючи періодичність цієї функції (з періодом 2π), достатньо спочатку побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною 2π, наприклад на проміжку $[-\pi; \pi]$. Для більш точної побудови точок графіка користуємося тим, що значення синуса — це ордината відповідної точки одиничного кола. На рис. 9.1.4 показано побудову графіка функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$ (в інтернет-підтримці підручника наведено динамічну ілюстрацію відповідної побудови). Ураховуючи непарність функції $\sin x$ (її графік симетричний відносно початку координат), для того щоб побудувати графік на проміжку $[-\pi; 0]$, відображуємо одержану криву симетрично відносно початку координат (рис. 9.1.5).

Рис. 9.1.4



Оскільки ми побудували графік на проміжку завдовжки 2π, то, ураховуючи періодичність синуса (з періодом 2π), повторюємо вигляд графіка на кожному проміжку завдовжки 2π (тобто переносимо паралельно графік уздовж осі Ox на $2\pi k$, де k — ціле число). Одержуємо графік, наведений на рис. 9.1.6, який називають *синусоїдою*.

Рис. 9.1.5



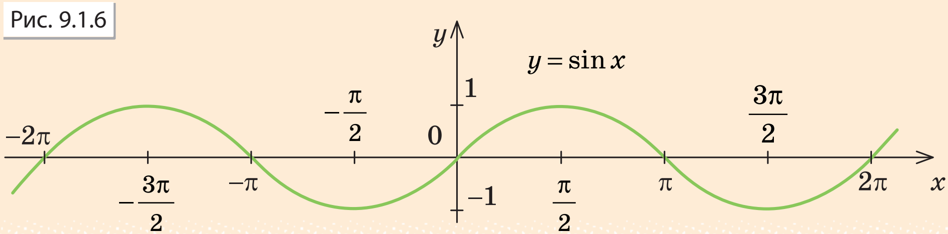
Тригонометричні функції широко застосовують у математиці, фізиці та техніці. Наприклад, багато процесів, таких як коливання струни, маятника, напруги в колі змінного струму тощо, описуються функцією, яку задають формулою $y = A\sin(\omega x + \varphi)$. Такі процеси називають *гармонічними коливаннями*.

Наведіть інші приклади реальних процесів, які, на вашу думку, можуть бути описані тригонометричними функціями.

Графік функції $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ можна одержати із синусоїди $y = \sin x$ стискуванням або розтягуванням її вздовж координатних осей і паралельним перенесенням уздовж осі Ox. Найчастіше гармонічне коливання є функцією часу t. Тоді його задають формулою $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, де A — амплітуда коливання, ω — кутова частота, φ — початкова фаза, $\frac{2\pi}{\omega}$ — період коливання (якщо $A > 0$, $\omega > 0$, $\varphi \geqslant 0$).

Із обґрунтуванням властивостей інших тригонометричних функцій (див. табл. 17–19) можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника).

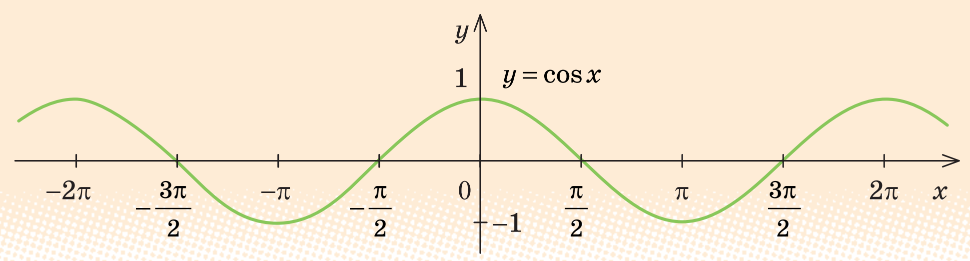
Рис. 9.1.6



9.2. Графік функції $y = \cos x$ та її властивості

Таблиця 17

Графік функції $y = \cos x$ (косинусоїда)



Властивості функції $y = \cos x$

1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$ (x — будь-яке дійсне число).

$$\boxed{D(\cos x) = \boldsymbol{R}}$$

2. *Область значень*: $y \in [-1; 1]$. $\boxed{E = (\cos x) = [-1; 1]}$

3. *Функція* ***парна***: $\cos(-x) = \cos x$ (графік симетричний відносно осі Oy).

4. *Функція періодична з періодом* $\boxed{T = 2\pi}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:

$$\cos x > 0 \text{ **при** } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$\cos x < 0 \text{ **при** } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

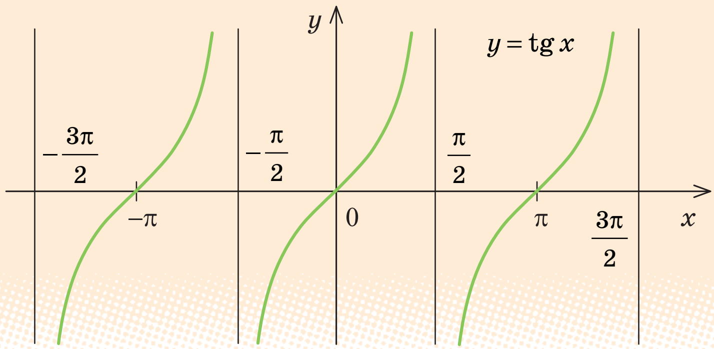
7. *Проміжки зростання і спадання*:
   функція $\cos x$ **зростає на кожному з проміжків** $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$,
   і **спадає на кожному з проміжків** $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$

8. **Найбільше значення** функції дорівнює 1 при $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
   Найменше значення функції дорівнює –1 при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$

9.3. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ та її властивості

Таблиця 18

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ (тангенсоїда)



Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$

1. *Область визначення*:

$$D(\operatorname{tg} x):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. *Область значень*: $y \in \boldsymbol{R}$. $\boxed{E(\operatorname{tg} x) = \boldsymbol{R}}$.
3. *Функція* ***непарна***: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (*графік симетричний відносно початку координат*).
4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = \pi}$: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.
5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k, k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}}$
6. *Проміжки знакосталості*:

$$\operatorname{tg} x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z};$$

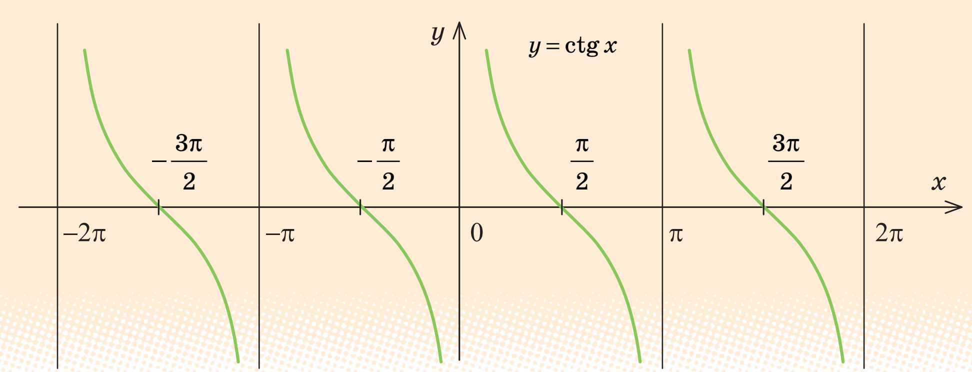
$$\operatorname{tg} x < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

7. *Проміжки зростання і спадання*:
функція $\operatorname{tg} x$ **зростає на кожному з проміжків своєї області визначення**, тобто на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
8. ***Найбільшого і найменшого значень функція не має.***

9.4. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ та її властивості

Таблиця 19

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоїда)



Властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$

1. *Область визначення*:

$$D(\operatorname{ctg} x):\ x \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. *Область значень*: $y \in R$. $\boxed{E(\operatorname{ctg} x) = \boldsymbol{R}}$.
3. *Функція* ***непарна***: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ *(графік симетричний відносно початку координат)*.
4. *Функція періодична з періодом* $\boxed{T = \pi}$: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$.
5. *Точки перетину з осями координат*: Oy **немає**, Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}}$
6. *Проміжки знакосталості*:

$$\operatorname{ctg} x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$\operatorname{ctg} x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

7. *Проміжки зростання і спадання:*
   функція $\operatorname{ctg} x$ **спадає на кожному з проміжків** своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
8. ***Найбільшого і найменшого значень функція не має.***

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Побудуйте графік функції та вкажіть нулі функції і проміжки знакосталості функції:

1) $y = 2\sin x$; 2) $y = \sin 2x$.

Коментар

Графіки всіх заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $f(x) = \sin x$. Отже, графіком кожної із цих функцій буде синусоїда, одержана:

1) $y = 2\sin x = 2f(x)$ розтягуванням графіка $y = \sin x$ удвічі вздовж осі Oy;
2) $y = \sin 2x = f(2x)$ стискуванням графіка $y = \sin x$ удвічі вздовж осі Ox.

Нулі функції — це абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.

Щоб записати проміжки знакосталості функції, зазначимо, що функція $y = 2\sin x$ періодична з періодом $T = 2\pi$, а функція $y = \sin 2x$ періодична з періодом $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Тому для кожної функції достатньо з'ясувати на одному періоді, де значення функції додатні (графік розташований вище осі Ox) і де від'ємні (графік розташований нижче осі Ox), а потім одержані проміжки повторити через період.

Розв'язання

1) Графік функції $y = 2\sin x$ одержуємо із графіка функції $y = \sin x$ розтягуванням його вдвічі вздовж осі Oy (рис. 9.4.1).

Нулі функції: $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Проміжки знакосталості:

$2\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$;

$2\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$. ■

Рис. 9.4.1

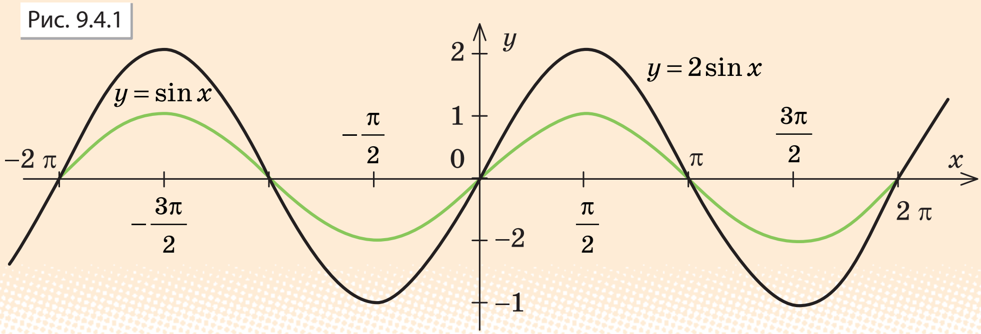
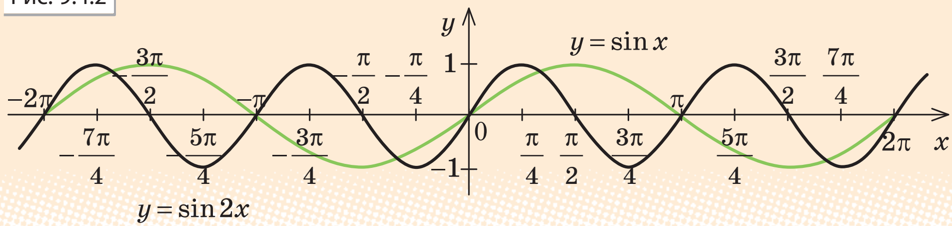


Рис. 9.4.2



2) **Графік функції $y=\sin 2x$ одержуємо із графіка функції $y=\sin x$ стискуванням його вдвічі вздовж осі Ox (рис. 9.4.2).**

Нулі функції: $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості:

$\sin 2x>0$ при $x\in\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$; $\sin 2x<0$ при $x\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi;\ \pi+\pi k\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$. ■

Приклад 2. Розташуйте в порядку зростання числа: $\sin 1{,}9$; $\sin 3$; $\sin(-1)$; $\sin(-1{,}5)$.

Коментар

Для того щоб розмістити задані числа в порядку їх зростання, з'ясуємо, які з них додатні, а які — від'ємні, а потім порівняємо між собою окремо додатні числа і окремо від'ємні, користуючись відомими проміжками зростання і спадання функції $\sin x$.

Розв'язання

Числа $\sin 1{,}9$ і $\sin 3$ додатні (точки $P_{1,9}$ і P_3 розташовані в II чверті), а числа $\sin(-1)$ і $\sin(-1{,}5)$ від'ємні (P_{-1} і $P_{-1,5}$ розташовані в IV чверті).

Ураховуючи, що $\frac{\pi}{2}<1{,}9<\pi$, $\frac{\pi}{2}<3<\pi$ і що функція $\sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, з нерівності $1{,}9<3$ одержуємо $\sin 1{,}9>\sin 3$.

Також $-\frac{\pi}{2}<-1<0$, $-\frac{\pi}{2}<-1{,}5<0$. Функція $\sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$ зростає.

Ураховуючи, що $-1>-1{,}5$, одержуємо $\sin(-1)>\sin(-1{,}5)$. Отже, у порядку зростання ці числа розташовуються так: $\sin(-1{,}5)$; $\sin(-1)$; $\sin 3$; $\sin 1{,}9$. ■

Для порівняння заданих чисел можна також зобразити точки $P_{1,9}$, P_3, P_{-1}, $P_{-1,5}$ на одиничному колі й порівняти відповідні ординати (виконайте таке розв'язування самостійно).

Із прикладами побудови графіків більш складних тригонометричних функцій можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. 1) Побудуйте графік функції $y = \sin x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
   2*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \sin x$.
2. 1) Побудуйте графік функції $y = \cos x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
   2*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \cos x$.
3. 1) Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg} x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
   2*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \operatorname{tg} x$.
4. 1) Побудуйте графік функції $y = \operatorname{ctg} x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
   2*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \operatorname{ctg} x$.

ВПРАВИ

9.1. Користуючись властивостями функції $y = \sin x$, порівняйте числа:

1°) $\sin 100°$ і $\sin 130°$; 2) $\sin 1°$ і $\sin 1$; 3°) $\sin\frac{21\pi}{5}$ і $\sin\frac{12\pi}{5}$.

9.2. Користуючись властивостями функції $y = \cos x$, порівняйте числа:

1°) $\cos 10°$ і $\cos 40°$; 2) $\cos(-2)$ і $\cos(-3)$; 3) $\cos\frac{3\pi}{7}$ і $\cos\frac{6\pi}{7}$.

9.3. Користуючись властивостями функції $y = \operatorname{tg} x$, порівняйте числа:

1°) $\operatorname{tg} 15°$ і $\operatorname{tg} 140°$; 2°) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$ і $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{9}$; 3) $\operatorname{tg}(-1,2\pi)$ і $\operatorname{tg}(-0,1\pi)$.

9.4. Користуючись властивостями функції $y = \operatorname{ctg} x$, порівняйте числа:

1) $\operatorname{ctg} 3°$ і $\operatorname{ctg} 5°$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$ і $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{10}$; 3) $\operatorname{ctg}(-1)$ і $\operatorname{ctg}(-1{,}2)$.

9.5. Розташуйте числа в порядку їх зростання:

1) $\sin 3{,}3$, $\sin 3{,}9$, $\sin 1{,}2$;
2) $\cos 0{,}3$, $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}2$;
3) $\operatorname{tg} 0{,}7$, $\operatorname{tg}(-1{,}3)$, $\operatorname{tg} 1{,}5$;
4) $\operatorname{ctg} 0{,}5$, $\operatorname{ctg} 2{,}9$, $\operatorname{ctg} 1{,}1$.

У завданнях 9.6–9.9 побудуйте графік функції та вкажіть нулі функції, проміжки знакосталості та проміжки зростання і спадання функції.

9.6. 1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
2°) $y = \sin\frac{x}{3}$;
3) $y = \sin(-x)$;
4°) $y = -\sin x$;
5°) $y = 3\sin x$;
6) $y = -|\sin x|$;
7*) $y = \sin x + |\sin x|$.

9.7. 1) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;
2°) $y = \cos 3x$;
3) $y = \cos(-x)$;
4°) $y = -\cos x$;
5°) $y = 2\cos x$;
6) $y = |\cos x|$;
7*) $y = \cos x - |\cos x|$.

9.8. 1) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
2) $y = \operatorname{tg} 2x$;
3) $y = \operatorname{tg}(-x)$;
4) $y = \operatorname{tg}|x|$;
5) $y = |\operatorname{tg} x|$.

9.9. 1) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
2) $y = \operatorname{ctg}(-x)$;
3) $y = -\operatorname{ctg} x$;
4) $y = 3\operatorname{ctg} x$.

9.10. 1°) $y = \sin 3x$;
2°) $y = 3\sin x$;
3°) $y = \sin x + 1$;
4*) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

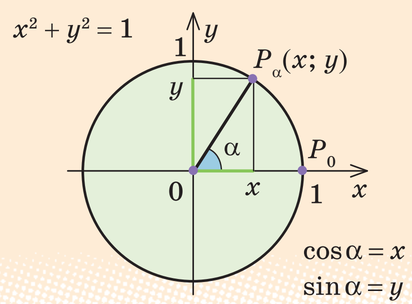
9.11. 1°) $y = \cos\frac{x}{2}$;
2°) $y = \cos x - 1$;
3) $y = \cos|x|$;
4*) $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

§ 10. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Таблиця 20

Основна тригонометрична тотожність

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$



$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

- На рисунку в табл. 20 зображене одиничне коло, тобто коло радіуса 1 з центром у початку координат. Рівняння цього кола: $x^2+y^2=1$.
  Нехай унаслідок повороту на кут α точка $P_0(1;0)$ одиничного кола переходить у точку $P_\alpha(x;y)$ (тобто унаслідок повороту на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α). Нагадаємо, що синусом α називають ординату точки $P_\alpha(x;y)$ одиничного кола, тобто $\sin\alpha=y$, а косинусом α — абсцису цієї точки, тобто $\cos\alpha=x$. Координати точки P_α задовольняють рівняння кола, тоді $x^2+y^2=1$, отже,

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \blacksquare$$

Це співвідношення називають *основною тригонометричною тотожністю*.

Нагадаємо також, що:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad(\text{де}\ \cos\alpha\neq 0);\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad(\sin\alpha\neq 0).$$

Тоді $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$, тобто

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1\quad(\sin\alpha\neq 0\ \text{ і }\ \cos\alpha\neq 0).$$

За допомогою цих співвідношень і основної тригонометричної тотожності одержуємо:

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

тобто

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad(\cos\alpha\neq 0).$$

Аналогічно отримуємо: $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, тобто

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\quad(\sin\alpha\neq 0).$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Знаючи значення однієї з тригонометричних функцій та інтервал, у якому міститься α, знайдіть значення інших трьох тригонометричних функцій:

1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $90°<\alpha<180°$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання

1) ▶ Із рівності $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ одержуємо: $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

Звідси $\cos^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$.

Оскільки $90°<\alpha<180°$, то $\cos\alpha<0$, а отже, $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$.

Коментар

1) Рівність $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ пов'язує $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу. Наприклад, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Тоді $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Ураховуючи, у якій чверті міститься α, ми можемо визначити знак, який потрібно взяти в правій частині

Тоді $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{3}{4}$. ■

2) ▶ Із рівності $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ отримуємо $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 3$. Підставляємо в рівність $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ значення $\operatorname{tg}\alpha$ і одержуємо $1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Звідси $\cos^2\alpha = \frac{9}{10}$. Оскільки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, тоді $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. ■

формули (це знак косинуса в II чверті). Знаючи $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, знаходимо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Зазначимо, що після знаходження $\operatorname{tg}\alpha$ значення $\operatorname{ctg}\alpha$ можна також знайти зі співвідношення $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

3) Рівність $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ пов'язує $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу як обернену величину.

Рівність $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ пов'язує $\operatorname{tg}\alpha$ та $\cos\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу.

Наприклад, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$. Тоді $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$. Знаючи, у якій чверті міститься α, ми можемо визначити знак, який потрібно взяти в правій частині формули (це знак косинуса в III чверті). Щоб знайти $\sin\alpha$, можна скористатися співвідношенням

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \sin\alpha.$$

Приклад 2. Спростіть вираз $\frac{1 - \cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Розв'язання

▶ $\frac{1 - \cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$. ■

Коментар

Для того щоб перетворити чисельник даного виразу, з основної тригонометричної тотожності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ знаходимо: $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. Потім використовуємо означення тангенса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і спрощуємо одержаний дріб.

Із прикладами розв'язування більш складних завдань можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Під час доведення тотожностей найчастіше використовують такі способи:
1) за допомогою тотожних перетворень доводять, що одна частина рівності дорівнює іншій;
2) розглядають різницю лівої і правої частин тотожності і доводять, що ця різниця дорівнює нулю (цей спосіб використовують у тих випадках, коли планується перетворювати обидві частини тотожності).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Запишіть співвідношення між тригонометричними функціями одного аргумента.
2*. Доведіть співвідношення між тригонометричними функціями одного аргумента.

ВПРАВИ

10.1. Чи існує число α, яке одночасно задовольняє умови:

1°) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$;
2°) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$;
3°) $\sin\alpha=0{,}7$, $\cos\alpha=0{,}3$;
4°) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{3}$;
5°) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{4}$;
6) $\operatorname{tg}\alpha=2+\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=2-\sqrt{3}$?

10.2. Знаючи значення однієї з тригонометричних функцій та інтервал, у якому міститься α, обчисліть значення інших трьох тригонометричних функцій:

1°) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;
2°) $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;
3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha=-0{,}2$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

10.3. Спростіть вираз:

1°) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

2°) $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$;

3°) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;

4) $\sin^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

5) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

7) $\dfrac{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$;

8) $\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)$.

10.4. Доведіть тотожність:

1°) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\operatorname{tg}^2\alpha$;

2°) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1=\operatorname{ctg}^2\alpha$;

3°) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;

4) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos^2\alpha$;

5) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

6) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2}{\cos\alpha}$;

7) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

8) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$.

10.5*. 1) Відомо, що $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$. Знайдіть $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

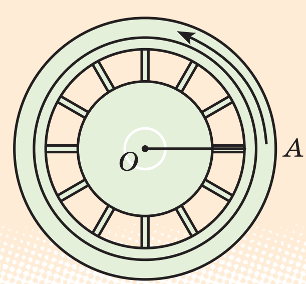
2) Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$. Знайдіть: а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

Виявіть свою компетентність

10.6. Визначте кут (у градусах і в радіанах), який утворюється внаслідок обертання хвилинної стрілки від моменту часу 1 год 15 хв до моменту часу 1 год 40 хв тієї самої доби. Обговоріть, чи будуть відрізнятися запис самого кута і запис його модуля?

10.7. Маховик двигуна робить 50 обертів за хвилину. На який кут (у градусах і в радіанах) повернеться його спиця OA (рис. 10.1) за 2 с (напрям обертання позначено на рисунку)?

Рис. 10.1



§ 11. ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА НАСЛІДКИ З НИХ

11.1. Формули додавання

Таблиця 21

1. Косинус різниці і суми
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
2. Синус суми і різниці
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. Тангенс суми і різниці
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
4. Формули подвійного аргумента
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$
5. Формули пониження степеня
$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\qquad$ $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

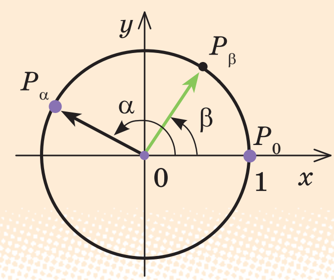
Косинус різниці і суми

Щоб одержати формулу для $\cos(\alpha-\beta)$, спочатку розглянемо випадок, коли α і β розташовані в проміжку $[0;\pi]$ і $\alpha>\beta$. На одиничному колі позначимо точки P_α і P_β та зобразимо вектори $\overrightarrow{OP_\alpha}$ і $\overrightarrow{OP_\beta}$

(рис. 11.1.1). Ці вектори мають ті самі координати, що й точки P_α і P_β, тобто:

$$\overrightarrow{OP_\alpha}(\cos\alpha; \sin\alpha),\ \overrightarrow{OP_\beta}(\cos\beta; \sin\beta).$$

Рис. 11.1.1



Довжини (модулі) цих векторів дорівнюють одиниці: $\left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{OP_\beta}\right|=1$, а кут між ними дорівнює $\alpha-\beta$ (тобто $\angle P_\alpha OP_\beta=\alpha-\beta$). Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OP_\alpha}$ і $\overrightarrow{OP_\beta}$ двома способами:

1) як суму добутків однойменних координат:

$$\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

2) як добуток довжин (модулів) векторів на косинус кута між ними:

$$\overrightarrow{OP_\alpha}\cdot\overrightarrow{OP_\beta}=\left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP_\beta}\right|\cdot\cos\angle P_\alpha OP_\beta=1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta).$$

Отже, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Одержану формулу називають *формулою косинуса різниці*. Можна обґрунтувати, що вона залишається правильною і для будь-яких значень α і β. Словесно її можна сформулювати так.

Косинус різниці двох кутів (чисел) дорівнює добутку косинуса першого кута (числа) на косинус другого плюс добуток синуса першого на синус другого.

За допомогою формули (1) легко вивести *формулу косинуса суми*:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Отже, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

Косинус суми двох кутів (чисел) дорівнює добутку косинуса першого кута (числа) на косинус другого мінус добуток синуса першого на синус другого.

Використовуючи одержані формули, легко можна обґрунтувати інші формули, наведені в табл. 21. Наприклад, підставляючи у формули для суми аргументів значення $\beta=\alpha$, одержуємо формули подвійного аргумента. З доведенням інших формул можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Обчисліть: 1) $\sin 15°$; 2) $\cos 15°$; 3) $\operatorname{tg} 15°$.

Розв'язання

1) ▸ $\sin 15° = \sin(45° - 30°) =$
$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. ■

2) ▸ $\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$
$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. ■

3) ▸ $\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) =$

$$= \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}.$$ ■

Коментар

Подамо 15° як різницю:

$15° = 45° - 30°$, а значення тригонометричних функцій кутів 45° і 30° ми знаємо. Тому, записавши синус 15° як синус різниці, одержимо значення $\sin 15°$. Аналогічно знайдемо $\cos 15°$ і $\operatorname{tg} 15°$.

Зауважимо, що для знаходження $\operatorname{tg} 15°$ можна було б використати також формулу $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

У завданні 3 в одержаному виразі $\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$ зручно позбутися ірраціональності в знаменнику дробу, що значно спрощує відповідь.

Приклад 2. Спростіть вираз $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$.

Коментар

У чисельнику і знаменнику дробу використаємо формули косинуса суми і косинуса різниці та зведемо подібні члени.

Розв'язання

▸ $$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = 1$$ ■

Приклад 3. Знайдіть значення виразу $\cos 37^\circ \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \sin 23^\circ$.

Розв'язання

$\cos 37^\circ \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \cos 23^\circ =$

$= \cos(37^\circ + 23^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Коментар

Використаємо формулу косинуса суми справа наліво:

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta).$$

Приклад 4. Обчисліть:

1) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

Розв'язання

1) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} =$

$= \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ =$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ =$

$= \frac{1}{2}\sin(2\cdot 15^\circ) =$

$= \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}$.

Коментар

У першому завданні достатньо «впізнати» праву частину формули косинуса подвійного аргумента і записати результат.

У другому завданні слід звернути увагу на те, що заданий вираз відрізняється від правої частини формули синуса подвійного аргумента тільки відсутністю двійки. Тому, якщо цей вираз помножити і поділити на 2, він не зміниться, але тепер за формулою одержуємо:

$$2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin(2\cdot 15^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Запишіть формули додавання:
   1) косинус суми і косинус різниці;
   2) синус суми і синус різниці;
   3) тангенс суми і тангенс різниці.
2. Запишіть формули подвійного аргумента та формули пониження степеня.

ВПРАВИ

11.1.1. Обчисліть:

1) $\sin 13°\cos 17° + \cos 13°\sin 17°$;
2) $\sin 16°\cos 29° + \sin 29°\cos 16°$;
3) $\sin 78°\cos 18° - \sin 18°\cos 78°$;
4) $\sin 63°\cos 33° - \sin 33°\cos 63°$;
5) $\cos 66°\cos 6° + \sin 66°\sin 6°$;
6) $\cos 71°\cos 26° + \sin 71°\sin 26°$;
7) $\cos 20°\cos 25° - \sin 20°\sin 25°$;
8) $\cos 18°\cos 12° - \sin 18°\sin 12°$;
9) $\dfrac{\operatorname{tg} 10° + \operatorname{tg} 35°}{1 - \operatorname{tg} 10°\operatorname{tg} 35°}$;
10) $\dfrac{\operatorname{tg} 73° - \operatorname{tg} 13°}{1 + \operatorname{tg} 73°\operatorname{tg} 13°}$;
11) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 67°\operatorname{tg} 7°}{\operatorname{tg} 37° - \operatorname{tg} 7°}$.

11.1.2. Спростіть:

1) $\sin 5\alpha\cos 3\alpha - \cos 5\alpha\sin 3\alpha$;
2) $\cos 4\alpha\cos 2\alpha + \sin 4\alpha\sin 2\alpha$;
3) $\sin(\alpha - \beta)\cos\beta + \cos(\alpha - \beta)\sin\beta$;
4) $\cos\alpha\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha\sin(\alpha + \beta)$;
5) $\dfrac{\cos 7\alpha\cos 4\alpha + \sin 7\alpha\sin 4\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha}$;
6°) $\dfrac{\sin 8\alpha\cos 2\alpha - \cos 8\alpha\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha\cos 4\alpha - \sin 2\alpha\sin 4\alpha}$;
7°) $\dfrac{\operatorname{tg} 4\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}{1 - \operatorname{tg} 4\alpha\operatorname{tg} 3\alpha}$;
8°) $\dfrac{\operatorname{tg} 7\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 7\alpha\operatorname{tg} 2\alpha}$.

11.1.3. За допомогою формул додавання обчисліть:

1) $\sin 75°$;
2) $\cos 75°$;
3) $\operatorname{tg} 75°$;
4) $\sin 105°$;
5) $\cos 105°$;
6) $\operatorname{tg} 105°$.

11.1.4. Доведіть тотожність:

1) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$;
2) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$;
3) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$;
4) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha$.

11.1.5°. Обчисліть:

1) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;

2) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$;

3) $(\cos 15° + \sin 15°)^2$;

4) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$;

5) $\frac{2\operatorname{tg} 15°}{1 - \operatorname{tg}^2 15°}$;

6) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

У завданнях 11.1.6, 11.1.7 доведіть тотожність.

11.1.6°. 1) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x$;

2) $\sin 5x \cos 5x = \frac{1}{2}\sin 10x$;

3) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$;

4) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$.

11.1.7. 1) $\frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha} = \cos\alpha\cos 2\alpha$;

2) $\frac{\sin 4\alpha}{4\cos\alpha} = \sin\alpha\cos 2\alpha$;

3) $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha$;

4) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$.

11.1.8. Спростіть вираз:

1°) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha$;

2°) $\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$;

3) $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$;

4*) $\frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}$.

11.1.9. Знаючи, що $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ і що $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

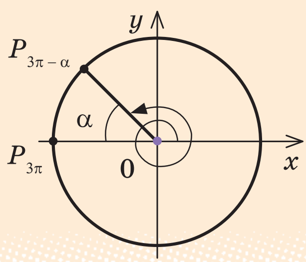
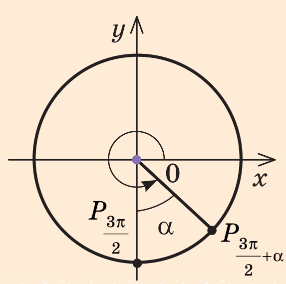
11.1.10. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin x \cos x$; 2) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$; 3*) $y = \operatorname{tg} x \sin 2x$.

11.2. Формули зведення

Таблиця 22

Формулами зведення називають формули, за допомогою яких тригонометричні функції від аргументів виду $k\pi \pm \alpha$ і $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ $(k \in \boldsymbol{Z})$ зводять до тригонометричних функцій від аргумента *α*.

<table>
<tr><th>Орієнтир</th><th colspan="2">Приклади</th></tr>
<tr>
<td>1) Якщо до числа α додається число $k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (тобто число, яке зображується на горизонтальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції не змінюється, а якщо додається число $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (тобто число, яке зображується на вертикальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції змінюється на відповідну (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс і котангенс на тангенс)</td>
<td>1) Спростіть за формулами зведення вираз $\mathrm{tg}(3\pi-\alpha)$.
▶ $\mathrm{tg}(3\pi-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$. ■

</td>
<td>Коментар
Назва заданої функції не змінюється, оскільки 3π зображується на горизонтальному діаметрі (зліва) одиничного кола (див. рисунок).
Якщо α — гострий кут, то кут $(3\pi-\alpha)$ розташований у II чверті, де тангенс від'ємний, тому в правій частині формули взято знак «–»</td>
</tr>
<tr>
<td>2) Знак одержаного виразу визначається знаком початкового виразу, якщо умовно вважати кут α гострим</td>
<td>2) Спростіть $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.
▶ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha$. ■

</td>
<td>Коментар
Назва заданої функції змінюється, оскільки $\frac{3\pi}{2}$ зображується на вертикальному діаметрі (внизу) одиничного кола (див. рисунок).
Якщо α — гострий кут, то кут $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ розташований у IV чверті, де косинус додатний, тому в правій частині формули взято знак «+»</td>
</tr>
</table>

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Із обґрунтуванням формул зведення можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручика.

У табл. 23 наведено *основні формули зведення*. Усі інші випадки може бути зведено до них за допомогою використання періодичності відповідних тригонометричних функцій.

Таблиця 23

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$

Зазначимо, що за формулами зведення $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\,\alpha$. Якщо останні формули записати справа наліво, то одержимо корисні співвідношення, які часто називають *формулами доповняльних аргументів* (аргументи α і $\frac{\pi}{2}-\alpha$ доповнюють один одного до $\frac{\pi}{2}$):

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\qquad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\qquad \mathrm{ctg}\,\alpha=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Наприклад, $\sin 60°=\cos(90°-60°)=\cos 30°$; $\cos 89°=\sin(90°-89°)=\sin 1°$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Обчисліть за допомогою формул зведення:

1) $\cos 210°$; 2) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

Розв’язання

1) ▸ $\cos 210° = \cos(180° + 30°) =$
$= -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; ■

2) ▸ $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$. ■

Коментар

Подамо задані аргументи так, щоб можна було використати формули зведення (тобто виділимо в аргументі частини, які зображаються на горизонтальному або вертикальному діаметрі одиничного кола).

Наприклад, $210° = 180° + 30°$. Звичайно, можна було подати цей аргумент ще й так: $210° = 270° - 60°$ і теж використати формули зведення.

Приклад 2*. Доведіть тотожність $\frac{\cos(3\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos 2\alpha$.

Коментар

Доведемо, що ліва частина тотожності дорівнює правій. Спочатку використаємо формули зведення, а потім спростимо одержані вирази за допомогою формул: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ і $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$. Під час спрощення виразів $\cos(3\pi - \alpha)$ і $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$ можна застосувати як безпосередньо формули зведення, так і періодичність відповідних функцій. Наприклад, ураховуючи, що періодом функції $\cos x$ є 2π, одержуємо:

$\cos(3\pi - \alpha) = \cos(2\pi + \pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Розв’язання

▸ $\frac{\cos(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{(-\cos\alpha) \cdot \cos\alpha}{(-\operatorname{ctg}\alpha) \cdot \operatorname{tg}\alpha} - (-\sin\alpha)^2 =$

$= \frac{-\cos^2\alpha}{-1} - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$. ■

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Проілюструйте на прикладах використання формул зведення. Поясніть одержаний результат.
2*. Доведіть декілька формул зведення.

ВПРАВИ

11.2.1. Обчисліть за допомогою формул зведення:

1) $\sin 240°$; 4) $\operatorname{ctg} 315°$; 7) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$;

2) $\operatorname{tg} 300°$; 5) $\cos\frac{4\pi}{3}$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

3) $\cos 330°$; 6) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$;

11.2.2. Обчисліть:

1) $\cos 8°\cos 37° - \cos 82°\cos 53°$;

2) $\sin 68°\sin 38° - \sin 52°\cos 112°$.

11.2.3. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; 3) $\dfrac{\sin(3\pi+\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-2\alpha)}$.

2) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$;

11.2.4. Доведіть тотожність:

1) $2\sin(90°+\alpha)\sin(180°+\alpha) = -\sin 2\alpha$;

2) $\operatorname{ctg} 20° \cdot \operatorname{ctg} 70° = 1$.

Виявіть свою компетентність

11.2.5. Спробуйте зробити схему, яка візуалізує формули зведення. *Вказівка*. Використайте одиничне коло.

Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій і формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму наведені на першій сторінці форзаца підручника, а з обґрунтуванням цих формул можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

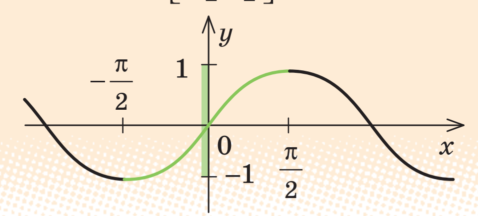
§ 12. НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

До найпростіших тригонометричних рівнянь відносять рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Їх загальні розв'язки записують, використовуючи так звані обернені тригонометричні функції, для позначення яких перед відповідною функцією ставиться буквосполучення «arc» (читається «арк»).

12.1. Обернені тригонометричні функції

Для запису значень $\arcsin a$ (де $|a| \leqslant 1$), $\arccos a$ (де $|a| \leqslant 1$), $\operatorname{arctg} a$ і $\operatorname{arcctg} a$ виділяють ті проміжки значень змінної, де основні функції ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$) зростають або спадають. У виділених проміжках основні функції кожне своє значення приймають тільки в одній точці, і тому для кожної з основних тригонометричних функцій існує обернена функція. Відповідні означення, приклади знаходження значень обернених тригонометричних функцій і формули для знаходження обернених тригонометричних функцій від'ємних чисел (та рисунки, які дозволяють обґрунтувати правильність відповідних формул, спираючись на симетричність відповідних точок на одиничному колі) наведені в табл. 24.

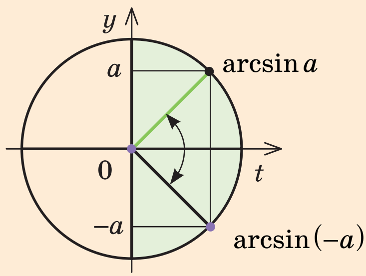
Таблиця 24

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ	
1. Поняття $\arcsin a$ $(\lvert a \rvert \leqslant 1)$	
Графік функції $y = \sin x$	Означення $\arcsin a$
На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x$ зростає. 	$\arcsin a$ **— це таке число з проміжку** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$**, синус якого дорівнює** a**.** $\arcsin a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin \varphi = a \end{cases}$

Приклад

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3},\text{ оскільки }\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\text{ і }\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Непарність функції $y=\arcsin x$



$\arcsin(-a)=-\arcsin a$

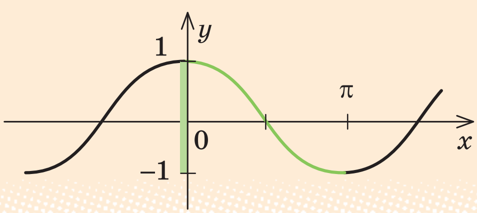
Приклад

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

2. Поняття $\arccos a$ $(|a|\leqslant 1)$

Графік функції $y=\cos x$

На проміжку $[0;\pi]$ $\cos x$ спадає.



Означення $\arccos a$

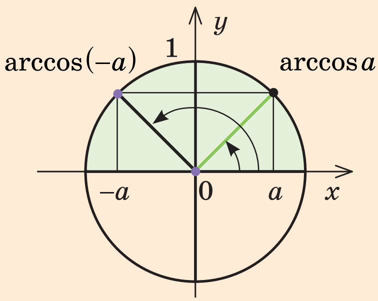
$\arccos a$ **— це таке число з проміжку $[0;\pi]$, косинус якого дорівнює a.**

$$\arccos a=\varphi,\text{ якщо }\begin{cases}\varphi\in[0;\pi],\\ \cos\varphi=a\end{cases}$$

Приклад

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\text{ оскільки }\frac{\pi}{4}\in[0;\pi]\text{ і }\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Формула для $\arccos(-a)$



$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

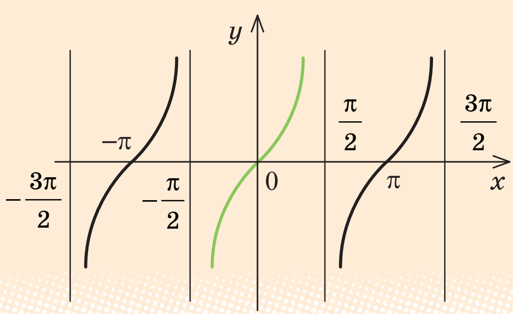
Приклад

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

3. Поняття $\operatorname{arctg} a$

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$

На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} x$ зростає.



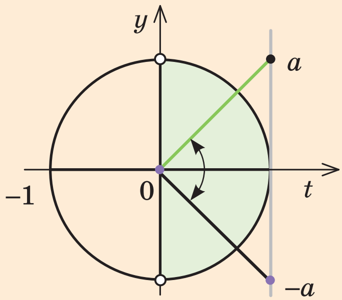
Означення $\operatorname{arctg} a$

$\operatorname{arctg} a$ — це таке число з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.

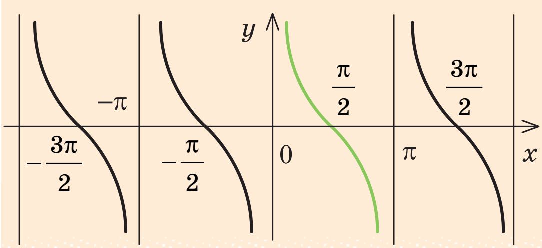
$$\operatorname{arctg} a = \varphi, \text{ якщо } \begin{cases} \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tg}\varphi = a \end{cases}$$

Приклад

$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Непарність функції $y = \operatorname{arctg} x$	
 $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$	Приклад $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\dfrac{\pi}{3}$

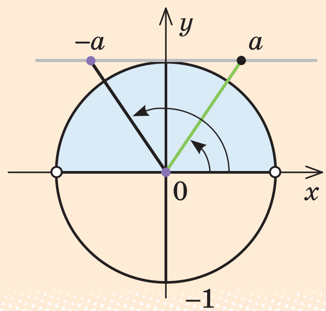
4. Поняття $\operatorname{arcctg} a$

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$	Означення $\operatorname{arcctg} a$
На проміжку $(0; \pi)$ $\operatorname{ctg} x$ спадає. 	$\operatorname{arcctg} a$ — **це таке число з проміжку** $(0; \pi)$**, котангенс якого дорівнює** a. $\operatorname{arcctg} a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in (0; \pi), \\ \operatorname{ctg} \varphi = a \end{cases}$

Приклад

$$\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{6} \in (0; \pi) \text{ і } \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Формула для $\operatorname{arcctg}(-a)$



$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

Приклад

$$\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) =$$
$$= \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Пояснення й обґрунтування найпростіших властивостей обернених тригонометричних функцій наведено в інтернет-підтримці підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад. Знайдіть:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Розв'язання

1) ▶ Нехай $\arcsin\frac{1}{3} = \varphi$. Тоді за означенням арксинуса одержуємо, що

$$\sin\varphi = \frac{1}{3}.$$

Отже, $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. ■

2) ▶ Нехай $\arcsin\frac{3}{5} = \varphi$. За означенням арксинуса одержуємо, що

$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi = \frac{3}{5}$.

Коментар

1) Оскільки запис

$$\varphi = \arcsin a \quad (|a| \leqslant 1)$$

означає, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi = a$, то завжди виконується рівність

$$\sin(\arcsin a) = a, \quad |a| \leqslant 1.$$

2) Якщо позначити вираз у дужках через φ, то за вимогою задачі потрібно знайти $\cos\varphi$. Використавши означення арксинуса, одержуємо стандартну задачу: знаючи синус кута, знайти його косинус, якщо кут розташований у проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ураховуючи, що $\cos\varphi \geqslant 0$, маємо:

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Отже, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \cos\varphi = \frac{4}{5}$. ■

Тоді $\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$. Оскільки $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то в цьому проміжку $\cos\varphi \geqslant 0$, а отже,

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}.$$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, яке число позначають вирази:
   1) $\arcsin a$; 2) $\arccos a$; 3) $\operatorname{arctg} a$; 4) $\operatorname{arcctg} a$.

   При яких значеннях a існують ці вирази? Проілюструйте пояснення прикладами.
2. За допомогою одиничного кола проілюструйте формули для знаходження значень обернених тригонометричних функцій від'ємних чисел. Наведіть приклади застосування таких формул.

ВПРАВИ

У завданнях 12.1.1–12.1.4 обчисліть:

12.1.1°. 1) $\arcsin 0$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\arcsin(-1)$;
2) $\arcsin 1$; 4) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

12.1.2°. 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg} 1$; 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

12.1.3°. 1) $\arccos 0$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\arccos(-1)$; 7) $\operatorname{arcctg}(-1)$.
2) $\operatorname{arcctg} 1$; 4) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

12.1.4. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{2}{7}\right)$; 3*) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$;
2*) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$; 4*) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

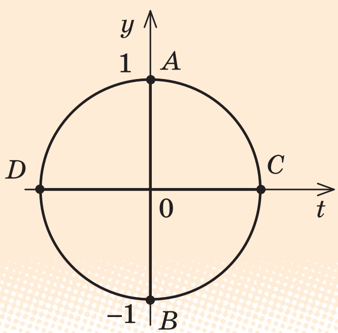
12.2. Розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь

Таблиця 25

1. Рівняння $\sin x = a$

Розв’язки	Приклади
$\sin x = a$ $\lvert a \rvert > 1$: Коренів немає $\lvert a \rvert \leqslant 1$: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	1) $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. 2) $\sin x = \sqrt{3}$. Коренів немає, оскільки $\sqrt{3} > 1$.

Окремі випадки розв’язування рівняння $\sin x = a$



$\sin x = 0$; $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$
(в точках C і D);

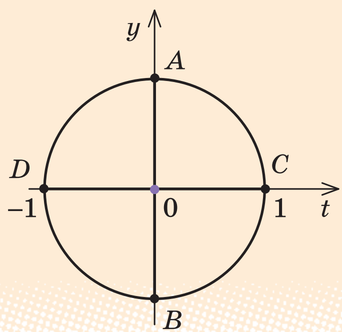
$\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$
(в точці A);

$\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$
(в точці B)

2. Рівняння $\cos x = a$

Розв’язки	Приклади
$\cos x = a$ $\lvert a \rvert > 1$: Коренів немає $\lvert a \rvert \leqslant 1$: $x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	1) $\cos x = \frac{1}{2}$; $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. 2) $\cos x = \sqrt{3}$. Коренів немає, оскільки $\sqrt{3} > 1$.

2. Окремі випадки розв'язування рівняння $\cos x = a$



$\cos x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

(в точках A і B);

$\cos x = 1$; $x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

(в точці C);

$\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

(в точці D);

3. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$

Розв'язки	Приклад
$\operatorname{tg} x = a$ $x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Окремий випадок: $\operatorname{tg} x = 0$ $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	▸ $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ■

4. Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$

Розв'язки	Приклад
$\operatorname{ctg} x = a$ $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Окремий випадок: $\operatorname{ctg} x = 0$ $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	▸ $\operatorname{ctg} x = 7$; $x = \operatorname{arcctg} 7 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Детально з розв'язуванням найпростіших тригонометричних рівнянь можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання

▶ $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Відповідь: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ■

Коментар

Оскільки $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$, то задане рівняння виду $\sin x = a$ має корені, які можна знайти за формулою, наведеною в п. 1 табл. 25.

Для обчислення $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ можна скористатися формулою

$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$

Тоді

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$

Відповідь до прикладу 1 часто записують у вигляді $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, але такий запис не є обов'язковим.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання

▶ $2x - \frac{\pi}{3} = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$2x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$

$x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Відповідь: $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ■

Коментар

Оскільки $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$, то можна скористатися формулою, наведеною в п. 2 табл. 25, щоб знайти значення виразу $2x - \frac{\pi}{3}$, який стоїть під знаком косинуса. Після цього з одержаного лінійного рівняння знаходимо x.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Які рівняння називають найпростішими тригонометричними?
2. Запишіть формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь. У яких випадках не можна знайти корені найпростішого тригонометричного рівняння за цими формулами?

3*. Виведіть формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

4*. Обґрунтуйте формули розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь для окремих випадків (для $\sin x = a$ і $\cos x = a$ випадки $a = 0$; 1; –1, для $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$ випадок $a = 0$).

ВПРАВИ

У завданнях 12.2.1–12.2.11 розв'яжіть рівняння.

12.2.1°. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \sqrt{3}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12.2.2°. 1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

12.2.3°. 1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$; 4) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

12.2.4°. 1) $\operatorname{ctg} x = 1$; 2) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg} x = -1$; 4) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

12.2.5. 1) $\sin x = -0{,}6$; 2) $\cos x = 0{,}3$; 3) $\operatorname{tg} x = -3{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} x = 2{,}5$.

12.2.6. 1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin 4x = 0$; 3) $\operatorname{tg} 3x = 1$; 4) $\operatorname{tg} 4x = 3$.

12.2.7. 1) $\sin\left(-\frac{t}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\cos\frac{t}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{7} = 1$.

12.2.8°. 1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;

2) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos 4x = 0$.

12.2.9. 1) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\mathrm{tg}(-4x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\cos(-2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right)=1$.

12.2.10. 1) $2\cos\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$; 3) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$;

2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=3$; 4) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$.

12.2.11. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=-1$; 3) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=\sqrt{3}$;

2) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-1$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$.

У завданнях 12.2.12, 12.2.13 знайдіть корені рівняння на заданому проміжку.

12.2.12*. 1) $\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0;2\pi]$; 3) $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-3\pi;3\pi]$;

2) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi;\pi]$; 4) $\mathrm{ctg}\,4x=-1$, $[0;\pi]$.

12.2.13*. 1) $\sin 3x=-\frac{1}{2}$, $[-4;4]$; 3) $\cos x=1$, $[-6;16]$;

2) $\sin\frac{x}{2}=0$, $[-12;18]$; 4) $\cos 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[1;7]$.

12.2.14*. Розв'яжіть рівняння залежно від значення a.

1) $\sin x=2a$; 4) $\mathrm{ctg}\,3x=2a$;

2) $\cos x=1+a^2$; 5) $a\sin x=a^2$;

3) $\mathrm{tg}\,2x=3a$; 6) $a\cos x=a^2+2a$.

12.3. Розв'язування тригонометричних рівнянь, які зводяться до найпростіших

Для розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь їх зводять до найпростіших. У процесі такого зведення можна використовувати орієнтири, наведені в табл. 26.

Таблиця 26

1. Заміна змінних	
Орієнтир	Приклад
Якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному і тому самому вигляді, то відповідний вираз зі змінною зручно позначити однією буквою (новою змінною). Після розв'язування одержаного рівняння необхідно виконати обернену заміну і розв'язати одержані найпростіші тригонометричні рівняння.	Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$. ▶ Нехай $\sin x = t$, тоді одержуємо: $2t^2 - 7t + 3 = 0$. Звідси $t_1 = 3$, $t_2 = \frac{1}{2}$. 1) При $t = 3$ маємо: $\sin x = 3$ — це рівняння не має коренів, оскільки $\lvert 3 \rvert > 1$. 2) При $t = \frac{1}{2}$ маємо: $\sin x = \frac{1}{2}$, тоді $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Відповідь*: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■ *Зауваження.* Записуючи розв'язання прикладу 1, можна при введенні заміни $\sin x = t$ урахувати, що $\lvert \sin x \rvert \leqslant 1$, і записати обмеження $\lvert t \rvert \leqslant 1$, а далі зазначити, що один із коренів $t = 3$ не задовольняє умову $\lvert t \rvert \leqslant 1$, і після цього обернену заміну виконувати тільки для $t = \frac{1}{2}$.

2. Орієнтир для розв'язування тригонометричних рівнянь

1) Пробуємо звести всі тригонометричні функції **до одного аргумента**.
2) Якщо вдалося звести до одного аргументу, то пробуємо всі тригонометричні вирази звести **до однієї функції**.
3) Якщо до одного аргумента вдалося звести, а до однієї функції — ні, то пробуємо звести рівняння **до однорідного** (всі члени якого мають однаковий сумарний степінь), *яке розв'язується діленням на найвищий степінь однієї зі змінних* (або однієї з двох функцій).
4) В інших випадках переносимо **всі члени рівняння в один бік і** пробуємо **одержати добуток,** що дорівнює нулю, або використовуємо **спеціальні прийоми розв'язування**.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

Розв'язання

Використовуючи формулу косинуса подвійного аргумента та основну тригонометричну тотожність, одержуємо:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0,$$
$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0,$$
$$-2\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$$

Заміна $\sin x = t$ дає рівняння $-2t^2 - 5t - 2 = 0$.

Тоді $2t^2 + 5t + 2 = 0$, $t_1 = -2$; $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Виконуємо обернену заміну:

1) При $t = -2$ маємо $\sin x = -2$ — коренів немає, оскільки $|2| > 1$.
2) При $t = -\frac{1}{2}$ маємо $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Тоді $x (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n$,

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Коментар

Усі тригонометричні функції зводимо до одного аргумента x, використовуючи формулу

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Потім усі тригонометричні вирази зводимо до однієї функції $\sin x$ (ураховуємо, що

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x).$$

В одержане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді — $\sin x$, отже, зручно виконати заміну $\sin x = t$. Зазначимо, що для розв'язування заданого прикладу можна було також використати формулу $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, що дозволить за один крок звести всі тригонометричні вирази і до одного аргумента, і до однієї функції.

При бажанні відповідь можна записати у вигляді $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Із прикладами розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Які способи використовують при розв'язуванні тригонометричних рівнянь? Наведіть приклади.
2. Яку заміну змінних можна виконати при розв'язуванні рівняння $8\cos^2 x-2\cos x-1=0$? Яке рівняння одержимо після заміни?
3. Поясніть, чому рівняння $3\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$ є однорідним. Як можна розв'язати це однорідне рівняння?

ВПРАВИ

У завданнях 12.3.1–12.3.6 розв'яжіть рівняння.

12.3.1. 1°) $3\sin^2 x-5\sin x-2=0$; 3°) $4\sin^2 x+11\sin x-3=0$;
2) $3\sin^2 2x+10\sin 2x+3=0$; 4) $2\sin^2\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}+1=0$.

12.3.2. 1°) $2\sin^2 x+3\cos x=0$; 3°) $5\cos^2 x+6\sin x-6=0$;
2) $8\sin^2 2x+\cos 2x+1=0$; 4) $4\sin 3x+\cos^2 3x=4$.

12.3.3. 1°) $3\,\mathrm{tg}^2 x+2\,\mathrm{tg}\,x-1=0$; 3°) $2\,\mathrm{tg}^2 x+3\,\mathrm{tg}\,x-2=0$;
2) $\mathrm{ctg}^2 2x-6\,\mathrm{ctg}\,2x+5=0$; 4) $7\,\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}+2\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=5$.

12.3.4. 1) $3\cos 2x=7\sin x$; 2) $2\cos 2x=7\cos x$.

12.3.5. 1) $\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$; 3) $\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$;
2) $\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$; 4) $3\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

12.3.6. 1) $\cos\frac{x}{2}=1+\cos x$; 3) $5\cos x+12\sin x=13$;
2) $\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)=1$; 4) $3\cos x-2\sin 2x=0$.

Виявіть свою компетентність

12.3.7. Спробуйте запропонувати для однорідних рівнянь (вправа 12.3.5) інший спосіб розв'язування, який не буде пов'язаний із діленням на вираз зі змінною. *Вказівка*. Спробуйте розглянути ці рівняння як квадратні відносно $\sin x$ або $\cos x$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тест № 2

1. Кутом якої чверті є кут, радіанна міра якого дорівнює 3,5 радіана?

А I   Б II   В III   Г IV

2. Знайдіть значення виразу $\dfrac{\cos\left(-\dfrac{13\pi}{3}\right)-\sin\dfrac{7\pi}{6}}{\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

А 0   Б 1   В –1   Г $-\sqrt{3}$

3. Установіть відповідність між функціями, заданими формулами (1–3), та властивостями (А–Г) цих функцій.

1 $y=\sin x$	А Функція не має найбільшого значення
2 $y=\cos x$	Б Функція є зростаючою на всій області визначення
3 $y=\operatorname{tg} x$	В Найбільше значення функції дорівнює 1 при $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$
	Г Функція парна

4. Знайдіть $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha=-0{,}8$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

А 0,2   Б –0,2   В –0,6   Г 0,6

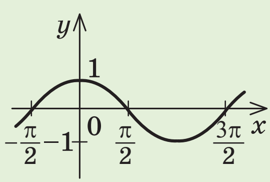
5. Спростіть вираз $\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

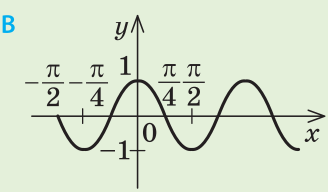
А $\cos^2\alpha$ Б $\sin^2\alpha$ В $2\sin^2\alpha$ Г $2\cos^2\alpha$

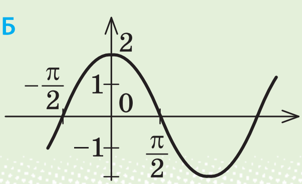
6. Яке з наведених рівнянь не має коренів?

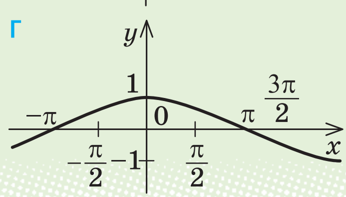
А $\cos x=\dfrac{1}{3}$ Б $\sin x=\dfrac{4}{3}$ В $\operatorname{tg} x=3$ Г $\operatorname{ctg} x=\dfrac{4}{3}$

7. Укажіть рисунок, на якому зображено графік функції $y=\cos 2x$.

А


В


Б


Г


8. Розв'яжіть рівняння $2\cos x = -1$.

А $x = \pm\frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Б $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

В $x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Г $x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

9. Побудуйте графік функції $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$ (запишіть розв'язання).

10. Розв'яжіть рівняння $4\cos x = \sin 2x$ (запишіть розв'язання).

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Навчальний проект

І ЦЕ ВСЕ ТРИГОНОМЕТРІЯ

Учні класу об'єднуються в три групи: «історики», «математики», «практики». Кожний учень може взяти участь у роботі однієї або двох проектних груп.

«*Історики*» досліджують виникнення тригонометрії та її розвиток в окремі періоди: зародження тригонометрії у Стародавній Греції; розвиток вчення про тригонометричні величини у країнах Сходу; розвиток тригонометрії в Європі.

«*Математики*» опановують додатковий теоретичний матеріал, що стосується тригонометрії. Це, наприклад, можуть бути такі питання:

1. Періодичні процеси і властивості періодичних функцій.
2. Графіки складних тригонометричних функцій.
3. Додаткові формули тригонометрії (включаючи дослідження обернених тригонометричних функцій та запис відповідних формул).

«*Практики*» досліджують, де і як використовуються відомості з тригонометрії.

Результати роботи над проектом учні кожної групи оформлюють у вигляді комп'ютерної презентації.

Теми навчальних проектів

1. Аркфункції в рівняннях і нерівностях.
2. Екологія та математика.
3. Забруднення навколишнього середовища: географічний і математичний аспект.

Розділ 3

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

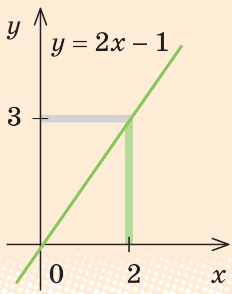
У цьому розділі ви:

- ознайомитеся з поняттям похідної
- дізнаєтеся про те, як можна знаходити похідні функцій
- навчитеся досліджувати функції та будувати їх графіки

§ 13. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Таблиця 27

1. Поняття границі функції в точці



Нехай задано деяку функцію, наприклад $f(x)=2x-1$.

Розглянемо графік цієї функції та таблицю її значень у точках, які на числовій прямій розташовані достатньо близько від числа 2.

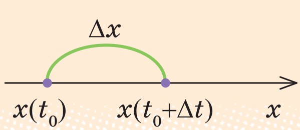
x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,2

З таблиці та графіка видно, що чим ближче аргумент *x* до числа 2 (це позначають $x \to 2$ і кажуть, що *x прямує* до 2), тим ближче значення функції $f(x)=2x-1$ до числа 3 (позначають $f(x)\to 3$ і кажуть, що $f(x)$ прямує до 3). Це записують також так: $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$ (читають: «ліміт $2x-1$ при *x*, що прямує до 2, дорівнює 3») і кажуть, що границя функції $2x-1$ при *x*, що прямує до 2 (або *границя функції в точці* 2), дорівнює 3.

У загальному випадку запис $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$ означає, що при $x\to a$ $f(x)\to B$, тобто B — число, до якого прямує значення функції $f(x)$, коли *x* прямує до a.

2. Задачі, які приводять до поняття похідної

1) Миттєва швидкість руху точки вздовж прямої

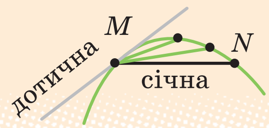


$x(t)$ — координата x точки в момент часу t.

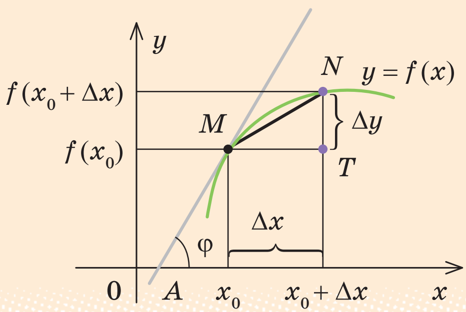
$$v_{\text{середня}}=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$v_{\text{миттєва}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

2) Дотична до графіка функції



Дотичною до кривої в даній точці M називають граничне положення січної MN



Якщо точка N наближається до точки M (рухаючись по графіку функції $y = f(x)$), то величина кута NMT наближається до величини кута φ нахилу дотичної MA до осі Ox.

Оскільки $\operatorname{tg}\angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

3. Означення похідної

$$y = f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

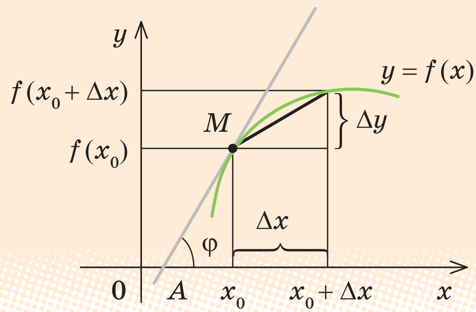
***Похідною функції** $y = f(x)$ **у точці** x_0* **називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргумента, коли приріст аргумента прямує до нуля.**

Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням*

4. Похідні деяких елементарних функцій

$c' = 0$ (c — стала)	$(x)' = 1$	$(x^2)' = 2x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

5. Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$



$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi$$

k — кутовий коефіцієнт дотичної,

$$k=\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0)$$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ — **рівняння дотичної** до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0

Значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і кутовому коефіцієнту дотичної.

(*Кут відлічують від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки.*)

6. Фізичний зміст похідної

Похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргумента

$s=s(t)$ — залежність пройденого шляху від часу;

$v=s'(t)$ — швидкість прямолінійного руху;

$a=v'(t)$ — прискорення прямолінійного руху

Зокрема, *похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, яку можна застосовувати до найрізноманітніших фізичних величин.*

Наприклад, **миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху є похідною від функції, яка виражає залежність пройденого шляху s від часу t**

7. Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції

Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку (тобто в кожній його точці), то вона неперервна на цьому проміжку (тобто в кожній його точці)

Із поясненням понять границі й неперервності функцій і обґрунтуванням їхніх властивостей можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Поняття приросту аргумента і приросту функції

Часто нас цікавить не значення якоїсь величини, а її приріст. Наприклад, сила пружності пружини пропорційна до видовження пружини; робота — це зміна енергії тощо.

Приріст аргумента чи функції традиційно позначають великою літерою грецького алфавіту Δ (дельта). Дамо означення приросту аргумента і приросту функції.

Нехай x — довільна точка, що лежить у деякому околі фіксованої точки x_0 з області визначення функції $f(x)$.

Означення. Різниця $x - x_0$ називається *приростом незалежної змінної (або приростом аргумента)* у точці x_0 і позначається Δx (читають: «дельта ікс»):

$$\Delta x = x - x_0.$$

Із цієї рівності маємо $\quad x = x_0 + \Delta x, \quad$ (1)

тобто початкове значення аргумента x_0 набуло приросту Δx. Зауважимо, що при $\Delta x > 0$ значення x більше за x_0, а при $\Delta x < 0$ — менше від x_0 (рис. 13.1).

Тоді, при переході аргумента від точки x_0 до точки x, значення функції змінилося на величину $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Ураховуючи рівність (1), одержуємо, що функція змінилася на величину

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (2)$$

(рис. 13.2), яку називають *приростом функції f у точці x_0*, що відповідає приросту аргумента Δx (символ Δf читають: «дельта еф»).

Рис. 13.1

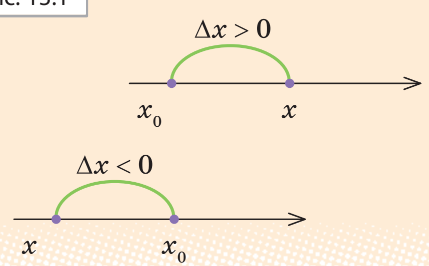
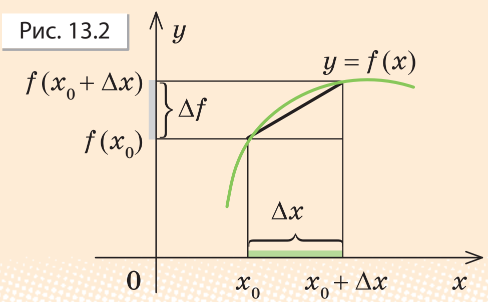


Рис. 13.2



Із рівності (2) маємо $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta f$.

При фіксованому x_0 приріст Δf є функцією від приросту Δx.

Якщо функція задана формулою $y=f(x)$, то Δf називають також *приростом залежної змінної* y і позначають через Δy.

Наприклад, якщо $y=f(x)=x^2$, то приріст Δy, що відповідає приросту Δx, дорівнює:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Запис неперервності функції через прирости аргумента і функції

Означення. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо при $x\to x_0$ $f(x)\to f(x_0)$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Але якщо $x\to x_0$, то $x-x_0\to 0$, тобто $\Delta x\to 0$ (і навпаки, якщо $\Delta x\to 0$, то $x-x_0\to 0$, тобто $x\to x_0$), отже, умова $x\to x_0$ еквівалентна умові $\Delta x\to 0$. Аналогічно твердження $f(x)\to f(x_0)$ еквівалентне умові $f(x)-f(x_0)\to 0$, тобто $\Delta f\to 0$. Таким чином, функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли при $\Delta x\to 0$ $\Delta f\to 0$, тобто *малій зміні аргумента в точці* x_0 *відповідають малі зміни значень функції*. Саме через цю властивість графіки неперервних функцій зображають неперервними (нерозривними) кривими на кожному з проміжків, що цілком входить до області визначення.

2. Задачі, які приводять до поняття похідної

1) Миттєва швидкість руху точки вздовж прямої

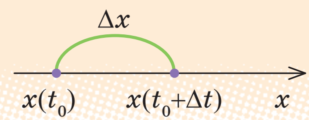
Розглянемо задачу, відому з курсу фізики, — рух точки вздовж прямої. Нехай координата x точки в момент часу t дорівнює $x(t)$. Як і в курсі фізики, будемо вважати, що рух відбувається неперервно (як це ми спостерігаємо в реальному житті). Спробуємо за відомою залежністю $x(t)$ визначити швидкість, з якою рухається точка в момент часу t_0 (так звану миттєву швидкість). Розглянемо відрізок часу від t_0 до $t=t_0+\Delta t$ (рис. 13.3). Визначимо середню швидкість на відрізку $[t_0;t_0+\Delta t]$ як відношення пройденого шляху до тривалості руху:

$$v_{\text{середня}}=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Для того щоб визначити миттєву швидкість точки в момент часу t_0, візьмемо відрізок часу завдовжки Δt, обчислимо середню швидкість на цьому відрізку та почнемо зменшувати відрізок Δt до нуля (тобто зменшувати відрізок $[t_0; t]$ і наближати t до t_0). Ми помітимо, що значення середньої швидкості при наближенні Δt до нуля буде наближатися до деякого числа, яке й уважають значенням швидкості в момент часу t_0. Іншими словами, *миттєвою швидкістю* в момент часу t_0 називають границю відношення $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, якщо $\Delta t \to 0$:

$$v_{\text{миттєва}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Рис. 13.3



Приклад застосування означення миттєвої швидкості для знаходження швидкості тіла під час вільного падіння розглянуто в інтернет-підтримці підручника.

2) Дотична до графіка функції

Наочне уявлення про дотичну до кривої можна отримати, виготовивши криву з цупкого матеріалу (наприклад, із дроту) і прикладаючи до кривої лінійку у вибраній точці (рис. 13.4). Якщо ми зобразимо криву на папері, а потім будемо вирізати фігуру, обмежену цією кривою, то ножиці теж будуть напрямлені по дотичній до кривої.

Спробуємо наочне уявлення про дотичну виразити точніше.

Нехай задано деяку криву і точку M на ній (рис. 13.5). Візьмемо на цій кривій іншу точку N і проведемо пряму через точки M і N. Таку пряму зазвичай називають *січною*. Почнемо наближати точку N до точки M.

Рис. 13.4

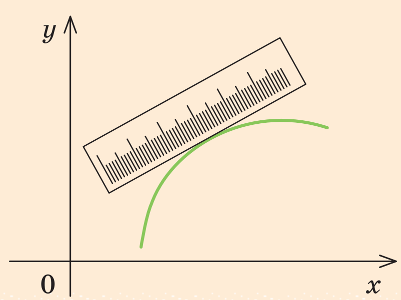
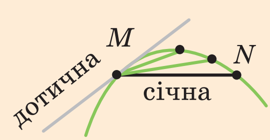


Рис. 13.5

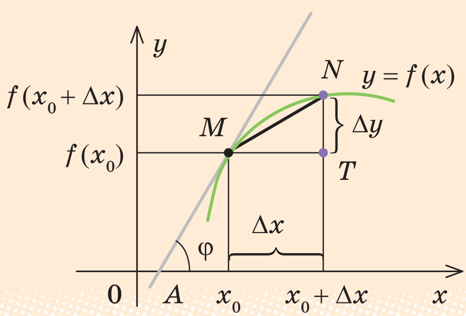


Положення січної MN буде змінюватися, але при наближенні точки N до точки M почне стабілізуватися.

Означення. ***Дотичною*** **до кривої в даній точці M називається граничне положення січної MN.**

Для того щоб записати це означення за допомогою формул, будемо вважати, що крива — це графік функції $y=f(x)$, а точка M на графіку задана координатами $(x_0;y_0)=(x_0;f(x_0))$. Дотичною є деяка пряма, яка проходить через точку M (рис. 13.6). Щоб побудувати цю пряму, достатньо знати кут φ нахилу дотичної* до осі Ox.

Рис. 13.6



Нехай точка N (через яку проходить січна MN) має абсцису $x_0+\Delta x$. Якщо точка N, рухаючись по графіку функції $y=f(x)$, наближається до точки M (це буде при $\Delta x\to 0$), то величина кута NMT наближається до величини кута φ нахилу дотичної MA до осі Ox. Оскільки $\operatorname{tg}\angle NMT=\frac{NT}{MT}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то при $\Delta x\to 0$ значення $\operatorname{tg}\angle NMT$ наближається до φ, тобто

$$\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Фактично ми прийшли до задачі, яку розглядали при знаходженні миттєвої швидкості: тут потрібно знайти границю відношення виразу виду $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (де $y=f(x)$ — задана функція) при $\Delta x\to 0$. Одержане таким чином число називають *похідною* функції $y=f(x)$ у точці x_0.

3. Означення похідної

Означення. ***Похідною функції*** **$y=f(x)$ у точці x_0 називаєтся границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргумента, коли приріст аргумента прямує до нуля.**

* Будемо розглядати невертикальну дотичну $(\varphi\neq 90°)$.

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$ (або $y'(x_0)$) і читають: «еф штрих у точці x_0».

Коротко означення похідної функції $y = f(x)$ можна записати так:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ураховуючи означення приросту функції $y = f(x)$ у точці x_0, що відповідає приросту Δx, означення похідної можна також записати:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцію $f(x)$, що має похідну в точці x_0, називають *диференційовною* в цій точці. Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що ця функція *диференційовна на цьому проміжку*. Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням*.

Для знаходження похідної функції $y = f(x)$ за означенням можна користуватися такою схемою:

1. *Знайти приріст функції* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, *який відповідає приросту аргумента* Δx.
2. *Знайти відношення* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
3. *З'ясувати, до якої границі прямує відношення* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$.

Це і буде похідна заданої функції.

4. Похідні деяких елементарних функцій

Користуючись запропонованою схемою знаходження похідної функції, легко обґрунтувати формули, наведені в п. 4 табл. 27.

1. Обчислимо похідну функції $y = c$ (тобто $f(x) = c$), де c — стала.

1) Знайдемо приріст функції, який відповідає приросту аргумента Δx:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0.$$

2) Знайдемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$.

3) Оскільки відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постійне і дорівнює нулю, то і границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ теж дорівнює нулю. Отже, $y' = 0$, тобто

$$c' = 0.$$ ■

2. Обчислимо похідну функції $y = x$ (тобто $f(x) = x$).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

3) Оскільки відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постійне і дорівнює 1, то і границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ теж дорівнює одиниці. Отже, $y' = 1$, тобто

$$x' = 1.$$ ■

3. Обчислимо похідну функції $y = x^2$ (тобто $f(x) = x^2$).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - $
$- x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$.

3) При $\Delta x \to 0$ значення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$. Це означає, що $y'(x_0) = 2x_0$. Тоді похідна функції $y = x^2$ у довільній точці x дорівнює $y'(x) = 2x$. Отже,

$$(x^2)' = 2x.$$ ■

Із обґрунтуванням формул $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ і $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

5. Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$

Ураховуючи означення похідної функції $y = f(x)$, запишемо результати, одержані при розгляді дотичної до графіка функції (рис. 13.7).

Як було обґрунтовано вище, тангенс кута φ нахилу дотичної в точці M з абсцисою x_0 (рис. 13.7) обчислюють за формулою $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. З іншого боку, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тоді

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi.$$

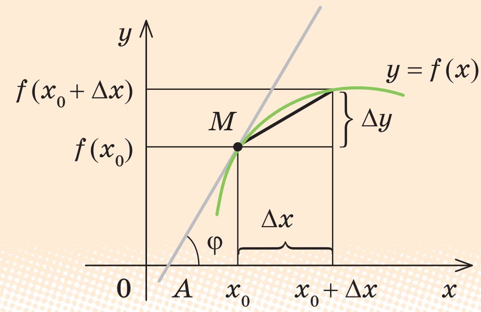


Рис. 13.7

Нагадаємо, що в рівнянні прямої $y = kx + b$ кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої до осі Ox. Якщо k — кутовий коефіцієнт дотичної, то $k = \mathrm{tg}\,\varphi = f'(x_0)$. Отже, **значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і дорівнює кутовому коефіцієнту цієї дотичної** (*кут відлічують від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки*).

Таким чином, якщо $y = kx + b$ — рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці M з координатами $(x_0; f(x_0))$ і $k = f'(x_0)$, то $y = f'(x_0)x + b$. Оскільки дотична проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$, то її координати задовольняють останнє рівняння, тобто $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$. Звідси знаходимо $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$, і рівняння дотичної матиме вигляд

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Його зручно записати у вигляді:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Це рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

Кут φ, який утворює невертикальна дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 з додатним напрямком осі Ox, може бути нульовим, гострим або тупим. Ураховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо, що *у випадку, коли* $f'(x_0) > 0$ $(\mathrm{tg}\,\varphi > 0)$, кут φ буде гострим, *а у випадку, коли* $f'(x_0) < 0$ $(\mathrm{tg}\,\varphi < 0)$, кут φ буде тупим. *Якщо* $f'(x_0) = 0$ $(\mathrm{tg}\,\varphi = 0)$, то $\varphi = 0$ (тобто *дотична паралельна осі Ox*). І навпаки, *якщо дотична до графіка функції* $y = f(x)$ *у точці з абсцисою* x_0 *утворює з додатним напрямком осі Ox гострий кут* φ, *то* $f'(x_0) > 0$, *якщо тупий кут — то* $f'(x_0) < 0$, *а якщо дотична паралельна осі Ox або збігається з нею* $(\varphi = 0)$, *то* $f'(x_0) = 0$.
Якщо ж дотична утворює з віссю Ox прямий кут $(\varphi = 90°)$, *то функція* $f(x)$ *похідної в точці* x_0 *не має* ($\mathrm{tg}\,90°$ не існує).

6. Фізичний зміст похідної

Записуючи означення похідної в точці t_0 для функції $x(t)$:

$$x'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

і співставляючи одержаний результат із поняттям миттєвої швидкості прямолінійного руху:

$$v_{\text{миттєва}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

можна зробити висновок, що п*охідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргумента*.

Зокрема, *похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин*. Наприклад, миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху є похідною від функції, яка виражає залежність пройденого шляху s від часу t; а прискорення a — похідною від функції, яка виражає залежність швидкості v від часу t.

Якщо $s=s(t)$ — залежність пройденого шляху від часу, то

$v=s'(t)$ — *швидкість* прямолінійного руху $(v=v(t))$;

$a=v'(t)$ — *прискорення* прямолінійного руху.

7. Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції

Якщо функція $y=f(x)$ диференційовна в точці x_0, то в цій точці існує її похідна $f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, тобто при $\Delta x\to 0$ значення $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x_0)$.

Для обґрунтування неперервності функції $y=f(x)$ достатньо обґрунтувати, що при $\Delta x\to 0$ значення $\Delta y\to 0$.

Справді, при $\Delta x\to 0$ одержуємо: $\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\to f'(x_0)\cdot 0=0$. А це й означає, що функція $y=f(x)$ — неперервна. Отже, **якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.**

Із цього твердження випливає: **якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку (тобто в кожній його точці), то вона неперервна на цьому проміжку (тобто в кожній його точці).**

Зазначимо, що *обернене твердження неправильне*. Функція, яка неперервна на проміжку, може не мати похідної в деяких точках цього проміжку.

Наприклад, функція $y = |x|$ (рис. 13.8) неперервна при всіх значеннях x, але не має похідної в точці $x = 0$. Дійсно, якщо $x_0 = 0$ і $y = f(x) = |x|$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{якщо } \Delta x > 0, \\ -1, \text{якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$

Тому при $\Delta x \to 0$ відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не має границі, а отже, і функція $y = |x|$ не має похідної в точці 0.

Той факт, що неперервна функція $f(x)$ не має похідної в точці x_0, означає, що до графіка цієї функції в точці з абсцисою x_0 не можна провести дотичної (або відповідна дотична перпендикулярна до осі Ox). Графік у цій точці може мати злом (рис. 13.8), а може мати значно складніший вигляд*.

Рис. 13.8

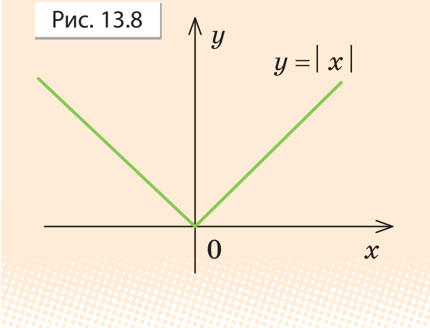
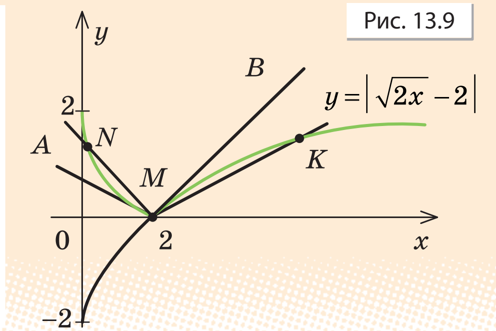


Рис. 13.9



Наприклад, до графіка неперервної функції $y = |\sqrt{2x} - 2|$ (рис. 13.9) у точці M з абсцисою $x = 2$ не можна провести дотичну (а отже, ця функція не має похідної в точці 2). Дійсно, за означенням дотична — це граничне положення січної. Якщо точка N наближатиметься до точки M по лівій частині графіка, то січна MN набуде граничного положення MA. Якщо ж точка K буде наближатися до точки M по правій частині графіка, то січна MK займе граничне положення MB. Але це дві різні прямі, таким чином, у точці M дотичної до графіка даної функції не існує.

* У курсах математичного аналізу розглядають приклади функцій, які є неперервними, але в жодній точці не мають похідної.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Знайдіть тангенс кута φ нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, до осі *Ox*, якщо:

1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=1$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=25$.

Розв'язання

1) ▸ За геометричним змістом похідної $\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0)$. Ураховуючи, що $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, одержуємо:

$$f'(x_0)=f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1.$$

Отже, $\operatorname{tg}\varphi=f'(1)=-1$. ■

2) ▸ Оскільки $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $f'(x_0)=f'(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}$.

За геометричним змістом похідної $\operatorname{tg}\varphi=f(x_0)$.

Отже, $\operatorname{tg}\varphi=0{,}1$. ■

Коментар

За геометричним змістом похідної

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi,$$

де φ — кут нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, до осі *Ox*. Тому для знаходження $\operatorname{tg}\varphi$ достатньо знайти похідну функції $f(x)$, а потім значення похідної в точці x_0.

Для знаходження похідних заданих функцій скористаємося формулами відповідних похідних, наведеними в п. 4 табл. 27 (та обґрунтованими в п. 4 цього параграфа).

У подальшому під час розв'язування задач ми будемо використовувати ці формули як табличні значення.

Приклад 2. Використовуючи формулу $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=\frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0=\frac{1}{2}$.

Розв'язання

▸ Якщо $f(x)=\frac{1}{x}$, то $f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

Тоді $f'(x_0)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-4$.

Підставляючи ці значення в рівняння дотичної $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,

Коментар

Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0 у загальному вигляді записують так:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

одержуємо $y = 2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$,

тобто $y = -4x + 4$ — шукане рівняння дотичної. ■

Щоб записати це рівняння для заданої функції, потрібно знайти значення $f(x_0)$, похідну $f'(x)$ і значення $f'(x_0)$. Для виконання обчислень зручно позначити задану функцію через $f(x)$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Використовуючи графіки відомих функцій, поясніть поняття границі функції в точці.
2. Поясніть на прикладах і дайте означення приросту аргумента й приросту функції в точці x_0.
3. Охарактеризуйте поняття неперервності функції в точці.
4. Поясніть, як можна обчислити миттєву швидкість матеріальної точки під час руху вздовж прямої.
5. Поясніть, яку пряму вважають дотичною до графіка функції.
6. Як обчислити тангенс кута нахилу січної, що проходить через дві точки графіка деякої функції, до осі Ox?
7. Поясніть, як можна визначити тангенс кута φ нахилу дотичної до осі Ox.
8. 1) Дайте означення похідної. Як позначають похідну функції f у точці x_0?
   2*) Опишіть схему знаходження похідної функції $y = f(x)$.
9. 1) Запишіть, чому дорівнює похідна функції:
   а) c (де c — стала); б) x; в) x^2; г) $y = \frac{1}{x}$; д) $y = \sqrt{x}$.
   2*) Обґрунтуйте формули для знаходження похідних функцій, наведених у п. 1.
10. Що таке похідна з геометричної точки зору?
11. Що таке похідна з фізичної точки зору?
12. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.
13. Поясніть зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції.

ВПРАВИ

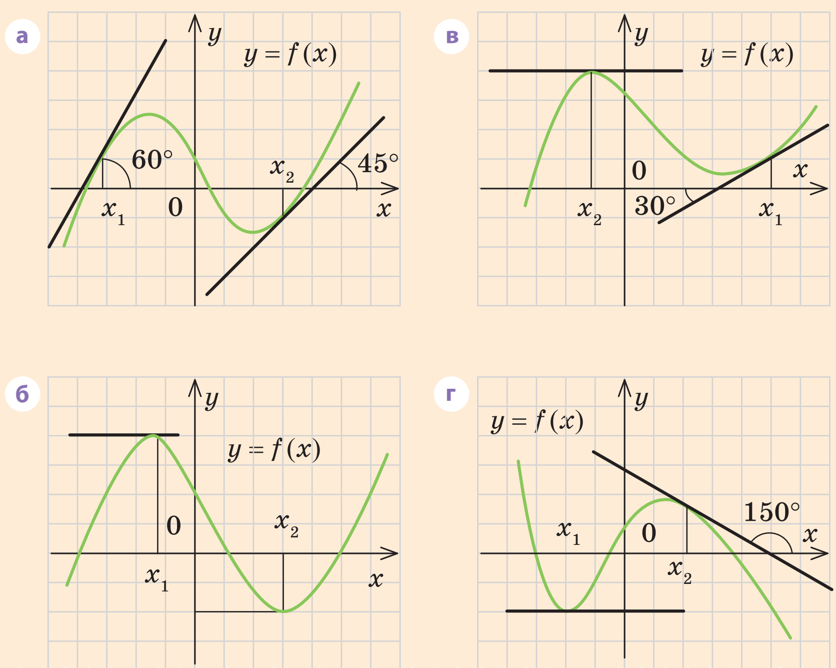
13.1°. Для функції $y=2x$ знайдіть приріст Δy, який відповідає приросту аргумента Δx у точці x_0, якщо:
1) $x_0=2$ і $\Delta x=3$; 3) $x_0=0,5$ і $\Delta x=2,5$.
2) $x_0=1,5$ і $\Delta x=3,5$;

13.2. Знайдіть приріст Δy, який відповідає приросту аргумента Δx у точці x_0 для функції:
1) $y=3x$; 2) $y=x^3$; 3) $y=x^2-x$; 4) $y=x+\dfrac{1}{x}$.

13.3. Користуючись схемою обчислення похідної, наведеною в п. 3 цього параграфа, знайдіть похідну функції:
1) $y=3x$; 2) $y=-5x$; 3*) $y=x^3$; 4*) $y=x^2-2x$.

13.4°. На рис. 13.10, *а–г*, зображено графік функції $y=f(x)$ та дотичні до нього в точках з абсцисами x_1 і x_2. Користуючись геометричним змістом похідної, запишіть значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

Рис. 13.10



13.5. Використовуючи формули, наведені в п. 4 табл. 27, та геометричний зміст похідної, запишіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x)=x^2$, $x_0=3$;
3) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=-1$;
2) $f(x)=x$, $x_0=8$;
4) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=\frac{1}{4}$.

13.6. Використовуючи формулу $(x^2)'=2x$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=x^2$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $x_0=1$; 2) $x_0=0$; 3) $x_0=0{,}5$; 4) $x_0=-3$.

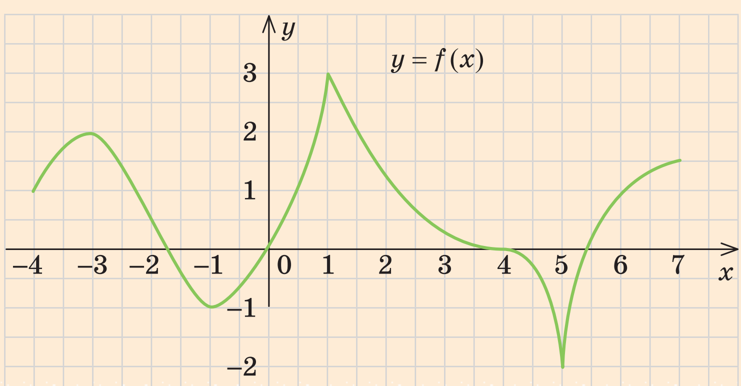
Зобразіть графік даної функції та відповідну дотичну.

13.7. Використовуючи фізичний зміст похідної, знайдіть швидкість тіла, яке рухається за законом $s=s(t)$, у момент часу t, якщо:

1) $s(t)=t$, $t=7$;
3) $s(t)=t^3$, $t=5$;
2) $s(t)=t^2$, $t=6{,}5$;
4) $s(t)=\sqrt{t}$, $t=4$.

13.8. На рис. 13.11 зображено графік функції $y=f(x)$ на проміжку $[-4;7]$. Використовуючи геометричний зміст похідної, укажіть на проміжку $(-4;7)$:
1) значення аргумента, у яких похідна $f'(x)$ дорівнює нулю;
2) значення аргумента, у яких похідна $f'(x)$ не існує.
Чи існує в кожній точці із знайденими абсцисами дотична до графіка функції $y=f(x)$?

Рис. 13.11



§ 14. ПРАВИЛА ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Таблиця 28

1. Похідні деяких елементарних функцій

$c'=0$ (c — стала)	$(x)'=1$	$(x^n)'=nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$	$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$

2. Правила диференціювання

Правило	Приклад
$(cu)'=cu'$ *Сталий множник можна виносити за знак похідної*	$(5x^3)'=5(x^3)'=5\cdot 3x^{3-1}=15x^2$
$(u+v)'=u'+v'$ *Похідна суми диференційовних функцій дорівнює сумі їх похідних*	$\left(x+\sqrt{x}\right)'=(x)'+\left(\sqrt{x}\right)'=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(uv)'=u'v+v'u$	$\left((x+2)x^2\right)'=(x+2)'x^2+(x^2)'(x+2)=$ $=(x'+2')x^2+2x(x+2)=$ $=(1+0)x^2+2x(x+2)=3x^2+4x$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1'\cdot x-x'\cdot 1}{x^2}=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$

3. Похідна складеної функції (функції від функції)

Якщо $y=f(u)$ і $u=u(x)$, тобто $y=f(u(x))$, то $\left(f(u(x))\right)'=f'_u(u)\cdot u'_x(x)$. Коротко це можна записати так*: $y'_x=f'_u\cdot u'_x$	$\left((3x-1)^5\right)'=5(3x-1)^4(3x-1)'=$ $=5(3x-1)^4\left((3x)'-1'\right)=$ $=5(3x-1)^4(3-0)=15(3x-1)^4$. (Якщо $u=3x-1$, то $\left(u^5\right)'_x=5u^4u'_x$.)

* У позначеннях y'_x, f'_x, u'_x нижній індекс указує, за яким аргументом беруть похідну.

Пояснення й обґрунтування правил обчислення похідних, наведених в табл. 28, детально розглянуто в інтернет-підтримці підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^7 + x^3$; 2) $y = x^8(2x + x^4)$; 3) $y = \dfrac{x+2}{5-x}$.

Розв'язання

1) ▶ $y' = (x^7 + x^3)' = (x^7)' + (x^3)' =$

$= 7x^6 + 3x^2$. ■

2) ▶ $y' = (x^8(2x + x^4))' =$

$= (x^8)' \cdot (2x + x^4) + (2x + x^4)' \cdot x^8$.

Ураховуючи, що $(x^8)' = 8x^7$,

$(2x + x^4)' = (2x)' + (x^4)' = 2 \cdot x' + 4x^3 = 2 + 4x^3$,

маємо $y' = 8x^7(2x + x^4) + (2 + 4x^3)x^8 =$

$= 16x^8 + 8x^{11} + 2x^8 + 4x^{11} = 18x^8 + 12x^{11}$. ■

3) ▶ $y' = \left(\dfrac{x+2}{5-x}\right)' =$

$= \dfrac{(x+2)'(5-x) - (5-x)'(x+2)}{(5-x)^2}$.

Ураховуючи, що

$(x+2)' = x' + 2' = 1 + 0 = 1$,

$(5-x)' = 5' - x' = 0 - 1 = -1$, маємо

$y' = \dfrac{1 \cdot (5-x) - (-1) \cdot (x+2)}{(5-x)^2} = \dfrac{5 - x + x + 2}{(5-x)^2} =$

$= \dfrac{7}{(5-x)^2}$. ■

Коментар

Нагадаємо, що алгебраїчний вираз (чи формулу, яка задає функцію) називають за результатом останньої дії, яку потрібно виконати при знаходженні значення заданого виразу. Отже, у завданні 1 спочатку потрібно знайти похідну суми:

$(u + v)' = u' + v'$,

у завданні 2 — похідну добутку:

$(uv)' = u'v + u'v$,

а в завданні 3 — похідну частки:

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

У завданнях 1 і 2 слід використати також формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, а в завданні 2 врахувати, що при обчисленні похідної від $2x$ постійний множник 2 можна винести за знак похідної.

У завданні 2 краще спочатку розкрити дужки, а потім узяти похідну суми.

Приклад 2. Знайдіть значення x, для яких похідна функції $f(x)=x^4-32x$ дорівнює нулю.

Розв'язання	Коментар
$f'(x)=\left(x^4-32x\right)'=\left(x^4\right)'-32x'=$ $=4x^3-32.$ $f'(x)=0.$ Тоді $4x^3-32=0$, $x^3=8$, $x=2$.	Щоб знайти відповідні значення x, достатньо знайти похідну заданої функції, прирівняти її до нуля і розв'язати одержане рівняння.

Відповідь: 2.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Запишіть правила знаходження похідної суми, добутку та частки двох функцій. Проілюструйте їх застосування на прикладах.
2. Запишіть формулу знаходження похідної степеневої функції x^n. Проілюструйте її застосування на прикладах.
3. Поясніть на прикладах правило знаходження похідної складеної функції.

ВПРАВИ

У завданнях 14.1–14.5 знайдіть похідну функції.

14.1°. 1) $y=x^8$; 2) $y=x^{-5}$; 3) $y=x^{\frac{2}{3}}$; 4) $y=x^{20}$; 5) $y=x^{-20}$; 6) $y=x^{-\frac{1}{2}}$.

14.2. 1°) $f(x)=x+3$; 2°) $f(x)=x^5-x$; 3) $f(x)=\frac{1}{x}-x^3$.

14.3. 1) $f(x)=2x^3+3x$; 2) $f(x)=x^2+5x+2$; 3) $f(x)=x^4-2x^2-1$.

14.4. 1) $y=x^2\left(2x+x^4\right)$; 2) $y=(2x-1)\left(1-x^2\right)$; 3) $y=\left(3+x^3\right)(2-x)$; 4) $y=\sqrt{x}\left(3x^2-x\right)$.

14.5. 1) $y=\frac{x^2}{x+3}$; 2) $y=\frac{2x+1}{3x-2}$; 3) $y=\frac{2-x}{5x+1}$; 4) $y=\frac{1-2x}{x^2}$.

14.6. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у зазначених точках:

1°) $f(x)=x^2+2x$; $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$; 2) $f(x)=\frac{x+1}{2x-3}$; $x=0$, $x=-3$.

14.7. Знайдіть значення x, для яких похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю:

1°) $f(x)=3x^2-6x$; 2°) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+5$; 3) $f(x)=12x+\frac{3}{x}$.

14.8. Розв'яжіть нерівність $f'(x)<0$, якщо:

1°) $f(x)=2x-x^2$; 2°) $f(x)=x^3+3x^2$; 3) $f(x)=2x+\frac{8}{x}$.

14.9. Задайте формулами елементарні функції $f(u)$ і $u(x)$, з яких складається складена функція $y=f(u(x))$:

1) $y=\sqrt{\sin x}$; 2) $y=(2x+x^2)^5$; 3) $y=\sqrt{x^3-x}$; 4) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

14.10. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y=(2x^3-4x)^5$;

2°) $y=\sqrt{2x+6}$;

3°) $y=\frac{1}{2x-8}$;

4) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$;

5) $y=\sqrt{\sin x}$;

6) $y=\sqrt{\frac{1}{x}-2}$;

7*) $y=\sqrt{1-2\cos x}$.

14.11. Знайдіть похідну функції $f(x)$:

1) $f(x)=(x^2-x)^3$;

2) $f(x)=(2x-1)^{-5}$;

3) $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^4$;

4) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$.

14.12. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x)=x^2+3x$, $x_0=2$;

2) $f(x)=x^3-x$, $x_0=-3$;

3) $f(x)=\sqrt{2x-x^3}$, $x_0=1$;

4) $f(x)=2x^3-\frac{1}{x}$, $x_0=-1$.

Виявіть свою компетентність

14.13. Наведіть приклад моделі складеної функції з реального життя.

§ 15. ПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Таблиця 29

$c'=0$ (c — стала)	$(x)'=1$	$(x^n)'=nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$

$(\sin x)'=\cos x$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{ctg}\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Формули $c'=0$ (c — стала), $(x)'=1$, $(x^n)'=nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$ було обґрунтовано в § 13 і 14.

Для обґрунтування формули $(\sin x)'=\cos x$ використаємо те, що при малих значеннях α значення $\sin\alpha\approx\alpha$ (наприклад, $\sin 0{,}01\approx 0{,}010$, $\sin 0{,}001\approx 0{,}001$). Тоді при $\alpha\to 0$ відношення $\frac{\sin\alpha}{\alpha}\to 1$, тобто

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1^{*}. \qquad (1)$$

Якщо $y=f(x)=\sin x$, то, використовуючи формулу перетворення різниці синусів у добуток і схему знаходження похідної за означенням (§ 13, п. 3), маємо:

1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=$

$$=2\sin\frac{x_0+\Delta x-x_0}{2}\cos\frac{x_0+\Delta x+x_0}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

* Обґрунтування цієї формули наведено в матеріалі «Поняття й основні властивості границі функції та границі послідовності» (див. інтернет-підтримку підручника).

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right).$

3) При $\Delta x\to 0$ $\dfrac{\Delta x}{2}\to 0$. Тоді $\cos\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\to\cos(x_0)$, а враховуючи рівність (1), $\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\to 1$. При $\Delta x\to 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 1\cdot\cos x_0=\cos x_0$, тобто $f'(x_0)=\cos x_0$. Отже, похідна функції $y=\sin x$ у довільній точці x:

$$(\sin x)'=\cos x.$$ ■

▸ Ураховуючи, що за формулами зведення $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, і використовуючи правило знаходження похідної складеної функції, одержуємо:

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\sin x\cdot(0-1)=-\sin x.$$

Отже,

$$(\cos x)'=-\sin x.$$ ■

▸ Для знаходження похідних $\operatorname{tg}x$ і $\operatorname{ctg}x$ використаємо формули: $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ і правило знаходження похідної частки.

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже,

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$ ■

Формулу $(\operatorname{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ обґрунтуйте самостійно.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x)=\frac{x^3}{\cos 3x}$.

Розв'язання

1) ▶ $f'(x)=\left(\sin^2 x+\sqrt{\frac{x}{2}}\right)'=\left(\sin^2 x\right)'+\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)'=$

$=2\sin x(\sin x)'+\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}}}\left(\frac{x}{2}\right)'=$

$=2\sin x\cos x+\frac{1}{2\sqrt{2x}}=\sin 2x+\frac{1}{2\sqrt{2x}}$. ■

2) ▶ $f'(x)=\left(\frac{x^2}{\cos 3x}\right)'=$

$=\frac{\left(x^2\right)'\cdot\cos 3x-(\cos 3x)'\cdot x^2}{(\cos 3x)^2}=$

$=\frac{2x\cdot\cos 3x-(-\sin 3x)(3x)'\cdot x^2}{\cos^2 3x}=$

$=\frac{2x\cos 3x+3x^2\cdot\sin 3x}{\cos^2 3x}$. ■

Коментар

Послідовно визначаємо, від якого виразу слід узяти похідну (орієнтуючись на результат останньої дії).

У завданні 1 спочатку беруть похідну суми: $(u+v)'=u'+v'$. Потім для кожного з доданків використовують похідну складеної функції: беруть похідну від u^2 і $\sqrt{u}$ і помножують на u'. Одержаний результат бажано спростити за формулою $2\sin x\cos x=\sin 2x$.

У завданні 2 спочатку беруть похідну частки:

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, а для похідної знаменника використовують похідну складеної функції (похідну $\cos u$ помножують на u').

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Запишіть формули знаходження похідних від тригонометричних функцій.
2*. Обґрунтуйте формули знаходження похідних від тригонометричних функцій.

ВПРАВИ

У завданнях 15.1–15.7 знайдіть похідну функції.

15.1°. 1) $y=\cos x+1$; 2) $y=2\sin x-3x$; 3) $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

15.2. 1) $f(x)=x\operatorname{tg} x$; 2) $f(x)=x\operatorname{ctg} x$; 3) $f(x)=\sin x\operatorname{tg} x$.

15.3. 1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$; 3) $f(x)=\sin^2 x$.

15.4. 1) $y=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; 2) $y=\cos^2 3x-\sin^2 3x$.

15.5*. 1) $y=\sqrt{1+\sin x}$; 2) $y=\cos x^2$; 3) $y=\sin(\cos x)$.

15.6. 1) $y=x^5+\sin 4x$; 2) $y=x^3\sin x$; 3) $y=(\sin x-\cos x)^2$.

15.7. 1) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2}$; 2) $y=\sqrt{x+\sin x}$; 3) $y=\sqrt{x}\operatorname{tg} x$.

У завданнях 15.8, 15.9 обчисліть значення похідної функції f у заначеній точці.

15.8. 1°) $f(x)=\cos 2x$, $x=\dfrac{\pi}{2}$; 2°) $f(x)=x+\operatorname{tg} x$, $x=0$.

15.9. 1) $f(x)=x^3+\sin x$, $x=0$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $x=1$.

У завданнях 15.10, 15.11 знайдіть значення x, для яких похідна функції f дорівнює нулю.

15.10. 1°) $f(x)=2-\cos x$; 2°) $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}x$; 3) $f(x)=\sin^2 2x$.

15.11. 1°) $f(x)=x^3-6x^2-7$; 3) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$;

2°) $f(x)=x^4-4x^3+5$; 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$.

15.12. Розв'яжіть нерівність $f'(x)>0$, якщо:

1°) $f(x)=12x-x^3+1$; 2°) $f(x)=2x^3-12x^2+18x+5$.

15.13. Знайдіть значення x, при яких значення похідної функції $f(x)$: а) дорівнює нулю, б) додатне, в) від'ємне.

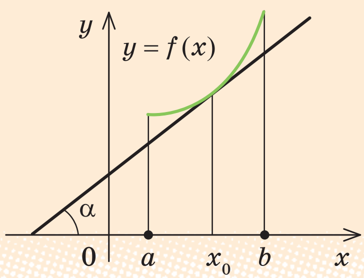
1) $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$; 2) $f(x)=2x^4-16x^3+2$.

§ 16. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ ПРОМІЖКІВ ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ ТА ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЇ

Таблиця 30

1. Монотонність і сталість функції

Достатня умова зростання функції

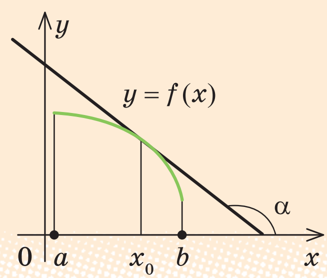


$$0° < \alpha < 90°$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha > 0$$

Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ $f'(x) > 0$**, то функція** $f(x)$ **зростає** на цьому інтервалі

Достатня умова спадання функції

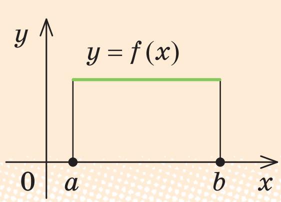


$$90° < \alpha < 180°$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha < 0$$

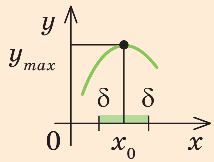
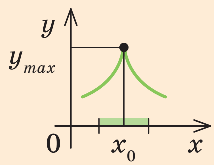
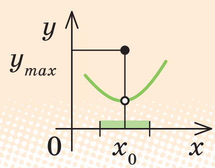
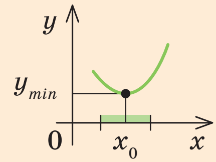
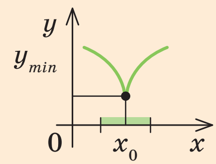
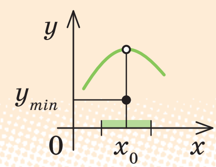
Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ $f'(x) < 0$**, то функція** $f(x)$ **спадає** на цьому інтервалі

Необхідна і достатня умова сталості функції



Функція $f(x)$ **є сталою на інтервалі** $(a; b)$ **тоді і тільки тоді, коли** $f'(x) = 0$ **в усіх точках цього інтервалу**

2. Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції

Точки максимуму	Точки мінімуму
Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають ***точкою максимуму*** цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.   	Точку x_0 з області визначення функції $f(x)$ називають ***точкою мінімуму*** цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.   
$x_{\max} = x_0$ — *точка максимуму*	$x_{\min} = x_0$ — *точка мінімуму*

Точки максимуму і мінімуму називають *точками екстремуму.*

Значення функції в точках максимуму і мінімуму називають екстремумами функції (максимумом і мінімумом функції).

$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(x_0)$ — *максимум*	$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(x_0)$ — *мінімум*

3. Критичні точки

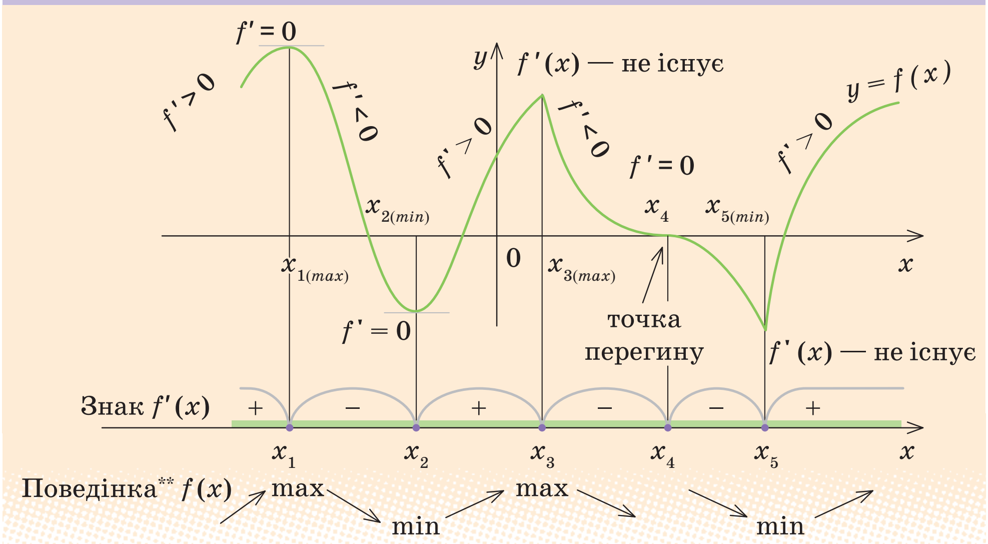
Означення	Приклад
Критичними точками функції **називають внутрішні точки її області визначення, у яких похідна функції дорівнює нулю*** **або не існує**	$f(x) = x^3 - 12x$ $(D(f) = \boldsymbol{R})$. $f'(x) = 3x^2 - 12$ — існує на всій області визначення. $f'(x) = 0$ при $3x^2 - 12 = 0$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$ — критичні точки

* Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю, називають також стаціонарними точками.

4. Необхідна і достатня умови екстремуму

Необхідна умова екстремуму	Достатня умова екстремуму
У точках екстремуму похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує (але не в кожній точці x_0, де $f'(x_0)=0$ або $f'(x_0)$ не існує, буде екстремум)	*Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак при переході[*] через точку x_0, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$*
x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$ $\Downarrow$ $f'(x_0)=0$ або $f'(x_0)$ — не існує	У точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «+» на «–» $\Rightarrow$ x_0 — точка максимуму У точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «–» на «+» $\Rightarrow$ x_0 — точка мінімуму

5. Приклад графіка функції $y=f(x)$, що має екстремуми (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — критичні точки)

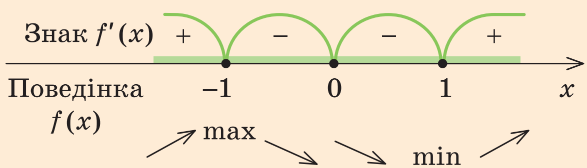


---

[*] Мається на увазі перехід через точку x_0 при русі зліва направо.

[**] Знаком «↗» позначено зростання функції, а знаком «↘» — її спадання на відповідному проміжку.

6. Дослідження функції $y=f(x)$ на монотонність і екстремуми

Схема	Приклад: $y=f(x)=3x^5-5x^3+1$
1. Знайти область визначення функції.	Область визначення: $D(f)=\boldsymbol{R}$
2. Знайти похідну $f'(x)$.	$f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x^2-1)=$ $=15x^2(x-1)(x+1)$
3. Знайти критичні точки, *тобто внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує.*	$f'(x)$ існує на всій області визначення. $f'(x)=0$ при $x=0$, $x=1$, $x=-1$.
4. Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.	
5. Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму.	
6. Записати результат дослідження (*проміжки монотонності та екстремуми*).	$f(x)$ зростає на кожному з проміжків: $(-\infty;-1]$ і $[1;+\infty)$*; $f(x)$ спадає на проміжку $[-1;1]$. Точки екстремуму: $x_{max}=-1$; $x_{min}=1$. Екстремуми: $y_{max}=f(-1)=3$; $y_{min}=f(1)=-1$

* Як зазначається в прикладі 2 § 16, оскільки функція $f(x)$ неперервна (наприклад, через те, що вона диференційовна на всій області визначення), то точки –1 і 1 можна включити до проміжків зростання і спадання функції.

Із поясненням і обґрунтуванням можливості застосування похідної до дослідження функції на зростання чи спадання й екстремуми та обґрунтуванням відповідних умов, зазначених у табл. 30, можна детально ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Функція $y=f(x)$ означена на проміжку $(-7;8)$. На рис. 16.1 зображено графік її похідної.

1) Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.
2) Знайдіть критичні точки функції. Визначте, які з них є точками максимуму, які — точками мінімуму, а які не є точками екстремуму.

Розв'язання

1) ▶ За графіком маємо, що $f'(x)>0$ на проміжках $(-4;2)$ та $(6;8)$, отже, $f(x)$ зростає на цих проміжках. Аналогічно $f'(x)<0$ на проміжках $(-7;-4)$ та $(2;6)$, отже, $f(x)$ спадає на цих проміжках. Оскільки в точках -4, 2 і 6 існує похідна $f'(x)$, то функція $f(x)$ неперервна в цих точках, і тому їх можна включити до проміжків зростання та спадання функції.

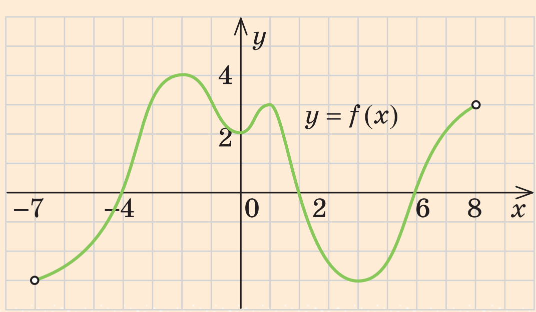
Відповідь: $f(x)$ зростає на проміжках $[-4;2]$ та $[2;8)$ і спадає на проміжках $(-7;-4]$ та $[2;6]$. ■

2) ▶ Похідна $f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ і дорівнює нулю в точках -4, 2 і 6. Це внутрішні точки області визначення, отже, критичними точками будуть тільки точки -4, 2 і 6.

Оскільки похідна існує на всій області визначення функції, то функція неперервна в кожній точці області визначення. У точках -4 і 6 похідна змінює знак з «−» на «+», отже, це точки мінімуму. У точці 2 похідна змінює знак з «+» на «−», отже, це точка максимуму.

Відповідь: $x_{1\,\min}=-4$, $x_{2\,\min}=6$, $x_{\max}=2$. ■

Рис. 16.1



Приклад 2. Для функції $f(x)=x+\frac{25}{x}$ знайдіть проміжки монотонності, точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.

Розв'язання

1) ▶ Область визначення $D(f)$: $x \neq 0$, тобто $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

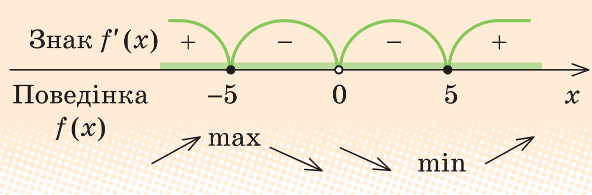
2) $f'(x)=x'+25\left(\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{25}{x^2}$.

3) Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$.

$f'(x)=0$. Тоді $1-\frac{25}{x^2}=0$, отже, $x^2=25$, тобто $x=5$ та $x=-5$ — критичні точки.

4) Позначаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 16.2).

Рис. 16.2



Одержуємо, що функція $f(x)$ зростає на проміжках $(-\infty; -5]$ та $[5; +\infty)$ і спадає на проміжках $[-5; 0)$ і $(0; 5]$.

У точці −5 похідна змінює знак із плюса на мінус, отже, це точка максимуму; у точці 5 похідна змінює знак із мінуса на плюс, отже, це точка мінімуму:

$$x_{\max}=-5, \; x_{\min}=5.$$

Тоді $y_{\max}=f(-5)=-10$, $y_{\min}=f(5)=10$. ■

Коментар

Досліджувати функцію на монотонність та екстремум можна за схемою:

1) *Знайти область визначення функції.*
2) *Знайти похідну* $f'(x)$.
3) *Знайти критичні точки* (тобто внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує).
4) *Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.*
5) *Відносно кожної критичної точки визначити, чи вона є точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму.*

Функція неперервна в кожній точці області визначення (вона диференційовна в кожній точці області визначення) і тому, записуючи проміжки зростання і спадання функції, критичні точки можна включити до цих проміжків. Для з'ясування того, чи є критична точка точкою екстремуму, використовуємо достатні умови екстремуму.

Результати дослідження функції на монотонність і екстремуми зручно фіксувати не тільки у вигляді схеми, зображеної на рис. 16.2, а й у вигляді спеціальної таблиці:

x	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; 0)$	$(0; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	$\searrow$	10	$\nearrow$
		max			min	

Приклад 3*. Доведіть, що рівняння $x^3 - x^2 + 5x - 14 = 0$ має єдиний корінь, і знайдіть цей корінь.

Розв'язання

Розглянемо функцію $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 14$. Її область визначення — всі дійсні числа. Похідна: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Квадратний тричлен $3x^2 - 2x + 5$ має від'ємний дискримінант і додатний коефіцієнт при старшому члені, тому завжди $3x^2 - 2x + 5 > 0$.

Але якщо $f'(x) > 0$ на всій області визначення, то функція $f(x)$ є зростаючою на всій області визначення, і значення 0 вона може набувати тільки в одній точці. Отже, задане рівняння може мати тільки один корінь. Оскільки $f(2) = 2^3 - 2^2 + 5 \cdot 2 - 14 = 0$, то $x = 2$ і є єдиним коренем заданого рівняння.

Коментар

Згадаємо, що *зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці з її області визначення*. Тому досить за допомогою похідної з'ясувати, що функція $f(x) = x^3 - x^2 + 5x - 14$ є зростаючою (або спадною). Тоді значення 0 вона може набути тільки в одній точці. Потім, знаючи, що рівняння має єдиний корінь, пробуємо підібрати цей корінь (як правило, замість x пробуємо підставити цілі значення 0; ± 1; ± 2; …).

Оцінюючи знак похідної, корисно пам'ятати, що графік квадратичної функції з додатним коефіцієнтом при старшому члені і від'ємним дискримінантом повністю розміщений вище від осі Ox, тобто ця квадратична функція приймає тільки додатні значення.

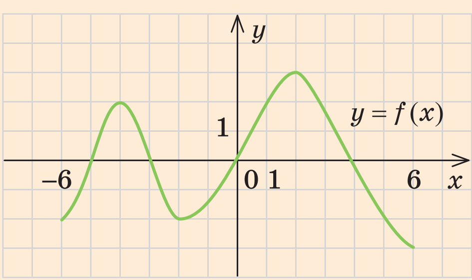
ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Дайте означення зростаючої та спадної на множині функції. Наведіть приклади таких функцій та їх графіків.
2. Сформулюйте достатні умови зростання та спадання функції. Наведіть приклади їх застосування.
3. Сформулюйте умову сталості функції на інтервалі.
4. Зобразіть графік функції, що має екстремуми. Дайте означення точок екстремуму функції та її екстремумів.
5. Які точки називають критичними?
6. Сформулюйте необхідну умову екстремуму функції.
7. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму в точці.
8. За якою схемою можна досліджувати функцію на монотонність та екстремуми? Наведіть приклад такого дослідження.

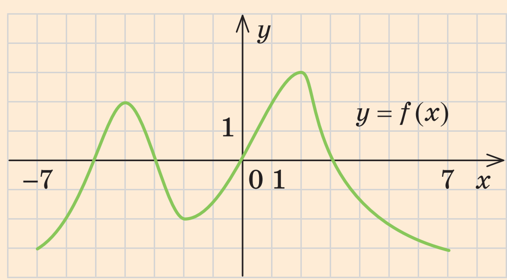
ВПРАВИ

16.1°. На рис. 16.3 зображено графік функції $y = f(x)$ (на рис. 16.3, *а*, функція задана на проміжку $[-6; 6]$, а на рис. 16.3, *б*, — на проміжку $[-7; 7]$). Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

Рис. 16.3



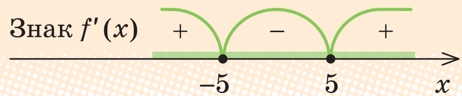
а



б

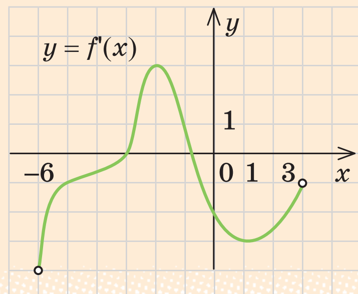
16.2°. Відомо, що похідна деякої функції $y=f(x)$, заданої на множині всіх дійсних чисел, має такі знаки, як показано на рис. 16.4. Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

Рис. 16.4



16.3. Функція $y=f(x)$ означена на проміжку $(-6;3)$. На рис. 16.5 зображено графік її похідної. Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

Рис. 16.5



16.4. Доведіть, що задана функція зростає на всій області визначення:

1°) $f(x)=x^3+5x$;

2) $f(x)=x^3-x^2+x-7$;

3) $f(x)=2x+\cos x$;

4) $f(x)=\sin x+3x+2$.

16.5. Доведіть, що задана функція спадає на всій області визначення:

1°) $y=-x^3-3x$;

2) $f(x)=-x^7+x^4-x+2$;

3) $f(x)=\cos x-6x$;

4) $f(x)=\sin x-2x+1$.

У завданнях 16.6, 16.7 знайдіть проміжки зростання і спадання функції.

16.6. 1°) $f(x)=x^2-2x$;

2) $f(x)=x^3-24x+2$;

3) $f(x)=x^4-2x^2$;

4) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$;

5) $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$;

6*) $f(x)=\sqrt[7]{x^3}$.

16.7. 1) $y=x^3-27x+1$;

2) $y=x-x^5$;

3*) $y=x+2\cos x$;

4*) $y=x-\sin 2x$.

16.8*. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція зростає на всій числовій прямій:

1) $f(x)=x^3-3ax$;

2) $f(x)=ax+\cos x$;

3) $f(x)=x^3+ax^2+3ax-5$.

16.9*. Доведіть, що рівняння має єдиний корінь, і знайдіть цей корінь.

1) $2x^3+3x-5=0$;
3) $5x-\cos 3x-5\pi=1$;
2) $x^3-x^2+x=0$;
4) $x^3-x^5-x=1$.

16.10°. За графіком функції $y=f(x)$, зображеним на рис. 16.3, знайдіть точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$. Чи існує похідна в кожній із цих точок? Якщо існує, то чому дорівнює її значення?

16.11°. Відомо, що похідна деякої функції $y=f(x)$, заданої на множині всіх дійсних чисел, має такі знаки, як показано на рис. 16.4, і $f'(-5)=f(5)=0$. Укажіть критичні точки, точку максимуму і точку мінімуму цієї функції.

16.12°. Користуючись даними про похідну $f'(x)$, наведеними в таблиці і враховуючи, що область визначення функції $D(f)=\boldsymbol{R}$, укажіть:
1) проміжки зростання і спадання функції $f(x)$;
2) точки максимуму і точки мінімуму функції $f(x)$.

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;1)$	1	$(1;5)$	5	$(5;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

16.13. Функція $y=f(x)$ означена на проміжку $(-6;3)$. На рис. 16.5 зображено графік її похідної. Знайдіть критичні точки функції. Визначте, які з них є точками максимуму, які — точками мінімуму, а які не є точками екстремуму.

У завданнях 16.14, 16.15 дослідіть задані функції на екстремуми.

16.14°. 1) $f(x)=1+12x-x^3$;
3) $f(x)=x^4-8x^3$;
2) $f(x)=x^4-2x^2-5$;
4) $f(x)=5x-x^5$.

16.15. 1) $y=\sqrt{1-x^2}$;
3) $y=x+\dfrac{1}{x}$;
2) $y=x-\sqrt{x}$;
4) $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$.

16.16. Визначте проміжки монотонності, точки екстремуму функції та значення функції в точках екстремуму.

1°) $f(x)=x^2-6x+5$;
3) $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$;
2°) $f(x)=x^4-2x^2$;
4) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$.

§ 17. ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ПОБУДОВИ ЇЇ ГРАФІКА

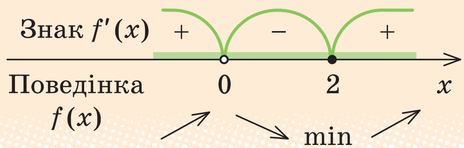
Таблиця 31

Схема дослідження функції	Приклад
1. Знайти область визначення функції.	Побудуйте графік функції $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$. 1) Область визначення: $x\neq 0$ $\left(D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\right)$.
2. З'ясувати, чи є функція парною або непарною (чи періодичною*).	2) Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$.
3. Точки перетину графіка з осями координат (якщо можна знайти).	3) Графік не перетинає вісь Oy $(x\neq 0)$. На осі Ox $y=0$: $x+\frac{4}{x^2}=0$, $x^3=-4$, $x=-\sqrt[3]{4}$ $(\approx 1,6)$ — абсциса точки перетину графіка з віссю Ox.
4. Похідна і критичні точки функції.	4) $f'(x)=x'+\left(\frac{4}{x^2}\right)'=1-\frac{8}{x^3}$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення). $f'(x)=0$; $1-\frac{8}{x^3}=0$. При $x\neq 0$ маємо: $x^3=8$; $x=2$ — критична точка.

* Найчастіше періодичність доводиться встановлювати для тригонометричних функцій.

5. Проміжки зростання і спадання функції та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).

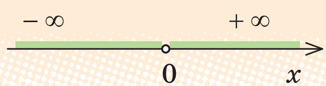
5) Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.



Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $[2; +\infty)$ і спадає на проміжку $(0; 2]$. Оскільки в критичній точці 2 похідна змінює знак з «–» на «+», то $x = 2$ — точка мінімуму: $x_{min} = 2$. Тоді $y_{min} = f(2) = 3$.

6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення (цей етап не входить до мінімальної схеми дослідження функції).

6)



При $x \to 0$ справа (і при $x \to 0$ зліва)

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} \to \left(\frac{4}{+0}\right) \to +\infty^{*}.$$

При $x \to -\infty$ (і при $x \to +\infty$) значення $\frac{4}{x^2} \to 0$, тоді $f(x) \to x$ (тобто при $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ і при $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$)**.

7. Якщо необхідно, знайти координати додаткових точок, щоб уточнити поведінку графіка функції.

7)

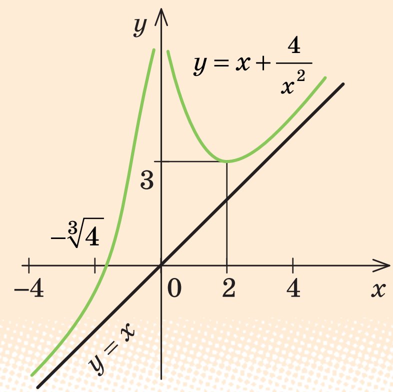
x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	-4
y	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	$-3\frac{3}{4}$

* У цьому випадку говорять, що $x = 0$ — вертикальна асимптота графіка функції $f(x)$.

** У цьому випадку говорять, що $y = x$ — похила асимптота графіка функції $f(x)$.

8. На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції

8)



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Для побудови графіка функції доцільно використовувати схему дослідження тих властивостей функції, які допомагають скласти певне уявлення про вигляд її графіка. Якщо таке уявлення складене, то можна будувати графік функції за знайденими характерними точками. Фактично ми будемо користуватися схемою дослідження функції, наведеною в § 9, та в табл. 31, тільки для дослідження функції на зростання та спадання й екстремуми використаємо похідну. Зазначимо, що ця схема є орієнтовною.

Перш за все потрібно з'ясувати і записати область визначення функції. Якщо немає спеціальних обмежень, то функцію вважають заданою при всіх значеннях аргумента, при яких існують усі вирази, що входять до запису функції (див. також другу сторінку форзацу).

Із особливостями виконання решти етапів дослідження функції та урахування їхніх результатів можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад. 1) Побудуйте графік функції $f(x)=x^4-8x^2-9$.

2*) Скільки коренів має рівняння $x^4-8x^2-9-a=0$ залежно від значення параметра a?

Коментар

Для того щоб розв'язати завдання 1, досліджуємо функцію $f(x)$ за загальною схемою і за результатами дослідження будуємо її графік. Для знаходження точки перетину графіка з віссю Ox прирівнюємо функцію до нуля і розв'язуємо одержане біквадратне рівняння.

Під час розв'язування завдання 2 можна користуватися таким орієнтиром: *якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то для аналізу заданої ситуації зручно використовувати графічну ілюстрацію розв'язування.*

Для того щоб визначити, скільки коренів має рівняння $f(x)=a$, достатньо знайти, скільки точок перетину має графік функції $y=f(x)$ з прямою $y=a$ при різних значеннях параметра a. (Для цього на відповідному рисунку доцільно зобразити всі характерні положення прямої.)

Розв'язання

1) Дослідимо функцію $f(x)=x^4-8x^2-9$.

1. Область визначення: $D(f)=\boldsymbol{R}$.

2. Функція парна, оскільки для всіх значень x з її області визначення

$$f(-x)=(-x)^4-8(-x)^2-9=x^4-8x^2-9=f(x).$$

Отже, графік функції симетричний відносно осі Oy.

3. Точка перетину графіка з віссю Oy: $x=0$, $y=f(0)=-9$.

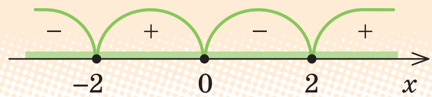
Точки перетину графіка з віссю Ox: $x^4-8x^2-9=0$. Заміна $x^2=t$ дає: $t^2-8t-9=0$; $t_1=-1$, $t_2=9$. Тоді $x^2=-1$ (коренів немає) або $x^2=9$. Звідси $x=3$ та $x=-3$ — абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.

4. Похідна і критичні точки. $f'(x)=4x^3-16x$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція неперервна на всій числовій прямій).

$f'(x)=0$. Тоді $4x^3-16x=0$, $4x\left(x^2-4\right)=0$, $4x(x-2)(x+2)=0$, отже, $x=0$, $x=2$ та $x=-2$ — критичні точки.

5. Позначаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 17.1). Складаємо таблицю, у якій позначаємо проміжки зростання і спадання та екстремуми функції:

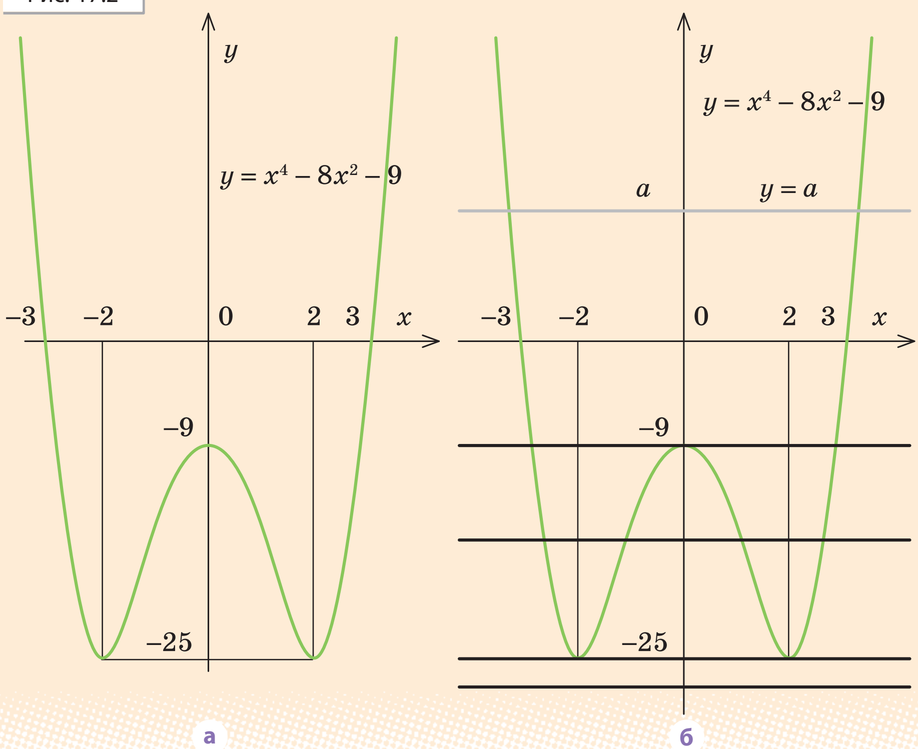
Рис. 17.1



x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-25	$\nearrow$	-9	$\searrow$	-25	$\nearrow$
		min		max		min	

6. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $y = x^4 - 8x^2 - 9$ (рис. 17.2, *а*). ■

Рис. 17.2



2) Відзначимо, що задане рівняння $x^4-8x^2-9-a=0$ рівносильне рівнянню $x^4-8x^2-9=a$. Розв'яжемо останнє рівняння графічно. Для цього побудуємо графік функції $y=x^4-8x^2-9$ (див. завдання 1) та графік функції $y=a$ (рис. 17.2, *б*).

Як бачимо, при $a<-25$ рівняння не має коренів (немає точок перетину графіків); при $a=-25$ та при $a>-9$ рівняння має два корені (графіки мають дві спільні точки); при $a=-9$ рівняння має три корені (графіки мають три спільні точки) і при $-25<a<-9$ рівняння має чотири корені (графіки мають чотири спільні точки). ■

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. За якою схемою можна досліджувати властивості функції для побудови її графіка?
2*. Охарактеризуйте особливості виконання основних етапів дослідження функції та відображення результатів дослідження на графіку функції. Наведіть приклади.

ВПРАВИ

17.1°. Побудуйте схематичний графік функції, визначеної і неперервної на множині всіх дійсних чисел, користуючись її властивостями, наведеними в таблиці.

1)

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2:0)$	0	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$
		max		min	

2)

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$
		min		max		min	

У завданнях 17.2, 17.3 дослідіть функцію і побудуйте її графік.

17.2°. 1) $f(x)=x^3-3x^2$; 3) $f(x)=x^4-2x^2$;

2) $f(x)=3x-x^3+1$; 4) $f(x)=5x^4-4x^5$.

17.3. 1) $f(x)=(x^2-2)^2$; 3) $f(x)=\frac{4}{x}-x$;

2) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; 4) $f(x)=2\sqrt{x}-x$.

17.4. а) Дослідіть функцію $f(x)$ і побудуйте її графік.

б) Знайдіть область значень функції $f(x)$.

в*) Скільки коренів має рівняння $f(x)=a$ залежно від значення параметра a?

1) $f(x)=x+\frac{4}{x}$; 3) $y=x-\sqrt{x}$;

2) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$; 4) $y=\frac{x+4}{\sqrt{x}}$.

17.5. Скільки коренів має рівняння:

1) $x^4-4x^3+1=0$; 3) $x^2-\frac{1}{3}x^3-3=0$;

2) $8x^3-3x^4+2=0$; 4) $x^3-3x^2-9x-7=0$?

17.6*. Дослідіть функцію і побудуйте її графік:

1) $y=\frac{x}{x^2-1}$; 3) $y=2\sin x-\cos 2x$;

2) $y=2x-5\sqrt[5]{x^2}$; 4) $y=\cos^2 x-\cos x$.

Виявіть свою компетентність

17.7. Перевірте правильність виконання завдання 17.6, побудувавши відповідні графіки за допомогою комп'ютерних програм.

§ 18. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

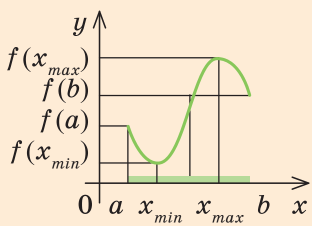
Таблиця 32

1. Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку

Властивість

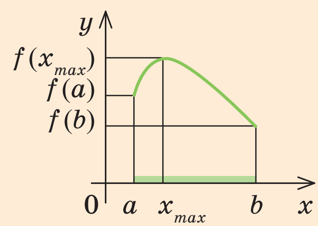
Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває найбільшого і найменшого значень на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.

Приклади



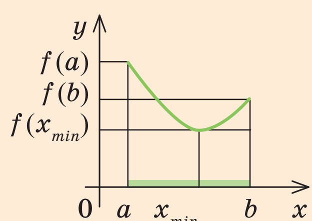
$$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\max})$$

$$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\min})$$



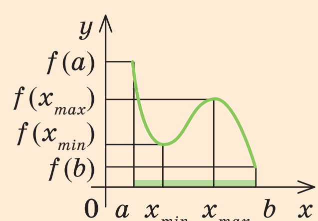
$$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\max})$$

$$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$$



$$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$$

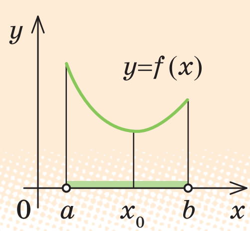
$$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\min})$$



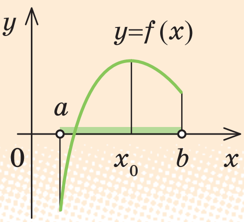
$$\max\limits_{[a;b]} f(x)=f(a)$$

$$\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$$

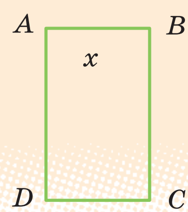
2. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку	
Схема	Приклад Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^3-12x+12$ на відрізку $[1;3]$.
1. Упевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.	Область визначення заданої функції — всі дійсні числа $(D(f)=\boldsymbol{R})$, отже, заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.	$f'(x)=3x^2-12$.
3. Знайти критичні точки: $f'(x)=0$ або не існує.	$f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна на заданому відрізку). $f'(x)=0$; $3x^2-12=0$ при $x=2$ або $x=-2$.
4. Вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку.	Заданому відрізку $[1;3]$ належить лише критична точка $x=2$.
5. Обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка.	$f(1)=1$; $f(2)=-4$; $f(3)=3$.
6. Порівняти одержані значення функції та вибрати з них найменше і найбільше.	$\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(3)=3$, $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=-4$.

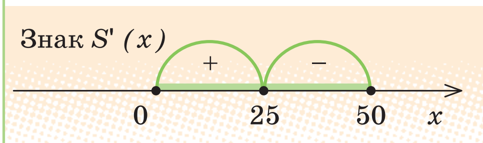
3. Знаходження найбільшого або найменшого значення функції, неперервної на інтервалі	
Властивість	Ілюстрація
Якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найменшого значення в точці x_0.	

Якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка максимуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найбільшого значення в точці x_0.



4. Задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції

Схема	Приклад
	Є дріт завдовжки 100 м. Потрібно огородити ним прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайдіть розміри ділянки.
1. **Одну з величин, яку потрібно знайти** (або величину, за допомогою якої можна дати відповідь на запитання задачі), **позначити через x** (і за змістом задачі накласти обмеження на x).	► Нехай ділянка має форму прямокутника $ABCD$ (див. рисунок) зі стороною $AB = x$ (м).  Ураховуючи, що дріт буде натягнуто по периметру прямокутника, одержуємо: $2AB + 2BC = 100$, або $2x + 2BC = 100$, звідси $BC = 50 - x$ (м). Оскільки довжина кожної сторони прямокутника є додатним числом, то $$0 < x < 50.$$
2. **Величину, про яку йдеться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від x.**	Площа прямокутника: $S(x) = AB \cdot BC = x(50 - x) = 50x - x^2$.

3. **Дослідити одержану функцію на найбільше або найменше значення** (найчастіше за допомогою похідної).	Дослідимо функцію $S(x)$ за допомогою похідної. Похідна $S'(x)=50-2x$ існує при всіх дійсних значеннях x (отже, $S(x)$ — неперервна функція на заданому проміжку). $S'(x)=0$, $50-2x=0$, $x=25$ — критична точка.  У точці $x=25$ $S'(x)=50-2x$ змінює знак із плюса на мінус (див. рисунок), отже, $x=25$ — точка максимуму. Ураховуємо, що неперервна функція $S(x)$ має на заданому інтервалі $(0;50)$ тільки одну точку екстремуму $x=25$ і це точка максимуму. Тоді на заданому інтервалі функція набуває свого найбільшого значення в точці $x=25$*.
4. **Упевнитися, що одержаний результат має зміст для початкової задачі**	Отже, площа огородженої ділянки буде найбільшою, якщо сторони прямокутника будуть завдовжки: $AB=x=25$ (м), $BC=50-x=25$ (м), тобто коли ділянка матиме форму квадрата зі стороною 25 м. ■

Із поясненням і обґрунтуванням правил знаходження найбільшого і найменшого значень функції, наведених в табл. 32, та прикладом їх застосування до розв'язування задачі можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

* У розглянутій задачі можна дослідити функцію $S(x)$ і без застосування похідної. Функція $S(x)=50x-x^2$ є квадратичною, її графік — парабола, вітки якої напрямлені вниз. Тоді найбільшого значення ця функція набуває у вершині параболи, тобто при $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-50}{-2}=25$. Це значення належить заданому інтервалу $(0;50)$, отже, на цьому проміжку функція набуває найбільшого значення при $x=25$.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, у яких точках неперервна на відрізку функція може набувати свого найбільшого та найменшого значень на цьому відрізку. Проілюструйте відповідну властивість на графіках функцій.
2. Опишіть схему знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку. Наведіть приклад.
3. Сформулюйте властивості неперервної на інтервалі функції, яка має на цьому інтервалі тільки одну точку екстремуму.
4. Опишіть схему розв'язування задач на найбільше та найменше значення за допомогою дослідження відповідних функцій. Наведіть приклад.

ВПРАВИ

У завданнях 18.1–18.4 знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку.

18.1°. 1) $f(x)=-x^3+3x^2+5,\ [0;3]$; 3) $f(x)=x^4-4x^3+1,\ [-1;1]$;
2) $f(x)=3x^2-2x^3,\ [-1;2]$; 4) $f(x)=x^3-6x^2+1,\ [-2;1]$.

18.2. 1) $f(x)=3\cos x+\cos 3x,\ [0;\pi]$; 3) $f(x)=\operatorname{tg} x-x,\ \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$;
2) $f(x)=5\sin x+\cos 2x,\ [0;\pi]$; 4) $f(x)=\operatorname{ctg} x+x,\ \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

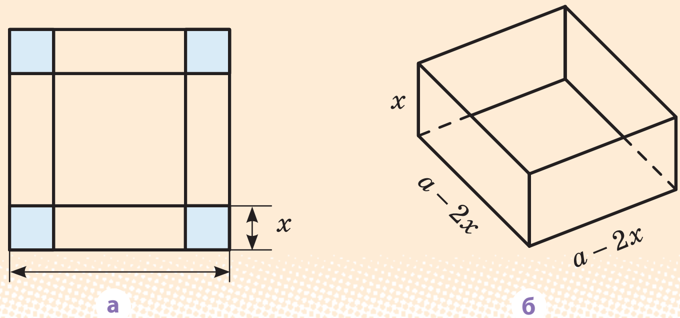
18.3. 1) $f(x)=\frac{x}{8}+\frac{2}{x},\ [1;6]$; 3) $f(x)=x-4x^{-2},\ [-3;-1]$;
2) $f(x)=2\sqrt{x}-x,\ [0;9]$; 4) $f(x)=|x-1|-\sqrt{x},\ [0;4]$.

18.4*. 1) $f(x)=-x^3+3x|x-3|,\ [0;4]$; 3) $f(x)=\frac{1}{x}+|x-2|,\ [1;4]$;
2) $f(x)=2\sqrt{x}-|x-3|,\ [1;4]$; 4) $f(x)=|x^2-x-6|-x^3,\ [-4;4]$.

18.5°. Число 10 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб сума квадратів цих чисел була найменшою.

18.6°. Число 4 розбийте на два доданки так, щоб сума першого доданка з квадратом другого була найменшою.

Рис. 18.1



18.7. Різниця двох чисел дорівнює 8. Які мають бути ці числа, щоб добуток куба більшого числа на друге число був найменшим?

18.8. Із усіх прямокутників, площа яких дорівнює 25 см², знайдіть прямокутник із найменшим периметром.

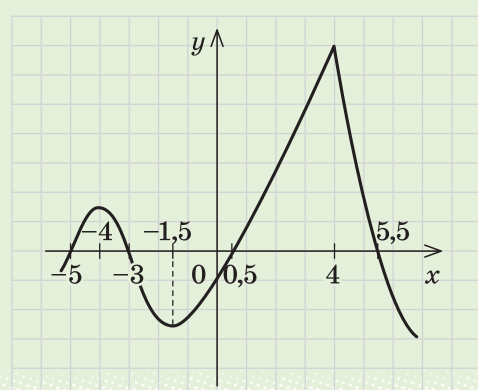
18.9. Із квадратного аркуша картону зі стороною a треба виготовити відкриту зверху коробку, вирізавши по кутах квадратики (рис. 18.1) і загнувши утворені краї. Якою має бути висота коробки, щоб її об'єм був найбільшим?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тест № 3

1. Функція $y=f(x)$ задана графіком (див. рисунок). Укажіть усі точки, в яких похідна функції $y=f(x)$ дорівнює нулю.

А −4; −1,5 В −5; −3; 0,5; 5,5
Б −4; −1,5; 4 Г 4



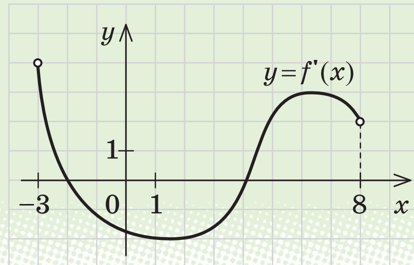
2. Знайдіть похідну функції $y=x^3+\cos x$.

А $3x^2+\sin x$ В $3x^2-\cos x$
Б $3x^2+\cos x$ Г $3x^2-\sin x$

3. Обчисліть значення похідної функції $f(x)=\sqrt{2x+1}$ в точці $x_0=12$.

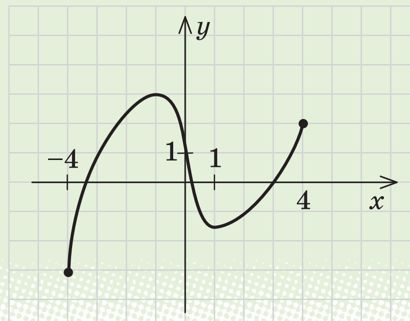
А 0,2 В 5
Б 0,1 Г 0,05

4. На рисунку зображено графік похідної функції $f(x)$, визначеної на інтервалі $(-3;8)$. У якій точці цього інтервалу функція $f(x)$ набуває найменшого значення?



А 1,5 В 4
Б −2 Г 6

5. На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-4;4]$. Установіть відповідність між властивостями (1–3) функції та їх числовими значеннями (А–Г).



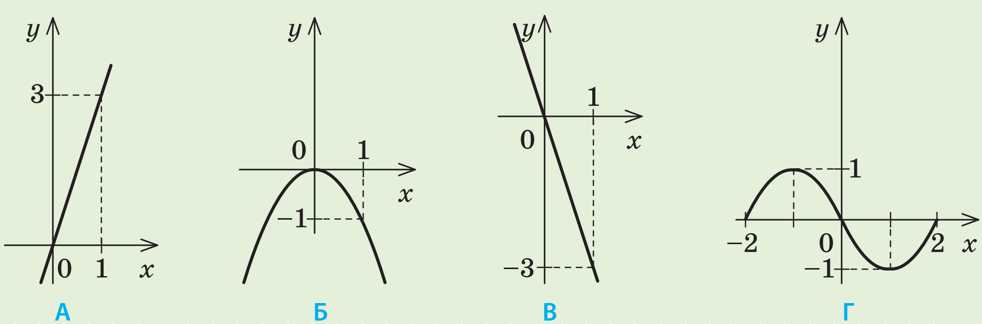
1 Точка локального мінімуму функції
2 Локальний максимум функції
3 Найбільше значення функції на проміжку $[0;4]$

А 1
Б 2
В 3
Г 4

6. Знайдіть миттєву швидкість (у м/с) руху точки в момент часу $t=1$ с, якщо точка рухається прямолінійно за законом $s(t)=t^2+2t+3$ (s вимірюється у метрах, t — у секундах).

А 6 Б 7 В 4 Г 3

7. Серед наведених нижче графіків функцій, які визначені й диференційовні на множині всіх дійсних чисел, укажіть ту функцію, яка на всій області визначення має від'ємну похідну.



8. Укажіть проміжки, на яких функція $y=-x^3+6x^2+7$ спадає.

А $(-\infty;+\infty)$ В $(-\infty;-4]$ та $[-4;+\infty)$

Б $(-\infty;0]$ та $[4;+\infty)$ Г $[0;4]$

9. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y=x^4-2x^2+7$ на проміжку $[-2;0]$ (запишіть розв'язання).

10. Дослідіть функцію $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ на монотонність і екстремуми та побудуйте її графік (запишіть розв'язання).

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Теми навчальних проектів

1. Використання похідної та нерівностей під час розв'язування економічних задач.
2. Метод областей.
3. Завдання з параметрами.
4. Діофант і його рівняння.

Відомості з історії

М. В. Остроградський (1801–1862)

У кожному періоді історії математики були свої видатні вчені, які мали різні долі. Одні зажили слави й безсмертя ще за життя, іншим судилося пройти складні шляхи і розділити трагічну долю свого народу. Звернувшись до інтернет-підтримки, ви дізнаєтеся про життєвий шлях математиків з України, які зробили значний внесок у світову та європейську науку.

М. С. В'язовська (нар. 1984)

М. П. Кравчук (1892–1942)

О. С. Дубинчук (1919–1994)

Н. О. Вірченко (нар. 1930)

ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 1

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

§ 1. Аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них

§ 2. Методи розв'язування геометричних задач

§ 3. Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників

§ 4. Розміщення двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються, паралельні прямі, мимобіжні прямі

§ 5. Паралельність прямої та площини

§ 6. Паралельність двох площин

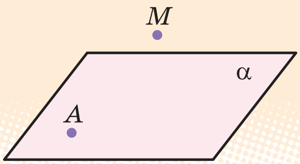
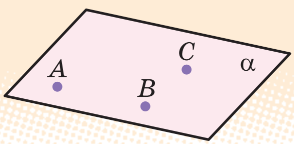
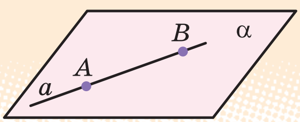
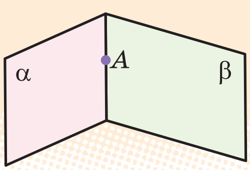
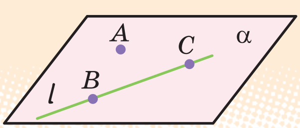
§ 7. Паралельне проектування. Зображення плоских і просторових фігур у стереометрії

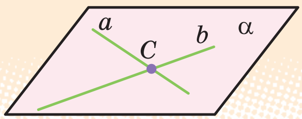
У цьому розділі ви:

- дізнаєтеся про застосування в геометрії аксіоматичного методу — одного з методів побудови наукової теорії;
- навчитеся розв'язувати задачі на побудову перерізів призми та піраміди;
- ознайомитеся з паралельністю прямих і площин у просторі, поняттям і властивостями паралельного проектування;
- навчитеся застосовувати властивості паралельності прямих і площин для розв'язування задач та будувати зображення просторових фігур на площині за допомогою паралельного проектування.

§ 1. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАЙПРОСТІШІ НАСЛІДКИ З НИХ

Таблиця 1

1. Аксіоми стереометрії	
	Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй. $A \in \alpha$; $M \notin \alpha$
	Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
	Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині. Якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то $AB \subset \alpha$.
	Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.
	Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.
2. Наслідки з аксіом стереометрії	
	Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.



Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

3. Означення, ознаки та властивості геометричних фігур і відношень

Означення
включає в себе характеристичні властивості фігури

Ознака
дозволяє довести, що фігури, які розглядаються, є шуканими або пов'язані необхідним співвідношенням (рівність, подібність тощо)

Геометричні фігури або відношення
(рівність, подібність, паралельність, перпендикулярність тощо)

Властивості

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Поняття про стереометрію

Курс геометрії включає планіметрію і стереометрію. На уроках геометрії в 7–9 класах ви вивчали в основному планіметрію, тобто геометрію на площині. Усі фігури, які розглядають у планіметрії, наприклад трикутник, паралелограм, коло, лежать в одній площині. Усі точки кожної з цих фігур належать площині. Тому такі фігури називають плоскими.

Цього року ми вивчатимемо геометрію в просторі — стереометрію.

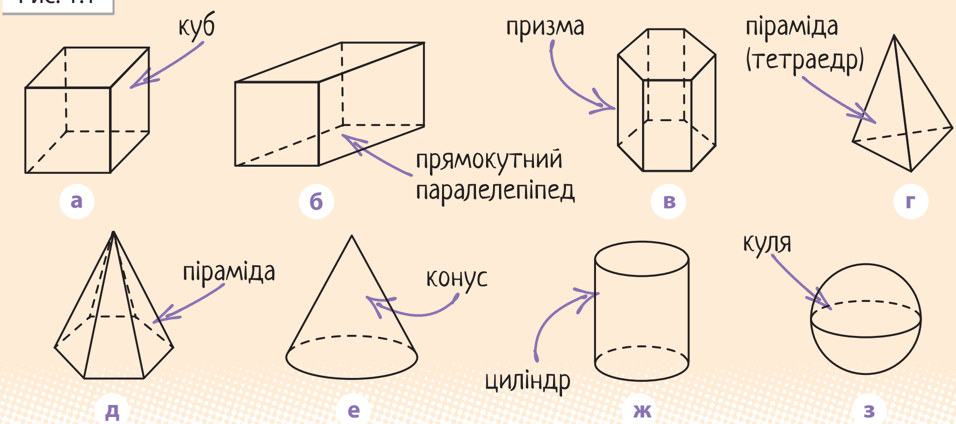
Стереометрією називають розділ геометрії, що вивчає **просторові** фігури та їхні властивості. Просторові фігури можуть бути *неплоскими* (наприклад, куб чи сфера) або *плоскими*. Усю сукупність точок, які розглядають у стереометрії, називають *простором*. **Фігурою** (або фігурою в просторі) називатимемо довільну множину точок, розташованих у просторі.

Зокрема, це всі фігури, розміщені в будь-якій площині, у тому числі й сама ця площина. Отже, плоскі фігури також є просторовими фігурами. Тому основними властивостями плоских фігур, відомими з курсу планіметрії, ми користуватимемося і в стереометрії.

Проте в стереометрії найважливішими є просторові фігури, що не лежать цілком ні в одній площині, тобто *неплоскі* фігури.

Із деякими простими неплоскими фігурами ви зустрічалися в курсі математики початкової школи та 5 класу. До них відносять (рис. 1.1): куб (*а*); прямокутний паралелепіпед (*б*); призму (*в*); піраміду (*г*, *д*); конус (*е*); циліндр (*ж*); кулю (*з*).

Рис. 1.1



Деякі фігури в просторі ще називають *тілами**. Наочно геометричне тіло можна уявити собі як частину простору, що займає фізичне тіло, обмежене деякою поверхнею. Наприклад, поверхня кулі — *сфера* — складається з усіх точок простору, віддалених від однієї точки — *центра* — на відстань, що дорівнює *радіусу*. Ця поверхня обмежує *кулю*, що складається з усіх точок простору, які віддалені від однієї точки — *центра* — на відстань, що не *перевищує радіуса*.

Куб, паралелепіпед, призма і піраміда є многогранниками. Строге означення многогранника дамо в 11 класі. Проте оскільки ми почнемо

* Строге означення тіла та його поверхні буде дано в курсі геометрії 11 класу.

працювати з деякими видами многогранників у 10 класі, то запропонуємо означення, що спираються на наочно-інтуїтивні уявлення.

Планіметрія — від латин. *planum* — площина. Стереометрія — від грецьк. *стереос* — просторовий.

Многогранником *називатимемо обмежене тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників.*

Кожний із цих многокутників називають *гранню* многогранника, сторони многокутників — *ребрами* многогранника (рис. 1.2).

Вершинами многогранника називають вершини його граней. Відрізок, що сполучає вершини многогранника, які не належать одній грані, називають *діагоналлю многогранника*.

Зображаючи многогранники, невидимі ребра (які закриті передніми гранями) виконують штриховими лініями (див. рис. 1.1, 1.2). Як буде показано далі, під час креслення многогранників слід зберігати паралельність відповідних ребер, тому, наприклад, на зображенні куба чи прямокутного паралелепіпеда всі грані є паралелограмами (див. рис. 1.1, *а* і *б*).

Нагадаємо, що всі грані куба — квадрати, а всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, а всі інші n граней — паралелограми, називають **n-кутною призмою**.

Рівні n-кутники називають *основами* призми, а паралелограми — *бічними гранями*. Куб і прямокутний паралелепіпед є окремими випадками чотирикутної призми.

Пірамідою називають многогранник, одна з граней якого — плоский многокутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину (див. рис. 1.1, *г*, *д*, 1.2 (нижній)).

Рис. 1.2

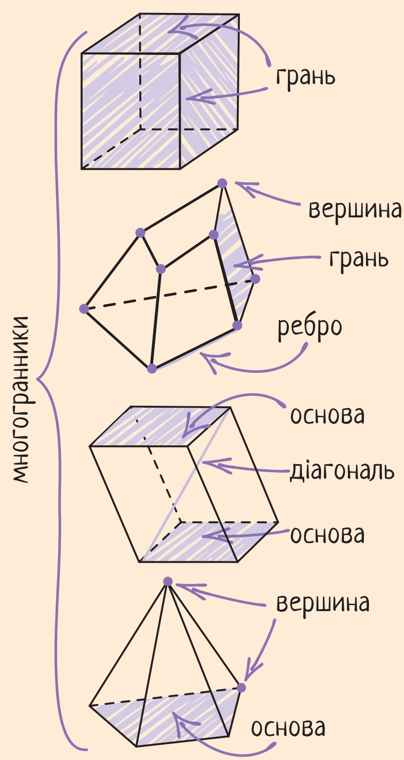
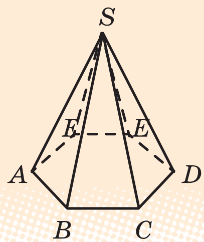


Рис. 1.3



Трикутні грані називають бічними гранями піраміди, спільну вершину бічних граней — *вершиною піраміди*, а многокутник — *основою піраміди*. Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами її основи, називають *бічними ребрами піраміди*. Піраміду називають n-кутною, якщо її основою є n-кутник. Піраміду називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра рівні. Наприклад, якщо в піраміді $SABCDEF$ (рис. 1.3) $ABCDEF$ — правильний шестикутник і $SA = SB = SC = SD = SE = SF$, то це правильна шестикутна піраміда.

Трикутну піраміду іноді називають *тетраедром* (див. рис. 1.1, *г*). Тетраедр, усі грані якого — правильні трикутники, називають *правильним*.

2. Аксіоматична побудова геометрії

Курс планіметрії, який ви вивчали в 7–9 класах, і запропонований курс стереометрії значною мірою спираються на певні наочні уявлення про геометричні фігури. Разом із тим геометрія як наукова теорія про властивості фігур, розташованих у просторі, може бути побудована логічним (дедуктивним) методом на основі системи аксіом.

Пояснимо суть аксіоматичного методу побудови геометрії. Вводять основні (неозначувані) поняття — фігури і формулюють основні положення (аксіоми), у яких виражені основні співвідношення між основними поняттями*. Далі, використовуючи основні поняття і основні співвідношення між ними, визначають нові поняття — фігури, формулюють і доводять нові твердження — теореми про властивості введених понять. При цьому доводять теореми строго логічним шляхом, спираючись на аксіоми і раніше доведені теореми. Таким чином одержують геометричну систему тверджень, пов'язаних низкою логічних залежностей.

Зазначимо, що практично кожну теорему можна сформулювати у вигляді умовного твердження «Якщо A, то B», де літерою A позначено *умову теореми*, а B — її *висновок*. Наприклад, якщо в прямокутному трикутнику позначити довжину гіпотенузи через c, а довжини катетів —

Основні аксіоми, означення та властивості фігур на площині, які ви вивчали в курсі геометрії 7–9 класів, наведено в інтернет-підтримці підручника.

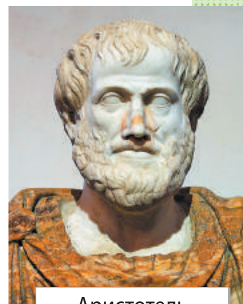
* Зауважимо, що, крім суто геометричних, у планіметрії та стереометрії використовують деякі основні (неозначувані) поняття, спільні й для інших розділів математики, наприклад поняття «множина».

Відомості з історії

Ідею дедуктивного методу побудови геометрії висунув ще давньогрецький філософ Платон (422–347 рр. до н. е.), учень Сократа (469–399 рр. до н. е.). Проте дійсним засновником наукової теорії логічного виведення вважають учня Платона, давньогрецького мислителя Аристотеля (384–322 рр. до н. е.).

Стосовно геометрії ідеї Аристотеля реалізував давньогрецький математик Евклід (III ст. до н. е.) у своєму трактаті з геометрії «Начала». Протягом 2000 років це творіння Евкліда було єдиним керівництвом, за яким навчали геометрії; від нього йшли й усі задуми подальшого досконалішого обґрунтування геометрії. Слід зазначити, що система сформульованих Евклідом аксіом (постулатів) потребувала вдосконалення, оскільки була неповною, а тому доведення нерідко «грішили» зверненням до наочності.


Евклід


Аристотель


Фелікс Клейн


Давид Гільберт

Кропітка праця багатьох поколінь математиків світу дозволила створити науковий аксіоматичний метод побудови геометрії. Велика роль у цьому належить відомим німецьким математикам Феліксу Клейну (1849–1925) і Давиду Гільберту (1862–1943). У 1899 р. з'явилося видання «Основ геометрії» Гільберта, де він сконструював аксіоматику таким чином, що логічна структура геометрії стала абсолютно прозорою.

через a і b, то *теорему Піфагора* можна сформулювати так: «Якщо трикутник ABC прямокутний із прямим кутом C, то $c^2 = a^2 + b^2$. Умовою A цієї теореми є «трикутник ABC прямокутний із прямим кутом C», а висновком B — «$c^2 = a^2 + b^2$» (квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів).

Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, тобто розглянути твердження «Якщо B, то A», і це твердження буде правильним, то отримаємо так звану *теорему*, *обернену* до даної. Наприклад, для теореми Піфагора обернене твердження: «Якщо в трикутнику ABC зі сторонами a, b, c виконується рівність $c^2 = a^2 + b^2$, то цей трикутник прямокутний із прямим кутом C» теж правильне. Тому останнє твердження є формулюванням теореми, оберненої до теореми Піфагора.

Нагадаємо, що не кожна теорема має обернену. Наприклад, розглянемо теорему про суміжні кути: «Якщо два кути суміжні, то їх сума дорівнює 180°». Умова A — «два кути суміжні», висновок B — «їх сума дорівнює 180°». Сформулюємо обернене твердження («Якщо B, то A»): «Якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то ці кути суміжні». Це твердження неправильне, тому що, наприклад, сума двох вертикальних прямих кутів дорівнює 180°, але ці кути не є суміжними. Отже, для теореми про суміжні кути не існує оберненої теореми.

3. Основні поняття стереометрії

Рис. 1.4

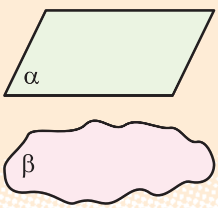
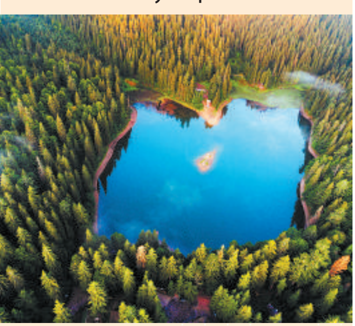


Рис. 1.5

Озеро Синевир у Карпатах



Основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина.

Як і в курсі планіметрії, точки в просторі будемо позначати великими латинськими буквами A, B, C, D, ..., а прямі — малими латинськими буквами — a, b, c, ... або двома точками, що лежать на прямій. Площини позначатимемо малими грецькими буквами — α, β, γ, ..., а зображатимемо у вигляді паралелограмів або довільних замкнених областей (рис. 1.4). Ці способи зображення відповідають наочному уявленню про площину як про гладеньку поверхню стола, озера (рис. 1.5) тощо. При цьому площину уявляють необмеженою в усі боки, ідеально рівною і такою, що не має ніякої товщини.

Озеро Синевир, яке називають «Морським Оком» Карпат, утворилося внаслідок землетрусу більш ніж 10 тис. років тому. Воно розташоване на висоті 989 м над рівнем моря, його площа близько 5 га, найбільша глибина 24 м. Озеро входить до складу Національного природного парку «Синевир», на території якого в 2011 р. було створено єдиний в Україні реабілітаційний центр для бурих ведмедів.

Рис. 1.6

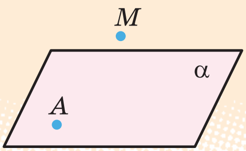


Рис. 1.7

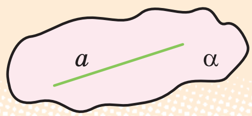
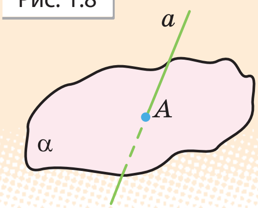


Рис. 1.8



Якщо A — точка площини α, то кажуть, що точка A лежить у площині α, а площина α проходить через точку A. Це можна записати так: $A \in \alpha$. Якщо точка M не належить площині α, це записують так: $M \notin \alpha$ (рис. 1.6).

Якщо кожна точка прямої a належить площині α, то кажуть, що пряма a *лежить у площині* α, *а площина* α *проходить через пряму* a (рис. 1.7). Це позначають так: $a \subset \alpha$. Якщо пряма b не належить площині α, це позначають так: $b \not\subset \alpha$.

Якщо пряма a і площина α мають тільки одну спільну точку A, то кажуть, що вони *перетинаються* в точці A, і записують так*: $a \cap \alpha = A$. На відповідному рисунку частину прямої, яка «закрита» зображенням площини, вважають невидимою і зображають штриховою лінією (рис. 1.8).

4. Аксіоми стереометрії

У стереометрії, як і в планіметрії, властивості геометричних фігур установлюють шляхом доведення відповідних теорем. Але на початку курсу, коли нам не відомо жодної властивості фігур у просторі, доводиться якісь властивості основних фігур приймати без доведення.

Як і в планіметрії, ті властивості основних геометричних фігур, які приймають без доведення, називають *аксіомами*. Нагадаємо, що основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина. Аксіоми виражають інтуїтивно зрозумілі властивості площин та їх зв'язок з іншими основними фігурами — точками і прямими (рисунки до аксіом 1–3 див. у табл. 1).

A

Аксіома 1. **Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.**

Аксіома 2. **Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

---

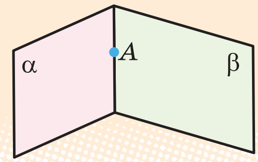
* У наведеному записі літерою A позначено геометричну фігуру — множину точок, яка складається з однієї точки.

Аксіома 3. Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

Аксіома 4. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку (рис. 1.9).

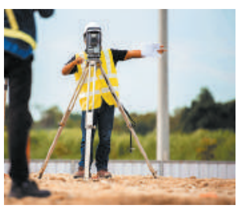
Аксіома 5. Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.

Рис. 1.9



Зауважимо, що властивості площин і прямих, зафіксовані в аксіомах, часто використовуються у практичній діяльності.
На рис. *а–б* проілюстровано застосування аксіоми 2 (поясніть чому).
Твердження аксіоми 3 використовують, коли хочуть перевірити, чи є дана поверхня плоскою. Для цього до поверхні в різних місцях прикладають рівну рейку (прави́ло) та перевіряють, чи є зазор між рейкою та поверхнею (рис. *в*).
Зміст аксіоми 4 можна проілюструвати за допомогою зігнутого аркуша паперу або вашого підручника (рис. *г*).


а


б


в


г

У курсі стереометрії ми будемо також вважати, що *для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми й аксіоми планіметрії**.

Докладно систематизацію фактів і методів планіметрії наведено в інтернет-підтримці підручника.

Зокрема, на кожній площині між двома вибраними точками існує певна відстань — довжина відрізка, що їх сполучає. Так, дві точки

* Систему аксіом планіметрії О. В. Погорєлова розглянемо далі в цьому параграфі.

можуть належати одночасно різним площинам, але за аксіомою 5 відстань між цими точками на кожній із площин буде одна й та сама.

Після того як вибрано одиничний відрізок, довжину кожного відрізка можна виразити додатним числом. До цього числа приписують назву одиничного відрізка: 2 см, 1,5 км тощо. Якщо одиничний відрізок не має назви, а довжина відрізка AB дорівнює, наприклад, 5 одиницям довжини, то пишемо: $AB=5$, що є скороченням запису $AB=5$ одиниць.

Аксіома про відстані дозволяє порівнювати фігури, розміщені на різних площинах, зокрема застосовувати до них теореми про рівність і подібність трикутників.

Користуючись поняттям відстані, можна означити рівність і подібність фігур (зокрема трикутників) у просторі абсолютно так само, як це було зроблено в планіметрії.

О **Означення 1.** **Дві фігури називаються *рівними*, якщо існує відповідність* між їхніми точками, при якій відстані між парами відповідних точок рівні**.**

Означення 2. **Дві фігури називаються *подібними*, якщо існує відповідність між їхніми точками, при якій відстані між відповідними точками змінюються в одне і те саме число разів.**

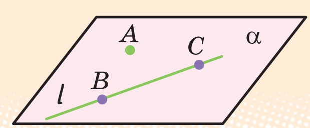
Інакше кажучи, для двох довільних точок X і Y першої фігури і точок X' і Y' другої фігури, які їм відповідають, справедлива рівність $X'Y'=k\cdot XY$.

Надалі аксіому 5 ми, як правило, будемо використовувати неявно, тобто не посилаючись на неї, на відміну від перших чотирьох аксіом.

5. Наслідки з аксіом стереометрії

Використовуючи аксіоми стереометрії, за допомогою логічних міркувань установлюють справедливість інших властивостей. Розглянемо деякі з них.

Рис. 1.10



Т **Теорема 1.1.** **Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

▶ **Доведення.** Нехай точка A не лежить на прямій l. Виберемо на прямій l довільні точки B і C (рис. 1.10).

* Нагадаємо, що при встановленні відповідності між двома фігурами кожній точці однієї фігури ставиться у відповідність єдина точка іншої фігур

** Як і на площині, відповідність між двома фігурами, при якій зберігаються відстані між відповідними точками цих фігур, називають переміщенням, або рухом.

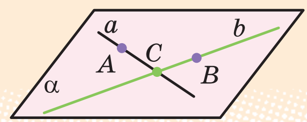
Через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій l, за аксіомою 2 проходить єдина площина α. За аксіомою 3 пряма l лежить у площині α. Отже, площина α проходить через пряму l і точку A.

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через пряму l і точку A, проходитиме також через точки A, B, C. За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною α. ■

Т **Теорема 1.2. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

Доведення. Нехай прямі a і b перетинаються в точці C (рис. 1.11). Виберемо на прямій a довільну точку A, а на прямій b — довільну точку B, відмінні від точки C. Через точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 проходить єдина площина α. За аксіомою 3 пряма a лежить у площині α і пряма b лежить у площині α. Отже, площина α проходить через прямі a і b.

Рис. 1.11



Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через прямі a і b, проходитиме також через точки A, B, C. За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною α. ■

Зауважимо, що оскільки три точки A, B, C, які не лежать на одній прямій, однозначно визначають деяку площину, то часто площину, що проходить через ці точки, позначають так: (ABC).

Вираз «площина ABC» записують також скорочено «пл. ABC». Іноді, щоб підкреслити, що розглядувані чотири або більше точок лежать в одній площині, використовують скорочені записи «площина $ABCD$» або «пл. $ABCD$», які означають, що площина проходить через точки A, B, C, D.

Із аксіоми 2 і доведених теорем випливає, що площину можна задати:

1) трьома точками, які не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, яка не лежить на ній;
3) двома прямими, які перетинаються.

Домовилися, що для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми й аксіоми планіметрії.

Видатні математики України


О. В. Погорєлов (1919–2002)

Олексій Васильович Погорєлов (1919–2002) — видатний вітчизняний математик, учений зі світовим ім'ям, академік Національної академії наук України, заслужений діяч науки і техніки України.

Рідкісне поєднання математичного та інженерного талантів визначило коло наукових інтересів О. В. Погорєлова. Його праці належать до геометрії «в цілому», основ геометрії, теорії диференціальних рівнянь у часткових (частинних) похідних, теорії стійкості пружних оболонок, питань кріогенного електромашинобудування.

Погорєлов — автор підручників з усіх основних розділів геометрії для вищих навчальних закладів. Ці підручники вирізняються оригінальністю викладу матеріалу та математичною строгістю. Багато й успішно Олексій Васильович працював також над питаннями вдосконалення шкільної математичної освіти. Створений ним підручник з геометрії спрямовано на розвиток логічного мислення та здібностей учнів. На будівлі Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, де навчався і працював О. В. Погорєлов, установлено меморіальну дошку.

В інтернет-підтримці підручника наведено систематизацію фактів і методів планіметрії, сучасну систему аксіом евклідової геометрії, загальні вимоги до системи аксіом, а також пояснено можливість побудови неевклідової геометрії.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

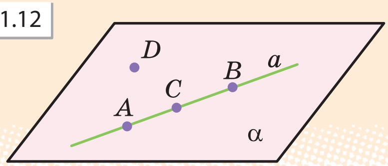
Задача 1. Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Чи можуть три з них лежати на одній прямій?

Розв'язання	Коментар
Нехай дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Припустимо, що три з даних точок, наприклад A, B, C, лежать на одній прямій a (а четверта точка D не лежить на цій прямій).	На запитання «Чи може виконуватися дане твердження?» можна дати відповідь: • «Так», і тоді достатньо навести хоча б один приклад, коли це твердження виконується;

Тоді через три точки A, B, D, які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 можна провести площину α (рис. 1.12). Але за аксіомою 3, якщо дві різні точки A і B прямої a лежать у площині α, то і вся пряма лежить у цій площині, а отже, і точка C теж лежить у площині α. Таким чином, усі чотири точки лежать в одній площині α, що суперечить умові.

Отже, наше припущення неправильне, і якщо чотири точки не лежать в одній площині, то жодні три з них не лежать на одній прямій.

Рис. 1.12



- «Ні», і тоді потрібно довести, що це твердження ніколи не виконується (найчастіше це доводять методом від супротивного).

Використовуючи метод від супротивного, потрібно:

1) зробити припущення, протилежне тому, що ми хочемо довести;
2) спираючись на аксіоми та вже доведені теореми, отримати суперечність з умовою або з відомою властивістю;
3) зробити висновок, що наше припущення неправильне, а правильне те, яке потрібно було довести.

Задача 2. Дано пряму і точку, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать в одній площині.

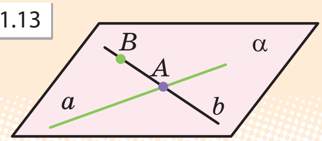
Розв'язання

Нехай дано пряму a в просторі і точку B, яка не лежить на ній. Через пряму a і точку B проведемо площину α (за теоремою 1.1 ця площина єдина). Нехай довільна пряма b проходить через точку B і перетинає пряму a в точці A (рис. 1.13). Тоді точки A і B прямої b належать площині α, отже, за аксіомою 3 і вся пряма b лежить у площині α. Таким чином, усі розглядувані прямі лежать в одній площині α.

Коментар

Спочатку побудуємо площину, яка проходить через дані пряму і точку. Потім доведемо, що будь-яка пряма, яка перетинає дану пряму і проходить через дану точку, лежить у цій площині. Для коректного доведення слід також упевнитися, що побудована площина єдина.

Рис. 1.13



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Наведіть приклади просторових фігур, плоских фігур, неплоских фігур. Яке мінімальне число точок може містити неплоска фігура?
2. Назвіть основні поняття стереометрії. Сформулюйте аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них.
3*. Дайте означення рівності та подібності фігур у просторі.

ВПРАВИ

1.1°. Поясніть, чому стіл, який має три ніжки, обов'язково стійкий, а про стіл із чотирма ніжками цього стверджувати не можна.

1.2°. (Жарт.) Три мухи одночасно злетіли з кришки стола. Чи можуть вони знову опинитися в одній площині?

1.3°. Чи можна провести площину через три точки, які лежать на одній прямій? Відповідь поясніть, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.

1.4°. Скільки площин може проходити через три дані точки?

1.5. Доведіть, що площина і пряма, яка не лежить на ній, або не перетинаються, або перетинаються в одній точці.

1.6. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає дану площину.

1.7. Точка M належить площині α, а точка N не належить їй. Чи належить площині α середина відрізка MN? Поясніть відповідь, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.

1.8. Дайте відповідь на запитання, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них. Чи є правильним, що можна провести площину через будь-які:
1) дві точки; 2) три точки; 3) чотири точки?

1.9°. Скільки площин можна провести через одну пряму? Обґрунтуйте відповідь. Змоделюйте результат за допомогою книги.

1.10°. Чи можуть дві площини мати:
1) тільки одну спільну точку; 2) тільки дві спільні точки?

1.11°. Чи можуть дві різні площини мати дві різні спільні прямі?

1.12. Як розташовані дві площини, якщо в кожній із них лежить один і той самий трикутник?

1.13. Доведіть, що існує площина, яка перетинає дану площину.

1.14. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AC і BD не перетинаються.

1.15. Дано площину α і квадрат $ABCD$. Чи може площині α належати:
1) тільки одна вершина квадрата;
2) тільки дві його вершини;
3) тільки три вершини?

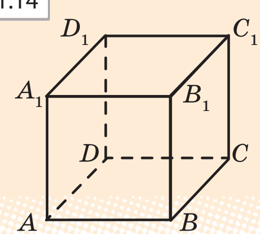
1.16*. Дві вершини трикутника належать площині α. Чи належить цій площині третя вершина, якщо відомо, що даній площині належить:
1) точка перетину медіан трикутника;
2) центр вписаного в трикутник кола?

1.17*. Чи кожна точка кола належить площині, якщо відомо, що цій площині належать:
1) дві точки кола;
2) три точки кола?

1.18*. Чи правильно, що через три прямі, які попарно перетинаються, проходить єдина площина?

1.19. Серед прямих і площин, що проходять через вершини куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рис. 1.14), назвіть:
1) пари прямих, що перетинаються;
2) трійки прямих, які перетинаються в одній точці;
3) пари площин, що перетинаються;
4) трійки площин, які перетинаються в одній точці.

Рис. 1.14



Виявіть свою компетентність

1.20°. Як можна перевірити якість виготовлення лінійки, якщо є гарно оброблена плоска плита? На який теоретичний факт спирається ця перевірка?

1.21°. Столяр за допомогою двох ниток перевіряє, чи буде стійко стояти на полу виготовлений стіл, який має чотири ніжки. Як потрібно натягнути ці нитки?

§ 2. МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Таблиця 2

1. Методи розв’язування геометричних задач

- **Геометричні методи**
  - Використання «ключового» трикутника, рівності та подібності трикутників, властивостей геометричних фігур
  - Метод геометричних перетворень (симетрія відносно осі та точки, паралельне перенесення, поворот, подібність фігур)
- **Аналітичні методи**
  - Уведення невідомих відрізків та кутів і використання рівнянь та їх систем чи властивостей функцій
  - Метод площ
  - Координатний метод
  - Векторний метод

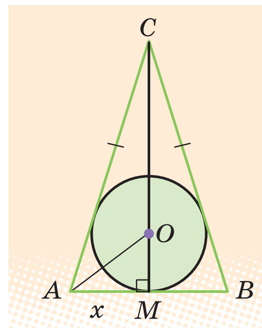
2. Введення невідомих для розв’язування геометричних задач на обчислення

Орієнтир

Якщо в умові геометричної задачі на обчислення взагалі не дано відрізки або дані відрізки та кути не можна об’єднати в зручний для розв’язування задачі трикутник, то зазвичай вводять невідомий відрізок (або невідомий кут, або кілька невідомих).

Приклад

У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 25 см. Обчисліть площу цього трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 10 см.

План	Розв’язання і коментар
1) *Позначимо якоюсь буквою, наприклад x, невідомий відрізок* (або кут, або кілька невідомих).	Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC $(AC = CB)$ медіана $CM = 25$ см (яка є і бісектрисою, і висотою) та радіус вписаного кола $OM = 10$ см. Ці відрізки не є сторонами одного трикутника. Тому для розв’язування задачі виберемо якийсь відрізок як невідомий. Необхідно, щоб вибраний відрізок разом із даними відрізками утворював зручні для розв’язування трикутники. Нехай $AM = x$, де $x > 0$. Цей відрізок можна об’єднати в прямокутні трикутники і з медіаною CM, і з радіусом OM. 
2) *Спробуємо скласти рівняння* (чи систему рівнянь) *із введеним невідомим.*	Із $\triangle AMC$: $AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{x^2 + 25^2} = \sqrt{x^2 + 625}$. Щоб скласти рівняння, скористаємося тим, що центр вписаного кола лежить у точці перетину бісектрис: AO — бісектриса кута BAC. Тоді AO є також і бісектрисою $\triangle AMC$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника $\frac{AC}{AM} = \frac{CO}{OM}$, тобто $\frac{\sqrt{x^2 + 625}}{x} = \frac{15}{10}$.
3) *Розв’язуємо одержане рівняння* (чи систему рівнянь) або перетворюємо його (її) таким чином, щоб дістати відповідь на запитання задачі. *Із отриманих розв’язків вибираємо ті, які задовольняють умову геометричної задачі.*	Піднесемо обидві частини одержаного рівняння до квадрата та розв’яжемо останнє рівняння. Маємо: $x^2 = 500$. Звідси $x = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$. (Оскільки $x > 0$, то другий корінь одержаного рівняння $x = -\sqrt{500} = -10\sqrt{5}$ не задовольняє умову задачі, і його не записують у розв’язання.)
4) *Користуючись знайденою величиною, даємо відповідь на запитання задачі.*	Тоді $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = AM \cdot CM = 25x = 250\sqrt{5}$ (см²). Відповідь: $250\sqrt{5}$ см².

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

У курсі планіметрії 7–9 класів ви розглянули значну кількість геометричних задач та їх розв'язань різними методами. Дамо короткий огляд типів цих задач та методів їх розв'язування, оскільки вони застосовуються і в стереометрії. Так, розв'язування значної кількості стереометричних задач можна звести до розв'язування кількох планіметричних задач у різних площинах.

1. Геометричні методи

Приступаючи до розв'язування геометричної задачі, слід ураховувати, що майже кожна геометрична задача потребує індивідуального підходу, винахідливості та інтуїції. Проте можна дати деякі загальні рекомендації, які будуть корисними під час розв'язування багатьох задач.

Корисні поради щодо розв'язування геометричних задач

1. Розв'язування практично будь-якої геометричної задачі **починають з рисунка**. Він повинен бути досить лаконічним.

Слід зображати лише «функціонуючі» частини геометричних фігур. Так, наприклад, якщо в задачі розглядають радіус описаного кола, то часто можна не зображати коло (а зобразити тільки його центр і радіус). Але якщо в умові задачі йдеться про точку кола, то його зображення може бути корисним для розв'язання.

Необхідно уникати надмірного ускладнення рисунка. Для цього можна, наприклад, виконати виносні рисунки, що зображають фрагменти даної конфігурації. З іншого боку, корисно безпосередньо на рисунку вказувати числові чи буквені значення лінійних або кутових величин.

Зазначимо, що є такі задачі, у процесі розв'язування яких доводиться уточнювати особливості конфігурації, що розглядається, та переробляти початковий рисунок таким чином, що остаточного вигляду він набуває лише одночасно із закінченням розв'язування.

2. Розв'язуючи геометричну задачу, **треба спиратися не лише на рисунок**.

Рисунок може «підказати», що якісь точки лежать на одній прямій чи на одному колі. Проте в процесі розв'язування ці особливості розміщення точок повинні бути обґрунтовані без посилань на рисунок. Інколи рисунок може стати

причиною неповного розв'язування задачі, оскільки ті співвідношення, які виконані на ньому і здаються очевидними, насправді потребують спеціального обґрунтування. Тому завжди намагайтеся зобразити всі можливі конфігурації, а потім за допомогою міркувань відкинути зайві (якщо ці зайві дійсно є).
Нагадаємо, що додаткові побудови на початковому рисунку, якими вводять нові відрізки та кути, іноді полегшують розв'язування задачі.

3. У задачах на обчислення має сенс спочатку, **не проводячи обчислень, визначити, які взагалі відрізки та кути можна знайти** виходячи з даних величин.

Як тільки до цього переліку потрапить потрібний відрізок чи кут, можна легко скласти ланцюжок послідовних обчислень, що приведе до визначення шуканої величини. Іноді такий «прямий пошук» корисно доповнити пошуком плану розв'язування задачі «від шуканого», тобто виходячи з вимоги задачі (наприклад, «щоб знайти площу вписаного круга, достатньо знайти його радіус»).

2. Аналітичні методи

Геометрічні способи не завжди вдається застосувати. У таких випадках дуже часто допомагає алгебраїчний метод розв'язування геометричних задач на обчислення, пов'язаний із введенням невідомих та складанням рівняння або системи рівнянь.

У п. 2 табл. 2 наведено орієнтир, який дає змогу розпізнавати ситуації, коли потрібно вводити невідомі відрізки та кути, а також приклад відповідного розв'язання.

Використовуючи цей метод *для складання рівняння до задачі, часто поряд із вираженням даних елементів через невідомі зручно величину якогось елемента з розглядуваної конфігурації виразити двічі через введені невідомі*.

Крім того, не завжди, *склавши рівняння чи систему рівнянь до геометричної задачі, доцільно прагнути повністю їх розв'язати. З одержаного рівняння чи системи, у першу чергу, слід знаходити ті невідомі (чи їх комбінацію), які дозволять дати відповідь на запитання задачі*.

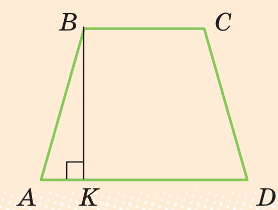
Зміст і приклади застосування методу площ і координатного та векторного методів для розв'язування геометричних задач дивіться в інтернет-підтримці підручника.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача. У рівнобічній трапеції висота дорівнює 8 см, основи — 21 см і 9 см. Знайдіть радіус описаного навколо трапеції кола.

Приступаючи до розв'язування геометричної задачі, доцільно виконати відповідний *рисунок* і навести *короткий запис умови*, який дозволить пов'язати рисунок і позначення точок на ньому з величинами і співвідношеннями, заданими в умові.

Дано:
$ABCD$ — трапеція;
$AD \parallel BC$; $AB = CD$;
$AD = 21$ см, $BC = 9$ см,
$BK = 8$ см $(BK \perp AD)$.
Знайти:
R — радіус описаного кола.

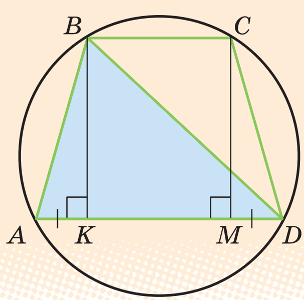


Розв'язання

Нехай у трапеції $ABCD$ (рис. 2.1) $AB = CD$, $AD = 21$ см, $BC = 9$ см, $BK = 8$ см $(BK \perp AD)$. Якщо коло проходить через чотири точки A, B, C, D, то воно також проходить через будь-які три із цих точок і тому збігається з колом, описаним навколо трикутника ABD.

Знайдемо радіус кола, описаного навколо трикутника ABD. Якщо CM — друга висота даної рівнобічної трапеції, то, ураховуючи рівність прямокутних трикутників ABK та DCM

Рис. 2.1



Коментар

Спробуємо виділити «ключовий» трикутник для розв'язування задачі. Для цього проведемо діагональ BD трапеції і згадаємо, що коло, яке проходить через вершини трикутника ABD, є описаним навколо трикутника. Обчислити його радіус можна за кількома формулами (див. «Систему опорних фактів курсу планіметрії», табл. 11), зокрема:

$$R = \frac{a}{2\sin A} \text{ і } R = \frac{abc}{4S_{\triangle}}.$$

і те, що $AD \parallel BC$ і $BCMK$ — прямокутник, одержуємо:

$$AK = MD = \frac{21-9}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

Тоді з $\triangle ABK$: $AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = 10$ (см).

Із прямокутного трикутника BKD:

$$BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 17 \text{ (см)}.$$

Таким чином, радіус кола, описаного навколо трикутника ABD (а отже, і навколо трапеції $ABCD$), дорівнює:

$$R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\triangle ABD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot BK} = 10{,}625 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 10,625 см.

Із цих формул вибираємо ту, для якої легко знайти всі величини, що входять до її запису: $R = \frac{abc}{4S_{\triangle}}$.

(Одну сторону трикутника ABD дано за умовою, а дві інші легко визначити з відповідних прямокутних трикутників.)

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Які методи розв’язування геометричних задач ви знаєте?
2. У чому полягає метод «ключового» трикутника? Опишіть і наведіть приклади виконання додаткових побудов під час застосування цього методу.
3. У чому полягає метод від супротивного. Опишіть його зміст.
4. Які алгебраїчні методи розв’язування задач вам відомі?
5. У яких випадках для розв’язування геометричної задачі на обчислення зручно вводити невідомі? Поясніть це на прикладі.

ВПРАВИ

2.1°. У табл. 4 «Системи опорних фактів курсу планіметрії» символічно записано наслідки з теореми косинусів. Сформулюйте ці наслідки словесно.

Систему опорних фактів курсу планіметрії наведено в інтернет-підтримці підручника.

2.2°. Визначте вид (за кутами) трикутника зі сторонами 6 см, 8 см і 11 см.

2.3°. Дано два рівнобедрених трикутники зі спільною основою. Доведіть, що їхні медіани, проведені до основи, лежать на одній прямій.

2.4. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 12, а кут, протилежний до основи, — 120°. Знайдіть висоти трикутника.

2.5°. У рівнобедреному трикутнику основа і висота, проведена до основи, дорівнюють 4 см. Знайдіть площу круга, описаного навколо цього трикутника.

2.6. У прямокутному трикутнику висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 9 і 16. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

2.7. У трикутнику ABC зі сторонами 4 і 6 та кутом між ними 120° знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини тупого кута.

2.8. У трикутнику ABC зі сторонами a і b медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника.

2.9°. Діагональ ромба завдовжки 10 см дорівнює його стороні. Знайдіть другу діагональ і кути ромба.

2.10. У паралелограмі $ABCD$ проведено бісектрису кута A, яка перетинає сторону BC в точці K. Знайдіть довжину відрізка BK, якщо $DC = 10$ см.

2.11. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 5 см і 12 см. Знайдіть катети трикутника.

2.12. У трапеції паралельні сторони дорівнюють 25 см і 4 см, а бічні сторони — 20 см і 13 см. Знайдіть площу трапеції.

2.13. Навколо кола описано рівнобічну трапецію, бічна сторона якої ділиться точкою дотику на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.

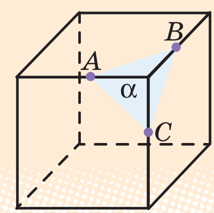
2.14. У рівнобічну трапецію з бічною стороною 17 см вписано коло, діаметр якого 15 см. Знайдіть основи трапеції.

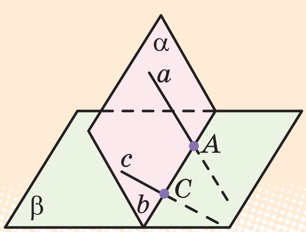
2.15*. У трапеції, основи якої дорівнюють a і b, через точку перетину діагоналей проведена пряма, паралельна основам. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, який відтинають бічні сторони трапеції.

2.16. Три кола попарно дотикаються зовнішнім чином. Знайдіть радіуси кіл, якщо відстані між їх центрами дорівнюють 5 см, 7 см і 8 см.

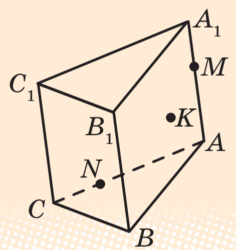
§ 3. НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

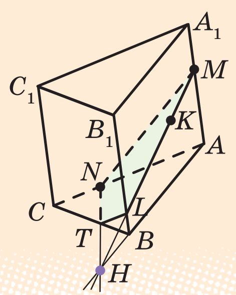
Таблиця 3

Переріз многогранника площиною	
Означення і зміст побудови	Приклад
Перерізом многогранника площиною називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і цієї площини. *Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника*, а для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).	 Перерізом куба площиною α, яка проходить через точки A, B, C на ребрах куба, що виходять з однієї вершини, є трикутник ABC.

Побудова перерізів методом слідів	
Основні поняття	
 	Якщо площина α перетинає площину β по прямій b, то пряму b називають *слідом площини* α на площині β. Для того щоб отримати слід площини α на площині β (тобто пряму b), достатньо знайти точки перетину двох прямих площини α з площиною β.

Приклад





Побудуйте переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через точки K, M, N, де $M \in AA_1$, $N \in AC$ і точка K лежить у грані AA_1B_1B.

Розв'язання

1) Розглянемо допоміжну площину AA_1B_1B. Слід цієї площини на площині основи — пряма AB.
2) У допоміжній площині розглянемо пряму MK, яка лежить у площині перерізу. Її точка перетину з площиною ABC лежить на прямій AB — це точка H (а точка перетину з ребром BB_1 — точка L).
3) Тоді точка H лежить і в площині перерізу, і в площині ABC. За умовою точка N теж лежить і в площині перерізу, і в площині ABC. Отже, площина перерізу перетинає площину основи по прямій HN (слід січної площини на площині ABC), яка перетинається з прямою BC у точці T.
4) Сполучаючи відрізками точки перетину січної площини з ребрами призми, одержуємо чотирикутник $MNTL$ — шуканий переріз.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Стереометричні побудови виконують, у першу чергу, подумки. Це завдання здебільшого на доведення існування фігури, що задовольняє дані умови. Задачі на побудову в стереометрії можна умовно поділити на дві групи: *задачі на уявлювані побудови* і задачі на зображеннях просторових тіл — так звані *задачі на проекційному рисунку*. Під час розв'язування деяких стереометричних задач, пов'язаних із многогранником, доводиться будувати переріз многогранника — фігуру, що є перетином многогранника з площиною. Часто для цього використовують *метод слідів*.

Детальніше про зміст задач на побудову в стереометрії та побудову перерізів многогранників методом слідів можна дізнатися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Приклад застосування методу слідів для побудови перерізу призми наведено в табл. 3, а методу слідів і допоміжних площин для побудови перерізу піраміди — в інтернет-підтримці підручника.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, що називають перерізом многогранника площиною. Якою фігурою є переріз многогранника?
2. Поясніть, що називають слідом площини α на площині β. Як можна одержати цей слід, маючи декілька прямих у площині α?
3. Поясніть на прикладі, як можна побудувати переріз многогранника методом слідів.

ВПРАВИ

3.1°. Користуючись зображенням куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, наведеним на рис. 3.1, назвіть:
1) точку перетину прямої MC $(M \in AA_1)$ із площиною B_1BC_1;
2) лінію перетину площин MC_1C і BCB_1.

3.2°. За зображенням піраміди, наведеним на рис. 3.2, назвіть:
1) точку перетину прямої MD $(M \in BD)$ і площини ABC;
2) лінію перетину площин MBC і BEC $(E \in AC)$.

3.3°. Нарисуйте в зошиті зображення куба, наведене на рис. 3.3, і побудуйте:
1) точку перетину прямої MH з площиною ABC;
2) лінію перетину площин MHC і ADC.

Рис. 3.1

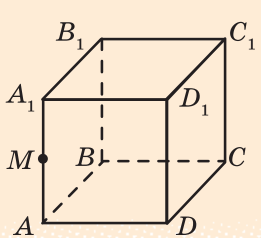


Рис. 3.2

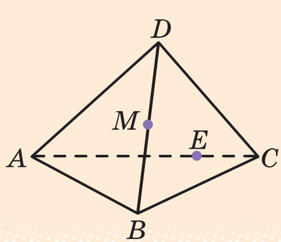


Рис. 3.3

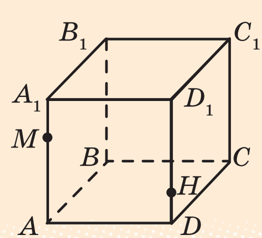


Рис. 3.4

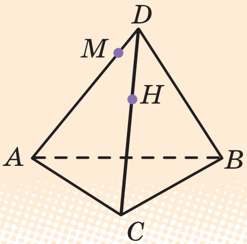


Рис. 3.5

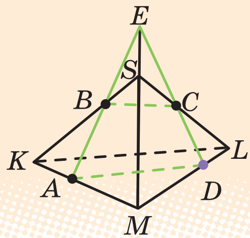


Рис. 3.6

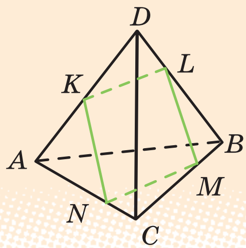
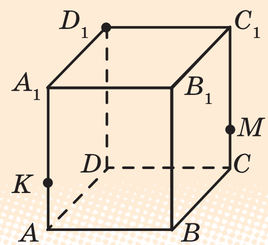


Рис. 3.7



3.4°. Нарисуйте в зошиті зображення піраміди, наведене на рис. 3.4, і побудуйте:
1) точку перетину прямої MH з площиною ABC;
2) лінію перетину площин MHB і ABC.

3.5°. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через:
1) точки A_1, B і C_1; 2) точки B, D і середину ребра CC_1.

3.6°. Побудуйте переріз піраміди $ABCD$ площиною, що проходить через:
1) точки C і D та середину ребра AB;
2) точку C та середини ребер AB і BD.

3.7°. Користуючись рис. 3.5, опишіть побудову перерізу трикутної піраміди $SKLM$ площиною, що проходить через точки A, B, C ($A \in KM$, $B \in SK$, $C \in SL$). Обґрунтуйте побудову, спираючись на відповідні аксіоми і теореми.

3.8. Чи може перерізом тетраедра $ABCD$ площиною бути чотирикутник $KLMN$, зображений на рис. 3.6?

3.9. Нарисуйте в зошиті зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.7) і побудуйте точку перетину:
1) прямої D_1M з площиною основи $ABCD$ ($M \in CC_1$, $CM = \frac{1}{2}CC_1$);
2) прямої D_1K з площиною основи $ABCD$ ($K \in AA_1$, $AK = \frac{1}{5}AA_1$);
3) слід площини D_1KM на площині основи $ABCD$;
4) переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки D_1, K і M.

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua

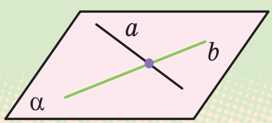
§ 4. РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ: ПРЯМІ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ, ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ, МИМОБІЖНІ ПРЯМІ

Таблиця 4

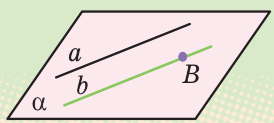
Розміщення двох прямих у просторі

Дві прямі

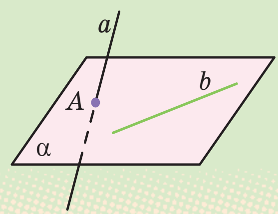
- лежать в одній площині
  - мають спільну точку (перетинаються)



  - не мають спільної точки (паралельні)



- не лежать в одній площині (мимобіжні)



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Мимобіжні прямі

Якщо дві прямі лежать в одній площині, то, як відомо з курсу планіметрії, вони або перетинаються, або паралельні (див. відповідні рисунки в табл. 4). У стереометрії можливий ще один випадок — прямі не лежать в одній площині і не перетинаються (див. рисунок в табл. 4 та рис. 4.1).

Означення. **Дві прямі в просторі називаються *мимобіжними*, якщо вони не лежать в одній площині.**

Будемо казати також, що два відрізки мимобіжні, якщо вони лежать на мимобіжних прямих.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.2) ребра DD_1 і B_1C_1 мимобіжні.

Наступну теорему називають *ознакою мимобіжних прямих*, оскільки вона визначає достатні умови для того, щоб прямі були мимобіжні.

Теорема 4.1. **Якщо одна пряма лежить у даній площині, а друга пряма перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то ці прямі мимобіжні.**

Доведення. Нехай пряма b лежить у площині α, а пряма a перетинає площину α в точці A, яка не належить прямій b (див. рис. 4.1). Якщо припустити, що прямі a і b лежать в одній площині, то в цій площині лежить і точка A (яка належить прямій a). Але через пряму b і точку A проходить єдина площина, тому розглядуваною площиною буде площина α. Тоді пряма a повинна лежати в площині α, що суперечить умові. Отже, прямі a і b не лежать в одній площині, тобто вони мимобіжні. ■

Наприклад, у піраміді $ABCD$ (рис. 4.3) ребра AD і BC мимобіжні, оскільки пряма BC лежить у площині ABC, а пряма AD перетинає цю площину в точці A, яка не належить прямій BC.

Рис. 4.1

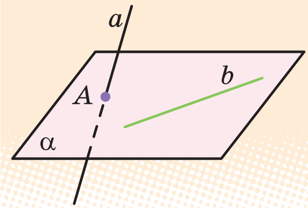


Рис. 4.2

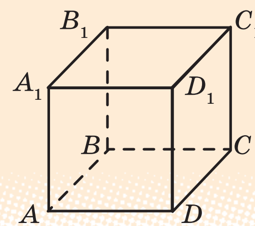
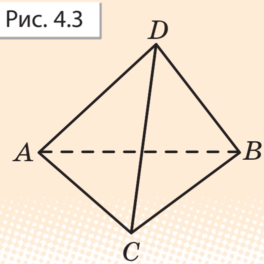


Рис. 4.3



Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дві прямолінійні дороги, одна з яких проходить по естакаді, а інша — під естакадою, та різні елементи будівельних конструкцій.

2. Паралельні прямі в просторі

Нагадаємо, що дві прямі на площині називаються паралельними, якщо вони не перетинаються. Для паралельності прямих у просторі потрібно, щоб вони не тільки не перетиналися, але ще й лежали в одній площині.

О **Означення.** **Дві прямі в просторі називаються *паралельними*, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.**

Як і в планіметрії, будемо казати, що два відрізки паралельні, якщо вони лежать на паралельних прямих. Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра AD і A_1D_1 паралельні (див. рис. 4.2).

Наочне уявлення про паралельні прямі дають колони будівлі, корабельний ліс, колоди дерев'яного зрубу.

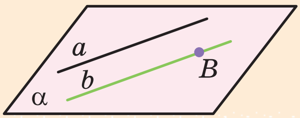
? Як ви вважаєте, чому в корабельному лісі стовбури дерев паралельні один одному?

Як відомо, на площині через точку поза даною прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній прямій (аксіома паралельних). Аналогічне твердження має місце і в просторі, тільки тут його вже потрібно доводити.

Т **Теорема 4.2.** **Через точку в просторі, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.**

▸ **Доведення.** Нехай точка B не належить прямій a. Проведемо через цю пряму і точку B площину α (рис. 4.4). Ця площина — єдина. У площині α через точку B проходить єдина пряма, назвемо її b, яка паралельна прямій a. Вона і буде єдиною шуканою прямою, яка паралельна даній. ■

Рис. 4.4



Із означення паралельності прямих у просторі й теореми 4.2 випливає, що *через дві різні паралельні прямі в просторі можна провести площину, і до того ж тільки одну*. Отже, до відомих із § 1 способів задавання площини можна додати ще один: *площину можна задати двома паралельними прямими*.

Транзитивність — від латин. *transitivus* — перехідний — одна з властивостей логічного відношення величин.

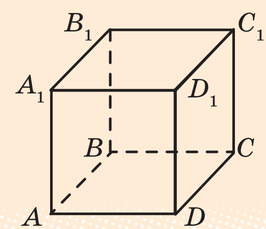
Як і на площині, має місце так звана *властивість транзитивності* паралельності прямих, яка виражає також *ознаку паралельності прямих*. Для паралельності прямих транзитивність означає: **«Якщо пряма *a* паралельна прямій *b*, а пряма *b* паралельна прямій *c*, то пряма *a* паралельна прямій *c*».**

Теорема 4.3. Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні.

Із доведенням теореми можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.5) ребра AB і D_1C_1 паралельні, оскільки кожне з них паралельне ребру DC.

Рис. 4.5



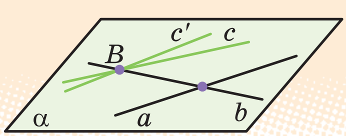
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Прямі a і b перетинаються. Доведіть, що всі прямі, які паралельні прямій a і перетинають пряму b, лежать в одній площині.

Розв'язання

Оскільки прямі a і b перетинаються, через них можна провести єдину площину α. Нехай деяка пряма c паралельна прямій a і перетинає пряму b в точці B (рис. 4.6).

Рис. 4.6



Коментар

Спочатку, користуючись властивістю, що через дві прямі, які перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну, побудуємо площину, яка проходить через дані прямі.

Проведемо в площині α через точку B пряму $c' \parallel a$. Але за теоремою 4.2 через точку B проходить єдина пряма, паралельна прямій a. Отже, пряма c збігається з прямою c', тобто пряма c лежить у площині α. ■

Потім доведемо, що будь-яка пряма, яка перетинає одну пряму і паралельна другій, лежить у цій площині.

Одержаний результат можна коротко сформулювати так: **усі прямі, які паралельні між собою і перетинають дану пряму, лежать в одній площині.**

Задача 2. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1, B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо відрізок AB не перетинає площину і $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 6$ см.

Розв'язання

Оскільки паралельні прямі AA_1, BB_1, MM_1, які перетинають пряму AB, лежать в одній площині, то точки A_1, M_1 і B_1 лежать на одній прямій (рис. 4.7, *б*), і ми одержуємо плоский чотирикутник ABB_1A_1, який є трапецією $(AA_1 \parallel BB_1)$.
За умовою точка M — середина відрізка AB і $MM_1 \parallel AA_1$. Тоді за теоремою Фалеса точка M_1 — середина A_1B_1. Отже, MM_1 — середня лінія трапеції і

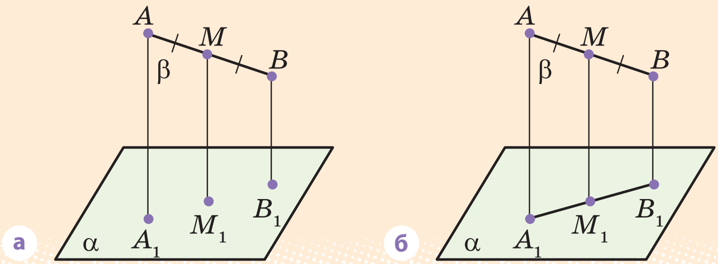
$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{8+6}{2} = 7 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 7 см. ■

Коментар

Для побудови рисунка до задачі потрібно використати результат задачі 1. Оскільки пряма AA_1 перетинає пряму AB, а прямі MM_1 і BB_1 паралельні прямій AA_1, то всі вони лежать в одній площині β (рис. 4.7, *а*). Тоді площина β перетинає дану площину α по прямій A_1B_1, на якій лежать усі спільні точки цих площин, зокрема і точка M_1.
Отже, на рисунку точки A_1, M_1 і B_1 повинні лежати на одній прямій (рис. 4.7, *б*). Фактично після побудови правильного рисунка одержуємо планіметричну задачу в площині β.

Рис. 4.7



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Які прямі в просторі називаються паралельними?
2. Які прямі називаються мимобіжними? Укажіть моделі мимобіжних прямих, використовуючи предмети класної кімнати.
3. Сформулюйте ознаку мимобіжних прямих.

ВПРАВИ

4.1°. Запишіть пари мимобіжних ребер:
1) у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
2) у призмі $ABCA_1B_1C_1$;
3) у піраміді $SABCD$.

4.2°. Чи правильним є твердження, що коли дві прямі лежать у різних площинах, вони завжди мимобіжні?

4.3. Пряма a мимобіжна з прямою b, а пряма b мимобіжна з прямою c. Чи випливає звідси, що прямі a і c завжди мимобіжні?

4.4. Точка A не належить прямій a. Проведіть через точку A пряму b так, щоб прямі a і b були мимобіжними.

4.5. Доведіть, що коли прямі AC і BD мимобіжні, то прямі AB і CD теж мимобіжні.

4.6. Доведіть, що площина, яка проходить через одну з двох мимобіжних прямих і точку на другій прямій, перетинає другу пряму.

4.7. Через дану точку простору проведіть пряму, яка перетинає кожну з двох даних мимобіжних прямих. Чи завжди це можливо?

4.8. Скільки пар мимобіжних прямих визначається різними парами з:
1) чотирьох точок;
2) п'яти точок;
3*) n точок, ніякі чотири з яких не належать одній площині?

4.9°. Запишіть пари паралельних ребер:
1) у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$;
2) у призмі $ABCA_1B_1C_1$;
3) у правильній піраміді $SABCD$.

4.10. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 — також паралелограм.

§ 5. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

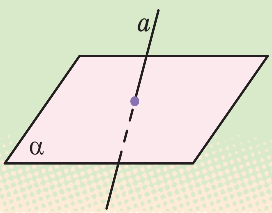
Таблиця 5

Взаємне розміщення прямої та площини в просторі

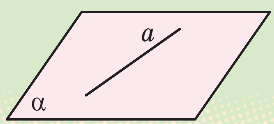
Пряма та площина

мають спільні точки

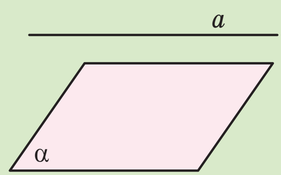
- мають тільки одну спільну точку (перетинаються)



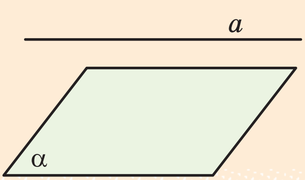
- мають більше ніж одну спільну точку (пряма лежить у площині)



не мають спільних точок (паралельні)

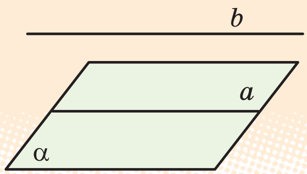
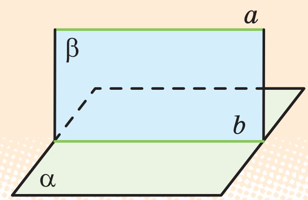


Паралельність прямої та площини



$a \parallel \alpha$

Пряма та площина називаються паралельними, якщо вони не мають жодної спільної точки.

Ознака	Властивість
Якщо $b \parallel a$ (a лежить у площині α), то $b \parallel \alpha$.	Якщо $a \parallel \alpha$, β проходить через a, β перетинає α по b, то $a \parallel b$.
	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

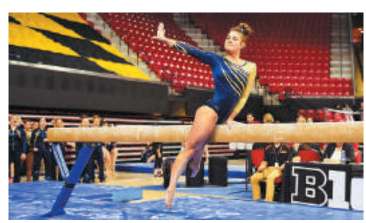
Згадаємо, як можуть розміщуватися пряма і площина одна відносно одної.

Пряма може лежати в площині, тобто всі точки прямої належать площині. Пряма може перетинати площину, тобто мати з площиною тільки одну спільну точку. Нарешті, пряма може не перетинати площину, тобто не мати з площиною жодної спільної точки (див. схему в табл. 5).

Означення. Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають жодної спільної точки.

Будемо вважати також, що відрізок паралельний площині, якщо він лежить на прямій, паралельній площині.

Наочне уявлення про пряму, паралельну площині, дає деяке спортивне знаряддя, наприклад гімнастична колода паралельна площині підлоги.

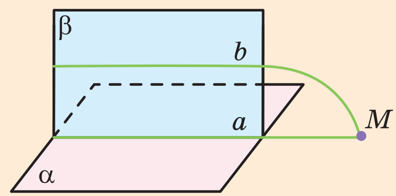


Наступна теорема пов'язує поняття паралельності прямої та площини з поняттям паралельності двох прямих і визначає достатню умову паралельності прямої та площини.

Теорема 5.1 (ознака паралельності прямої та площини). **Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.**

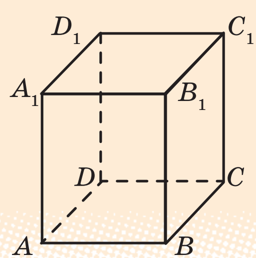
Доведення. Нехай пряма b не лежить у площині α і паралельна прямій a, яка лежить у цій площині (рис. 5.1). Доведемо, що пряма b паралельна площині α. Припустимо протилежне, тобто що пряма b перетинає площину α в деякій точці M. Розглянемо площину β, яка проходить через паралельні прямі a і b ($a \parallel b$ за умовою). Точка M лежить як у площині α, так і в площині β, а тому належить лінії їх перетину — прямій a, тобто прямі a і b перетинаються, що суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне і пряма b паралельна площині α. ■

Рис. 5.1



Наприклад, у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кожне бічне ребро паралельне площинам бічних граней, які не проходять через це ребро (рис. 5.2). Дійсно, бічними гранями прямокутного паралелепіпеда є прямокутники. Тому, наприклад, бічне ребро AA_1 паралельне прямій DD_1 бічної грані DD_1C_1C, а значить, за ознакою паралельності прямої і площини, ребро AA_1 паралельне площині DD_1C_1C. Аналогічно ребро AA_1 паралельне площині BB_1C_1C.

Рис. 5.2



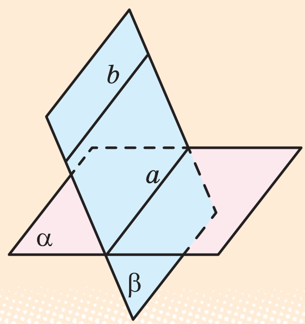
Будемо казати, що ребро многогранника паралельне його грані, якщо воно лежить на прямій, паралельній площині цієї грані.

Наступна теорема є ще однією ознакою паралельності двох прямих у просторі.

Теорема 5.2 (ознака паралельності двох прямих у просторі). **Якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.**

▸ **Доведення.** Нехай площина β проходить через пряму b, паралельну площині α, і пряма a є лінією перетину цих площин (рис. 5.3). Доведемо, що прямі a і b паралельні.
Дійсно, вони лежать в одній площині β. Крім цього, пряма a лежить у площині α, а пряма b не перетинається із цією площиною. Отже, пряма b не може перетинатися з прямою a. Таким чином, прямі a і b лежать в одній площині і не перетинаються. Тому вони паралельні. ■

Рис. 5.3



Зазначимо, що з доведення теореми 5.2 випливає така властивість: **якщо пряма b паралельна площині α, то в цій площині завжди знайдеться пряма a, паралельна прямій b.**

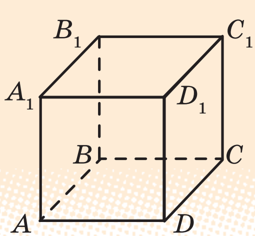
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Чи є правильним твердження: «Пряма, паралельна площині, паралельна будь-якій прямій, що лежить у цій площині»?

Розв'язання

▸ Твердження неправильне, оскільки, наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.4) пряма DC паралельна площині AA_1B_1B, але не паралельна прямій AA_1, яка лежить у цій площині (прямі DC і AA_1 мимобіжні). ■

Рис. 5.4



Коментар

Якщо якесь твердження не виконується, то, для того щоб його спростувати, достатньо навести хоча б один приклад, коли умова твердження виконується, а висновок — ні (так званий «контрприклад»).

Для такого прикладу можна використати відомі геометричні фігури, зокрема многогранники.

Задача 2. Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC цього трикутника в точці A_1, а сторону BC — у точці B_1. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $AB = 10$ см, $AA_1 : A_1C = 2 : 3$.

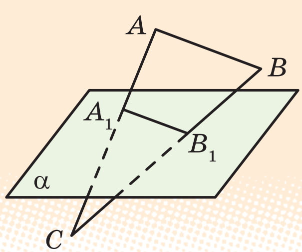
Розв'язання

Позначимо дану площину через α (рис. 5.5). Оскільки $AB \parallel \alpha$ і площина ABC перетинає α по A_1B_1, то $A_1B_1 \parallel AB$. Тоді $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$.

Отже, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C}{AC}$, тобто $\frac{A_1B_1}{10} = \frac{3}{5}$.

Таким чином, $A_1B_1 = 6$ (см).

Рис. 5.5



Коментар

Для того щоб скласти план розв'язування, спочатку необхідно врахувати твердження теореми 5.2: *якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.* Далі слід обґрунтувати, що пряма A_1B_1 паралельна прямій AB. Потім можна використати відомий із планіметрії опорний факт: *пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає трикутник, подібний даному.*

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Назвіть усі випадки взаємного розміщення прямої і площини в просторі.
2. Дайте означення паралельних прямої і площини. Укажіть серед оточуючих предметів моделі площини та прямої, яка їй паралельна.
3. Сформулюйте ознаку паралельності прямої і площини.
4. Сформулюйте властивість паралельних прямої і площини.

ВПРАВИ

5.1°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажіть, обґрунтувавши відповідь, яким граням паралельне ребро: 1) AB; 2) A_1D_1; 3) CC_1.

5.2. Основа AB трапеції $ABCD$ лежить у площині α, яка не збігається з площиною трапеції. Як розташована решта сторін трапеції відносно площини α? Відповідь поясніть.

5.3. Дано паралелограм $ABCD$. Через сторону AD проведена площина α, яка не збігається з площиною паралелограма. Доведіть, що $BC \parallel \alpha$.

5.4. Чи є правильним твердження, що дві прямі, паралельні одній площині, паралельні одна одній?

5.5. Одна з двох паралельних прямих паралельна площині. Чи є правильним твердження, що й друга пряма паралельна цій площині?

5.6. Площина проходить через середини двох сторін трикутника і не збігається з площиною цього трикутника. Доведіть, що дана площина паралельна третій стороні трикутника.

5.7. Дано пряму, паралельну деякій площині. Доведіть, що в цій площині через будь-яку її точку можна провести пряму, паралельну даній прямій.

5.8. Доведіть, що через точку, яка не належить даній площині, можна провести пряму, паралельну цій площині. Скільки таких прямих можна провести?

5.9. Доведіть, що коли дві прямі паралельні, то через одну з них можна провести площину, паралельну другій прямій. Скільки існує таких площин?

5.10. Доведіть, що через кожну з двох мимобіжних прямих можна провести єдину площину, паралельну другій прямій.

5.11. Доведіть, що ребра однієї основи призми паралельні площині другої основи цієї призми.

5.12. Через дану точку проведіть пряму, паралельну кожній із двох даних площин, які перетинаються.

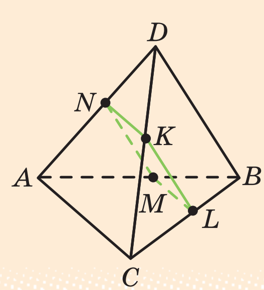
5.13. Дано трикутник BCD. Площина, паралельна прямій BC, перетинає сторону BD цього трикутника в точці B_1, а сторону CD — у точці C_1. Знайдіть довжину відрізка B_1C_1, якщо:

1) $BC = 20$ см, $BB_1 : BD = 2 : 5$;
2) $BC = 14$ см, $CC_1 : C_1D = 5 : 2$;
3) $B_1D = 6$ см, $BC : BD = 2 : 3$.

5.14. Доведіть, що переріз трикутної піраміди $ABCD$ площиною, паралельною двом мимобіжним ребрам AC і BD, завжди є паралелограмом (рис. 5.6).

5.15. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що пряма BD паралельна площині AB_1D_1.

Рис. 5.6

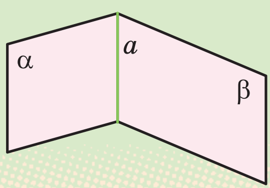
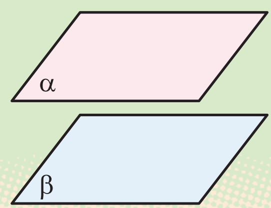


§ 6. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ДВОХ ПЛОЩИН

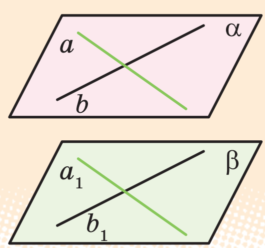
Таблиця 6

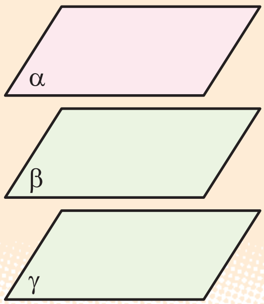
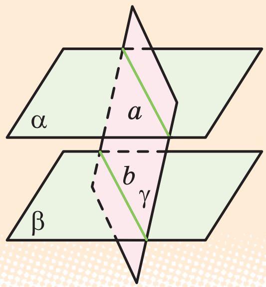
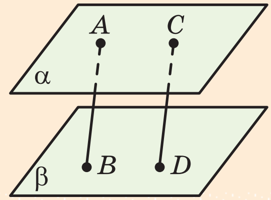
Розміщення двох площин у просторі

Дві площини

мають спільну точку (перетинаються по прямій)	не мають спільних точок (паралельні, тобто не перетинаються)
	

Паралельність площин

Означення	Ознака	
Дві площини називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.		Якщо $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (a і b лежать в α і перетинаються, a_1 і b_1 лежать у β), то $\alpha \parallel \beta$.

Властивості паралельних площин		
		
Якщо $\beta \parallel \alpha$ і $\gamma \parallel \alpha$, то $\beta \parallel \gamma$.	Якщо $\alpha \parallel \beta$ і γ перетинає α по a, γ перетинає β по b, то $a \parallel b$.	Якщо $AB \parallel CD$ і $\alpha \parallel \beta$ ($(A \in \alpha)$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$), то $AB = CD$.

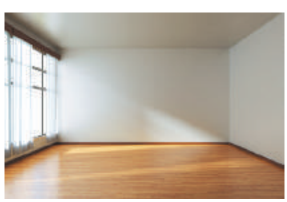
ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Розглянемо питання про взаємне розміщення двох площин. Як відомо, якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку. Звідси випливає, що дві площини або перетинаються по прямій, або не перетинаються, тобто не мають жодної спільної точки (див. схему в табл. 6).

О Означення. **Дві площини називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.**

Якщо площини α і β паралельні, то записують: $\alpha \parallel \beta$. Говорять також, що площина α паралельна площині β або площина β паралельна площині α.

Наочне уявлення про паралельні площини дають стеля та підлога кімнати; поверхня води, налитої в акваріум, і його дно.

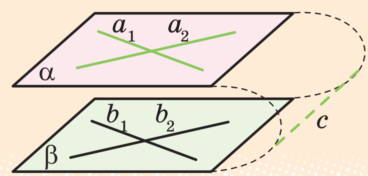


Наступна теорема пов'язує поняття паралельності двох площин із поняттям паралельності прямих і визначає достатню умову паралельності площин.

Т **Теорема 6.1** (ознака паралельності двох площин). **Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.**

Доведення. Нехай прямі a_1 і a_2 площини α паралельні відповідно прямим b_1 і b_2 площини β. Доведемо, що площини α і β паралельні. Припустимо протилежне: площини α та β перетинаються і c — пряма їх перетину (рис. 6.1). За ознакою паралельності прямої і площини пряма a_1 паралельна площині β, а за ознакою паралельності двох прямих у просторі вона паралельна прямій c. Аналогічно пряма a_2 також паралельна прямій c. Таким чином, у площині α ми маємо дві різні прямі, які проходять через одну точку і паралельні одній прямій c, що неможливо. Одержана суперечність показує, що наше припущення неправильне, отже, площини α і β не перетинаються, тобто паралельні. ■

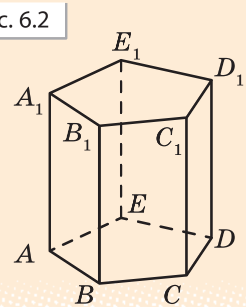
Рис. 6.1



Будемо казати, що дві грані *многогранника паралельні*, якщо вони лежать у паралельних площинах.

Наприклад, *основи призми паралельні*. Дійсно, бічними гранями призми є паралелограми. Тому два суміжних ребра однієї основи призми паралельні відповідно двом суміжним ребрам другої її основи. Отже, основи призми паралельні. Так, на рис. 6.2 зображена п'ятикутна призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, у якої основи $ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$ паралельні.

Рис. 6.2



Наступна теорема пов'язує поняття паралельності двох площин із поняттям паралельності двох прямих.

Теорема 6.2 (властивість паралельних площин). **Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.**

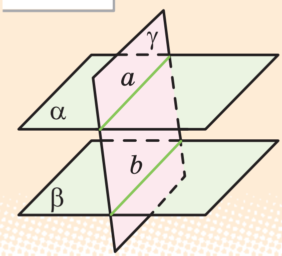


Рис. 6.3

Доведення. Нехай площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b відповідно (рис. 6.3). Доведемо, що прямі a і b паралельні. Дійсно, вони лежать в одній площині — площині γ. Крім того, вони лежать у площинах α і β, які не перетинаються, отже, і прямі a і b не перетинаються. Значить, вони паралельні. ■

Розглядаючи означення і ознаку паралельності площин та властивість паралельних площин, ми припускали існування таких площин. Доведемо це.

Теорема 6.3. Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

Із доведенням теореми можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Розглянемо ще одну властивість паралельних площин, пов'язану з паралельними прямими.

Теорема 6.4. Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.

Доведення. Нехай α і β — паралельні площини, AB і CD — паралельні прямі, що їх перетинають, A, C, B, D — точки перетину цих прямих із площинами α і β відповідно (рис. 6.4). Доведемо, що відрізки AB і CD рівні.

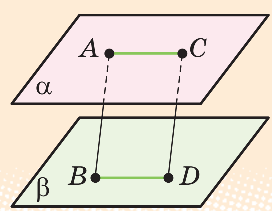


Рис. 6.4

Проведемо через дані паралельні прямі площину, яка перетне площини α і β по паралельних прямих AC і BD. Тоді чотирикутник $ACDB$ — паралелограм, оскільки в нього протилежні сторони паралельні. У паралелограма протилежні сторони рівні, отже, $AB = CD$. ■

Поясніть, як можна застосувати зміст теореми 6.4. в будівництві, побуті.

Теорема 6.5. **Якщо дві різні площини паралельні третій, то вони паралельні одна одній.**

Доведення. Нехай площини α і β паралельні площині γ (див. рисунок у пункті «Властивості паралельних площин» табл. 6). Площини α і β не можуть перетинатися. Якби площини α і β мали спільну точку, то через цю точку проходили б дві площини (α і β), паралельні площині γ, а це суперечить теоремі 6.3. Отже, площини α і β не мають спільних точок, тобто паралельні.

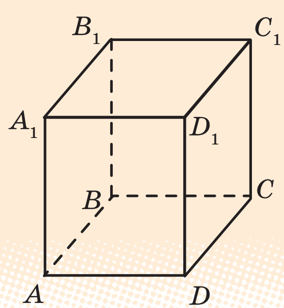
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Доведіть, що **в прямокутному паралелепіпеді протилежні грані попарно паралельні.**

Розв'язання

Нехай дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.5). Доведемо, наприклад, паралельність граней ABB_1A_1 і DCC_1D_1. Оскільки всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники, то $ABCD$ та ADD_1A_1 — прямокутники. Тоді $AB \parallel DC$ та $AA_1 \parallel DD_1$ і за ознакою паралельності площини ABB_1A_1 і DCC_1D_1 паралельні.

Рис. 6.5



Аналогічно обґрунтовують паралельність і інших протилежних граней.

Коментар

Для того щоб довести паралельність граней паралелепіпеда, достатньо довести паралельність площин, у яких лежать ці грані. А для доведення паралельності площин достатньо використати ознаку їх паралельності, тобто довести, що дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини.

Нагадаємо, що всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники (а в прямокутнику протилежні сторони попарно паралельні).

Задача 2. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки K, M, N, де $M \in AA_1$, $N \in BB_1$ і точка K лежить у грані DCC_1D_1 (рис. 6.6, *а*).

Розв'язання

1) Точки M і N лежать і в січній площині, і в грані ABB_1A_1, тому січна площина перетинає цю грань по відрізку MN (рис. 6.6, *б*).

2) Оскільки $DCC_1D_1 \parallel ABB_1A_1$, то січна площина перетинає грань DCC_1D_1 по прямій, яка проходить через точку K і паралельна прямій MN. Проводимо через точку K відрізок $TE \parallel MN$ ($T \in DD_1$, $E \in CC_1$).

3) Сполучаючи відрізками точки перетину січної площини з ребрами призми, одержуємо чотирикутник $MNET$ — шуканий переріз. ■

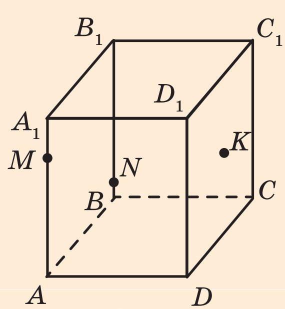
Коментар

Для складання плану побудови достатньо згадати, що в прямокутному паралелепіпеді протилежні грані попарно паралельні, отже, $ABB_1A_1 \parallel DCC_1D_1$. Січна площина, яку задано трьома точками K, M, N, перетинає площину ABB_1A_1 по прямій MN. Тому паралельну їй площину DCC_1D_1 вона перетинатиме по прямій, яка паралельна прямій MN і проходить через точку K.

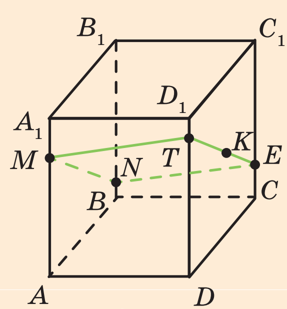
Для того щоб виконати побудову, слід урахувати також, що пряма MN паралельна площині DCC_1D_1 і в цій площині через точку K можна провести пряму, паралельну даній прямій.

Із паралельності протилежних граней паралелепіпеда одержуємо, що в побудованому перерізі протилежні сторони попарно паралельні. Отже, чотирикутник $MNET$ — паралелограм. Це іноді доводиться використовувати під час розв'язування задач, пов'язаних з аналогічним перерізом прямокутного паралелепіпеда.

Рис. 6.6



а



б

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Назвіть можливі випадки взаємного розміщення двох площин.
2. Дайте означення паралельних площин. Укажіть серед оточуючих предметів моделі паралельних площин.
3. Сформулюйте ознаку паралельності площин.
4. Сформулюйте властивості прямих і площин, пов'язані з паралельними площинами.

ВПРАВИ

6.1°. Укажіть паралельні грані:
1) паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$; 2) призми $ABCA_1B_1C_1$.

6.2°. Чи є правильним твердження: «Якщо дві прямі, які лежать в одній площині, паралельні двом прямим, що лежать у другій площині, то ці площини паралельні»?

6.3°. Чи можуть бути паралельними дві площини, які проходять через непаралельні прямі? Продемонструйте результат на моделі.

6.4°. Чи можуть перетинатися площини, паралельні одній прямій?

6.5°. Через кожну з двох паралельних прямих проведено площину. Чи є правильним твердження, що ці площини паралельні?

6.6°. Чи можна стверджувати, що площина α завжди паралельна площині трапеції, якщо площина α паралельна:
1) основам трапеції; 2) бічним сторонам трапеції?

6.7. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що площина BDC_1 паралельна площині AB_1D_1.

Рис. 6.7

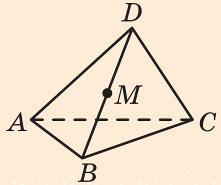


Рис. 6.8

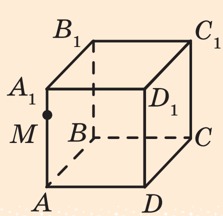


Рис. 6.9

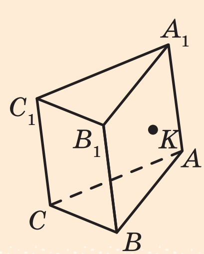
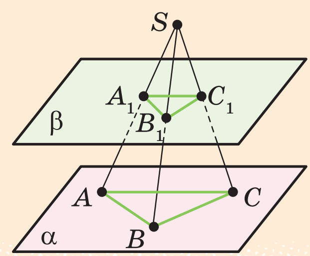


Рис. 6.10



6.8. Через дану точку проведіть площину, паралельну кожній із двох прямих, які перетинаються. Чи завжди це можливо?

6.9. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу.

6.10. Які можливі випадки взаємного розміщення трьох площин у просторі, якщо дві з них паралельні?

6.11. Нарисуйте в зошиті зображення піраміди, наведене на рис. 6.7, і побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через точку M паралельно грані ABC.

6.12*. Нарисуйте в зошиті зображення куба, наведене на рис. 6.8, і побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки:
1) M, B, C; 2) M, B_1, C.

6.13*. Нарисуйте в зошиті зображення трикутної призми, наведене на рис. 6.9 (точка K лежить у грані ABB_1A_1), і побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через точку K паралельно:
1) основі $A_1B_1C_1$; 2) грані BCC_1B_1.

6.14*. Три прямі, які проходять через точку S, перетинають дану площину α в точках A, B, C, а паралельну їй площину β — у точках A_1, B_1, C_1. Доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 6.10).

6.15. На ребрах куба вказано точки M, P і R (рис. 6.11–6.12). Скориставшись властивостями паралельних прямих і площин, для кожного зображення побудуйте переріз куба площиною MRP.

Рис. 6.11

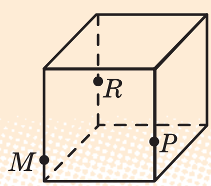
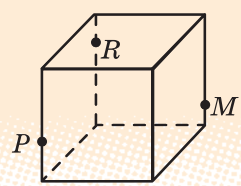


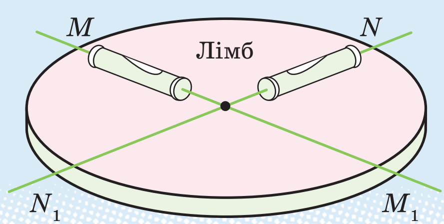
Рис. 6.12



Виявіть свою компетентність

6.16. Для того щоб перевірити горизонтальність установки лімба кутовимірювальних інструментів, користуються двома рівнями, розташованими в одній площині (рис. 6.13). Чому рівні розміщують на діаметрах?

Рис. 6.13



§ 7. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ. ЗОБРАЖЕННЯ ПЛОСКИХ І ПРОСТОРОВИХ ФІГУР У СТЕРЕОМЕТРІЇ

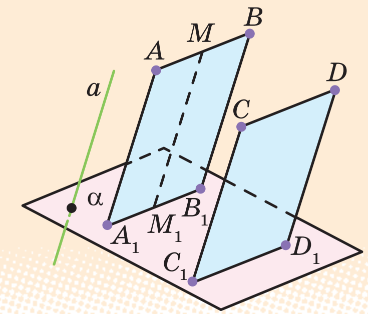
Таблиця 7

Зображення просторових фігур на площині

Для зображення просторових фігур на площині, як правило, використовують *паралельне проектування*.

Візьмемо довільну пряму a, яка перетинає площину α. Через довільну точку A деякої фігури проводимо пряму $AA_1 \parallel a$, яка перетинає площину α в точці A_1.

Точка A проектується в точку A_1 на площині α*: $A \to A_1$. Аналогічно $B \to B_1$, $AB \to A_1B_1$ $(BB_1 \parallel AA_1 \parallel a)$.



Властивості паралельного проектування

1) Відрізок проектується у відрізок або в точку, пряма проектується в пряму або в точку.

2) Якщо $AB \parallel CD$, ($AB \to A_1B_1$, $CD \to C_1D_1$, $AB \nparallel AA_1$), то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ або збігаються. Тобто при паралельному проектуванні зберігається паралельність прямих (якщо їх проекції не збігаються).

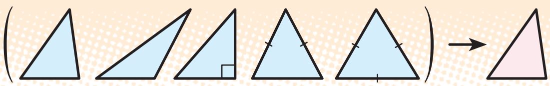
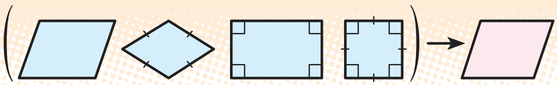
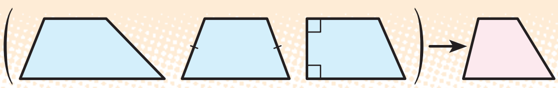
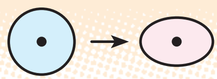
3) $\boxed{\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{A_1M_1}{M_1B_1}}$ Відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій (або на паралельних прямих), зберігається.

Наслідок. Якщо точка M — середина відрізка AB, $AB \to A_1B_1$, $M \to M_1$, то точка M_1 — середина відрізка A_1B_1.

4) Якщо плоска фігура F лежить у площині, паралельній площині проекцій, то її проекція F' на цю площину дорівнює фігурі F.

---

*Іноді буває зручно той факт, що точка A' є проекцією точки A (тобто точка A проектується в точку A'), записувати так: $A \to A'$ (знак «$\to$» у наведеному записі означає: «проектується в»; див., наприклад, записи в табл. 7).

Паралельні проекції деяких плоских фігур	
	Проекція трикутника — довільний ***трикутник***.
	Проекція паралелограма — довільний ***паралелограм***.
	Проекція трапеції — довільна ***трапеція*** за умови збереження відношення довжин основ.
	Проекція кола — довільний ***еліпс***.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Поняття паралельного проектування та його властивості

Для зображення просторових фігур на площині, як правило, використовують паралельне проектування (див. табл. 7).

Якщо побудувати проекцію кожної точки фігури, то одержимо *проекцію* самої *фігури*. Паралельною проекцією реальної фігури є, наприклад, її тінь, що падає на плоску поверхню у разі сонячного освітлення, оскільки сонячні промені можна вважати паралельними (рис. 7.1). Так, дивлячись на власну тінь на поверхні землі, ви бачите свою паралельну проекцію.

Рис. 7.1

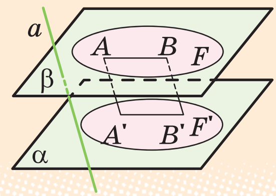
Детальніше про паралельне проектування та його властивості, а також про паралельні проекції деяких плоских фігур і властивості зображень деяких многокутників у паралельній проекції можна дізнатися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Обґрунтуємо властивість 4 паралельного проектування, наведену в табл. 7.

Властивість 4. **Якщо плоска фігура F лежить у площині, паралельній площині проекцій, то її проекція F' на цю площину дорівнює фігурі F.**

Доведення. Задамо відповідність між точками фігури F і точками фігури F', ставлячи кожній точці фігури F у відповідність її проекцію. Тож якщо A і B — точки фігури F, а точки A' і B' — їх проекції, то $ABB'A'$ — паралелограм (рис. 7.2). Отже, $A'B' = AB$. Таким чином, ця відповідність зберігає відстань між точками, а тому фігури F і F' рівні.

Рис. 7.2



З'ясуємо, яка фігура є паралельною проекцією **кола**.

Нехай фігура F — коло в просторі, а фігура F' — проекція цього кола на площину α в напрямі прямої a. Якщо пряма a паралельна площині кола або лежить у ній, то проекцією кола є відрізок, що дорівнює його діаметру.

Розглянемо випадок, коли пряма a перетинає площину кола.

Нехай AB — діаметр кола, паралельний площині α, і $A'B'$ — його проекція на цю площину (рис. 7.3). Тоді $AB = A'B'$. Візьмемо будь-який інший діаметр CD, і нехай $C'D'$ буде його проекцією. Позначимо відношення $C'D' : CD$ через k. Оскільки під час виконання паралельного проектування зберігаються паралельність і відношення довжин паралельних відрізків, то для довільної хорди C_1D_1, паралельної діаметру CD, її проекція $C_1'D_1'$ буде паралельною $C'D'$ і відношення $C_1'D_1' : C_1D_1$ дорівнюватиме k (якщо $CD : C_1D_1 = C'D' : C_1'D_1'$, то $C_1'D_1' : C_1D_1 = C'D' : CD = k$).

Таким чином, проекцію кола одержують стискуванням або розтягуванням його в напрямі будь-якого діаметра в одне й те саме число разів. Таку фігуру на площині називають *еліпсом*.

Наприклад, на рис. 7.4 зображено еліпс, одержаний стискуванням кола в напрямі діаметра CD у два рази.

Рис. 7.3

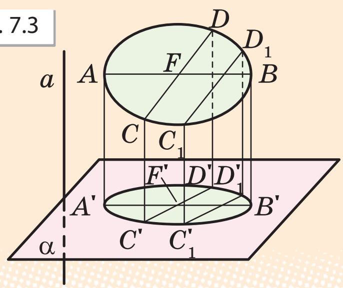
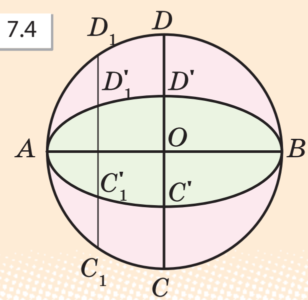


Рис. 7.4



2. Зображення деяких просторових фігур на площині

Як ми вже відзначали, для зображення просторових фігур зазвичай використовують паралельне проектування. Усі рисунки просторових фігур, розглянуті нами раніше, було виконано в паралельній проекції. Площина, на яку проектується фігура, називається *площиною зображення*, а проекція фігури — *зображенням*. Зображенням даної фігури називають також і будь-яку фігуру, подібну до проекції даної фігури.

Розглянемо приклади зображень просторових фігур — многогранників. Зображення многогранника складається із зображення його ребер, одержаних за допомогою паралельного проектування. При цьому всі ребра діляться на два типи: видимі й невидимі. (Уявіть собі, що паралельно напряму проектування йдуть промені світла. У результаті поверхня многогранника розіб'ється на дві частини: освітлену і неосвітлену. Видимими є ребра, які розміщені на освітленій частині.) Видимі ребра зображують суцільними лініями, а невидимі — штриховими.

Зображуючи куб, площину зображень зазвичай вибирають паралельною одній із його граней. У цьому випадку дві грані куба (передня і задня), паралельні площині зображень, зображують рівними квадратами, решту граней — паралелограмами (рис. 7.5). Аналогічним чином зображують прямокутний паралелепіпед (рис. 7.6).

Якщо не дотримуватися правила, що площина зображень має бути паралельною одній із граней, то в одержаному зображенні зберігатиметься тільки паралельність та рівність протилежних сторін квадрата чи прямокутника (тобто всі грані будуть паралелограмами). Тоді зображення куба чи прямокутного паралелепіпеда може мати вигляд, наведений на рис. 7.7. Але таке зображення недостатньо наочне і може утруднюва-

Рис. 7.5

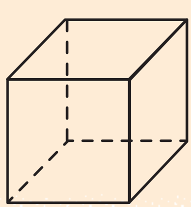


Рис. 7.6

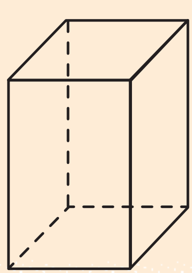


Рис. 7.7

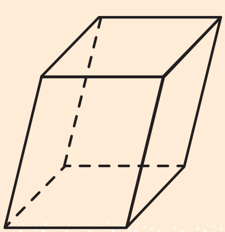
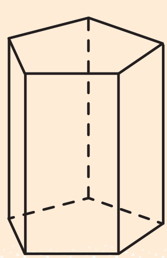
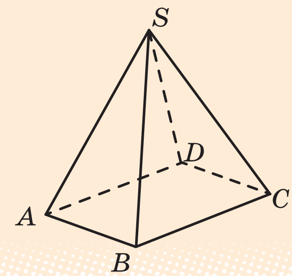


Рис. 7.8



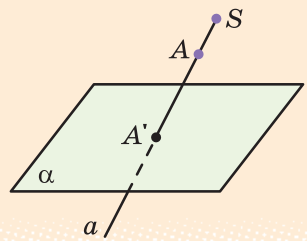
ти розв'язування задач, пов'язаних із цими тілами. Тому ми не будемо користуватися ними (але ще раз підкреслимо, що такі зображення — правильні).

Рис. 7.9



Для побудови зображення призми достатньо побудувати многокутник, що зображає її основу. Потім із вершин многокутника слід провести прямі, паралельні деякій фіксованій прямій, і відкласти на них рівні відрізки. Сполучивши кінці цих відрізків, одержимо многокутник, що є зображенням другої основи призми (рис. 7.8).

Рис. 7.10



Щоб побудувати зображення піраміди, досить побудувати многокутник, що зображає її основу. Потім потрібно вибрати довільну точку, яка зображатиме вершину піраміди, і сполучити її відрізками з вершинами многокутника (рис. 7.9). Одержані відрізки зображатимуть бічні ребра піраміди.

Зазначимо, що разом із паралельним проектуванням, що використовують у геометрії для зображення просторових фігур, велике значення має так зване *центральне проектування*, яке застосовують у живописі, фотографії тощо. Сприйняття людиною навколишніх предметів за допомогою зору здійснюється за законами центрального проектування.

Нехай α — деяка площина, а точка S, що не належить їй, — центр проектування (рис. 7.10). Для точки A простору проведемо пряму a через точки S і A. Точка перетину цієї прямої з площиною α називається *центральною проекцією точки A на площину* α. Позначимо її A'.

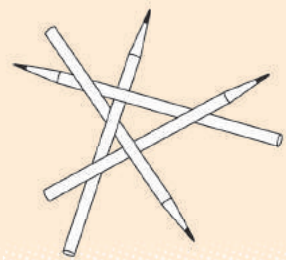
*Спосіб проектування, при якому точкам A простору ставлять у відповідність їх центральні проекції A', називається центральним проектуванням**.

* Часто центральне проектування ще називають перспективою.

Більше про **центральне проектування** та історію його використання ви можете дізнатися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Звернемо увагу на той факт, що плоске зображення, підпорядковуючись певним законам, здатне передати уявлення про тривимірний предмет. Проте при цьому можуть виникати ілюзії. Наприклад, на рис. 7.11 зображено фігуру, яку неможливо скласти з дерев'яних прямолінійних олівців (поясніть чому).

Рис. 7.11



У живописі існує напрям, який називають «імпосибілізм» — зображення неможливих фігур, парадоксів. Відомий голландський художник М. Ешер у гравюрах «Бельведер» (рис. 7.12), «Підіймаючись і опускаючись» (рис. 7.13), «Водоспад» (рис. 7.14) тощо зобразив неможливі об'єкти.

Імпосибілізм — від англ. *impossibility* — неможливість.

Сучасний шведський архітектор О. Рутерсвард присвятив неможливим об'єктам серію своїх художніх робіт. Деякі з них наведено на рис. 7.15–7.17.

Рис. 7.12

Рис. 7.13

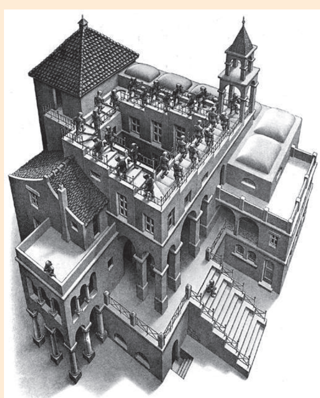


Рис. 7.14

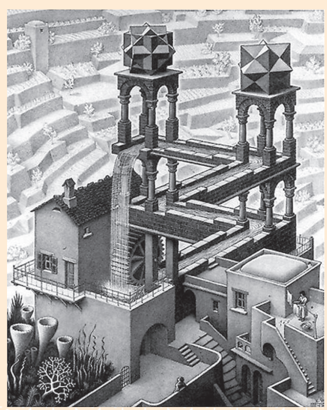


Рис. 7.15

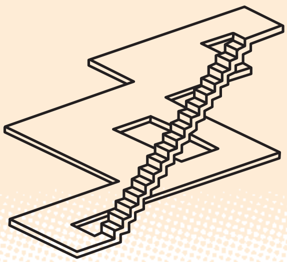


Рис. 7.16

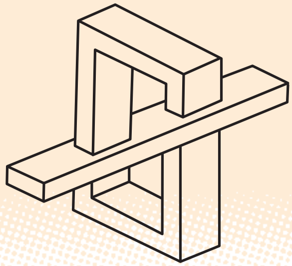
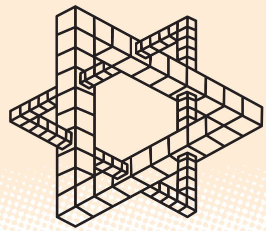


Рис. 7.17



ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ*

Задача. Чи може паралелограм бути паралельною проекцією трапеції?

Розв'язання

Ні, не може, оскільки в трапеції прямі, на яких лежать бічні сторони, перетинаються. Отже, точка перетину цих прямих повинна проектуватися в точку перетину їх проекцій, тобто в точку перетину прямих, на яких лежать протилежні сторони паралелограма-проекції. Але це неможливо, оскільки протилежні сторони паралелограма лежать на паралельних прямих, тобто не перетинаються. ■

Коментар

Щоб спростувати дане твердження, використаємо метод доведення від супротивного.

Припустимо, що паралельною проекцією трапеції є паралелограм. Спираючись на властивості паралельного проектування та властивості трапеції і паралелограма, одержимо суперечність з якоюсь із цих властивостей.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, що називається паралельною проекцією точки та фігури на дану площину.
2. Сформулюйте властивості паралельного проектування.
3. Якою фігурою може бути паралельна проекція трикутника, паралелограма, трапеції, кола, якщо площина фігури не паралельна напряму проектування?

* Див. також задачу в інтернет-підтримці підручника.

ВПРАВИ

7.1°. Які фігури можуть служити паралельними проекціями трикутника?

7.2°. Чи може паралельною проекцією правильного трикутника бути:
1) прямокутний трикутник;
2) рівнобедрений трикутник;
3) різносторонній трикутник?

7.3°. Якою фігурою може бути паралельна проекція:
1) прямокутника; 2) паралелограма; 3) трапеції?

7.4°. Чи може паралельною проекцією прямокутника бути:
1) квадрат; 2) паралелограм; 3) ромб; 4) трапеція?

7.5°. Чи є правильним, що проекцією ромба, якщо він не проектується у відрізок, завжди буде ромб? Коли це твердження виконується?

7.6°. Чи є правильним, що в результаті паралельного проектування трикутника завжди:
1) медіани проектуються в медіани;
2) висоти проектуються у висоти;
3) бісектриси проектуються в бісектриси?

7.7°. Дано паралельну проекцію трикутника. Як побудувати проекції медіан цього трикутника? Поясніть правильність побудови.

7.8°. Дано паралельну проекцію трикутника. Як побудувати проекції середніх ліній цього трикутника? Поясніть правильність побудови.

7.9. Чи може проекцією трапеції з основами 4 см і 8 см бути трапеція з основами 2 см і 6 см? Відповідь поясніть.

7.10. Чи може паралельною проекцією двох непаралельних прямих бути пара паралельних прямих? Якщо може, то наведіть приклад таких прямих.

7.11. Які з властивостей ромба є правильними і для зображення цього ромба? Які можуть не зберегтися?

7.12. Які властивості прямокутника є правильними і для його проекції?

7.13. Побудуйте довільний паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ і, прийнявши його за паралельну проекцію квадрата $ABCD$, побудуйте проекцію:
1) центра кола, описаного навколо квадрата $ABCD$;
2) перпендикуляра OM, проведеного із центра O квадрата $ABCD$ на сторону AD.

Відомості з історії наведено в інтернет-підтримці підручника.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тест № 1

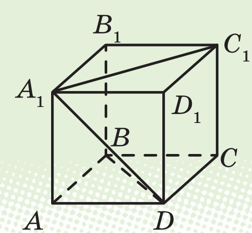
1. Дві прямі не паралельні і не перетинаються. Скільки площин можна провести через ці прямі?
А Одну Б Дві В Жодної Г Безліч

2. Прямі a і b паралельні площині α. Яким є взаємне розміщення прямих a і b?
А Обов'язково паралельні
Б Обов'язково перетинаються
В Обов'язково мимобіжні
Г Однозначно визначити неможливо

3. Точка K лежить поза площиною трикутника ABC. Яким є взаємне розміщення прямих BK і AC?
А Перетинаються
Б Паралельні
В Мимобіжні
Г Визначити неможливо

4. На рис. 1 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Серед даних пар прямих укажіть пару паралельних прямих.
А A_1D і B_1C_1
Б AA_1 і BD
В A_1B_1 і A_1C_1
Г DC і A_1B_1

Рис. 1



5. Бічні сторони трапеції паралельні площині α. Яким є взаємне розміщення площини α і площини трапеції?
А Паралельні
Б Перетинаються
В Збігаються
Г Визначити неможливо

6. Прямі a і b паралельні. Скільки існує площин, які проходять через пряму a і паралельні прямій b?
А Тільки одна Б Тільки дві В Безліч Г Жодної

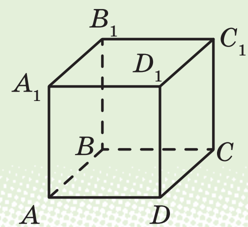
7. Прямі a і b мимобіжні. Скільки існує площин, які проходять через пряму a і паралельні прямій b?
А Одна Б Дві В Безліч Г Жодної

8. Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC у точці M, а сторону BC — у точці K. Яка довжина відрізка MK, якщо точка M — середина сторони AC і $AB = 12$ см?
А 12 см
Б 6 см
В 4 см
Г Визначити неможливо

9. На рис. 2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Серед даних прямих укажіть пряму, паралельну площині AA_1B_1.

А C_1D В A_1B
Б BD Г BC_1

Рис. 2



10. Яка з даних фігур не може бути паралельною проекцією прямокутника на площину?

А Відрізок В Трапеція
Б Квадрат Г Ромб

11. Яке з наведених тверджень є правильним?

А Якщо пряма a не паралельна прямій b, що лежить у площині α, то пряма a не паралельна площині α.

Б Якщо пряма a, яка не лежить у площині α, паралельна прямій b цієї площини, то пряма a паралельна площині α.

В Якщо пряма a перетинає площину α, а пряма b належить площині α, то пряма a перетинає пряму b.

Г Якщо дві прямі в просторі не мають спільних точок, то вони паралельні.

12. Яке з наведених тверджень є правильним?

А Якщо пряма в просторі перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

Б Якщо пряма паралельна площині, то вона паралельна будь-якій прямій цієї площини.

В Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає і другу площину.

Г Якщо дві прямі в просторі не перетинаються, то вони не лежать в одній площині.

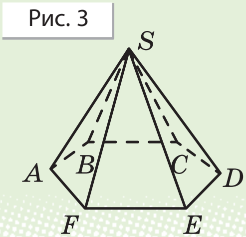
13. Яка з даних фігур не може бути паралельною проекцією на площину двох паралельних прямих?

А Дві точки В Дві прямі, що перетинаються
Б Пряма Г Дві паралельні прямі

14. На рис. 3 зображено піраміду $SABCDEF$, основою якої є правильний шестикутник $ABCDEF$. Площина якої з бічних граней паралельна прямій AB?

А CSD В ESF
Б DSE Г Такої грані не існує

Рис. 3



15. Скільки площин можуть визначати три паралельні прямі?

А Тільки одну **Б** Одну або дві **В** Дві або три **Г** Одну або три

16. Через точку перетину медіан трикутника ABC паралельно прямій AB проведено площину, яка перетинає сторони AC і BC у точках D і E відповідно. Знайдіть відрізок DE, якщо $AB = 18$ см.

А 6 см **Б** 9 см **В** 3 см **Г** 12 см

17. Площини α і β паралельні. Із точки O, яка не належить цим площинам і області між ними, проведено два промені. Один із них перетинає площини α і β у точках C_1 і D_1, а другий — у точках C_2 і D_2 відповідно. Знайдіть відрізок C_1C_2, якщо він на 5 см менший від відрізка D_1D_2, $OC_1 = 4$ см, $C_1D_1 = 10$ см.

А 2 см **Б** $3\frac{1}{3}$ см **В** 6 см **Г** $4\frac{2}{3}$ см

18. Дано трикутник ABC і площину α, яка не перетинає його. Через вершини трикутника ABC і середину M його медіани BD проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 і M_1 відповідно. Знайдіть відрізок MM_1, якщо $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 12$ см, $CC_1 = 19$ см.

А 12 см **Б** 14 см **В** 13 см **Г** 26 см

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua

Навчальний проект

АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Учні класу об'єднуються в три групи: «історики», «математики», «практики». Кожний учень може взяти участь у роботі однієї або двох проектних груп.

«*Історики*» досліджують виникнення і розвиток сучасної системи аксіом.

«*Математики*» опановують матеріал щодо альтернативних систем аксіом.

«*Практики*» досліджують практичне застосування теоретичних тверджень системи аксіом евклідової геометрії.

Результати роботи над проектом члени кожної групи оформлюють у вигляді комп'ютерної презентації.

Теми навчальних проектів

1. Геометричні форми в мистецтві.
2. Архітектура і математика.

Розділ 2

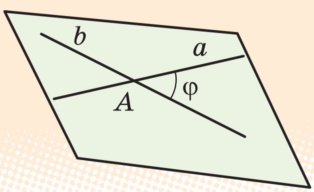
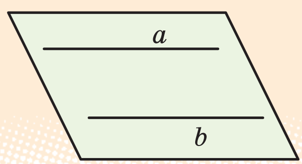
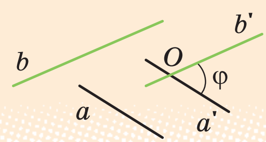
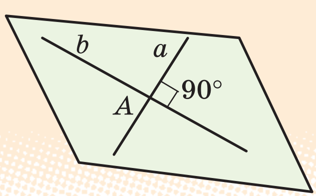
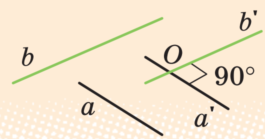
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

У цьому розділі ви:

- ознайомитеся з основними поняттями та властивостями перпендикулярності прямих і площин у просторі, кутами в просторі;
- навчитеся застосовувати ці поняття і властивості для розв'язування геометричних задач на доведення, на обчислення відстаней і кутів у просторі; розв'язувати складніші задачі, пов'язані з перпендикулярністю прямих і площин у просторі;
- зможете ознайомитися з узагальненням понять відстані в геометрії та геометричного місця точок, відомих вам з курсу планіметрії.

§ 8. КУТ МІЖ ПРЯМИМИ В ПРОСТОРІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

Таблиця 8

<table>
<tr><th colspan="3">Кути між прямими в просторі</th></tr>
<tr><th colspan="2">Прямі лежать в одній площині</th><th>Прямі не лежать в одній площині</th></tr>
<tr><td>Прямі перетинаються</td><td>Прямі паралельні</td><td>Прямі мимобіжні</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>φ — найменший із утворених кутів;
$\angle(a;b)=\varphi;\ 0^\circ<\varphi\leqslant 90^\circ$</td><td>$\angle(a;b)=0^\circ$;
$\varphi=0^\circ$</td><td>$a'\parallel a,\ b'\parallel b$;
$\angle(a;b)=\angle(a';b')=\varphi$;
$0^\circ<\varphi\leqslant 90^\circ$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Перпендикулярні прямі $(a\perp b)$</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\angle(a;b)=90^\circ$</td><td>$\angle(a;b)=90^\circ$</td></tr>
</table>

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Як зазначалося в § 4, дві прямі в просторі можуть лежати в одній площині (коли вони перетинаються або паралельні) або не лежати в одній площині (тоді вони мимобіжні). Дамо означення кута між прямими в просторі для кожного з цих випадків.

Дві прямі, які перетинаються, утворюють суміжні й вертикальні кути. Вертикальні кути дорівнюють один одному, а суміжні кути доповнюють один одного до 180°.

Означення. ***Кутом між двома прямими, що перетинаються,* називається найменший* із кутів, утворених променями цих прямих, з вершиною в точці їх перетину.**

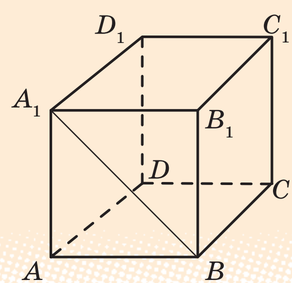
Як і на площині, **дві прямі в просторі, що перетинаються, називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Вважають, що кут між двома паралельними прямими (чи прямими, що збігаються) дорівнює нулю.**

Також вважатимемо, що *два відрізки перпендикулярні*, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Якщо позначити кут між прямими, які лежать в одній площині, через φ, то з наведеного означення випливає, що $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.1) ребра, що перетинаються, перпендикулярні, діагональ A_1B грані куба утворює з її ребрами кути по 45°.

Рис. 8.1



Використовуючи властивості паралельного проектування, легко довести таку теорему.

Теорема 8.1. **Кут між прямими, що перетинаються, дорівнює куту між прямими, які паралельні даним прямим і перетинаються.**

Із доведенням теореми можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

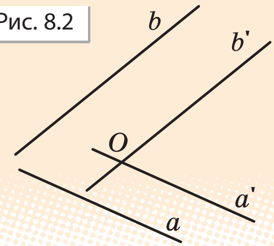
---

* Якщо при перетині прямих утворюються рівні кути (по 90°), то як кут між прямими вибирають будь-який із них.

Означимо тепер поняття «кут між мимобіжними прямими».

Нехай прямі a і b — мимобіжні (рис. 8.2). Розглянемо довільну точку O в просторі та проведемо через неї прямі a' і b', паралельні прямим a і b відповідно. Кут між прямими a' і b' приймають за кут між мимобіжними прямими a і b.

Рис. 8.2



Означення. ***Кутом між мимобіжними прямими*** **називається кут між прямими, які паралельні даним мимобіжним прямим і перетинаються.**

Оскільки за теоремою 8.1 кути з відповідно паралельними сторонами дорівнюють один одному, то це означення не залежить від вибору точки O. Зокрема, точка O може належати також прямій a або b. У цьому випадку як пряму a' або b' слід узяти саму пряму a або b відповідно.

Якщо позначити кут між мимобіжними прямими через φ, то з наведеного означення випливає, що $0° < \varphi \leqslant 90°$.

Дві мимобіжні прямі називають *перпендикулярними*, якщо кут між ними прямий.

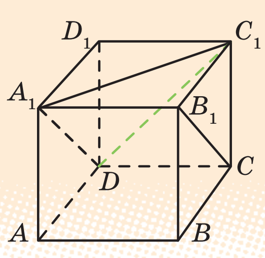
Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.3) мимобіжні ребра AA_1 і BC перпендикулярні, оскільки $BB_1 \parallel AA_1$ (ABB_1A — квадрат). Отже, $\angle(AA_1; BC) = \angle(BB_1; BC) = \angle B_1BC = 90°$, тобто $AA_1 \perp BC$.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.3) знайдіть кут між прямими A_1C_1 і B_1C.

Розв'язання

Рис. 8.3



Коментар

Прямі A_1C_1 і B_1C — мимобіжні. Щоб знайти кут між ними, можна провести через довільну точку простору паралельні їм прямі або (що роблять частіше) через точку однієї прямої — пряму, паралельну другій прямій.

Розглянемо площину, яка проходить через паралельні ребра куба A_1B_1 і DC — вона перетинає паралельні грані куба AA_1D_1D і BB_1C_1C по паралельних прямих A_1D і B_1C. Отже, $A_1D \parallel B_1C$, але тоді кут між мимобіжними прямими A_1C_1 і B_1C дорівнює куту між прямими A_1C_1 і A_1D. Сполучаючи точки D і C_1 відрізком, отримуємо рівносторонній трикутник A_1C_1D (його сторони дорівнюють одна одній як діагоналі рівних квадратів). Звідси $\angle C_1A_1D = 60°$.

Отже, $\angle(A_1C_1; B_1C) = 60°$.

Відповідь: 60°.

Відповідну паралельну пряму можна побудувати в просторі, що не завжди просто. Також цю пряму можна одержати як елемент даного многогранника. Для цього достатньо згадати, що довільна площина перетинає паралельні грані куба по паралельних прямих.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Дайте означення кутів між прямими в просторі (між прямими, що перетинаються; між паралельними прямими; між мимобіжними прямими).
2. Сформулюйте властивість кутів, утворених відповідно паралельними прямими.
3*. Доведіть властивість кутів, утворених відповідно паралельними прямими.
4. Які прямі в просторі називаються перпендикулярними? Наведіть приклади таких прямих, користуючись моделлю прямокутного паралелепіпеда.

ВПРАВИ

8.1°. Знайдіть кут між ребрами, які перетинаються:
1) куба; 2) правильного тетраедра.

8.2°. Знайдіть кут між діагоналлю грані куба і ребром, що перетинає її.

8.3°. Знайдіть кут між діагоналями, які перетинаються, двох різних граней куба.

8.4°. Дано пряму в просторі, на ній узято точку. Скільки можна побудувати прямих, що проходять через цю точку і перпендикулярні до даної прямої? Відповідь проілюструйте на моделі.

8.5°. Дано пряму і точку поза нею. Скільки можна побудувати прямих, що проходять через цю точку і перпендикулярні до даної прямої?

8.6°. Дано площину і паралельну їй пряму. Скільки прямих, перпендикулярних до цієї прямої, можна провести в даній площині?

8.7. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть перпендикулярність прямих:
1) BC і C_1D_1; 2) BD і A_1C_1; 3) BD і AA_1.

8.8. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кути, які утворюють прямі:
1) AA_1 і B_1C_1; 2) AA_1 і CC_1; 3) BB_1 і CD.

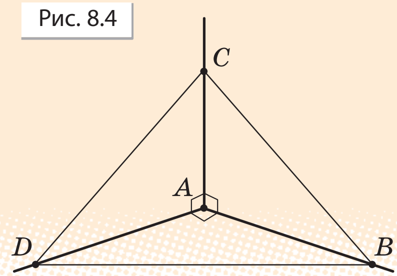
8.9. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кути між мимобіжними прямими:
1) AB і B_1D_1; 2) AB_1 і BC_1.

8.10. У правильній чотирикутній піраміді зі стороною основи, що дорівнює бічному ребру, знайдіть кут між стороною основи і мимобіжним до неї бічним ребром.

8.11. Точки A, B, C лежать на попарно перпендикулярних променях OA, OB, OC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо відомо, що $OA = OB = OC$.

8.12. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні (рис. 8.4). Знайдіть довжину відрізка CD, якщо:
1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см;
2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AB = 5$ см;
3) $AB = b$, $BC = a$, $AB = d$.

Рис. 8.4



8.13*. Діагональ прямокутного паралелепіпеда, основою якого є квадрат, удвічі більша, ніж сторони основи. Знайдіть кути між діагоналями паралелепіпеда.

8.14. Прямі a і b паралельні. Прямі a і c перетинаються під прямим кутом. Укажіть взаємне розташування прямих b і c та кут між ними.

8.15. Прямі a і b паралельні. Прямі a і c перетинаються під кутом $30°$. Укажіть взаємне розташування прямих b і c та кут між ними.

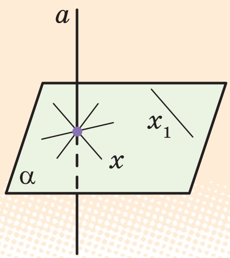
8.16. Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні відповідно двом перпендикулярним прямим, то вони теж перпендикулярні. Доведіть.

§ 9. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Таблиця 9

Перпендикулярність прямої та площини

Означення

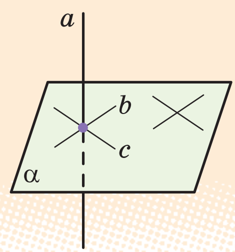


$\boxed{a \perp \alpha} \Leftrightarrow \boxed{a \perp x}$.

x — будь-яка пряма площини α;

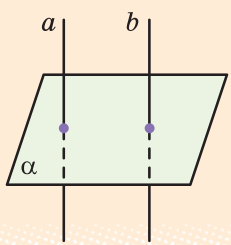
$\boxed{a \perp x_1}$

Ознака



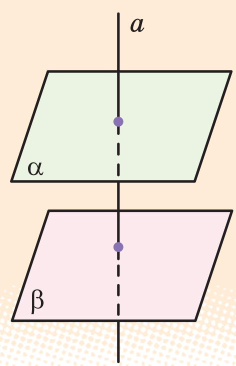
Якщо $a \perp b$ і $a \perp c$ (*b* і *c* лежать у площині α і перетинаються), то $a \perp \alpha$

Залежність між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин



Якщо $a \parallel b$ і $a \perp \alpha$, то $a \perp b$.

Якщо $a \perp \alpha$ і $b \perp a$, то $a \parallel b$



Якщо $\alpha \parallel \beta$ і $a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$.

Якщо $\alpha \perp a$ і $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Означення. **Пряма називається *перпендикулярною до площини*, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.**

Відрізок називатимемо перпендикулярним до площини, якщо він лежить на прямій, перпендикулярній до цієї площини.

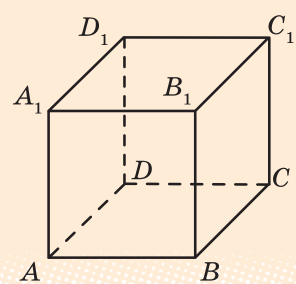
Позначають перпендикулярність прямої a і площини α так: $a \perp \alpha$ або $\alpha \perp a$. Отже, за означенням, якщо $a \perp \alpha$ і довільна пряма x або x_1 лежить у площині α, то $a \perp x$ і $a \perp x_1$ (див. рисунок до означення в табл. 9).

Мають місце теореми про перпендикулярність прямої та площини і про залежність між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин, символічний запис яких наведено в табл. 9.

Теорема 9.1 (ознака перпендикулярності прямої та площини). **Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих площини, які перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.**

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 9.1) бічне ребро AA_1 перпендикулярне до прямих AB і AD площини основи $ABCD$. Отже, за ознакою перпендикулярності прямої і площини це бічне ребро перпендикулярне до площини основи $ABCD$.

Рис. 9.1



Теорема 9.2. **Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма перпендикулярна до цієї площини.**

Теорема 9.3. **Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.**

Теорема 9.4. **Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої площини.**

Теорема 9.5 (ознака паралельності площин). **Дві різні площини, перпендикулярні до однієї прямої, паралельні.**

Із доведенням теорем можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

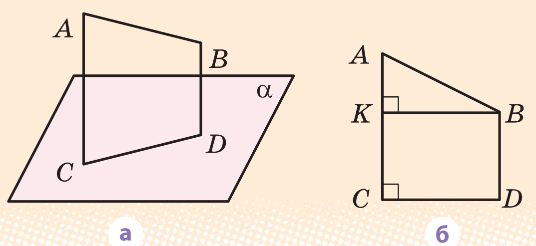
ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача. Через точки A і B проведено прямі, перпендикулярні до площини α, які перетинають її в точках C і D відповідно. Знайдіть відстань між точками A і B, якщо $AC = 3$ м, $BD = 2$ м, $CD = 2,4$ м і відрізок AB не перетинає площину α.

Розв'язання

Оскільки дві прямі, перпендикулярні до площини α, паралельні, то $AC \parallel BD$, отже, $ABDC$ — трапеція (рис. 9.2, *а*). За умовою $AC \perp \alpha$, тоді $AC \perp CD$, тобто трапеція $ABDC$ прямокутна.

Рис. 9.2



Проведемо у трапеції $ABDC$ з точки B перпендикуляр BK до сторони AC (рис. 9.2, *б*). Одержимо прямокутник $BKCD$ (оскільки у чотирикутника $BKCD$ усі кути прямі), отже, $CK = BD = 2$ м і $KB = CD = 2,4$ м. Тоді $AK = AC - CK = 3 - 2 = 1$ (м). Із прямокутного трикутника AKB:

$$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = \sqrt{1^2 + 2,4^2} =$$

$$= \sqrt{6,76} = 2,6 \text{ (м)}.$$

Відповідь: 2,6 м.

Коментар

За зображенням просторової конфігурації (рис. 9.2) ми не можемо визначити, чи лежить чотирикутник $ABDC$ в одній площині (отже, не знаємо, чи можна до його елементів застосовувати відомі з планіметрії співвідношення). Оскільки паралельні прямі лежать в одній площині, то для обґрунтування того, що цей чотирикутник плоский, достатньо довести паралельність двох його сторін. Слід також урахувати, що *для розв'язання багатьох стереометричних задач часто доцільно виконувати виносні рисунки розглядуваних плоских фігур* (рис. 9.2, *б*), на яких зручно здійснювати певні побудови, обчислення та обґрунтування.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Яка пряма називається перпендикулярною до площини?
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини. Використовуючи модель прямокутного паралелепіпеда, наведіть приклад її використання.
3. Сформулюйте властивості прямих і площин, які виражають залежність між їх паралельністю та перпендикулярністю.

ВПРАВИ

9.1°. Чи є правильним, що коли пряма перпендикулярна до будь-яких двох прямих площини, то вона перпендикулярна до цієї площини?

9.2°. У разі якого взаємного розташування двох прямих через одну з них можна провести площину, перпендикулярну до другої?

9.3°. Як розташована відносно площини трикутника пряма, перпендикулярна до двох його сторін?

9.4°. Чи є правильним, що пряма є перпендикулярною до площини круга, якщо вона перетинає круг у центрі й перпендикулярна до:

1) його діаметра;

2) двох його діаметрів?

9.5°. У площині α розташований трикутник ABC. Пряма MN, яка перетинає цю площину, перпендикулярна до відрізків AB і BC. Яким є взаємне розташування прямих MN і AC?

9.6°. Пряма паралельна площині. Чи може вона бути перпендикулярною до якої-небудь прямої, що лежить у цій площині?

9.7. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді бічне ребро перпендикулярне до площини основи.

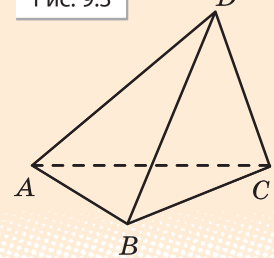
9.8. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді діагональ основи перпендикулярна до кожного бічного ребра.

9.9. Доведіть, що кожне ребро куба перпендикулярне до двох його граней.

9.10. Два прямокутних трикутники ABC і DBC, площини яких не збігаються, мають спільний катет, а через два інші катети — AC і CD — проведено площину α. Доведіть, що спільний катет перпендикулярний до будь-якої прямої c площини α.

9.11. На зображенні правильного тетраедра $ABCD$ (рис. 9.3) побудуйте площину, перпендикулярну до його ребра AD.

Рис. 9.3



9.12*. Доведіть, що **в правильній трикутній піраміді мимобіжні ребра перпендикулярні.**

9.13*. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної площини.

9.14*. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести єдину площину, перпендикулярну до даної прямої.

9.15*. Через точку A прямої a проведено перпендикулярні до неї площину α і пряму b. Доведіть, що пряма b лежить у площині α.

9.16. Через вершину квадрата $ABCD$ проведено пряму BM, перпендикулярну до його площини. Доведіть, що: 1) пряма AD перпендикулярна до площини, визначеної прямими AB і BM; 2) пряма CD перпендикулярна до площини, визначеної прямими BC і BM.

9.17. Через точки M і N проведено прямі, перпендикулярні до площини β, які перетинають її в точках T і E відповідно. Знайдіть відстань між точками M і N, якщо $MT = 2$ м, $NE = 5$ м, $TE = 4$ м і відрізок MN не перетинає площину β.

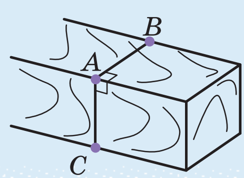
Виявіть свою компетентність

9.18. Верхні кінці двох вертикальних стовпів, розташованих на відстані 6,8 м один від одного, з'єднано поперечкою. Висота одного стовпа 11,6 м, а другого — 7,8 м. Знайдіть довжину поперечки.

9.19. Телефонний дріт завдовжки 15 м протягнуто від телефонного стовпа, де він закріплений на висоті 8 м від поверхні землі, до будинку, де його закріпили на висоті 20 м. Знайдіть відстань між будинком і стовпом, вважаючи, що дріт не провисає.

9.20°. Щоб розпил дерев'яного бруска (рис. 9.4) був перпендикулярним до його ребра, через точку A ребра проводять перпендикулярно до ребра прямі AB і AC. Потім пиляють так, щоб розпил ішов по цих прямих. Чи правильно це?

Рис. 9.4



§ 10. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ

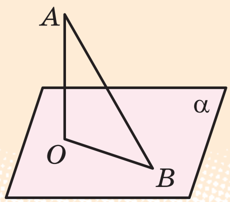
Таблиця 10

Перпендикуляр і похила

У просторі	На площині

AO — перпендикуляр

У просторі

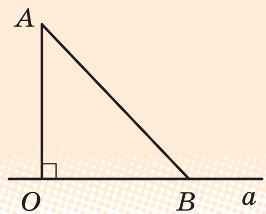


AO — відстань від точки A до площини α;

$AO \perp \alpha$; $O \in \alpha$;

OB — проекція похилої AB на площину α

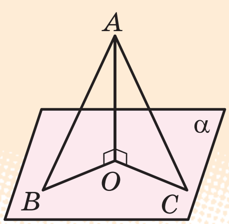
На площині



AO — відстань від точки A до прямої a;

$AO \perp \alpha$; $O \in \alpha$;

OB — проекція похилої AB на пряму a



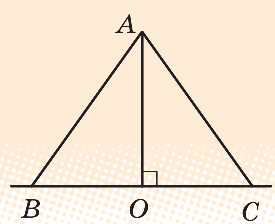
***AB* — похила**

$AO < AB$

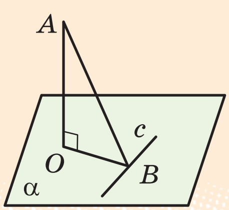
(перпендикуляр є коротшим від похилої)

$AB = AC \Leftrightarrow BO = OC$

$AB > AC \Leftrightarrow BO > OC$



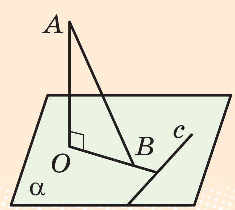
Теорема про три перпендикуляри



OB — проекція AB на площину α;
c — пряма на площині α, $OB \perp c$

$\Updownarrow$

$AB \perp c$



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Поняття перпендикуляра і похилої в просторі вводять аналогічно до відповідних понять на площині (табл. 10).

О **Означення.** ***Відстанню від точки до площини*** **називається довжина перпендикуляра, проведеного із цієї точки до площини.**

Похилою до площини **називається пряма, що перетинає площину і не перпендикулярна до неї.** *Похилою* називають також відрізок, який сполучає точку, що не належить площині, з точкою площини, якщо цей відрізок не є перпендикуляром до площини. Кінець цього відрізка, що лежить у площині, називається *основою похилої*. Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї точки, називається ***проекцією**** ***похилої*** (див. відповідні рисунки в табл. 10).

Властивості перпендикуляра і похилої в просторі аналогічні відповідним властивостям на площині.

Т **Теорема 10.1.** **Якщо з однієї точки, узятої поза площиною, проведено до цієї площини перпендикуляр і декілька похилих, то:**

1) перпендикуляр коротший від будь-якої похилої, проведеної з тієї самої точки до тієї ж площини;
2) рівні похилі мають рівні проекції, і навпаки, похилі, які мають рівні проекції, є рівними;
3) більша (за довжиною) похила має більшу проекцію, і навпаки, з двох похилих більша та, у якої проекція більша.

i Із доведенням теореми можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника..

Т **Теорема 10.2** (про три перпендикуляри). **Якщо пряма на площині перпендикулярна до проекції похилої на цю площину, то вона перпендикулярна і до похилої. І навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.**

▶ **Доведення.** Нехай пряма c площини α (див. рисунки в табл. 10) перпендикулярна до проекції OB похилої AB (або до самої похилої AB). Оскільки $AO \perp \alpha$, то $AO \perp c$. Тоді пряма c буде перпендикулярною до двох прямих, що перетинаються, — OB і AO (чи AB і AO). За ознакою перпендикулярності прямої і площини, пряма c перпендикулярна до площини AOB, а отже, вона буде перпендикулярною і до похилої AB (чи до її проекції OB). ■

---

* Точніше цей відрізок називається **ортогональною, або прямокутною, проекцією похилої** (коли всі проектуючі прямі перпендикулярні до площини проекцій). Далі, говорячи про проекції, ми будемо мати на увазі ортогональні проекції.

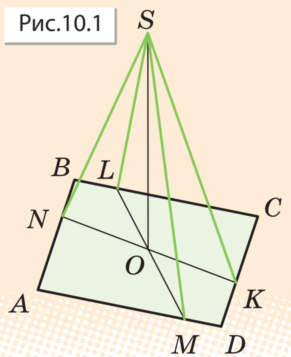
ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача. Відстань від даної точки до площини ромба дорівнює 8 м, а до кожної з його сторін — 10 м. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей ромб.

Розв'язання

Нехай дано ромб $ABCD$ і точку S, розташовану поза площиною ромба. Проведемо з точки S перпендикуляр SO до площини $ABCD$ та перпендикуляри SK, SM, SN, SL на сторони ромба (рис. 10.1). Тоді за умовою $SO=8$ м і $SK=SM=SN=SL=10$ м.

Рис.10.1



Беручи до уваги, що рівні похилі, проведені з однієї точки до однієї площини, мають рівні проекції, отримуємо: $OK=OM=ON=OL$. Оскільки $SK\perp DC$, то $OK\perp DC$ за теоремою про три перпендикуляри. Аналогічно $OM\perp AD$, $ON\perp AB$, $OL\perp BC$. Тоді точка O рівновіддалена від усіх сторін ромба і є центром кола, вписаного в ромб*, а OK — радіус цього кола. Із прямокутного трикутника SOK ($SO\perp$ пл. $ABCD$, отже, $SO\perp OK$): $OK=\sqrt{SK^2-SO^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$ (м).

Відповідь: 6 м.

Коментар

Оскільки відстань від точки до площини вимірюють за перпендикуляром, то ми маємо фактично перпендикуляр та похилі до площини і можемо використати відповідні властивості, які пов'язують довжини похилих, проведених з однієї точки до однієї площини, та їх проекцій.

Щоб обґрунтувати, що одержані проекції похилих є саме радіусами вписаного в ромб кола, зручно використати теорему про три перпендикуляри.

Для обґрунтування того, що трикутник SOK є прямокутним, достатньо використати означення прямої (SO), перпендикулярної до площини ($ABCD$).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

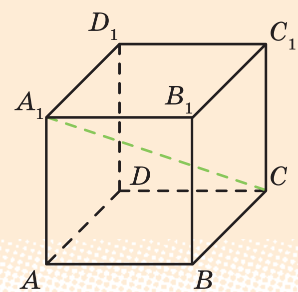
1. Поясніть, як вводять поняття перпендикуляра і похилої до площини та проекції похилої на площину.
2. Сформулюйте властивості перпендикуляра і похилої до площини.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про три перпендикуляри.

* Точка O є точкою перетину діагоналей ромба, відрізки OL та OM лежать на одній прямій, LM — висота ромба (аналогічно NK — теж висота ромба).

ВПРАВИ

10.1°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 10.2) назвіть проекції діагоналі A_1C на всі грані куба.

Рис. 10.2



10.2°. Основа піраміди $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Ребро SA перпендикулярне до площини основи. Порівняйте попарно довжини відрізків SA, SB, SC і SD. Обґрунтуйте результат.

10.3. Основа піраміди $SABCD$ — прямокутник $ABCD$, $AB < BC$. Ребро SD перпендикулярне до площини основи. Серед відрізків SA, SB, SC і SD укажіть найменший і найбільший. Обґрунтуйте свій вибір.

10.4°. Із точки A до даної площини проведено перпендикуляр і похилу, що перетинають площину відповідно в точках B і C. Знайдіть довжину проекції похилої AC, якщо $AC = 50$ см, $AB = 30$ см.

10.5. Із точки A до даної площини проведено перпендикуляр і похилу, що перетинають площину відповідно в точках B і C. Знайдіть відрізок AC, якщо $AB = 8$ см і $\angle BAC = 60°$.

10.6. Відрізки двох похилих, проведених з однієї точки до площини, дорівнюють 15 см і 20 см. Проекція одного із цих відрізків дорівнює 16 см. Знайдіть проекцію другого відрізка.

10.7. Точка A розташована на відстані a від вершин рівностороннього трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від точки A до площини трикутника.

10.8. Відстані від точки A до вершин квадрата дорівнюють a. Знайдіть відстань від точки A до площини квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює b.

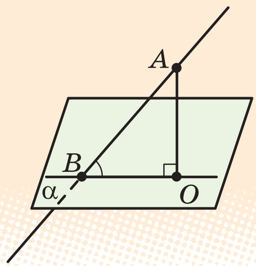
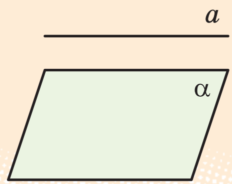
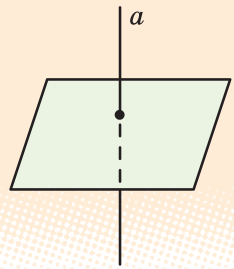
10.9. Із точки до площини проведено дві похилі. Знайдіть довжини похилих, якщо:

1) одна з них на 26 см більша від другої, а проекції похилих дорівнюють 12 см і 40 см;

2) похилі відносяться як 1:2, а проекції похилих дорівнюють 1 см і 7 см.

§ 11. КУТ МІЖ ПРЯМОЮ ТА ПЛОЩИНОЮ

Таблиця 11

Кут між прямою та площиною		
	Особливі випадки	
		
BO — проекція AB на площину α $AO \perp \alpha$ $\angle ABO$ — кут між прямою AB і площиною α	$a \parallel \alpha$ a лежить в α $\Leftrightarrow$ $\angle(a;\alpha)=0^\circ$	$a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a;\alpha)=90^\circ$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

У стародавні часи для визначення курсу корабля моряки орієнтувалися по зірках. Для цього вимірювали кут, що утворював із площиною горизонту промінь, який ішов від даної точки до відомої зірки.

Сьогодні в практичній діяльності людини часто доводиться визначати кут нахилу прямих та площин до даної площини (див. рисунки).

Дамо означення кута між прямою і площиною, а в наступному параграфі — кута між площинами.

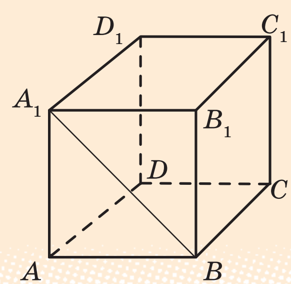
Означення. ***Кутом між похилою*** [*] ***і площиною*** **називається кут між цією похилою та її проекцією на площину.**

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею і площиною вважають рівним $90°$, а якщо пряма паралельна площині або лежить у площині, — то рівним $0°$.

Із наведеного означення випливає: якщо φ — кут між прямою і площиною, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$, а якщо γ — кут між похилою і площиною, то $0° < \gamma < 90°$.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.1) проекцією діагоналі A_1B бічної грані куба на площину його основи $ABCD$ є відрізок AB (оскільки $A_1A \perp$ пл. $ABCD$). Отже, кутом між A_1B і площиною $ABCD$ є кут A_1BA, який дорівнює $45°$.

Рис. 11.1



Теорема 11.1. Кут між похилою і площиною є найменшим з усіх кутів між цією похилою і прямими, що лежать у даній площині.

В інтернет-підтримці підручника наведено обґрунтування такої властивості.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Із точки, віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути $45°$ і $30°$, а між собою — прямий кут. Знайдіть відстань між основами похилих.

Розв'язання

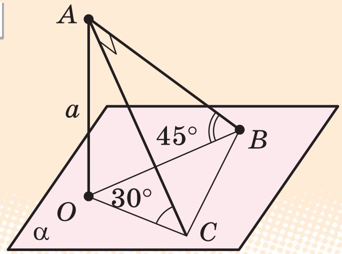
Нехай дано точку A, з якої до площини α проведено дві похилі AB і AC (рис. 11.2). Проведемо з точки A перпендикуляр AO до площини α. За умовою $AO = a$. Оскільки проекціями похилих AB і AC є відповідно відрізки OB

Коментар

Оскільки *відстанню від точки до площини є довжина перпендикуляра, проведеного із цієї точки до площини*, то на рисунку до задачі слід зобразити

[*] Термін «похила» може означати як пряму, так і відрізок, тобто кутом між відрізком і площиною будемо вважати кут між прямою, що містить даний відрізок, і цією площиною.

Рис. 11.2



і OC, то кут $\angle ABO$ — кут між похилою AB і площиною α, а $\angle ACO$ — кут між похилою AC і площиною α. За умовою $\angle ABO = 45°$ і $\angle ACO = 30°$. Оскільки $AO \perp \alpha$, то $AO \perp OB$ і $AO \perp OC$. Із прямокутного трикутника AOB:

$$AB = \frac{AO}{\sin 45°} = a\sqrt{2}.$$

Із прямокутного трикутника AOC:

$$AC = \frac{AO}{\sin 30°} = 2a.$$

Із прямокутного трикутника ABC ($AB \perp AC$ за умовою): $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}$.

Відповідь: $a\sqrt{6}$.

крім похилих перпендикуляр, проведений із даної точки до даної площини (рис. 11.2). Перш ніж проводити обчислення, *в розв'язанні необхідно обґрунтувати, що дану відстань* (від точки до площини) *і дані кути* (між похилими і площиною) *позначено правильно. У процесі обчислення слід указувати, з якого трикутника визначаємо елементи, і, якщо він прямокутний, пояснити чому.*

План обчислювальної частини розв'язання може бути таким:

1) із прямокутного трикутника AOB знайти AB;
2) із прямокутного трикутника ABC знайти AC;
3) із прямокутного трикутника ABC знайти BC.

Із прикладом розв'язування більш складної задачі на знаходження кута між прямою і площиною можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Що називається кутом між похилою і площиною?
2. Чому дорівнює кут між прямою і площиною, якщо:
   1) пряма перпендикулярна до площини;
   2) пряма паралельна площині;
   3) пряма лежить у площині?

3*. Доведіть, що кут між похилою і площиною є найменшим з усіх кутів між цією похилою і прямими, які лежать у даній площині.

ВПРАВИ

11.1°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.3) укажіть кути між даними похилою і площиною:

1) AB_1 і пл. $ABCD$;
2) AB_1 і пл. $A_1B_1C_1D_1$;
3) AB_1 і пл. AA_1D_1D;
4) AB_1 і пл. BB_1C_1C;
5) BD_1 і пл. $ABCD$;
6) BD_1 і пл. BB_1C_1C;
7) B_1C і пл. $ABCD$;
8) B_1C і пл. CDD_1C_1.

11.2°. Довжина похилої дорівнює a. Чому дорівнює довжина проекції цієї похилої на площину, якщо похила утворює з площиною кут, що дорівнює:
1) 45°; 2) 60°; 3) 30°?

11.3°. Точка A віддалена від площини на відстань d. Знайдіть довжини похилих, проведених із цієї точки під такими кутами до площини:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

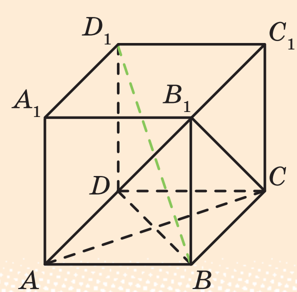
11.4. Доведіть, що рівні похилі, проведені до площини з точки, яка не належить площині, утворюють із площиною рівні кути.

11.5. Яку фігуру на площині α утворюють основи всіх похилих, що проведені до площини α з точки, яка не належить площині, і утворюють рівні кути з площиною α?

11.6. Прямі a і b утворюють із площиною α рівні кути. Чи будуть прямі a і b паралельними?

11.7. Із точки, віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути 45°, а між собою — кут 60°. Знайдіть відстань між основами похилих.

Рис. 11.3



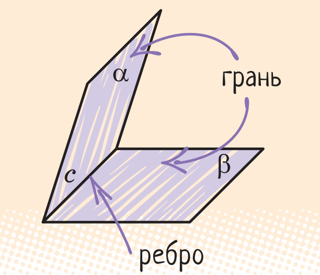
Виявіть свою компетентність

11.8. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи рівні кути, то основою піраміди є многокутник, навколо якого можна описати коло, і вершина піраміди проектується в центр цього кола. Наведіть приклади зазначеної конструкції з реального життя.

§ 12. ДВОГРАННИЙ КУТ. КУТ МІЖ ПЛОЩИНАМИ

Таблиця 12

1. Двогранний кут



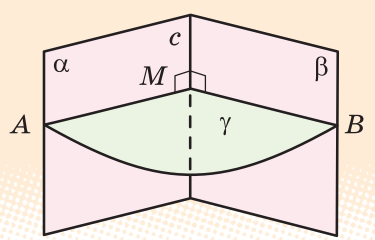
Двогранний кут **— фігура, утворена двома півплощинами α і β зі спільною прямою c, що їх обмежує.**

Півплощини α і β — *грані* двогранного кута, а пряма c — *ребро* двогранного кута.

Лінійний кут двогранного кута

$\angle AMB$ — лінійний кут двогранного кута

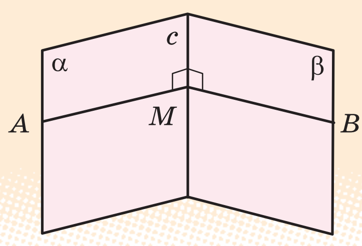
($\gamma \perp c$, γ перетинає α по променю MA, γ перетинає β по променю MB)



Якщо φ — лінійний кут, то

$0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$

2. Практичні способи побудови лінійного кута

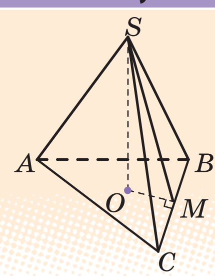


$M \in c$,

$MA \perp c$ (у грані α),

$MB \perp c$ (у грані β),

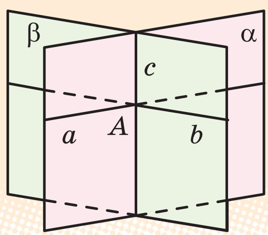
$\angle AMB$ — лінійний



$SO \perp$ пл. ABC, $OM \perp BC$.

Тоді $SM \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), $\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC.

3. Кут між площинами

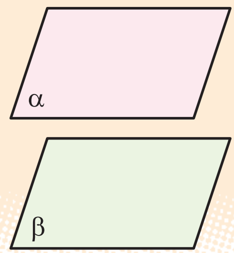


$0° \leqslant \angle(\alpha; \beta) \leqslant 90°$

Кут *між площинами* — найменший* із двогранних кутів, утворених відповідними півплощинами.

Якщо площини α і β перетинаються по прямій c і через точку A на цій прямій у даних площинах проведено прямі $a \perp c$, $b \perp c$,

то $\angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b)$



$\boxed{\begin{array}{c} \alpha \parallel \beta \\ \alpha = \beta \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\angle(\alpha; \beta) = 0°}$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

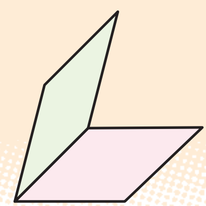
1. Двогранний кут

Півплощину в просторі можна вважати просторовим аналогом променя. Тоді аналогом кута між променями на площині буде кут між півплощинами.

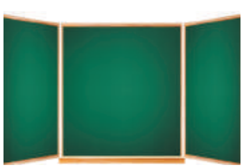
Означення. ***Двогранним кутом* називається фігура, утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує** (рис. 12.1).

Півплощини називаються *гранями* двогранного кута, а пряма, що їх обмежує, — *ребром* двогранного кута.

Рис. 12.1



Наочне уявлення про двогранний кут дають напіввідкрита класна дошка, двоскатний дах, відкритий ноутбук (див. рисунки).



* Якщо внаслідок перетину площин усі утворені двогранні кути дорівнюють один одному (усі кути прямі), то як кут між площинами вибирають будь-який із них.

Площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані по двох променях. Кут, утворений цими променями, називається *лінійним кутом* двогранного кута.

Нехай дано двогранний кут, утворений півплощинами α і β зі спільною прямою c (рис. 12.2), і площину γ, перпендикулярну до прямої c, яка перетинає півплощини α і β по променях a і b відповідно. Кут між променями a та b і є лінійним кутом цього двогранного кута.

За міру двогранного кута приймають міру відповідного йому лінійного кута: $\angle(\alpha;\beta)=\angle(a;b)$.

Доведемо, що величина лінійного кута не залежить від вибору площини γ.

Доведення. Нехай γ і γ' — площини, перпендикулярні до прямої c, які проходять через точки O і O' на прямій c та перетинають півплощини α і β по променях a і a' та b і b' відповідно (рис. 12.3). Оскільки дві різні площини, перпендикулярні до однієї прямої, паралельні, то $\gamma \parallel \gamma'$.

Розглянемо паралельне проектування в напрямі прямої OO' на площину γ'. Оскільки півплощина α проходить через пряму OO' і перетинає площину γ по променю a, а площину γ' — по променю a', то промінь a' є проекцією променя a на площину γ'. Аналогічно промінь b' є проекцією променя b на площину γ'. Але за властивостями паралельного проектування, якщо плоска фігура F (наприклад, кут між променями a і b) лежить у площині γ, паралельній площині проекцій γ', то її проекція на площину γ' дорівнює фігурі F. Отже, кут між променями a і b дорівнює куту між променями a' і b'.

Якщо позначити лінійний кут двогранного кута через φ, то з означення випливає, що $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$.

Двогранний кут називається *прямим*, якщо його лінійний кут є прямим.

Рис. 12.2

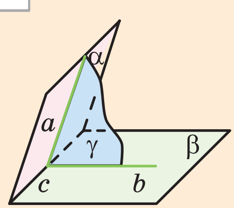
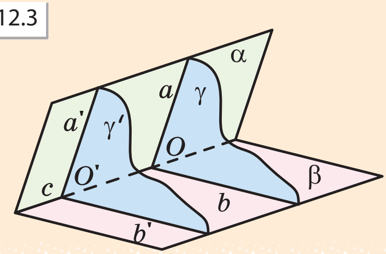


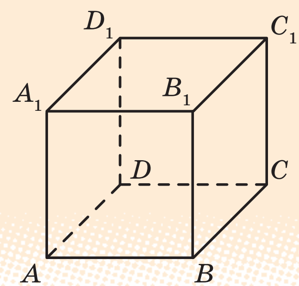
Рис. 12.3



Кутом між двома сусідніми гранями многогранника називатимемо двогранний кут між відповідними півплощинами.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.4) кут між гранями $ABCD$ і BB_1C_1C прямий, оскільки відповідний лінійний кут ABB_1 дорівнює $90°$ (площина ABB_1A_1 перпендикулярна до ребра BC і перетинає відповідні півплощини по променях BA і BB_1, отже, $\angle ABB_1$ — лінійний кут двогранного кута з ребром BC).

Рис. 12.4



2. Практичні способи побудови лінійного кута двогранного кута

У задачах, для розв'язування яких доводиться застосовувати лінійні кути, не завжди зручно користуватися означенням лінійного кута. Тому доцільно пам'ятати практичні способи побудови лінійних кутів, наведені в п. 2 табл. 12. Із їх обґрунтуванням можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника..

Під час запису розв'язань задач, пов'язаних із двогранними кутами, результат, обґрунтований у практичному способі 1, можна використовувати як відомий опорний факт. Але обґрунтування, наведені у способі 2, доводиться повторювати в розв'язанні кожної задачі, у якому використовують цей спосіб побудови лінійного кута. (Можливий варіант запису такого обґрунтування наведено в табл. 12.)

3. Кут між площинами

Дамо означення кута між площинами.

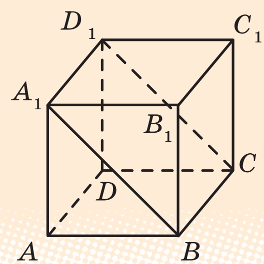
Означення. ***Кутом між площинами, що перетинаються*, називається найменший* із двогранних кутів, утворених відповідними півплощинами**. Кут між паралельними площинами чи площинами, які збігаються, вважають таким, що дорівнює нулю.**

* Якщо при перетині площин усі утворені двогранні кути рівні (тобто всі кути прямі), то як кут між площинами вибирають будь-який із них.

** Маються на увазі двогранні кути, гранями кожного з яких є одна півплощина площини α і одна півплощина площини β, а ребром — пряма перетину даних площин.

Якщо позначити кут між площинами через φ, то з наведеного означення випливає, що $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$. Враховуючи способи побудови лінійного кута, одержуємо, що для знаходження **величини кута між площинами, що перетинаються, достатньо через довільну точку на прямій їх перетину провести в кожній площині пряму, перпендикулярну до прямої їх перетину. Величина кута між цими прямими і дорівнюватиме величині кута між даними площинами.**

Рис. 12.5



Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 12.5) кут між площинами $ABCD$ і A_1BCD_1 дорівнює куту між прямими AB і A_1B, які лежать у розглянутих площинах і перпендикулярні до прямої їх перетину BC (оскільки $BC \perp$ пл. ABB_1A_1). Отже, кут між площинами $ABCD$ і A_1BCD_1 дорівнює $45°$.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ*

Задача. Через гіпотенузу $AB = c$ рівнобедреного прямокутного трикутника ABC проведено площину α, яка утворює з площиною трикутника кут $60°$. Знайдіть відстань від вершини C до площини α.

Розв'язання

Проведемо перпендикуляр CO з точки C на площину α, тоді CO — відстань від точки C до площини α (рис. 12.6).

У площині α проведемо $OM \perp AB$ і сполучимо відрізком точки C і M.

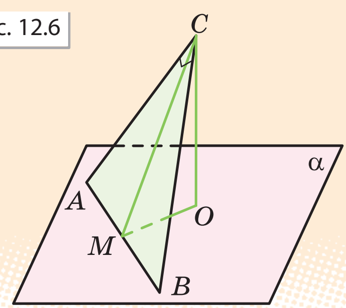
Тоді $CM \perp AB$ за теоремою про три перпендикуляри, тобто $\angle CMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі AB, отже, $\angle CMO = 60°$.

У рівнобедреному прямокутному трикутнику висота CM є одночасно і медіаною, тому $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$.

Коментар

Для того щоб знайти відстань від точки C до площини α (рис. 12.6), необхідно провести перпендикуляр до площини α $(CO \perp \alpha)$.

Рис. 12.6



---

* Із розв'язуванням іншої задачі можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Тоді з прямокутного трикутника ACM: $CM = \frac{c}{2}$.

Із прямокутного трикутника CMO ($CO \perp OM$, оскільки $CO \perp \alpha$):

$$CO = CM \cdot \sin 60^\circ = \frac{c\sqrt{3}}{4}.$$

Відповідь: $\frac{c\sqrt{3}}{4}$.

Тому побудову кута між площиною трикутника і площиною α зручно виконати способом 2 побудови лінійного кута. У цей спосіб ми завжди отримуємо лінійний кут двогранного кута як гострий кут прямокутного трикутника. Отже, величина одержаного гострого лінійного кута завжди дорівнює величині кута між площинами, у яких лежать грані розглядуваного двогранного кута.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, яка фігура називається двогранним кутом, ребром кута, гранню кута.
2. Поясніть, як визначають лінійний кут двогранного кута.
3. Доведіть, що міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.
4. Поясніть, користуючись моделлю двогранного кута, як практично можна побудувати лінійний кут двогранного кута.

5*. Доведіть, що в результаті використання практичних способів дійсно отримують лінійні кути.

6. Дайте означення кута між площинами.

7*. Доведіть, що коли через довільну точку на прямій перетину площин провести в кожній площині пряму, перпендикулярну до прямої їх перетину, то величина кута між цими прямими дорівнює величині кута між даними площинами.

ВПРАВИ

12.1°. Який кут утворює ребро двогранного кута з будь-якою прямою, яка лежить у площині його лінійного кута?

12.2°. Півплощини, у яких лежать два рівнобедрених трикутники зі спільною основою, утворюють двогранний кут. Чи є правильним твердження, що медіани, проведені до спільної основи трикутників, утворюють лінійний кут двогранного кута?

Рис. 12.7

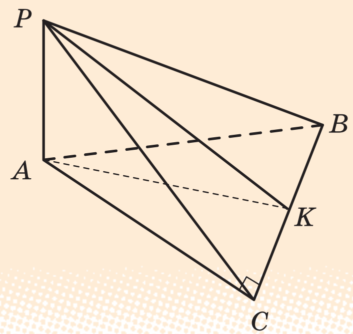
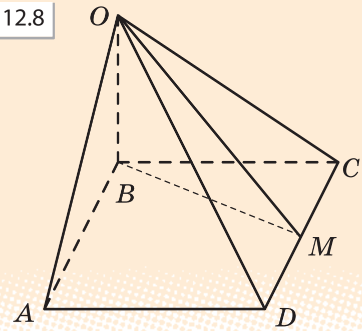


Рис. 12.8



12.3°. На рис. 12.7 зображено двогранний кут із ребром BC. Укажіть лінійний кут цього двогранного кута, якщо $AP \perp$ пл. ABC і в трикутнику ABC $\angle C = 90°$.

12.4°. В основі піраміди $OABCD$ (рис. 12.8) лежить квадрат $ABCD$. Бічне ребро OB перпендикулярне до площини основи. Укажіть лінійний кут двогранного кута з ребром CD.

12.5. Трикутник MAB і квадрат $ABCD$ розміщені таким чином, що відрізок MB є перпендикуляром до площини квадрата. Величину якого кута можна вважати кутом між площинами AMD і ABC?

12.6. Дві площини перетинаються під кутом 30°. Точка A, яка лежить в одній із цих площин, віддалена від другої площини на відстань a. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин.

12.7. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кут нахилу площини ADC_1 до площини ABC.

12.8. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 м і 24 м. Знайдіть відстань від вершини прямого кута до площини, яка проходить через гіпотенузу й утворює з площиною трикутника кут 30°.

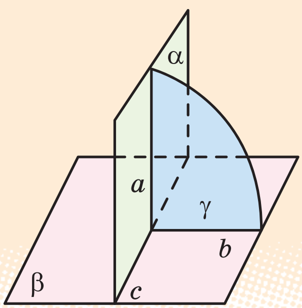
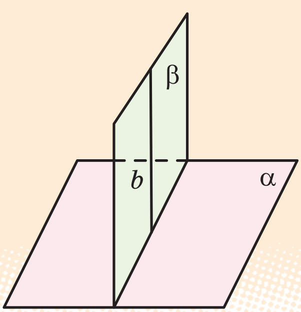
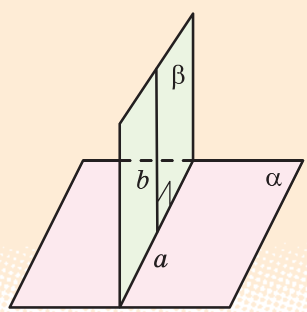
12.9. Через сторону AB трикутника ABC проведено площину α під кутом 60° до площини трикутника. Висота CD трикутника ABC дорівнює a. Знайдіть відстань від вершини C трикутника до площини α.

12.10. Через катет $BC = a$ рівнобедреного прямокутного трикутника ABC проведено площину α, яка утворює з площиною трикутника кут 30°. Знайдіть відстань від вершини A до площини α.

12.11*. Доведіть, що площина, яка перетинає паралельні площини, перетинає їх під однаковими кутами.

§ 13. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН

Таблиця 13

Перпендикулярність двох площин	
Означення	
Дві площини, що перетинаються, називаються *перпендикулярними*, якщо кут між ними дорівнює 90°.	
Зміст	
	α перетинає β по прямій c, $\gamma \perp c$, γ перетинає α по прямій a, γ перетинає β по прямій b, $a \perp b$ $\boxed{\alpha \perp \beta} \Leftrightarrow \angle(\alpha;\beta) = 90^\circ$
Ознака	Властивість
	
Якщо $b \perp \alpha$ і β проходить через b, то $\beta \perp \alpha$	Якщо $\beta \perp \alpha$, β перетинає α по a і $b \perp a$ (b лежить у β), то $b \perp \alpha$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Поняття кута між площинами дозволяє означити перпендикулярність площин.

Означення. **Дві площини, що перетинаються, називаються *перпендикулярними*, якщо кут між ними дорівнює $90°$.**

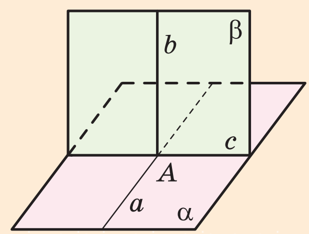
Наочне уявлення про перпендикулярні площини дають площини стіни та стелі кімнати, площини дверей та підлоги (див. рисунок).

Теорема 13.1 (ознака перпендикулярності площин). **Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини, то ці площини перпендикулярні.**

Доведення. Нехай α — дана площина, b — пряма, перпендикулярна до цієї площини $(b \perp \alpha)$, β — площина, яка проходить через пряму b, і c — пряма, по якій перетинаються площини α і β (рис. 13.1). Доведемо, що площини α і β перпендикулярні.

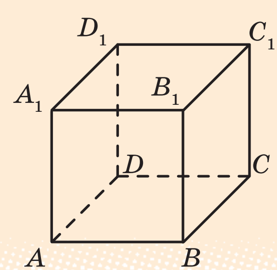
Проведемо в площині α через точку A перетину прямої b з площиною α (а отже, і з прямою c) пряму a, перпендикулярну до прямої c. Оскільки $b \perp \alpha$, то $b \perp c$ і $b \perp a$. Як було показано в § 12, величина кута між площинами α і β дорівнює величині кута між прямими a і b, які лежать у цих площинах і перпендикулярні до прямої c їх перетину. Ураховуючи, що $b \perp a$, одержуємо $\angle(\alpha;\beta) = \angle(a;b) = 90°$. Отже, площини α і β перпендикулярні. ■

Рис. 13.1



Зокрема, *у кубі* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13.2) *грані, які перетинаються, попарно перпендикулярні*, оскільки, як було показано раніше, кожне ребро куба (наприклад, AA_1) перпендикулярне до грані, яку воно перетинає (наприклад, до грані $ABCD$). Отже, площина, яка проходить через це ребро (наприклад, площина ADD_1A) за ознакою перпендикулярності площин перпендикулярна до другої площини (до площини $ABCD$).

Рис. 13.2



Розглянемо ще одну властивість, яка пов'язує перпендикулярність двох площин і перпендикулярність прямої та площини.

Теорема 13.2. Пряма, проведена в одній із двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.

Доведення. Нехай перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c і в площині β проведено пряму b перпендикулярно до прямої c (див. рис. 13.1). Доведемо, що $b \perp \alpha$.
Проведемо в площині α через точку A перетину прямих b і c пряму a, перпендикулярну до прямої c. Тоді величина кута між прямими a і b дорівнює величині кута між площинами α і β, тобто 90°. Отже, пряма b перпендикулярна до прямих a і c площини α, які перетинаються. За ознакою перпендикулярності прямої і площини $b \perp \alpha$. ■

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача. Доведіть, **що площина лінійного кута двогранного кута перпендикулярна до кожної грані двогранного кута**.

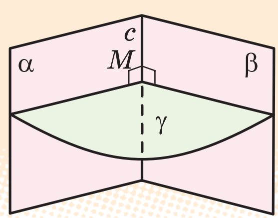
Розв'язання

За означенням лінійного кута двогранного кута його площина γ перпендикулярна до ребра c двогранного кута (рис. 13.3). Але кожна грань (α і β) двогранного кута проходить через пряму c, перпендикулярну до площини γ. Отже, за ознакою перпендикулярності площин $\gamma \perp \alpha$ і $\gamma \perp \beta$. ■

Коментар

Для доведення перпендикулярності двох площин можна використати ознаку перпендикулярності площин, а для цього достатньо з'ясувати, що одна з площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини.

Рис. 13.3



Додаткові задачі, пов'язані з перпендикулярністю площин, та приклади їх розв'язування наведені в інтернет-підтримці підручника.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Дайте означення двох перпендикулярних площин.
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності двох площин.
3. Сформулюйте властивість, яка пов'язує перпендикулярність двох площин та перпендикулярність прямої і площини.

ВПРАВИ

13.1°. Площина α перпендикулярна до площини β. Чи буде довільна пряма площини α перпендикулярною до площини β? (Проілюструйте відповідь на моделі перпендикулярних площин.)

13.2°. Дві площини перпендикулярні. Укажіть усі можливі випадки розташування прямої, яка лежить в одній площині, відносно прямої, що лежить у другій площині. (Проілюструйте свою відповідь на моделі.)

13.3°. Чи є правильним, що площина, яка проходить через похилу до іншої площини, завжди не перпендикулярна до цієї площини?

13.4°. Чи є правильним, що дві площини, перпендикулярні до третьої, паралельні?

13.5°. Чи є правильним, що пряма і площина, перпендикулярні до іншої площини, паралельні між собою?

13.6. Скільки площин, перпендикулярних до даної площини, можна провести через дану пряму?

13.7. Доведіть, що грані прямокутного паралелепіпеда, які перетинаються, попарно перпендикулярні.

13.8. Доведіть, що в кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перерізи AA_1C_1C і BB_1D_1D перпендикулярні. (Оскільки ці перерізи проходять через діагоналі граней куба, то їх називають *діагональними перерізами*.)

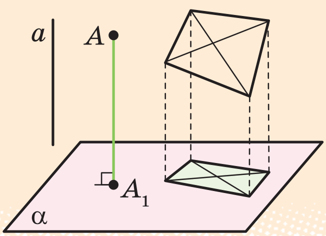
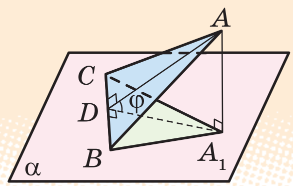
13.9. Із точок A і B, які лежать у двох взаємно перпендикулярних площинах, проведено перпендикуляри AC і BD до прямої перетину площин. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:

1) $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м;
2) $AC = 3$ м, $BD = 4$ м, $CD = 12$ м;
3) $AD = 4$ м, $BC = 7$ м, $CD = 1$ м;
4) $AD = BC = 5$ м, $CD = 1$ м;
5) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$;
6) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$.

Додаткові вправи див. в інтернет-підтримці підручника.

§ 14. ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

Таблиця 14

Означення та властивість ортогонального проектування	
Означення	Властивість
 $a \perp \alpha$	 $S_{\text{проекції}} = S_{\text{фігури}} \cdot \cos\varphi$, де φ — кут між площиною фігури і площиною проекції

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Означення та найпростіші властивості ортогонального проектування

Означення. **Паралельне проектування в напрямі прямої, перпендикулярної до площини проектування, називається *ортогональним проектуванням*.**

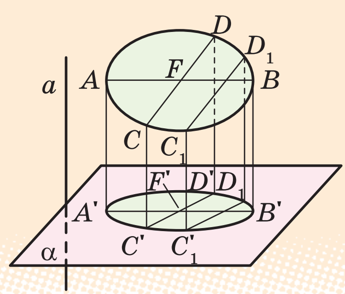
Якщо пряма a, яка задає напрям проектування, перпендикулярна до площини α (див. рисунок у табл. 14), то проектуючі прямі (наприклад, $AA_1 \parallel a$) теж будуть перпендикулярними до площини α. Інакше кажучи, *проекцією точки* буде основа перпендикуляра, проведеного з даної точки на площину (звичайно, якщо точка лежить на площині проекцій, то вона збігається зі своєю проекцією). Якщо вказаним чином побудувати проекцію кожної точки фігури, то одержимо *проекцію* самої *фігури*. Наприклад, якщо площина даного n-кутника і площина проекцій не перпендикулярні, то проекцією n-кутника є n-кутник (див. приклади, наведені в табл. 14).

Оскільки ортогональне проектування є окремим випадком паралельного проектування, то воно має всі його властивості, обґрунтовані в § 7. Нагадаємо їх.

Ортогональною проекцією прямої a, яка не перпендикулярна до площини проекцій, є деяка пряма a'. Якщо пряма a паралельна площині проекцій, то її проекція a' паралельна прямій a.

Проекцією паралельних прямих є паралельні прямі (якщо прямі не перпендикулярні до площини проекцій і площина даних прямих не перпендикулярна до площини проекцій).

Рис. 14.1

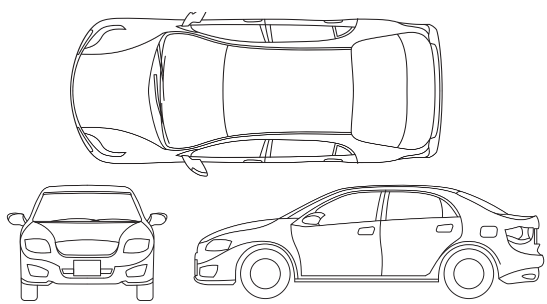


Відношення довжин відрізків, які лежать на одній прямій (або на паралельних прямих), зберігається під час ортогонального проектування.

Якщо плоска фігура F лежить у площині, паралельній площині проекцій, то її проекція F' на цю площину дорівнює фігурі F.

Ортогональною проекцією кола, яке не перпендикулярне до площини проекцій, є еліпс (рис. 14.1). Нагадаємо, що проекцію кола одержують стискуванням або розтягуванням його в напрямі будь-якого діаметра в одне й те саме число разів.

Зображення об'єктів за допомогою ортогонального проектування широко використовують у різноманітних галузях промисловості, наприклад в автомобілебудуванні (див. рисунок).

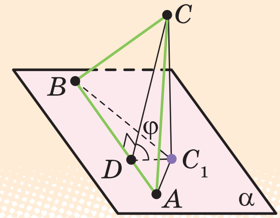


2. Площа ортогональної проекції многокутника

Теорема 14.1. **Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекцій:** $S_{\text{проекції}} = S_{\text{многокутн}} \cdot \cos\varphi$.

Доведення. Розглянемо спочатку трикутник і його проекцію на площину, яка проходить через одну з його сторін (рис. 14.2). Проекцією трикутника ABC є трикутник ABC_1 у площині α $(CC_1 \perp \alpha)$. Проведемо висоту CD трикутника ABC. За теоремою про три перпендикуляри $C_1D \perp AB$, тобто відрізок CD — висота трикутника ABC_1. Кут CDC_1 дорівнює куту φ між площиною трикутника ABC і площиною проекцій α.

Рис. 14.2



Маємо: $C_1D = CD\cos\varphi$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD$, $S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2}AB \cdot C_1D = \frac{1}{2}AB \cdot CD \cdot \cos\varphi$. Отже, $S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi$, що і потрібно було довести.

Із доведенням теореми 14.1 для загального випадку можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Теорема справедлива і для випадку, якщо замість площини α взято будь-яку паралельну їй площину, оскільки проекцією трикутника ABC_1 на площину, паралельну його площині, є трикутник, що дорівнює йому.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача. Проекцією прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см на деяку площину є ромб із діагоналями 6 см і 8 см. Знайдіть кут між площинами прямокутника і ромба.

Розв'язання

Позначимо кут між площинами прямокутника і ромба через φ. Оскільки $S_{\text{прямокутника}} = 6 \cdot 8 = 48$ (см^2), $S_{\text{ромба}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см^2), то за формулою площі ортогональної проекції $S_{\text{прекції}} = S_{\text{фігури}} \cdot \cos\varphi$ одержуємо:

$$S_{\text{ромба}} = S_{\text{прямокутника}} \cdot \cos\varphi,$$

тобто $24 = 48 \cdot \cos\varphi$. Звідси $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, отже, $\varphi = 60°$.

Коментар

Як уже було зазначено, для знаходження кута достатньо знайти будь-яку його тригонометричну функцію, а для цього — використати співвідношення між площами фігури та її ортогональної проекції

$$\left(S_{\text{проеції}} = S_{\text{фігури}} \cdot \cos\varphi\right).$$

Для того щоб знайти площу ромба, слід пам'ятати, що вона дорівнює півдобутку діагоналей.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, як отримують ортогональну проекцію точки, фігури.
2. Сформулюйте основні властивості ортогональної проекції.
3. Сформулюйте властивість площі ортогональної проекції многокутника на площину. У якому випадку площа фігури дорівнює площі ортогональної проекції цієї фігури?

ВПРАВИ

14.1°. Чи є правильним твердження, що ортогональною проекцією прямокутного трикутника завжди є прямокутний трикутник?

14.2°. Наведіть приклад фігури в просторі, ортогональними проекціями якої на дві взаємно перпендикулярні площини є круги однакового радіуса.

14.3. Чи може площа ортогональної проекції фігури:
1) бути більшою, ніж площа цієї фігури;
2) бути меншою, ніж площа цієї фігури;
3) дорівнювати площі цієї фігури?

14.4°. Знайдіть довжину ортогональної проекції відрізка AB на площину α, якщо $AB = a$, а пряма AB нахилена до площини α під кутом $30°$.

14.5. Чи може ортогональна проекція відрізка бути:
1) меншою, ніж відрізок; 3) більшою, ніж відрізок?
2) дорівнювати відрізку;

14.6°. Чи може ортогональною проекцією трикутника бути:
1) відрізок; 2) квадрат?

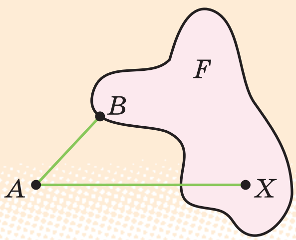
14.7°. Якою фігурою є ортогональна проекція прямокутного паралелепіпеда на площину, паралельну його основі?

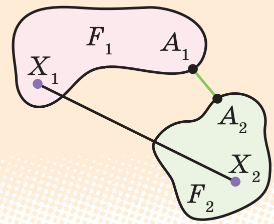
14.8. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 4 см. Площина ромба утворює з площиною проекцій кут $60°$. Знайдіть площу проекції ромба.

14.9. Знайдіть площу проекції фігури F на площину α, яка утворює кут $30°$ із площиною даної фігури, якщо фігурою F є:
1) квадрат, діагональ якого дорівнює 3 см;
2) правильний трикутник зі стороною a;
3) ромб, сторона якого дорівнює a, а кут — $45°$.

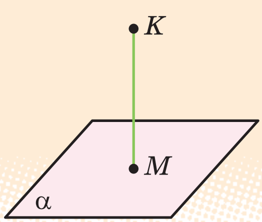
§ 15. ВІДСТАНІ МІЖ ФІГУРАМИ

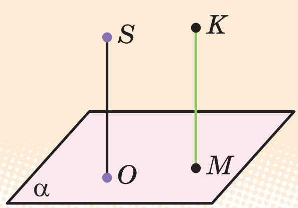
Таблиця 15

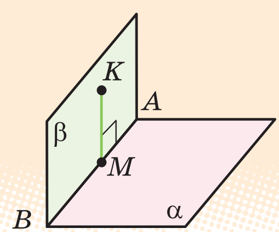
<table>
<tr><th colspan="2">Відстань (ρ) між фігурами</th></tr>
<tr><th>Відстань від точки до фігури</th><th>Відстань між фігурами</th></tr>
<tr><td>


Точка B фігури F — найближча до точки A
$\rho(A; F) = AB$
</td><td>


Точки A_1 і A_2 — найближчі точки фігур F_1 і F_2
$\rho(F_1; F_2) = A_1A_2$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Відстань від точки до площини (ρ — відстань*)</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th colspan="2">Практичні прийоми визначення відстані від точки до площини</th></tr>
<tr><td>
Проводимо $KM \perp \alpha$ $(M \in \alpha)$.


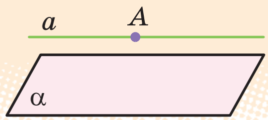
$KM = \rho(K; \alpha)$
</td><td>
$SO \perp \alpha$.
Проводимо $KM \parallel SO$.
Тоді $KM \perp \alpha$.


$KM = \rho(K; \alpha)$
</td><td>
Проводимо через точку K площину $\beta \perp \alpha$ (β перетинає α по AB). Проводимо $KM \perp AB$. Тоді $KM \perp \alpha$.


$KM = \rho(K; \alpha)$
</td></tr>
</table>

* Позначення відстані між точкою A і площиною α (та між іншими фігурами) у вигляді $\rho(A; \alpha)$ не є загальноприйнятим, але іноді ми будемо його використовувати для скорочення записів.

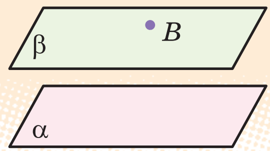
Відстань (ρ) між паралельними прямою і площиною



$a \parallel \alpha,\ A \in a$

$\rho(a; \alpha) = \rho(A; \alpha)$

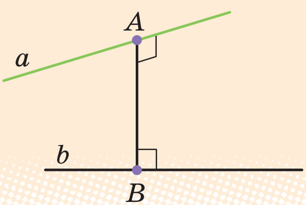
Відстань (ρ) між паралельними площинами



$\beta \parallel \alpha,\ B \in \beta$

$\rho(\beta; \alpha) = \rho(B; \alpha)$

Відстань (ρ) між мимобіжними прямими



Відстанню між мимобіжними прямими **називається довжина їх спільного перпендикуляра.**

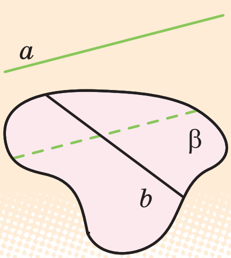
Прямі a і b — мимобіжні.

$AB \perp a,\ AB \perp b$

$\rho(a; b) = AB$

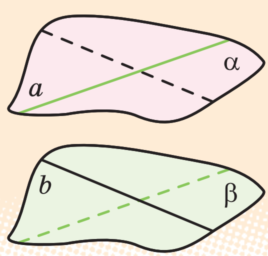
Способи визначення відстані (ρ) між мимобіжними прямими

Проводимо через пряму b площину $\beta \parallel a$.



$\rho(a; b) = \rho(a; \beta)$

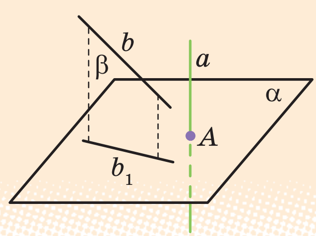
Проводимо через прямі a і b паралельні площини $\alpha \parallel \beta$.



$\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$

Проводимо площину $\alpha \perp a$ і проектуємо прямі a і b на цю площину:

$a \to A,\ b \to b_1.$

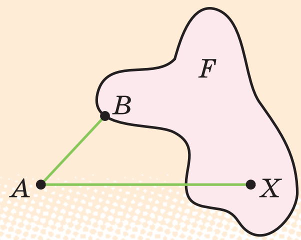


$\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Відстань від точки до фігури

Рис. 15.1



Відстань від точки до фігури (або між фігурами) вимірюють за найкоротшим шляхом. Тому *відстанню від точки A до фігури F* називають відстань від цієї точки до найближчої точки фігури F.

Точка фігури F, *найближча* до точки A, — це така точка $B \in F$, що для всіх точок X фігури F виконується нерівність $AB \leqslant AX$ (рис. 15.1).

Інакше кажучи, якщо точка A не належить фігурі F, то відрізок AB — найкоротший з усіх відрізків AX, що сполучають точку A з точками фігури F. (Якщо ж $A \in F$, то точка A є найближчою до самої себе. У цьому разі вважають, що відстань дорівнює нулю. Надалі будемо розглядати випадки, коли $A \notin F$.)

Відстань від точки A до фігури F іноді будемо позначати так: $\rho(A; F)^*$.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. *Відстань від точки A до прямої a дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з точки A на пряму a.*

Приклад 2. *Відстань від точки до площини дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного із цієї точки на площину,* або відстані від точки до її ортогональної проекції на площину. Ці два твердження випливають з того, що перпендикуляр є коротшим від похилої.

Зазначимо, що в деяких задачах буває важливим указати на зображенні просторової фігури основу перпендикуляра, проведеного із заданої точки на площину. Тоді доводиться використовувати практичні прийоми визначення відстані від точки до площини, які наведено в табл. 15.

Відстанню між двома фігурами називають відстань між найближчими точками цих фігур (якщо такі точки є).

Нагадаємо, що в планіметрії *відстанню між двома паралельними прямими* називається відстань від будь-якої точки однієї прямої до іншої прямої (оскільки всі відстані від точок однієї з паралельних прямих до другої прямої однакові).

* Це позначення не є загальноприйнятим, але іноді користуватися ним досить зручно.

Аналогічно означають поняття *відстані між паралельними прямою і площиною та відстані між паралельними площинами.*

Більш детальне пояснення відповідних означень наведено в інтернет-підтримці підручника.

Означення. ***Відстанню між паралельними прямою і площиною*** **називається відстань від будь-якої точки прямої до площини.**

Означення. ***Відстанню між двома паралельними площинами*** **називається відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини.**

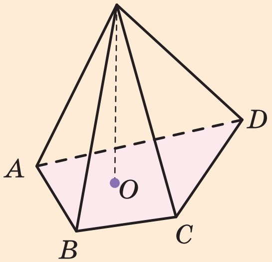
Рейки на прямолінійній ділянці залізничної колії повинні залишатися паралельними: вони не можуть зближатися або віддалятися. Тому їх прикріплюють до шпал на одній і тій самій відстані одна від одної. Цю відстань називають шириною колії (див. рисунок).

Зазначимо, що з поняттями відстані від точки до площини та відстані між паралельними площинами пов'язані поняття висоти піраміди та призми.

Означення. ***Висотою піраміди*** **називається перпендикуляр, проведений із вершини піраміди на площину її основи. Довжину цього перпендикуляра також називають висотою піраміди.**

Наприклад, якщо в піраміді $SABCD$ (рис. 15.2) $SO \perp$ пл. $ABCD$, то SO — висота піраміди, тобто *висотою піраміди є відстань від її вершини до площини основи.*

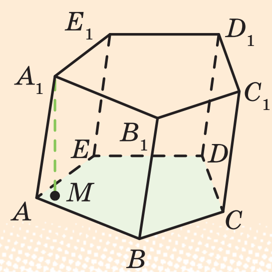
Рис. 15.2



Означення. ***Висотою призми*** **називається перпендикуляр, проведений із точки однієї основи призми на площину другої її основи. Довжину цього перпендикуляра також називають висотою призми.**

Наприклад, якщо в призмі $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 15.3) $A_1M \perp$ пл. $ABCDE$, то A_1M — висота призми. Оскільки в призмі площини основ паралельні, то *висотою призми є відстань між площинами її основ*.

Рис. 15.3

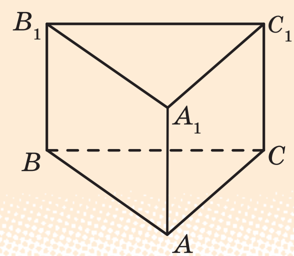


Означення. **Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площин основ.**

Зокрема, *прямими призмами є куб і прямокутний паралелепіпед*.

Із означення прямої призми випливає, що **в прямій призмі висотою призми є бічне ребро.** Наприклад, якщо $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма (рис. 15.4), то її висотою є будь-яке бічне ребро, наприклад AA_1 (оскільки $AA_1 \perp$ пл. ABC).

Рис. 15.4



Дамо тепер означення поняття *відстані між мимобіжними прямими*.

Означення 1. ***Спільним перпендикуляром*** **до двох мимобіжних прямих називається відрізок із кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них.**

Означення 2. ***Відстанню між мимобіжними прямими*** **називається довжина їх спільного перпендикуляра.**

Теорема 15.1. **Спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих існує, і до того ж єдиний.**

Із доведенням теореми можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

3. Знаходження відстані між мимобіжними прямими

Нехай через мимобіжні прямі a і b проведено паралельні площини α і β відповідно. Щоб обчислити відстань між прямими a і b, необов'язково будувати спільний перпендикуляр до них. Можна з будь-якої точки прямої a провести перпендикуляр на площину β і знайти його довжину, а можна знайти довжину довільного спільного перпендикуляра до площин α і β. Таким чином, знаходити відстань між мимобіжними прямими можна одним із чотирьох способів, наведених у табл. 15.

Більш детально з цими способами та їх застосуванням можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

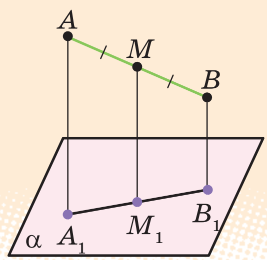
ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Кінці даного відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 2,7 м і 6,3 м. На яку відстань віддалена від площини середина цього відрізка?

Розв’язання

Нехай дано відрізок AB, який не перетинає площину α, і точка M — його середина (рис. 15.5). Проведемо з точок A, B, M перпендикуляри на площину α (відповідно AA_1, BB_1, MM_1).

Рис. 15.5



Оскільки прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні одна одній, то $AA_1 \parallel BB_1 \parallel MM_1$. Таким чином одержуємо ортогональну проекцію відрізка AB на площину α. Оскільки точка M — середина AB, то точка M_1 — середина A_1B_1. Отже, MM_1 — середня лінія трапеції AA_1B_1B $(AA_1 \parallel BB_1)$, тому

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{2{,}7 + 6{,}3}{2} = 4{,}5 \text{ (м)}.$$

Відповідь: 4,5 м.

Коментар

Ще до побудови рисунка до задачі слід згадати, що відстань від точки до площини вимірюють за перпендикуляром, проведеним з даної точки на площину, а також те, що прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні одна одній. Тоді, розглядаючи дані точки та основи відповідних перпендикулярів, ми фактично одержимо паралельну (точніше, ортогональну) проекцію даного відрізка на площину. А оскільки проекцією відрізка є відрізок (а проекцією його середини — середина відрізка-проекції), то на відповідному рисунку (рис. 15.5) основи перпендикулярів будуть розміщені на одній прямій.

Задача 2. Доведіть, що **в правильній піраміді висота проходить через центр основи**.

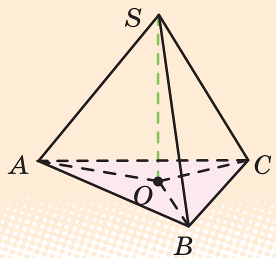
Розв’язання

Нехай $SABC$ — правильна піраміда (рис. 15.6) і SO — її висота ($SO \perp$ пл. ABC).

Коментар

Нагадаємо, що піраміда називається правильною, якщо

Рис. 15.6



Оскільки в правильній піраміді бічні ребра рівні: $SA = SB = SC$, то їх проекції на площину ABC теж дорівнюють одна одній: $OA = OB = OC$. Тоді точка O є центром описаного навколо основи кола, який збігається із центром правильного многокутника. ■

її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра дорівнюють одне одному. Центр правильного многокутника одночасно є і центром описаного навколо цього многокутника кола. Тому для доведення твердження задачі достатньо довести, що основою висоти є центр описаного кола. Доведення достатньо провести для трикутної піраміди, оскільки для n-кутної піраміди воно аналогічне.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, яку точку фігури вважають найближчою до даної точки; які точки двох фігур вважають найближчими.
2. Дайте означення відстані:
   1) від точки до фігури; 2) між двома фігурами.
3. Дайте означення відстані:
   1) від точки до прямої;
   2) від точки до площини;
   3) між паралельними прямими;
   4) між паралельними прямою і площиною;
   5) між паралельними площинами;
   6) між мимобіжними прямими.
   Обґрунтуйте, що в кожному із цих випадків як відстань дійсно вибирають відстань між найближчими точками фігур.
4. Поясніть, як практично можна визначити відстань від точки до площини. Проілюструйте ці практичні способи на каркасній моделі куба.
5. Дайте означення висоти: 1) піраміди; 2) призми.
   Укажіть на моделі висоту прямокутного паралелепіпеда.
6. Поясніть, яка призма називається прямою. На моделі прямої призми вкажіть її висоту.

ВПРАВИ

15.1°. Із точки A, яка не належить площині α, проведена похила до цієї площини. Визначте кут між цією похилою і площиною α, якщо відстань від точки A до площини α у два рази менша від довжини похилої.

15.2. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a знайдіть відстань між вершиною A і:
1) ребром B_1C_1;
2) діагоналлю B_1D_1 грані $A_1B_1C_1D_1$;
3*) діагоналлю куба A_1C.

15.3°. Знайдіть відстань між паралельними гранями в кубі з ребром a.

15.4. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a знайдіть відстань:
1°) від вершини A_1 до площини ABC;
2) від вершини B до площини AA_1C.

15.5. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a знайдіть відстань між вершиною C і площиною AB_1D_1.

15.6. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює a. Відрізок довжиною b кінцями упирається в ці площини. Знайдіть довжину проекції відрізка на кожну з площин.

15.7. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до площини, яка не перетинає цей відрізок, якщо відстані від точок A і B до площини дорівнюють:
1) 3,2 см і 5,3 см; 2) 7,4 см і 6,1 см; 3) a і b.

15.8*. Розв'яжіть задачу 15.7 за умови, що відрізок AB перетинає дану площину.

15.9°. Дано зображення правильної піраміди $SABCD$ з основою $ABCD$. Побудуйте зображення її висоти.

15.10. Дано зображення правильної піраміди $SABC$ з основою ABC. Побудуйте зображення її висоти.

15.11. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a знайдіть відстань між мимобіжними прямими:
1°) AA_1 і CD; 3) AB і B_1D_1; 5) BD і CC_1;
2) A_1C і BB_1; 4) AC і B_1D_1; 6) AC_1 і BD.

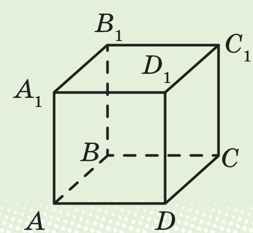
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тест № 2

1. Точка A лежить поза площиною α. Скільки прямих, перпендикулярних до площини α, можна провести через точку А?
   А Одну Б Дві В Безліч Г Жодної

2. На рис. 1 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть серед наведених нижче прямих пряму, перпендикулярну до прямої CB_1.
   А AA_1 В CD_1
   Б CD Г B_1D_1

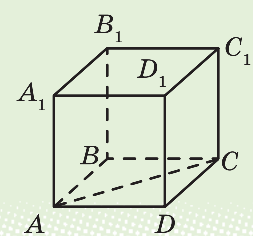
Рис. 1



3. Точка A віддалена від площини α на 8 см. Із цієї точки до площини α проведено похилу AB завдовжки 10 см. Знайдіть довжину проекції похилої AB на площину α.
   А 5 см В 8 см
   Б 6 см Г 10 см

4. На рис. 2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із ребром a. Знайдіть відстань між прямими DC і AA_1.
   А a В $a\sqrt{2}$
   Б $\frac{a}{2}$ Г $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Рис. 2



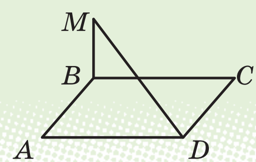
5. Дано три площини α, β і γ такі, що $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$. Укажіть твердження, яке завжди буде правильним.
   А Площини α і β паралельні.
   Б Площини α і β перпендикулярні.
   В Кут між площинами α і γ дорівнює 45°.
   Г Жодне з тверджень А–В не є правильним.

6. Дано прямі m і n та площину α такі, що $m \parallel n$, $m \perp \alpha$. Укажіть правильне твердження.
   А Пряма n паралельна площині α.
   Б Пряма n перпендикулярна до площини α.
   В Пряма n лежить у площині α.
   Г Пряма n перетинає площину α під кутом 45°.

7. Пряма MB перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$, зображеного на рис. 3. Назвіть кут між прямою MD і площиною квадрата.

А $\angle MDA$ В $\angle MDB$
Б $\angle MBD$ Г $\angle MDC$

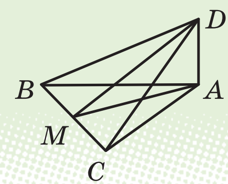
Рис. 3



8. Із точки D до площини α проведено похилу DM, яка утворює з площиною α кут $30°$. Знайдіть відстань від точки D до площини α, якщо проекція похилої DM на цю площину дорівнює 12 см.

А 6 см В $12\sqrt{3}$ см
Б $4\sqrt{3}$ см Г 24 см

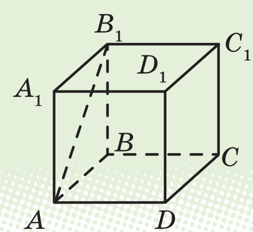
Рис. 4



9. Пряма DA перпендикулярна до площини рівнобедреного трикутника ABC з основою BC, зображеного на рис. 4, точка M — середина сторони BC. Укажіть кут між площинами ABC і DBC.

А $\angle DBA$ В $\angle DCA$
Б $\angle DMA$ Г $\angle DAM$

Рис. 5



10. На рис. 5 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими AB_1 і CD_1.

А $60°$ В $0°$
Б $45°$ Г $90°$

11. Точка M рівновіддалена від сторін квадрата $ABCD$ і розташована на відстані $2\sqrt{3}$ см від його площини. Знайдіть відстань від точки M до сторін квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 4 см.

А 4 см Б 2 см В 6 см Г 5 см

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua

Теми навчальних проектів

1. Види куполів і деякі їх математичні характеристики.
2. Введення у світ фракталів.

Розділ 3

КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ, ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ

У цьому розділі ви:

- ознайомитеся з прямокутною системою координат, векторами і рухами у просторі, їх основними властивостями та пов'язаними з ними формулами;
- навчитеся розв'язувати стереометричні задачі за допомогою координатного і векторного методів.

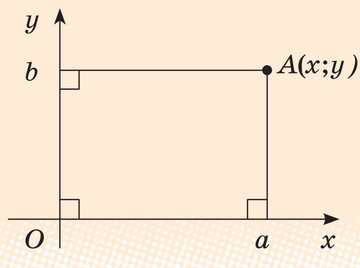
§ 16. ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Таблиця 16

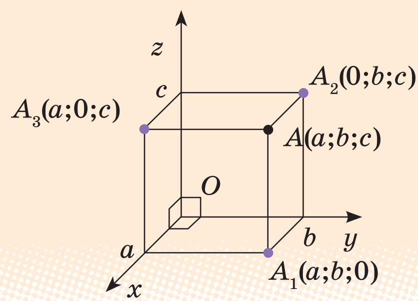
Декартові координати

1. Прямокутна система координат

На площині



У просторі

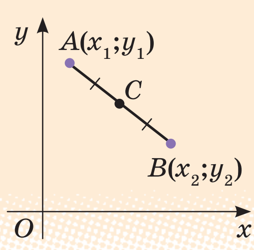


2. Відстань між точками

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

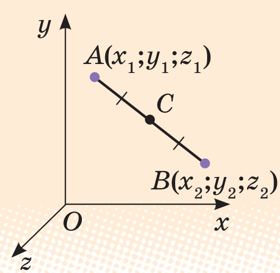
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

3. Координати середини відрізка



C — середина AB

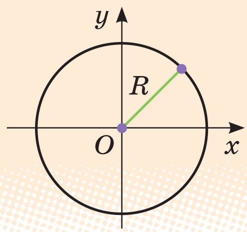
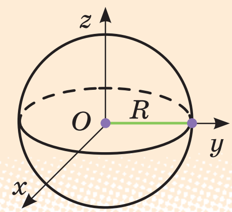
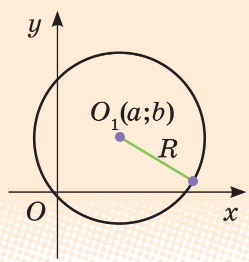
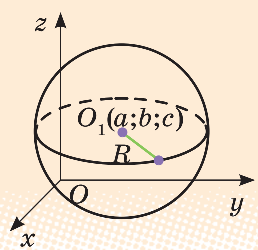
$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}\quad y_c=\frac{y_1+y_2}{2}$$



C — середина AB

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}\quad y_c=\frac{y_1+y_2}{2}\quad z_c=\frac{z_1+z_2}{2}$$

4. Рівняння сфери

Рівняння кола	Рівняння сфери
	
$x^2+y^2=R^2$ Центр кола — початок координат	$x^2+y^2+z^2=R^2$ Центр сфери — початок координат.
	
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ Центр кола — точка $O_1(a;b)$	$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ Центр сфери — точка $O_1(a;b;c)$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Прямокутна декартова система координат у просторі

В курсі планіметрії ви познайомилися з прямокутною системою координат на площині.

Нагадаємо, що *віссю координат* називають пряму, на якій вибрані точка O (яку називають *початком координат*), додатний напрям (який

Рис. 16.1

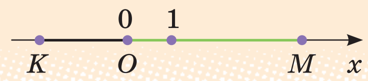
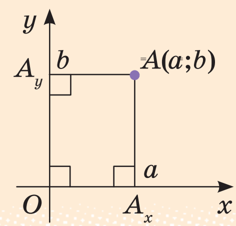


Рис. 16.2



позначають стрілкою) і одиничний відрізок (рис. 16.1). *Кожній точці на координатній осі відповідає єдине дійсне число, яке називають координатою точки, і кожному дійсному числу відповідає єдина точка на координатній осі.* Як відомо, початку координат — точці O ставлять у відповідність число 0 $(x=0)$, точці M, яка розташована на додатному промені, ставлять у відповідність число x, яке дорівнює довжині відрізка OM $(x=OM)$, точці K, яка розташована на від'ємному промені, ставлять у відповідність число x, яке дорівнює довжині відрізка OK, взяте зі знаком «–» $(x=-OK)$.

Означення. *Прямокутною системою координат на площині* називається пара перпендикулярних координатних осей зі спільним початком координат*.

Найчастіше початок координат позначають буквою O, а координатні прямі позначають Ox, Oy і називають, відповідно, *віссю абсцис* і *віссю ординат* (рис. 16.2). Кожній точці A на площині із заданою системою координат відповідає єдина пара чисел $(a;\ b)$, які називають *координатами точки на площині в даній системі координат*, і кожній парі дійсних чисел відповідає єдина точка на площині із заданою системою координат.

Означення. *Прямокутною системою координат у просторі* називають трійку попарно перпендикулярних координатних осей зі спільним початком координат.

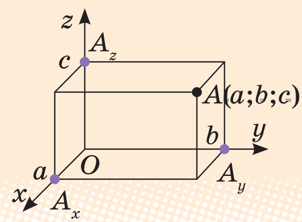
Спільний початок координат найчастіше позначають буквою O, а координатні прямі — Ox, Oy, Oz і називають відповідно *віссю абсцис*, *віссю ординат* і *віссю аплікат*. Площини, що проходять через пари координатних прямих, називають *координатними площинами* і позначають xOy, xOz і yOz відповідно.

Нехай A — довільна точка простору, в якому вибрана прямокутна система координат. Через точку A проведемо площину, перпендикуляр-

* Нагадаємо, що за означенням координатної осі на кожній із них вибрано одиничний відрізок.

ну до осі Ox, і точку її перетину з віссю Ox позначимо A_x (рис. 16.3). Координату a цієї точки на осі Ox називають *абсцисою* точки A. Аналогічно на осях Oy і Oz позначають точки A_y і A_z, координати яких b і c називають, відповідно, *ординатою* і *аплікатою* точки A. Впорядковану трійку чисел $(a; b; c)$ називають *координатами точки A в просторі*. Можна обґрунтувати, що *кожній точці A простору із заданою системою координат відповідає єдина трійка чисел $(a; b; c)$ — координат точки в даній системі координат, і кожній трійці дійсних чисел відповідає єдина точка простору із заданою системою координат.*

Рис. 16.3



2. Відстань між точками у просторі

У планіметрії було доведено, що відстань між точками $A_1(x_1; y_1)$ і $A_2(x_2; y_2)$ виражається формулою:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

У просторі має місце аналогічна формула.

Відстань між точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і $A_2(x_2; y_2; z_2)$ у просторі обчислюється за формулою $A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

3. Координати середини відрізка

Відповідні формули у просторі повністю аналогічні формулам для обчислення координат середини відрізка на площині (див. табл. 16).

Для точок $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і $A_2(x_2; y_2; z_2)$ у просторі координати x; y; z точки C — середини відрізка A_1A_2 обчислюються за формулами $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Із доведеннями формул, наведених у табл. 16, можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Дано точки $A(3;4;5)$, $B(2;3;0)$, $C(0;0;5)$, $F(3;0;2)$, $E(0;7;0)$. Які з цих точок лежать:

1) у площині xOy; 2) у площині yOz; 3) на осі Oz; 4) на осі Oy?

Розв'язання

Точки площини xOy мають координату z, яка дорівнює нулю. Тому тільки точки B і E лежать у площині xOy. Точки площини yOz мають координату x, яка дорівнює нулю. Отже, точки C і E лежать у площині yOz. Точка на осі Oz має дві координати (x і y), які дорівнюють нулю. Тому тільки точка C лежить на осі Oz. Точка на осі Oy має дві координати (x і z), які дорівнюють нулю. Тому тільки точка E лежить на осі Oy. ■

Коментар

Слід врахувати, що для точок, які лежать в координатних площинах, одна з координат обов'язково дорівнює нулю (див. рисунок в першому рядку табл. 16), а для точок, які лежать на осях координат, дві координати дорівнюють нулю.

Задача 2. На даному зображенні прямокутної системи координат у просторі (рис. 16.4) побудуйте точку A з координатами $(2;3;5)$.

Розв'язання

Спочатку побудуємо ортогональну проекцію заданої точки $A(2;3;5)$ на площину xOy — точку $A_1(2;3;0)$. Для цього відкладаємо на осі Ox відрізок $OA_x = 2$ і проводимо в площині xOy пряму $A_xA_1 \parallel Oy$. На осі Oy відкладаємо

Коментар

Нагадаємо, що за означенням осей координат на кожній із них вважається заданим і одиничний відрізок (як на рис. 16.4). Це дозволяє в будь-якій координатній площині побудувати точку з даними координатами.

Рис. 16.4

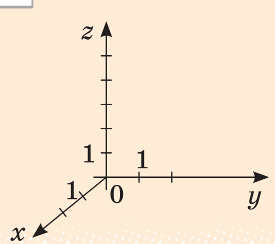
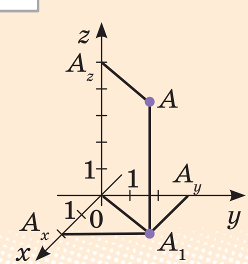


Рис. 16.5



відрізок $OA_y = 3$ і проводимо в площині xOy пряму $A_yA_1 \parallel Ox$. На перетині прямих A_xA_1 і A_yA_1 одержуємо точку A_1, з'єднуємо її з точкою O і проводимо пряму $A_1A \parallel Oz$.
Після цього на осі Oz відкладаємо відрізок $OA_z = 5$ і проводимо пряму $A_zA \parallel OA_1$. Перетин прямих A_zA і A_1A дає зображення шуканої точки A (рис. 16.5). ■

При цьому слід враховувати, що на зображенні (паралельній проекції) просторової фігури перпендикулярність прямих може не зберігатися, але обов'язково зберігається паралельність прямих. Тому, описуючи побудови точок за їх координатами, слід використовувати паралельність відповідних прямих осям координат.

Задача 3*. Запишіть рівняння сфери з центром в точці $A(-1; 4; -1)$, яка проходить через точку $B(2; 4; 3)$.

Розв'язання

► Радіус заданої сфери
$R = AB = \sqrt{(2+1)^2 + (4-4)^2 + (3+1)^2} = 5.$
Тоді рівняння шуканої сфери:
$(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = 25.$ ■

Коментар

За означенням сфери *відстань від центра сфери до довільної її точки дорівнює радіусу сфери*, тому радіус сфери можна знайти як відстань між точками A і B, а після цього використати рівняння сфери з центром $(a; b; c)$ і відомим радіусом R:
$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Поясніть, як визначають декартові координати точки в просторі.
2. Запишіть формулу для знаходження відстані між двома точками за координатами цих точок.
3*. Доведіть формулу для знаходження відстані між двома точками за координатами цих точок.
4. Запишіть формули для знаходження координат середини відрізка за координатами його кінців.
5*. Доведіть формули для знаходження координат середини відрізка за координатами його кінців.
6*. Запишіть і обґрунтуйте рівняння сфери з центром в точці $O_1(a; b; c)$ і радіусом R.

ВПРАВИ

16.1°. На даному зображенні прямокутної системи координат у просторі (рис. 16.6) побудуйте точки з координатами $(1;2;3)$, $(2;-1;1)$, $(-1;3;2)$.

16.2°. Знайдіть координати ортогональних проекцій точок $A(1;3;4)$ і $B(5;-6;2)$ на:
1) площину xOy; 2) площину yOz; 3) вісь Ox; 4) вісь Oz.

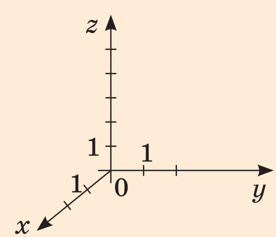
16.3°. На якій відстані розташована точка $A(1;-2;3)$ від координатної площини:
1) xOy; 2) xOz; 3) yOz?

16.4°. Як розташовані точки простору, для яких координати x і y дорівнюють нулю?

16.5°. Дано точки $A(1;2;3)$, $B(0;1;2)$, $C(0;0;3)$, $D(1;2;0)$. Які з цих точок лежать:
1) у площині xOy; 3) у площині yOz?
2) на осі Oz;

16.6°. Дано точку $A(2;5;7)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, проведених із цієї точки на координатні осі і координатні площини.

Рис. 16.6



16.7. Де розташовані всі точки простору, для яких:
1) перша координата дорівнює нулю;
2) друга координата дорівнює нулю;
3) третя координата дорівнює нулю;
4) перша і друга координати дорівнюють нулю;
5) перша і третя координати дорівнюють нулю;
6) друга і третя координати дорівнюють нулю;
7) всі координати дорівнюють нулю?

16.8. На якій відстані розташована точка $A(1;-2;3)$ від координатної прямої:
1) Ox; 2) Oy; 3) Oz?

16.9. Знайдіть відстані від точки $(1;2;-3)$ до:
1°) координатних площин;
2) осей координат;
3°) початку координат.

16.10°. Знайдіть відстань між точками:

1) $A_1(1;2;3)$ і $A_2(-1;1;1)$; 2) $B_1(3;4;0)$ і $B_2(3;-1;2)$.

16.11°. Яка з точок — $A(2;1;5)$ або $B(-2;1,6)$ — лежить ближче до початку координат?

16.12. Визначте вид трикутника ABC, якщо його вершини мають координати: $A(0;0;2)$, $B(0;2;0)$, $C(2;0;0)$.

16.13. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, якщо:

1) $A(0;2;-3)$, $B(-1;1;1)$, $C(2;-2;-1)$, $D(3;-1;-5)$;

2) $A(2;1;3)$, $B(1;0;7)$, $C(-2;1;5)$, $D(-1;2;1)$.

16.14. Знайдіть координати середини відрізка:

1) AB, якщо $A(1;2;3)$ і $B(-1;1;1)$;

2) CD, якщо $C(3;4;0)$ і $D(3;-1;2)$

16.15. Дано координати одного кінця відрізка $A(2;3;-1)$ і його середини $C(1;1;1)$. Знайдіть координати другого кінця відрізка $B(x;y;z)$.

16.16. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо відомі координати решти його вершин:

1) $A(2;3;2)$, $B(0;2;4)$, $C(4;1;0)$;

2) $A(1;-1;0)$, $B(0;1;-1)$, $C(-1;0;1)$;

3) $A(4;2;-1)$, $B(1;-3;2)$, $C(-4\,2;1)$.

16.17. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1. Початок координат розташований у точці B. Додатні промені осей координат — відповідно BA, BC і BB_1. Назвіть координати всіх вершин куба.

16.18*. Знайдіть координати центру O_1 і радіус R сфери, заданої рівнянням:

1) $(x-3)^2+(y+5)^2+z^2=16$; 2) $x^2+(y-7)^2+(z+3)^2=11$.

16.19*. Запишіть рівняння сфери:

1) з центром у точці $O(0;0;0)$ і радіусом 4;

2) з центром у точці $O_1(2;-3;7)$ і радіусом 5.

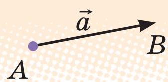
16.20*. Запишіть рівняння сфери з центром у точці $O_1(1;2;-1)$, що проходить через точку:

1) $M(1;0;0)$; 2) $K(1;0;1)$; 3) $N(0;0;-1)$.

§ 17. ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

Таблиця 17

Вектори

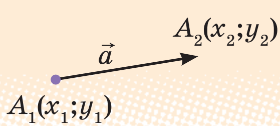


Означення. ***Вектором*** **називають напрямлений відрізок.**

Довжину цього відрізка називають *довжиною (модулем, абсолютною величиною) вектора.*

$$|\vec{a}| = AB$$

Координати вектора на площині

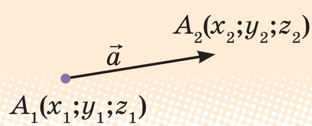


$$\vec{a}(a_1; a_2),$$

де $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Координати вектора у просторі



$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3),$$

де $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Рівні вектори

Два вектори називають *рівними*, якщо вони мають однакові довжину і напрям.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \text{вектори } \vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ однаково напрямлені} \end{cases}$$

У координатах

на площині	у просторі
$\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(b_1; b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

Операції над векторами

Сума векторів

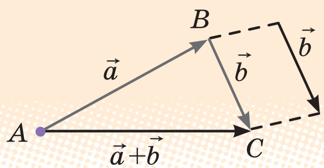
на площині

$$\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$$

у просторі

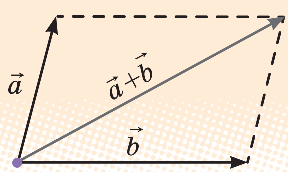
$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) + \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \\ = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

Правило трикутника

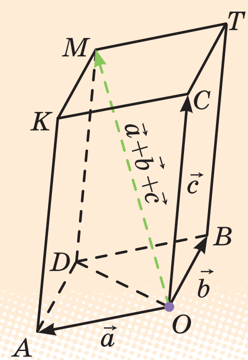


$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Правило паралелограма



Правило паралелепіпеда

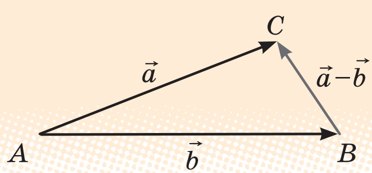


$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Різниця векторів

$$\vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

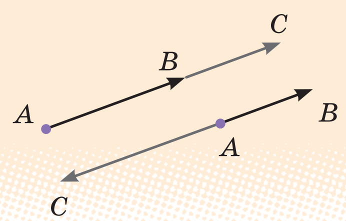
$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) - \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \\ = \vec{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$



$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$

Множення вектора на число

$\lambda\cdot\overrightarrow{(a_1;a_2)}=\overrightarrow{(\lambda a_1;\lambda a_2)}$	$\lambda\cdot\overrightarrow{(a_1;a_2;a_3)}=\overrightarrow{(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)}$



$$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$$

При $\lambda>0$ вектор $\lambda\vec{a}$ і вектор $\vec{a}$ однаково напрямлені.

При $\lambda<0$ вектор $\lambda\vec{a}$ і вектор $\vec{a}$ протилежно напрямлені.

$$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$$

Колінеарні вектори

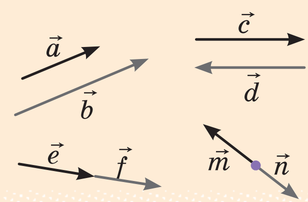
Означення. **Ненульові вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.**

Колінеарні вектори або однаково напрямлені, або протилежно напрямлені.

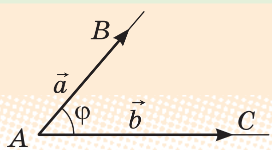
$\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні $\Leftrightarrow$ $\vec{b}=\lambda\vec{a}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$$

(відповідні координати пропорційні)



Скалярний добуток векторів



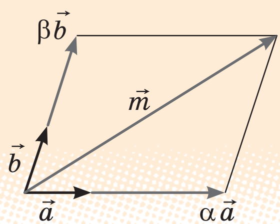
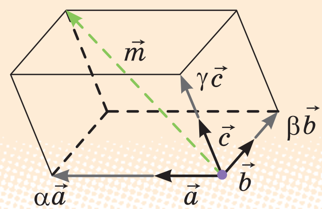
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.

У координатах

на площині	у просторі
$\vec{a}(a_1;a_2)$; $\vec{b}(b_1;b_2)$	$\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$; $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$

Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат.

	При $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
Розкладання вектора	
на площині	у просторі
$\vec{m}$ — довільний вектор площини, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні вектори.	$\vec{m}$ — довільний вектор простору, $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — некомпланарні (тобто не паралельні одній площині) вектори.
Завжди існує розкладання: $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ (α і β — єдині)	Завжди існує розкладання: $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ (α, β і γ — єдині)
	

Про поняття вектора у просторі, операції над векторами у просторі, про розкладання вектора на площині за двома неколінеарними векторами та у просторі за трьома некомпланарними векторами більш детально ви можете дізнатися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ*

Задача 1. Дано чотири точки $A(1;5;-4)$, $N(2;-1;3)$, $C(-3;1;2)$, $D(-4;7;-5)$.

1) Укажіть серед векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{AD}$ рівні вектори.
2) Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання

► Знайдемо координати заданих векторів: $\overrightarrow{AB}(1;-6;7)$, $\overrightarrow{BC}(-5;2;-1)$, $\overrightarrow{DC}(1;-6;7)$, $\overrightarrow{AD}(-5;2;-1)$.

Коментар

1) *Рівні вектори мають рівні відповідні координати.* Тому для розв'язання задачі знайдемо координати вказа-

* Із застосуванням координат і векторів до розв'язування геометричних задач можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Тоді:

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$;

2) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-6)^2 + 7^2} = \sqrt{86}$,

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{30}$. ■

них векторів і виберемо з них пари рівних векторів (*для знаходження координат вектора треба від координат кінця вектора відняти відповідні координати початку*).

2) Якщо $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Задача 2. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо $A(3; 2; -1)$, $B(5 - 4; 7)$, $C(-1; 2; 6)$.

Розв'язання

▶ Нехай точка D має координати $D(x; y; z)$. Тоді вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ мають координати: $\overrightarrow{AD}(x-3; y-2; z+1)$, $\overrightarrow{BC}(-6; 6; -1)$.

Оскільки $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Рівні вектори мають рівні відповідні координати, тому $x - 3 = -6$, $y - 2 = 6$, $z + 1 = -1$. Звідси $x = -3$, $y = 8$, $z = -2$. Тоді точка D має координати $D(-3; 8; -2)$. ■

Коментар

Якщо $ABCD$ — паралелограм, то у нього протилежні сторони (наприклад, BC і AD) паралельні й рівні, але тоді й вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ є рівними, а отже, є рівними і відповідні координати цих векторів.

Задача 3*. Визначте кути трикутника ABC, якщо його вершини мають координати $A(1; 5; 3)$, $B(3; 3; 2)$, $C(3; 6; 5)$.

Розв'язання

▶ Кут A трикутника ABC дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Знайдемо координати цих векторів: $\overrightarrow{AB}(2; -2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; 1; 2)$. Тоді скалярний добуток $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$. Але якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні, отже, $\angle A = 90°$. Кут B трикутника ABC

Коментар

Для визначення кутів трикутника можна використати те, що ці кути дорівнюють кутам між відповідними векторами. Наприклад, кут A дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Із формули скалярного добутку $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ отримуємо, що *косинус кута між ненульовими векторами* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$

дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{BA}(-2;2;1)$ і $\overrightarrow{BC}(0;3;3)$. Маємо:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-2)\cdot 0+2\cdot 3+1\cdot 3=9;$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=3;$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

Тому $\cos B=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Отже, $\angle B=45^\circ$, але тоді в прямокутному трикутнику ABC і $\angle C=45^\circ$. ■

можна обчислити за формулою $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$. Для обчислення за цією формулою треба також використовувати формули для знаходження скалярного добутку векторів і довжини вектора: якщо $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$,

то $\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

і $\left|a\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Також корисно пам'ятати: *якщо скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні.*

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

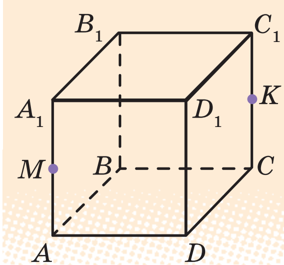
1. Дайте означення вектора, довжини вектора, рівних векторів.
2. Дайте означення координат вектора. Запишіть формулу для знаходження довжини вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$.
3. Дайте означення суми векторів. Сформулюйте правила трикутника, паралелограма і паралелепіпеда для знаходження суми векторів. Проілюструйте їх застосування на прикладах.
4. Дайте означення добутку вектора на число. Зобразіть вектор $\vec{a}$ як направлений відрізок. Побудуйте вектори: $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$, $0,5\vec{a}$, $-\vec{a}$.
5. Дайте означення скалярного добутку векторів. Поясніть на прикладах, як знаходити скалярний добуток векторів, заданих своїми координатами; заданих у вигляді напрямлених відрізків.

ВПРАВИ

17.1°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.1). Точки M і K — середини ребер AA_1 і CC_1 відповідно. Укажіть вектори, які:

1) дорівнюють векторам $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$, $\overrightarrow{AM}$;
2) протилежні до векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CK}$;
3) колінеарні векторам $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{CK}$, але не дорівнюють їм;

Рис. 17.1



17.2°. Дано точки $A(2;5;7)$, $B(3;-1;2)$, $C(-2;1;4)$, $D(2:3;-5)$, $O(0;0;0)$. Знайдіть координати і довжину векторів:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{OB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$; 4) $\overrightarrow{CD}$; 5) $\overrightarrow{OC}$; 6) $\overrightarrow{DO}$.

17.3°. Дано три точки $A(1;1;1)$, $B(-2;1;2)$, $C(0;2;-3)$. Знайдіть координати точки $D(x;y;z)$, якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{CD}$.

17.4°. Дано три точки $A(1;3;-1)$, $B(-2;4;2)$, $C(0;3;-1)$. Знайдіть координати точки $D(x;y;z)$, якщо векторі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ протилежні.

17.5°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 17.1) укажіть такий вектор із початком і кінцем у вершинах куба, який дорівнює:

1) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$; 3) $\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C_1D_1}$;
2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{C_1D}$.

17.6. Дано вектори $(2;m;5)$ і $(4;2;n)$. При яких значеннях m і n ці вектори є колінеарними?

17.7°. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(2;-3;4)$, $\vec{b}(3;2;5)$; 3) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a};\vec{b})=60°$;
2) $\vec{a}(-2;-1;3)$, $\vec{b}(4;3;1)$; 4) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a};\vec{b})=120°$.

17.8°. При якому значенні n вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є перпендикулярними, якщо:

1) $\vec{a}(2;-3;1)$, $\vec{b}(3;-2;n)$; 3) $\vec{a}(3;n;2n)$, $\vec{b}(n;-n;1)$;
2) $\vec{a}(n;2;n)$, $\vec{b}(4;-n;5)$; 4) $\vec{a}(1;n;-2)$, $\vec{b}(n;n;1)$?

17.9. Дано чотири точки $A(1;2;-2)$, $B(1;-1;2)$, $C(2;1;0)$, $D(14;1;5)$. Знайдіть косинус кута φ між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

§ 18. ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

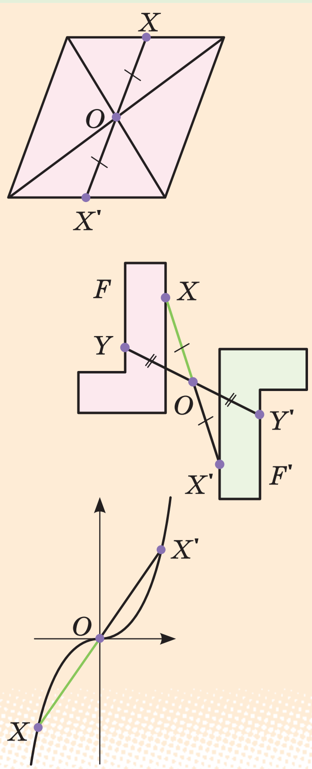
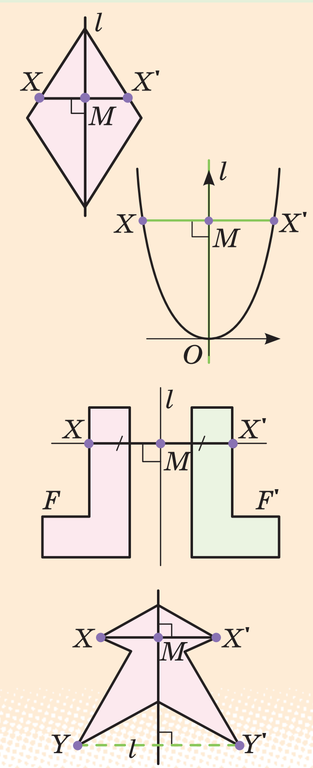
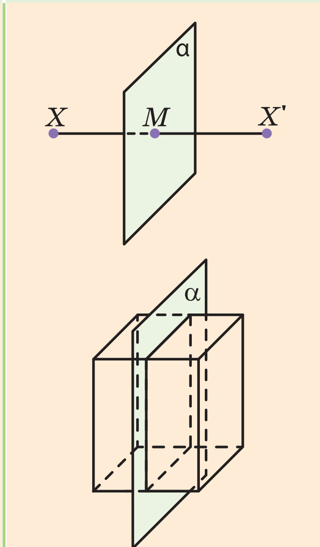
Таблиця 18

Перетворення фігур

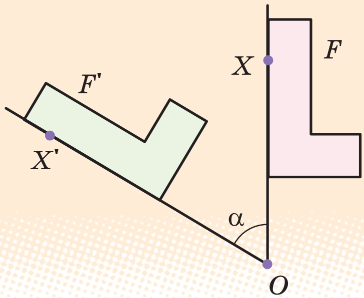
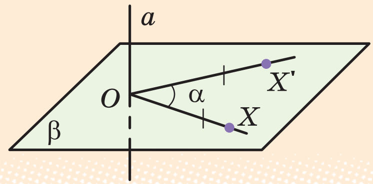
І. Рухи

Рух **— це перетворення, при якому зберігаються відстані між точками фігури** (якщо X і Y — дві довільні точки фігури, а X' і Y' — відповідні точки, одержані після перетворення руху, то $XY = X'Y'$).

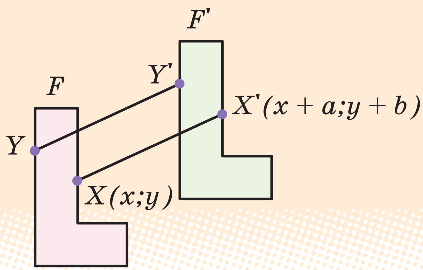
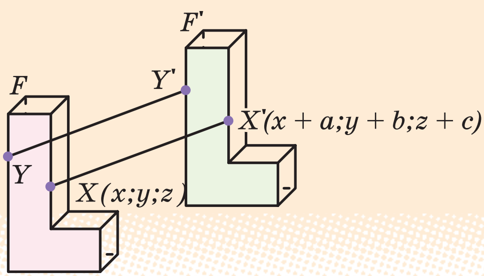
1. Симетрія

відносно точки	відносно прямої	відносно площини
		
$\boxed{OX' = OX}$	$XX' \perp l,\ XM = MX'$	$XX' \perp \alpha,\ XM = MX'$

2. Поворот

навколо точки на площині	навколо прямої у просторі
	
$OX' = OX$, $\angle XOX' = \alpha$	$\beta \perp \alpha$, $OX' = OX$, $\angle XOX' = \alpha$

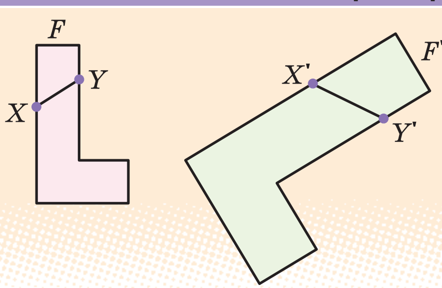
3. Паралельне перенесення

на площині	у просторі
	

Точки зміщуються вздовж паралельних прямих (або прямих, які збігаються) на одну й ту саму відстань в одному і тому самому напрямі.

$XX' = YY'$ (тобто $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}$)

ІІ. Перетворення подібності



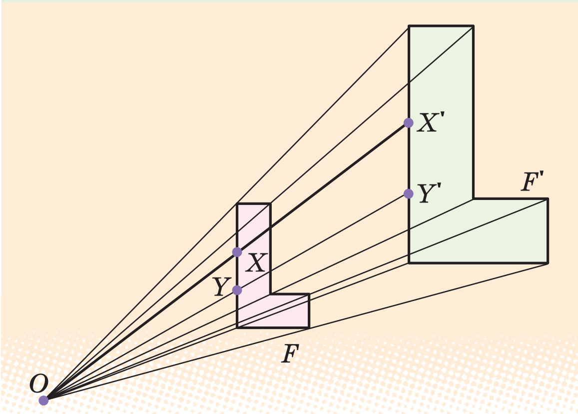
$\dfrac{X'Y'}{XY} = k$ коефіцієнт подібності.

Перетворення, при якому відстані між точками змінюються в одне й те саме число разів, називають перетворенням подібності.

Властивості

1) Перетворення подібності зберігає кути між променями.
2) У подібних фігурах відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні.

Гомотетія



Якщо точка X відображається в точку X', то це означає:

1) точка X' лежить на промені OX;
2) $\boxed{\frac{OX'}{OX} = k}$

Властивості

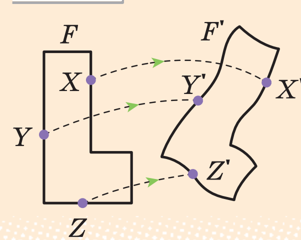
1) **При гомотетії відрізок відображається у паралельний йому відрізок (або у відрізок, який лежить із заданим відрізком на одній прямій),** $X'Y' \parallel XY$.
2) **При гомотетії площина відображається у паралельну їй площину** (або в ту саму площину, якщо центр гомотетії лежить у заданій площині або якщо $k = 1$).

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ*

1. Перетворення фігур. Рух

Нагадаємо поняття *перетворення фігур*, відоме вам із курсу планіметрії. Якщо кожну точку даної фігури перемістити яким-небудь чином, то ми отримаємо нову фігуру. Кажуть, що ця фігура отримана *перетворенням* з даної (рис. 18.1). Зауважимо, що на відміну від реального перетворення, яке можна уявити собі як неперервний

Рис. 18.1

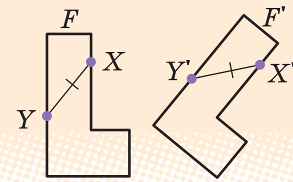


* Більш детально відповідний матеріал розглянуто в інтернет-підтримці підручника.

процес, в геометрії *для нас будуть мати значення тільки початкове і кінцеве положення фігури*[*].

Перетворення однієї фігури в іншу називається *рухом*, якщо воно зберігає відстані між точками, тобто переводить довільні дві точки X і Y однієї фігури в точки X' і Y' другої фігури так, що $XY = X'Y'$ (рис. 18.2).

Рис. 18.2



Поняття руху для фігур у просторі означається так само, як і на площині. Дослівно так само, як і для руху на площині, обґрунтовується, що *при русі в просторі прямі переходять в прямі, промені — в промені, відрізки — у відрізки і зберігаються кути між променями.*

Новою властивістю руху в просторі є те, що **рух переводить площини в площини.**

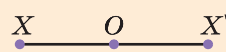
Із доведенням можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Як і на площині, **дві фігури у просторі називають *рівними*, якщо вони рухом переводяться одна в іншу** (див. означення рівних фігур в § 1).

Так само, як і на площині, означають перетворення симетрії відносно точки і прямої.

Означення. **Точки X і X' простору називають *симетричними відносно точки O*, яку називають *центром симетрії*, якщо точка O є серединою відрізка XX'.**

Рис. 18.3

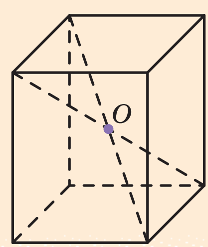


Точку O вважають симетричною самій собі (рис. 18.3).

Фігуру F у просторі називають *центрально-симетричною відносно точки O*, якщо кожна точка X фігури F симетрична відносно точки O деякій точці X' фігури F.

Наприклад, куб центрально-симетричний відносно точки перетину його діагоналей (рис. 18.4) (обґрунтуйте це самостійно).

Рис. 18.4



[*] Фактично поняття перетворення в геометрії має той самий зміст, що і поняття функції в курсі алгебри і початків аналізу. Тобто *для перетворення однієї фігури в іншу потрібно встановити відповідність між точками цих фігур, при якій кожній точці першої фігури відповідає єдина точка другої фігури.*

Означення. Точки X і X' простору називають *симетричними відносно прямої* a, яку називають *віссю симетрії*, якщо пряма a проходить через середину відрізка XX' і перпендикулярна до цього відрізка (рис. 18.5).

Вважають, що точки прямої a симетричні самі собі.

Фігуру F у просторі називають *симетричною відносно осі* a, якщо кожна точка X фігури F симетрична відносно цієї осі деякій точці X' фігури F.

Наприклад, прямокутний паралелепіпед симетричний відносно осі, що проходить через точки перетину діагоналей протилежних граней (рис. 18.6) (обґрунтуйте самостійно).

Крім симетрії відносно точки і прямої, в просторі розглядається ще й перетворення симетрії відносно площини.

Означення. Точки X і X' у просторі називаються *симетричними відносно площини* α, яку називають *площиною симетрії*, якщо ця площина проходить через середину відрізка XX' і перпендикулярна до нього.

Вважають, що точки площини α симетричні самі собі (рис. 18.7). Симетрію відносно площини називають також *дзеркальною симетрією*.

Фігуру F у просторі називають *симетричною (дзеркально-симетричною) відносно площини* α, якщо кожна точка X фігури F симетрична відносно цієї площини деякій точці X' фігури F.

Наприклад, прямокутний паралелепіпед симетричний відносно площини, що проходить через вісь симетрії і паралельна одній із пар протилежних граней (рис. 18.8) (обґрунтуйте самостійно).

Рис. 18.5

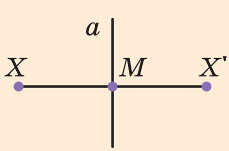


Рис. 18.6

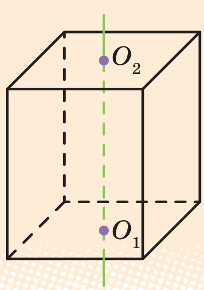


Рис. 18.7

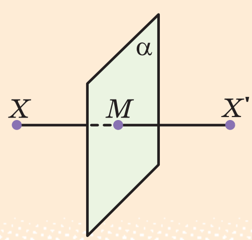
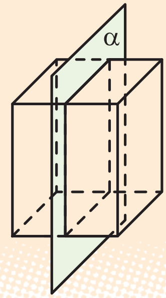


Рис. 18.8

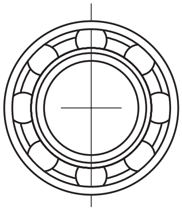
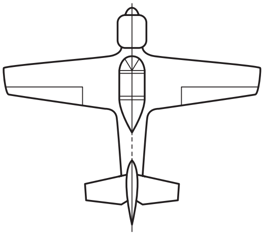


Симетрія широко поширена в природі. Її можна спостерігати у формі листя і кольорах рослин, в розташуванні різних органів тварин, у формі кристалічних тіл.



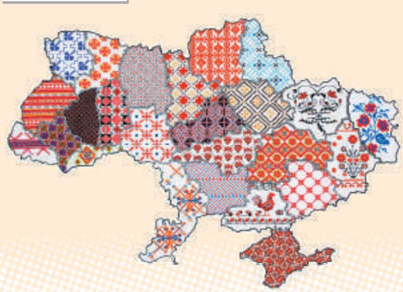

Симетрія широко використовується на практиці, в будівництві і техніці.



Симетрію широко застосовують у декоративно-прикладному мистецтві, зокрема у вишиванках. Кожному регіону України притаманні свої унікальні вишиванки. Вони відрізняються фасоном, кольорами та способом вишивання, орнаментом і візерунками (рис. 18.9).

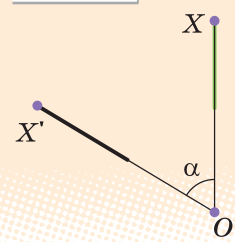
Рис. 18.9



2. Поворот. Фігури обертання

Нагадаємо, що точку X' на площині можна одержати з точки X цієї площини поворотом навколо центра O на кут α, якщо $OX'=OX$ і кут XOX' дорівнює α (рис. 18.10).

Рис. 18.10



У просторі аналогом перетворення повороту на площині навколо точки є поворот навколо прямої.

Нехай у просторі задані пряма a і точка X, що не належить цій прямій (рис. 18.11). Через точку X проведемо площину β, перпендикулярну до прямої a, і точку перетину прямої a і площини β позначимо O. Кажуть, що точка X' простору одержана з точки X поворотом навколо прямої a на кут α, якщо в площині β точка X' одержана з точки X поворотом навколо центра O на кут α.

Означення. Перетворення простору, при якому точки прямої a залишаються на місці, а всі інші точки повертаються навколо цієї прямої (в одному і тому ж напрямі) на кут α, називається *поворотом*, або *обертанням*.

Пряму a при цьому називають *віссю обертання*.

Говорять, що фігура Φ у просторі одержана обертанням фігури F навколо осі a, якщо всі точки фігури Φ одержують поворотами точок фігури F навколо осі a. Фігуру Φ при цьому називають *фігурою обертання*.

Наприклад, при обертанні точки A навколо прямої a (рис. 18.12) одержуємо коло з центром у точці O, що є перетином прямої a з площиною, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a.

Сферу можна одержати обертанням кола навколо його діаметра (рис. 18.13).

Рис. 18.11

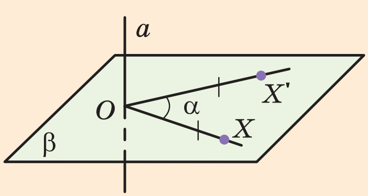


Рис. 18.12

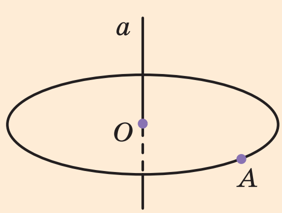
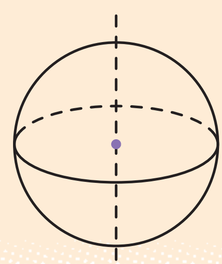


Рис. 18.13



3. Паралельне перенесення у просторі

Означення. ***Паралельним перенесенням*** **у просторі називається таке перетворення, при якому довільна точка $(x; y; z)$ фігури переходить у точку $(x+a; y+b; z+c)$, де числа a, b, c одні й ті самі для всіх точок $(x; y; z)$.**

Із обґрунтуванням властивостей паралельного перенесення, наведених в табл. 18, можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

4. Подібність просторових фігур

Перетворення подібності в просторі визначається так само, як і на площині.

Означення. **Перетворення фігури F називається** ***перетворенням подібності,*** **якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в одне й те саме число разів, тобто для будь-яких двох точок X і Y фігури F і точок X', Y' фігури F', в які вони переходять, $X'Y' = kXY$.**

Так само, як і на площині, *перетворення подібності в просторі переводить прямі в прямі, промені в промені, відрізки у відрізки і зберігає кути між променями*. Такими самими міркуваннями, як і для руху, доводиться, що *перетворення подібності переводить площини в площини.*

Так само, як і на площині, **дві фігури називаються *подібними,* якщо вони переводяться одна в іншу перетворенням подібності** (див. означення подібних фігур в § 1).

Найпростішим перетворенням подібності в просторі є гомотетія. Так само як і на площині, ***гомотетія*** **відносно центра O з коефіцієнтом гомотетії k — це перетворення, яке переводить довільну точку X в точку X' променя OX таку, що $OX' = kOX$.**

Перетворення гомотетії в просторі переводить будь-яку площину, що не проходить через центр гомотетії, в паралельну площину (або в себе при $k=1$).

Обґрунтування наведено в інтернет-підтримці підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Чи існує паралельне перенесення, при якому точка A переходить в точку B, а точка C — в точку D, якщо $A(1;3;5)$, $B(4;0;1)$, $C(2;4;3)$, $D(5;1;-1)$?

Розв'язання

Порівняємо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB}(3;-3;-4)$, $\overrightarrow{CD}(3;-3;-4)$. Оскільки $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то доходимо висновку, що при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AB}$ точка A переходить в точку B, а точка C — в точку D. ■

Коментар

При паралельному перенесенні точки зміщуються по паралельним (або таким, що збігаються) прямим на ту саму відстань, тобто точки зміщуються на один і той самий вектор $\vec{a}$. Отже, якщо при паралельному перенесенні точка A переходить в точку B, а точка C — в точку D, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ повинні бути рівними.

Задача 2. Дано точку $(2;3;5)$. Знайдіть точки, симетричні даній відносно координатних площин.

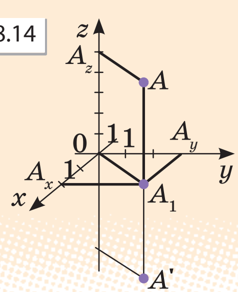
Розв'язання

Точка A', симетрична точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOy, лежить на прямій, перпендикулярній до площини xOy, тому має ті самі координати x і y: $x=2$, $y=3$. Симетрична точка розташована на тій самій відстані від площини xOy, але по інший бік від неї. Тому координата z у неї відрізняється тільки знаком, тобто $z=-5$. Отже, точкою, симетричною точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOy, буде точка з координатами $(2;3;-5)$. Аналогічно точкою, симетричною точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOz, буде точка з координатами $(2;-3;5)$, і точкою, симетричною точці $A(2;3;5)$ відносно площини yOz, буде точка з координатами $(-2;3;5)$. ■

Коментар

Для побудови точки, симетричної заданій точці $A(2;3;5)$ відносно площини xOy, потрібно провести пряму $AA' \perp$ пл. xOy і від точки A_1 перетину цієї прямої з площиною xOy відкласти відрізок $A_1A'=AA_1$. Тоді точки A і A' матимуть однакові координати x і y, а координати z у них відрізнятимуться тільки знаком (рис. 18.14).

Рис. 18.14



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ

1. Яке перетворення фігури називають рухом?
2. Які фігури в просторі називають рівними?
3. Що таке перетворення симетрії відносно точки? Яку фігуру називають центрально-симетричною?
4. Поясніть, що таке перетворення симетрії відносно площини. Яку фігуру називають симетричною відносно площини?
5. Дайте означення паралельного перенесення.
6. Назвіть властивості паралельного перенесення.
7. Що таке перетворення подібності? Назвіть його властивості. Які фігури називають подібними?
8. Яке перетворення називають гомотетією? Назвіть властивості гомотетії.

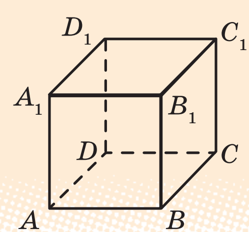
ВПРАВИ

18.1. Наведіть приклади центрально-симетричних і не центрально-симетричних фігур.

18.2°. Чи може центр симетрії фігури не належати їй?

18.3. Побудуйте фігуру, симетричну кубу $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 18.15):
1) відносно центра A;
2) відносно площини BB_1C_1C.

Рис. 18.15



18.4. Чи існують точки, прямі і площини, які при центральній симетрії відображуються у себе? Відповідь проілюструйте на рисунку.

18.5. Знайдіть центр, осі та площини симетрії фігури, що складається з двох прямих, які перетинаються.

18.6. Скільки осей симетрії має:

1) прямокутний паралелепіпед, який не є кубом;

2) куб?

18.7. Скільки осей симетрії має сфера?

18.8. Скільки площин симетрії має:
1) прямокутний паралелепіпед, який не є кубом; 2) куб?

18.9. Наведіть приклади просторових фігур, у яких є вісь симетрії, але немає площини симетрії, і навпаки, є площина симетрії, але немає осі симетрії.

18.10. Які види симетрії має куб?

18.11. Скільки у правильної шестикутної призми:
1) осей симетрії; 2) площин симетрії?

18.12. Скільки у правильної трикутної призми:
1) осей симетрії; 2) площин симетрії?

18.13. В основі прямої призми лежить ромб. Скільки вона має:
1) осей симетрії; 2) площин симетрії?

18.14. Скільки осей і площин симетрії має правильна піраміда, в основі якої лежить многокутник з:
1) парним числом сторін; 2) непарним числом сторін?

18.15. Чи може фігура мати рівно два центри симетрії? Відповідь обґрунтуйте.

18.16. Доведіть, що перетворення симетрії відносно координатних площин задається формулами:
1) $x'=x,\ y'=y,\ z'=-z$ — відносно площини xOy;
2) $x'=x,\ y'=-y,\ z'=z$ — відносно площини xOz;
3) $x'=-x,\ y'=-x,\ z'=z$ — відносно площини yOz.

18.17. Знайдіть точки, симетричні відносно координатних площин точкам:
1) $(2;-7;3)$; 2) $(-3;4;1)$; 3) $(5;-3;7)$.

18.18. Знайдіть точки, симетричні відносно початку координат точкам:
1) $(2;-7;3)$; 2) $(-3;4;1)$; 3) $(5;-3;7)$.

18.19. Знайдіть значення a, b, c у формулах паралельного перенесення $x'=x+a,\ y'=y+b,\ z'=z+c$, внаслідок якого точка $A(3;2;0)$ переходить у точку $A'(2;0;5)$.

18.20. При паралельному перенесенні точка $A(1;-1;3)$ переходить у точку $A'(3;-5;2)$. У яку точку переходить при цьому початок координат?

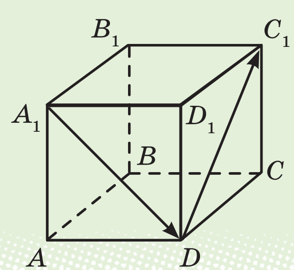
Із застосуванням координат і векторів до розв'язування стереометричних задач можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Тест № 3

1. Яка з точок $A(6;3;0)$, $B(0;7;-6)$, $C(-8;0;9)$ належить координатній площині yOz?
   А Точка A
   Б Точка B
   В Точка C
   Г Жодна з даних точок
2. Яка із заданих точок належить осі Oz?
   А $A(3;0;0)$ Б $B(0;0;-5)$ В $C(0;-4;0)$ Г $D(2;3;0)$
3. Відносно якої з даних точок симетричні точки $A(8;-5;3)$ і $B(0;1;-9)$?
   А $C(8;-4;-6)$ Б $D(4;-3;6)$ В $E(-8;6;-12)$ Г $F(4;-2;-3)$
4. Точка M — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(1;2;5)$, $M(4;0;-3)$.
   А $B(3;-2;-8)$ Б $B(-3;2;8)$ В $B(-7;2;11)$ Г $B(7;-2;-11)$
5. Знайдіть довжину відрізка AC, якщо $A(4;-3;1)$, $C(8;1;3)$.
   А 36 Б $2\sqrt{6}$ В 6 Г $4\sqrt{6}$
6. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{DC}$, якщо $C(11;-7;5)$, $D(13;2;-4)$.
   А $\overrightarrow{DC}(2;9;-9)$ Б $\overrightarrow{DC}(-2;-9;9)$ В $\overrightarrow{DC}(24;-5;1)$ Г $\overrightarrow{DC}(-2;-9;1)$
7. Дано точки $A(2;1;4)$, $B(4;2;6)$, $C(3;-2;1)$ і $D(7;0;5)$. Яка з рівностей є правильною?
   А $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ Б $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ В $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$ Г $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
8. Знайдіть значення λ, при якому вектори $\vec{a}(3;2-\lambda;5)$ і $\vec{b}(3;2\lambda+8;5)$ рівні?
   А 4 Б 2 В −2 Г −4
9. Знайдіть довжину вектора $\vec{a}(-3;7;1)$.
   А 11
   Б 59
   В $\sqrt{59}$
   Г 5
10. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зображеного на рис. 1, дорівнює 4. Знайдіть довжину суми векторів $\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DC_1}$.
   А 4
   Б $4\sqrt{2}$
   В 8
   Г $4\sqrt{3}$

Рис. 1



11. Який із даних векторів колінеарний вектору $\vec{a}(12;-16;20)$?

А $\vec{b}(6;8;10)$ Б $\vec{c}(24;-32;-40)$ В $\vec{d}(6;-8;10)$ Г $\vec{e}(-24;32;40)$

12. У прямокутній системі координат у просторі задано точки $O(0;0;0)$ і $A(3;4;5)$. Із точки A на вісь Oz проведено перпендикуляр. Точка B — основа цього перпендикуляра. Установіть відповідність між величинами (1–4) та їхніми числовими значеннями (А–Д).

Величина	Числове значення
1 Довжина вектора OA	А 0
2 Відстань від точки A до площини xOz	Б $5\sqrt{2}$
3 Абсциса точки B	В 3
4 Довжина відрізка AB	Г 4
	Д 5

13. У прямокутній системі координат у просторі задано сферу з центром у початку координат, якій належить точка $A(0;0;-3)$. Яка з наведених точок також належить цій сфері?

А $B(1;0;2)$ Б $B(-1;-1;-1)$ В $C(1;2;2)$ Г $D(1;1;2)$

14. При якому значенні m вектори $\vec{a}(2;m;5)$ і $\vec{b}(-4;6;2m)$ перпендикулярні?

А $-\frac{1}{2}$ Б -2 В 2 Г $\frac{1}{2}$

15. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(-2;0;2)$ і $\vec{b}(0;2;2)$.

А $60°$ Б $120°$ В $45°$ Г $135°$

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua

Теми навчальних проектів

1. Симетрія в природі, техніці й архітектурі.
2. Вектори і їх застосування в геометрії і фізиці.
3. Кристали — природні многогранники.
4. Геометрія в орнаменті.
5. Кругові орнаменти в архітектурі.

Відомості з історії наведено в інтернет-підтримці підручника.

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

Алгебра і початки аналізу

Розділ 1

§ 1. **1.1.5.** 1) $-1\frac{2}{3}$; 1; 2) −1; 2; 3) 0; ±2; 4; 4) −5,5; −0,5; ±2,5. **1.1.6.** 1) $[3;4]$; 2) $(-\infty;-4)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; 3) $(-\infty;-0,5]\cup[1,5;+\infty)$; 4) $(-5,5;-3,5)\cup(0;2)$. **1.2.1.** 1) 2,5; −2; $3\frac{1}{3}$; $a+\frac{1}{a}$; 2) −3; −2; 1; b^2-3; 3) 1; 2; 0; $\sqrt{m+1}$. **1.2.2.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-3;+\infty)$; 3) $x\neq-1$; 4) $\boldsymbol{R}$; 5) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) $[1;5]$; 8) $[-3;0)\cup(0;+\infty)$. **1.2.3.** 1) $\{5\}$; 2) $\boldsymbol{R}$; 3) $[0;+\infty)$; 4) $[0;+\infty)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 6) $[-5;+\infty)$; 7) $[3;+\infty)$. **1.2.4.** а) $D(f)=[-3;5]$; $E(f)=[-3;2]$; зростає: $[-2;3]$; спадає: $[-3;-2]$ і $[3;5]$; $f(1)=0$; б) $D(f)=[0;6]$; $E(f)=[0;4]$; зростає: $[0;2]$ і $[5;6]$; спадає: $[2;5]$; $f(1)=2$. **1.2.8.** 1) Зростаюча; 2) спадна; 3) зростаюча; 4) спадна. **1.2.9.** 2) 4. **1.4.1.** 1) $y=\frac{1}{3}x+2$, $D=\boldsymbol{R}$, $E=\boldsymbol{R}$; 2) $y=-\frac{1}{3}x-2$, $D=\boldsymbol{R}$, $E=\boldsymbol{R}$; 3) $y=\frac{2}{x}$, D: $x\neq0$, E: $y\neq0$; 4) $y=-\frac{1}{x}$, D: $x\neq0$, E: $y\neq0$; 5) $y=x^2$, $D:[0;+\infty)$, $E:[0;+\infty)$; 6) $y=x^2$, $D:(-\infty;0]$, $E:[0;+\infty)$ **1.4.3.** 1) $y=2\sqrt{x}$, 2) $y=-2\sqrt{x}$, 3) $y=\sqrt{x}+2$, 4) $y=-\sqrt{x+2}$.

§ 2. **2.1.2.** 1) Так, так; 2) так, ні. **2.1.6.** 1) Коренів немає; 2) 2; 3) $-\sqrt{2}$; 4) коренів немає. **2.1.7.** 1) $(-\infty;-2]\cup(1;2]\cup(4;+\infty)$; 2) $(-\infty;-2)\cup(3;8)$; 3) $(4;5]$; 4) $[-10;-2)\cup(4;+\infty)$. **2.1.8.** 1) $(-2;2)\cup[4;+\infty)$; 2) $(-2;-1)$ або 1; 3) $(-\infty;0)\cup[2;3]$; 4) $(-\infty;-1)\cup[4;+\infty)$. **2.1.10.** 40. **2.2.1.** 1) 2; 2) 3; 3) $(1;0)$. **2.2.2.** 1) 0; 2) 0. **2.2.3.** 1) 3; 2) $(-2;5)$; 3) $(3;1)$; 4) коренів немає. **2.2.4.** 1) 6; 2) 1; 3) 0; 4) 6. **2.2.5.** 1) $(-5;-5)$; $(2;2)$; 2) $(-2;-2)$; 3) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $(-2;-2)$.

§ 3. **3.1.2.** 1) −2; 2) 0,5; 3) −1; 4) 2; 5) 5; 6) 3. **3.1.3.** 1) 20; 2) 10; 3) 6; 4) $3\sqrt[5]{16}$. **3.1.4.** 1) 3; 2) 10; 3) −2; 4) 5. **3.1.5.** 1) −2; 2) 3; 3) −5; 4) 2.

3.1.6. 1) 77; 2) 6; 3) 15; 4) 5. **3.1.7.** 1) 108; 2) 200; 3) 0,9; 4) $1\frac{1}{3}$. **3.1.9.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[3;+\infty)$; 3) $[-2;+\infty)$; 4) $(0;+\infty)$. **3.1.10.** 1) $\frac{3\sqrt[7]{64}}{2}$; 2) $\frac{2(\sqrt{7}+1)}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$ при $a=9$; $\frac{\sqrt{a}-3}{a-9}$ при $0\leqslant a\leqslant 9$ або $a>9$; вираз невизначений при $a<0$; 4) $\frac{1}{3}$ при $x=1$; $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ при $x\neq 1$. **3.1.11.** 1) $a^2b\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $ab^3\sqrt[4]{a^3b}$; 3) $-3ab^4\sqrt[3]{a^2b^2}$; 4) $2ab^2\sqrt[6]{2a^3b^4}$. **3.1.12.** 1) $|ab^3|\sqrt{|b|}$; 2) $ab\sqrt[7]{a^2b}$; 3) $2a^2b\sqrt[6]{b}$; 4) $a^2|b|\sqrt[8]{ab}$. **3.1.13.** 1) $\sqrt[3]{7a^3}$; 2) $-\sqrt[4]{ab^5}$; 3) $\sqrt[7]{5a^7b^7}$; 4) $\sqrt[6]{a^7b}$. **3.1.14.** 1) $\sqrt[4]{7a^4}$ при $a\geqslant 0$; $-\sqrt[4]{7a^4}$ при $a<0$; 2) $\sqrt[7]{a^{22}b}$; 3) $\sqrt[6]{2ab^7}$; 4) $\sqrt[8]{-3b^{11}}$. **3.1.15.** 1) $-a$; 2) 0. **3.1.16.** 1) $\sqrt[3]{7}$; 2) $\pm\sqrt[6]{3}$; 3) $-\sqrt[5]{5}$; 4) коренів немає; 5) ±2; 6) −4. **3.2.1.** 1) 3; 2) коренів немає; 3) −26; 4) 0; 5) 45. **3.2.2.** 1) 8; 2) 2. **3.2.3.** 1) 2; 2) 10; 3) 4; 4) 7. **3.2.4.** 1) 3; 2) −5; 3) −11; 4) −8; 5. **3.2.5.** 1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) $\pm\sqrt{2}$. **3.2.6.** 1) 1; 2; 10; 2) −1. **3.2.7.** 1) (8; 0); 2) (4; 1); 3) (4; 1); 4) (16; 1).

§ 4. **4.1.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{1}{9}}$; 3) $\sqrt[4]{5}$; 4) $\sqrt[7]{\frac{1}{64}}$; 5) $\sqrt{8}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{1}{49}}$. **4.2.** 1) $3^{\frac{5}{6}}$; 2) $4^{\frac{1}{5}}$; 3) $7^{-\frac{9}{2}}$; 4) $a^{-\frac{2}{9}}$; 5) $(2b)^{\frac{1}{4}}$; 6) $|c|^{\frac{4}{11}}$. **4.3.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **4.4.** 1) $[0;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 3) $(1;+\infty)$; 4) $[-3;+\infty)$; 5) $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$. **4.5.** 1) 9; 2) $\frac{3}{8}$; 3) 32; 4) $\frac{9}{625}$; 5) 8,28; 6) 6,75. **4.7.** 1) $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}+5}$; 3) $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}}$; 4) $m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}$. **4.8.** 1) $1+c$; 2) $x+y$; 3) $x-1$; 4) $k^{\frac{1}{2}}-l^{\frac{1}{2}}$. **4.9.** 1) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+4}$; 2) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; 3) $z^{\frac{1}{3}}-2$; 4) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$. **4.10.** 1) 1; 2) 128; 3) $4\sqrt{2}$; 4) $\pm 4\sqrt{2}$.

§ 5. **5.1.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 3) $[1;+\infty)$; 4) $(0;+\infty)$; 5) $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$.

Тест № 1. **1.** В. **2.** Б. **3.** Б. **4.** В. **5.** В. **6.** Б. **7.** А. **8.** Г.

Розділ 2

§ 6. **6.3.** 1) $\frac{5\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{5}$; 3) $\frac{5\pi}{9}$; 4) $-\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{8}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$. **6.4.** 1) 540°; 2) 135°; 3) −72°; 4) 210°; 5) −10°; 6) 330°; 7) −22,5°; 8) $\frac{540°}{\pi}$.

§ 7. **7.1.** 3) III; 4) III; 5) III; 6) IV.

§ 8. **8.1.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) 1; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) −1; 8) $\sqrt{3}$. **8.2.** 2) $T=\pi$; 4) $T=\frac{\pi}{3}$; 5) T — будь-яке дійсне число, крім 0. Найменшого додатного числа не існує. **8.3.** 1) π; 2) $\frac{\pi}{5}$; 3) 6π; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) 5π.

§ 9. **9.5.** 1) $\sin 3{,}9$, $\sin 3{,}3$, $\sin 1{,}2$; 2) $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}2$, $\cos 0{,}3$; 3) $\operatorname{tg}(-1{,}3)$, $\operatorname{tg} 0{,}7$, $\operatorname{tg} 1{,}5$; 4) $\operatorname{ctg} 2{,}9$, $\operatorname{ctg} 1{,}1$, $\operatorname{ctg} 0{,}5$.

§ 10. **10.1.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) так. **10.2.** 1) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{5}{12}$; 2) $\sin\alpha=0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}75$, $\operatorname{ctg}\alpha=-1\frac{1}{3}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$; 4) $\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{tg}\alpha=-5$. **10.3.** 1) 0; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 1; 4) $-\cos^2\alpha$; 5) 1; 6) 0; 7) $\sin\alpha$; 8) 1. **10.5.** 1) $-\frac{3}{8}$. 2) а) 2; б) 2.

§ 11. **11.1.1.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) 1; 10) $\sqrt{3}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **11.1.2.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\sin\alpha$; 4) $\cos\beta$; 5) $\operatorname{ctg} 3\alpha$; 6) $\operatorname{tg} 6\alpha$; 7) $\operatorname{tg} 7\alpha$; 8) $\operatorname{tg} 5\alpha$. **11.1.3.** 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 5) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 6) $-2-\sqrt{3}$. **11.1.5.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $1\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{1}{2}$. **11.1.8.** 1) $\sin\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha$; 4) $\frac{1}{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$. **11.1.9.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $-\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$. **11.2.1.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) -1; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) 1. **11.2.2.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11.2.3.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $-\cos^2\alpha$; 3) $-\frac{1}{2}$.

§ 12. 12.1.1. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$. **12.1.2.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **12.1.3.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) π; 6) $\frac{3\pi}{4}$; 7) $-\frac{\pi}{4}$. **12.1.4.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{3}{4}$. **12.2.1.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) коренів немає; 3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.2.2.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) коренів немає. **12.2.3.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.2.4.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{5\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.2.5.** 1) $(-1)^{n+1}\arcsin 0{,}6+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\arccos 0{,}3+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\mathrm{arctg}\,3{,}5+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\mathrm{arctg}\,2{,}5+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.2.6.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{4},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,3+\frac{\pi n}{4},\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.2.7.** 1) $(-1)^n\pi+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{15}{4}+10\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{7\pi}{4}+7\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.2.8.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm 2\pi+6\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.2.9.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{3}+3\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.2.10.** 1) $\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ 4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.2.11.** 1) $-\frac{5\pi}{12}-\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pi-2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-8\pi n$; $-\frac{4\pi}{3}-8\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{2\pi n}{3}$; $\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.2.12.** 1) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; 2) $\pm\frac{\pi}{18}$; $\pm\frac{11\pi}{18}$; $\pm\frac{13\pi}{18}$; 3) $-\frac{5\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{7\pi}{16}$;

$\frac{11\pi}{16}$; $\frac{15\pi}{16}$. **12.2.13.** 1) $-\frac{17\pi}{18}$; $-\frac{13\pi}{18}$; $-\frac{5\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{18}$; $\frac{7\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18}$; $\frac{19\pi}{18}$; 2) 0; $\pm 2\pi$; 4π; 3) 0; 2π; 4π; 4) $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{19\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{4}$. **12.2.14.** 1) при $a<-\frac{1}{2}$ або $a>\frac{1}{2}$ коренів немає; при $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ $x=(-1)^n\arcsin(2a)+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) при $a\neq 0$ коренів немає; при $a=0$ $x=2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(3a)+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{1}{3}\operatorname{arcctg}(2a)+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$; 5) при $a=0$ x — будь-яке число; при $a<-1$ або $a>1$ коренів немає; при $-1\leqslant a<0$ або $0<a\leqslant 1$ $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 6) при $a=0$ x — будь-яке число; при $a<-3$, або $-1<a<0$, або $a>0$ коренів немає; при $-3\leqslant a\leqslant -1$ $x=\pm\arccos(a+2)+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **12.3.1.** 1) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\pi+4\pi n$, $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **12.3.2.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. **12.3.3.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}5+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg}2+\pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $2\operatorname{arcctg}\frac{5}{7}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **12.3.4.** 1) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **12.3.5.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **12.3.6.** 1) $\pi+2\pi n$; $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Тест № 2. **1.** В. **2.** В. **3.** 1 — В, 2 — Г, 3 — А. **4.** В. **5.** В. **6.** Б. **7.** В. **8.** Б. **10.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Розділ 3

§ 13. **13.1.** 1) 6; 2) 7; 3) 5. **13.2.** 1) $3\Delta x$; 2) $3x_0\Delta x(x_0+\Delta x)+(\Delta x)^3$; 3) $\Delta x(2x_0+\Delta x-1)$; 4) $\Delta x+\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}$. **13.4.** а) $f'(x_1)=\sqrt{3}$; $f'(x_2)=1$; б) $f'(x_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $f'(x_2)=0$; в) $f'(x_1)=0$; $f'(x_2)=0$; г) $f'(x_1)=0$; $f'(x_2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **13.5.** 1) 6; 2) 1; 3) −1; 4) 1. **13.6.** 1) $y=2x-1$; 2) $y=0$; 3) $y=x-0{,}25$; 4) $y=-6x-9$. **13.7.** 1) 1; 2) 13; 3) 75; 4) 0,25.

§ 14. **14.1.** 1) $8x^7$; 2) $-5x^{-6}$; 3) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; 4) $20x^{19}$; 5) $-20x^{-21}$; 6) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. **14.2.** 1) 1; 2) $5x^4-1$; 3) $-\frac{1}{x^2}-3x^2$. **14.3.** 1) $6x^2+3$; 2) $2x+5$; 3) $4x^3-4x$. **14.4.** 1) $6x^2+6x^5$; 2) $-6x^2+2x+2$; 3) $-4x^3+6x^2-3$; 4) $\frac{15x^2-3x}{2\sqrt{x}}$. **14.5.** 1) $\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$; 2) $-\frac{7}{(3x-2)^2}$; 3) $-\frac{11}{(5x+1)^2}$; 4) $\frac{2x^2-2x}{x^4}$. **14.6.** 1) $f'(-2)=-2$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)=3$; 2) $f'(0)=-\frac{5}{9}$; $f'(-3)=-\frac{5}{81}$. **14.7.** 1) 1; 2) −2; 0; 3) ±0,5. **14.8.** 1) $(1;+\infty)$; 2) $(-2;0)$; 3) $(-2;0)\cup(0;2)$. **14.9.** 1) $f(u)=\sqrt{u}$; $u(x)=\sin x$; 2) $f(u)=u^5$; $u(x)=2x+x^2$; 3) $f(u)=\sqrt{u}$; $u(x)=x^3-x$; 4) $f(u)=\cos u$; $u(x)=2x-\frac{\pi}{4}$. **14.10.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-3;+\infty)$; 3) $(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$; 4) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; 5) $[2\pi k;\pi+2\pi k]$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 6) $(0;0{,}5]$; 7) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in\boldsymbol{Z}$; **14.11.** 1) $3(x^2-x)^2(2x-1)$; 2) $-10(2x-1)^{-6}$; 3) $4\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$; 4) $\frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2}}$. **14.12.** 1) $y=7x-4$; 2) $y=26x+54$; 3) $y=-0{,}5x+1{,}5$; 4) $y=7x+6$.

§ 15. **15.1.** 1) $-\sin x$; 2) $2\cos x-3$; 3) $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$. **15.2.** 1) $\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}$; 2) $\operatorname{ctg} x-\frac{1}{\sin^2 x}$; 3) $\sin x\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$. **15.3.** 1) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; 2) $\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$;

3) $\sin 2x$. **15.4.** 1) $\cos x$; 2) $-6\sin 6x$. **15.5.** 1) $\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$; 2) $-2x\sin x^2$; 3) $-\sin x\cos(\cos x)$. **15.6.** 1) $5x^4+4\cos 4x$; 3) $-2\cos 2x$. **15.7.** 1) $\frac{x-\sin 2x}{x^3\cos^2 x}$; 2) $\frac{1+\cos x}{2\sqrt{x+\sin x}}$. **15.8.** 1) 0; 2) 2. **15.9.** 1) 1; 2) 2. **15.10.** 1) Немає; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{4}$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **15.11.** 1) 0; 4; 2) 0; 3; 3) 1; 4) 2. **15.12.** 1) $(-2;2)$; 2) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **15.13.** 1) а) 1; 3; б) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$; в) $(1;3)$; 2) а) 1; 3; б) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$; в) $(1;3)$.

§ 16. **16.1.** а) Зростає на $[-6;-4]$ та $[-2;2]$; спадає на $[-4;-2]$ та $[2;6]$; б) зростає на $[-7;-4]$ та $[-2;2]$; спадає на $[-4;-2]$ та $[2;7]$. **16.2.** Зростає на $(-\infty;-5]$ та $[5;+\infty)$; спадає на $[-5;5]$. **16.3.** Зростає на $[-3;-1]$; спадає на $(-6;-3]$ та $[-1;3)$. **16.6.** 1) Зростає на $[1;+\infty)$; спадає на $(-\infty;1]$; 2) зростає на $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]$ та $\left[2\sqrt{2};+\infty\right)$; спадає на $\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$; 3) зростає на $[-1;0]$ та $[1;+\infty)$; спадає на $(-\infty;-1]$ та $[0;1]$; 4) зростає на $(-\infty;-1]$ та $[1;+\infty)$; спадає на $[-1;0)$ та $(0;1]$. **16.7.** 1) Зростає на $(-\infty;-3]$ та $[3;+\infty)$, спадає на $[-3;3]$; 2) зростає на $[-1;1]$, спадає на $(-\infty;-1]$ та $[1;+\infty)$; 3) зростає на $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$ спадає на $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 4) зростає на $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$; спадає на $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$. **16.8.** 1) $(-\infty;0]$; 2) $[1;+\infty)$; 3) $[0;9]$. **16.9.** 1) 1; 2) 2; 3) π; 4) -1. **16.12.** 1) Зростає на $(-\infty;-2]$, $[1;+\infty)$; спадає на $[-2;1]$; 2) $x=-2$ — точка максимуму; $x=1$ — точка мінімуму. **16.16.** 1) Зростає на $[3;+\infty)$; спадає на $(-\infty;3]$; $x=3$ — точка мінімуму; $f(3)=-4$; 2) зростає на $[-1;0]$ та $[1;+\infty)$; спадає на $(-\infty;-1]$ та $[0;1]$; $x=\pm1$ — точки мінімуму; $f(-1)=f(1)=-1$; $x=0$ — точка максимуму; $f(0)=0$; 3) зростає на $(-\infty;-2]$ та $[2;+\infty)$; спадає на $[-2;0)$ та $(0;2]$; $x=-2$ — точка максимуму; $f(-2)=-4$; $x=2$ — точка мінімуму; $f(2)=4$; 4) зростає на $[1;2]$; спадає на $[2;3]$; $x=2$ — точка максимуму; $f(2)=2$.

Рис. 1

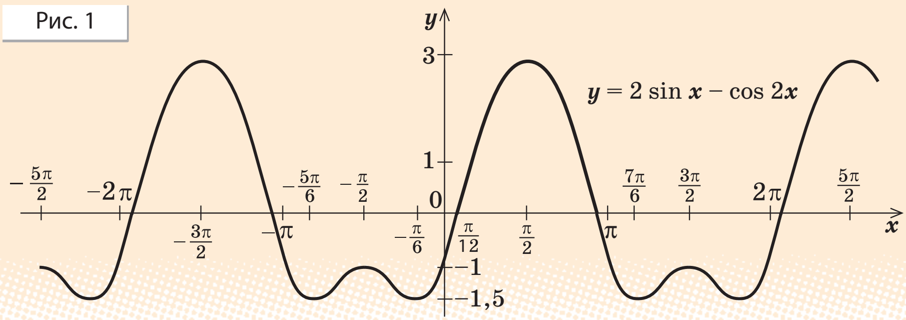
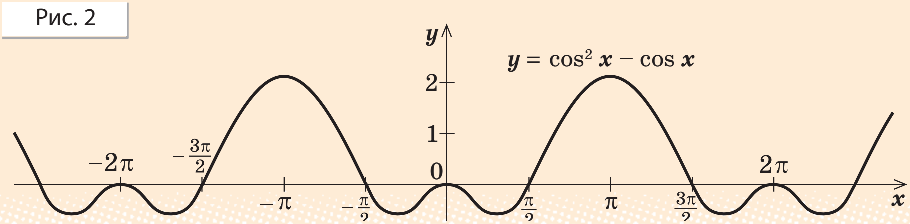


Рис. 2



§ 17. **17.4.** 1) б) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$; в) при $a < -4$, $a > 4$ — два; при $a = \pm 4$ — один; при $-4 < a < 4$ — немає; 2) б) $[-2; +\infty)$; в) при $a < -2$ — немає; при $a = -2$, $a > 0$ — один; при $-2 < a \leqslant 0$ — два; 3) б) $[-0{,}25; +\infty)$; в) при $a < -0{,}25$ коренів немає, при $a = -0{,}25$ або $a > 0$ — один, при $-0{,}25 < a < 0$ — два; 4) б) $[4; +\infty)$; в) при $a < 4$ коренів немає, при $a = 4$ — один, при $a > 4$ — два. **17.5.** 1) 2; 2) 2; 3) 1; 4) 1. **17.6.** 3) Рис. 1; 4) Рис. 2.

§ 18. **18.1.** 1) $f_{max} = 9$, $f_{min} = 5$; 2) $f_{max} = 5$, $f_{min} = -4$; 3) $f_{max} = 6$, $f_{min} = -2$; 4) $f_{max} = 1$, $f_{min} = -31$. **18.2.** 1) $f_{max} = 4$, $f_{min} = -4$; 3) $f_{max} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$, $f_{min} = 0$. **18.3.** 2) $f_{max} = 1$, $f_{min} = -3$; 3) $f_{min} = -5$, $f_{max} = -3$; 4) $f_{min} = -1$, $f_{max} = 1$. **18.4.** 1) $f_{max} = 5$, $f_{min} = -52$; 2) $f_{min} = 0$, $f_{max} = 2\sqrt{3}$; 4) $f_{min} = 0{,}5$, $f_{min} = 2{,}25$. **18.5.** 5; 5. **18.6.** 3,5; 0,5. **18.7.** 6; −2. **18.8.** Квадрат із стороною 5 см. **18.9.** $\frac{a}{6}$. **18.12.** 4.

Тест № 3. **1.** А. **2.** Г. **3.** А. **4.** В. **5.** 1 — А, 2 — В, 3 — Б. **6.** В. **7.** В. **8.** Б.

Геометрія

Розділ 1

§ 1. **1.2.** Так. **1.3.** Так. **1.4.** Одна або безліч. **1.7.** Ні. **1.8.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **1.9.** Безліч. **1.10.** 1) Ні; 2) ні. **1.11.** Ні. **1.12.** Збігаються. **1.15.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **1.16.** 1) Так; 2) так. **1.17.** 1) Ні; 2) так. **1.18.** Ні. **1.19.** 1) AA_1 і AB; AB і BB_1 і т. д.; 2) AA_1, A_1D_1, A_1B_1; A_1B_1, BB_1, B_1C_1 і т. д.; 3) площини AA_1B_1B і $A_1B_1C_1D_1$, площини $ABCD$ і AA_1B_1B і т. д.; 4) площини ABD, ABB_1, ADD_1; площини ABC, ABB_1, BCC_1 і т. д.

§ 2. **2.2.** Тупокутний. **2.4.** 6; $6\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$. **2.5.** 4,25π см2. **2.6.** 5. **2.7.** $\sqrt{7}$. **2.8.** $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{3}}$. **2.9.** $10\sqrt{3}$; 60°, 120°, 60°, 120°. **2.10.** 10 см. **2.11.** 8 см і 15 см. **2.12.** 87 см2. **2.13.** 156 см². **2.14.** 9 см і 25 см. **2.15.** $\dfrac{2ab}{a+b}$. **2.16.** 2 см, 3 см і 5 см.

§ 3. **3.1.** 1) Точка C; 2) пряма CC_1. **3.2.** 1) Точка B; 2) пряма BC. **3.8.** Ні.

§ 4. **4.1.** 1) AB і A_1D_1; AB і CC_1 і т. д. 2) AB і CC_1; AB і B_1C_1 і т. д.; 3) AS і DC; SB і DC і т. д. **4.2.** Ні. **4.3.** Ні. **4.7.** Не завжди. **4.8.** 1) Три; 2) п'ятнадцять; 3) $3C_n^4$. **4.9.** 1) AB і CD; AA_1 і BB_1 і т. д.; 2) AB і A_1B_1; AA_1 і BB_1 і т. д.; 3) AB і CD; BC і AD.

§ 5. **5.1.** 1) DCC_1D_1, $A_1B_1C_1D_1$; 2) $ABCD$, BCC_1B_1; 3) ADD_1A_1, ABB_1A_1. **5.2.** AD і BC мають спільну точку з площиною α; $DC \parallel \alpha$. **5.4.** Ні. **5.5.** Ні. **5.8.** Безліч. **5.9.** Безліч. **5.13.** 1) 12 см; 2) 4 см; 3) 4 см.

§ 6. **6.1.** 1) $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 і DCC_1D_1 і т. д.; 2) ABC і $A_1B_1C_1$. **6.2.** Ні. **6.3.** Так. **6.4.** Так. **6.5.** Ні. **6.8.** Не завжди. **6.10.** Третя площина або перетинає дві дані площини, або паралельна їм.

§ 7. **7.1.** Відрізок або трикутник. **7.2.** 1) Так; 2) так; 3) так. **7.3.** 1) Відрізок або паралелограм; 2) відрізок або паралелограм; 3) відрізок або трапеція. **7.4.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні. **7.5.** Ні. Твердження виконується, якщо площина проекцій паралельна площині ромба. **7.6.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **7.7.** Провести медіани цього трикутника. **7.8.** Провести середні лінії цього трикутника. **7.9.** Ні. **7.10.** Так. **7.11.** Наприклад, паралельність протилежних сторін зберігається; рівність сусідніх сторін не зберігається. **7.12.** Наприклад, паралельність протилежних сторін зберігається.

Тест № 1. **1.** В. **2.** Г. **3.** В. **4.** Г. **5.** А. **6.** В. **7.** А. **8.** Б. **9.** А. **10.** В. **11.** Б. **12.** В. **13.** В. **14.** Б. **15.** Г. **16.** Г. **17.** А. **18.** В.

Розділ 2

§ 8. **8.1.** 1) 90°; 2) 60°. **8.2.** 45°. **8.3.** 60°. **8.4.** Безліч. **8.5.** Одну. **8.6.** Безліч. **8.8.** 1) 90°; 2) 0°; 3) 90°. **8.9.** 1) 45°; 2) 60°. **8.10.** 60°. **8.11.** 60°, 60°, 60°. **8.12.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$. **8.13.** 90°. **8.14.** Прямі b і c мимобіжні або перетинаються, кут між ними дорівнює 90°. **8.15.** Прямі b і c мимобіжні або перетинаються, кут між ними дорівнює 30°.

§ 9. **9.1.** Ні. **9.2.** Якщо прямі перпендикулярні (перетинаються або мимобіжні). **9.3.** Пряма перпендикулярна до площини трикутника. **9.4.** 1) Ні; 2) так. **9.5.** Перпендикулярні. **9.6.** Так. **9.17.** 5 м. **9.18.** ≈7,8 м. **9.19.** 9 м.

§ 10. **10.1.** Проекція діагоналі A_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на грань $ABCD$ — AC, на грань ADD_1A_1 — A_1D, на грань AA_1B_1B — A_1B, на грань BB_1C_1C — B_1C, на грань DD_1C_1C — D_1C, на грань $A_1B_1C_1D_1$ — A_1C_1. **10.2.** $SA<SB=SD<SC$. **10.3.** Найбільший відрізок SB, найменший — SA. **10.4.** 40 см. **10.5.** 16 см. **10.6.** 9 см. **10.7.** $AD=6$ см, довжина проекції AD на площину α дорівнює 4,8 см. **10.9.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **10.10.** 6,5 м. **10.11.** $\frac{\sqrt{4a^2-2b^2}}{2}$. **10.12.** 6 см і 15 см. **10.13.** 1) 15 см і 41 см; 2) 4 см і 8 см.

§ 11. **11.1.** 1) $\angle B_1AB$; 2) $\angle AB_1A_1$; 3) $\angle D_1AB_1$; 4) $\angle AB_1B$; 5) $\angle D_1BD$; 6) $\angle D_1BB_1$; 7) $\angle B_1CB$; 8) $\angle B_1CC_1$. **11.2.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **11.3.** 1) $2d$; 2) $d\sqrt{2}$; 3) $\frac{2d}{\sqrt{3}}$. **11.5.** Коло. **11.6.** Не обов'язково. **11.7.** $a\sqrt{2}$.

§ 12. **12.1.** Прямий. **12.2.** Так. **12.3.** $\angle ACP$. **12.4.** $\angle OCB$. **12.5.** $\angle MBC$. **12.6.** $2a$. **12.7.** 45°. **12.8.** 3,36 м. **12.9.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **12.10.** $\frac{a}{2}$.

§ 13. **13.1.** Ні. **13.2.** Перетинаються (зокрема, перпендикулярні), паралельні, мимобіжні (зокрема, перпендикулярні). **13.3.** Ні. **13.4.** Ні. **13.5.** Ні. **13.6.** Безліч або одну. **13.9.** 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$.

§ 14. **14.1.** Ні. **14.2.** Куля. **14.3.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **14.4.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **14.5.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **14.6.** 1) Так; 2) ні. **14.7.** Прямокутником, що дорівнює основі. **14.8.** 10 см2. **14.9.** 1) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{3a^2}{8}$; $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

§ 15. **15.1.** 30°. **15.2.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **15.3.** a. **15.5.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **15.6.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **15.7.** 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. **15.8.** 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\left|\frac{a+b}{2}\right|$. **15.11.** 1) a; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) a; 4) a; 5) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **15.12.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) a; 3) a; 4) a; 5) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; 6) a; 7) $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Тест № 2. **1.** А. **2.** Б. **3.** Б. **4.** А. **5.** Б. **6.** Б. **7.** В. **8.** Б. **9.** Б. **10.** Г. **11.** А.

Розділ 3

§ 16. **16.12.** Правильний. **16.15.** $B(0-1;3)$. **16.20.** 1) $(x-1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+1)^2=5$; 2) $(x-1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+1)^2=8$; 3) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5$.

§ 17. **17.2.** 1) $(1;-6;-5)$, $\sqrt{62}$; 2) $(3;-1;2)$, $\sqrt{14}$; 3) $(5;-2;-2)$, $\sqrt{33}$; 4) $(4;2;-9)$, $\sqrt{101}$; 6) $(-2;-3;5)$, $\sqrt{38}$. **17.3.** $(-3;2;-2)$. **17.4.** $(3;2-4)$. **17.5.** 1) $\overrightarrow{AB_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AD_1}$; 4) $\overrightarrow{AD}$. **17.6.** $m=1$, $n=10$. **17.7.** 1) 20; 2) −8; 3) 3; 4) −10. **17.8.** 1) −12; 2) 0; 3) 0; 5; 4) −2; 1. **17.9.** $\frac{4}{13}$.

§ 18. **18.2.** Так. **18.4.** Так. **18.6.** 1) 3; 2) 9. **18.8.** 1) 3; 2) 9. **18.11.** 1) 7; 2) 7. **18.12.** 1) 3; 2) 4. **18.13.** 1) 3; 2) 3. **18.17.** 1) $(2;-7;-3)$, $(2;7;3)$, $(-2;-7;3)$; 2) $(-3;4;-1)$, $(-3;-4;1)$ $(3;4;1)$; 3) $(5;-3;-7)$, $(5;3;7)$, $(-5;-3;7)$. **18.18.** 1) $(-2;7;-3)$; 2) $(3;-4;-1)$; 3) $(-5;3;-7)$. **18.19.** $a=-1$, $b=-2$, $c=5$. **18.20.** $(2;-4;-1)$.

Тест № 3. **1.** Б. **2.** Б. **3.** Г. **4.** Г. **5.** В. **6.** Б. **7.** Г. **8.** В. **9.** В. **10.** Б. **11.** В. **12.** 1–Б, 2–Г, 3–А, 4–Д. **13.** В. **14.** Г. **15.** А.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 3. Похідна та її застосування

ГЕОМЕТРІЯ

РОЗДІЛ 1. Паралельність прямих і площин у просторі

РОЗДІЛ 2. Перпендикулярність прямих і площин у просторі

РОЗДІЛ 3. Координати, вектори, геометричні перетворення у просторі

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня / учениці	Навчальний рік	Стан підручника	
			на початку року	в кінці року
1				
2				
3				
4				
5				

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович

**«МАТЕМАТИКА
(алгебра і початки аналізу та геометрія,
рівень стандарту)»
підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *А. В. Пліско*. Художнє оформлення *В. І. Труфен*.
Комп'ютерна верстка *О. М. Правдюк*. Коректор *Н. В. Красна*.

В оформленні підручника використані зображення,
розміщені в мережі Інтернет для вільного використання

Підписано до друку 09.07.2018. Формат 70×90/16. Папір офсетний. Гарнітура Шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 23,99. Обл.-вид. арк. 23,00.
Тираж 31609 прим. Зам. № 3807-2018.

ТОВ Видавництво «Ранок»,
вул. Кібальчича, 27, к. 135, Харків, 61071.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5215 від 22.09.2016.
Адреса редакції: вул. Космічна, 21а, Харків, 61145.
E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 719-48-65, факс (057) 719-58-67.

Надруковано у друкарні ТОВ «ТРІАДА-ПАК»,
пров. Сімферопольський, 6, Харків, 61052.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5340 від 15.05.2017.
Тел. +38 (057) 703-12-21. E-mail: sale@triada.kharkov.ua