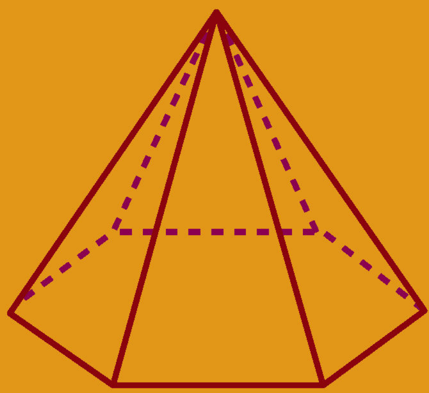
Видавництво РАНОК

Інтернет-підтримка

11



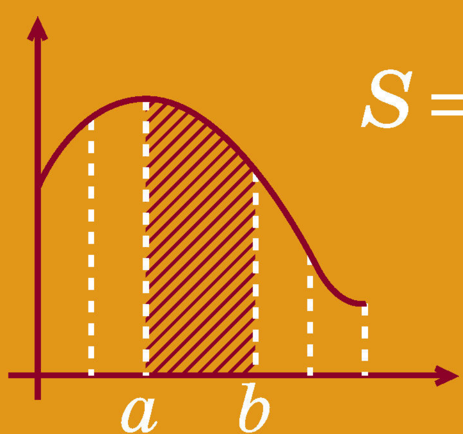
Євген Нелін
Оксана Долгова

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



УДК 512:514:37.016(075.3)
Н49

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 12.04.2019 № 472)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Нелін Є. П.

Н49 Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019. — 304 с. : іл.

ISBN 978-617-09-5231-8

УДК 512:514:37.016(075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-5231-8

Шановні одинадцятикласники й одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви продовжуєте вивчати **Математику**.

З курсу **Алгебри і початків аналізу** 10 класу ви вже знаєте методи розв'язування рівнянь і нерівностей, вмієте досліджувати функції, зокрема за допомогою похідної. В 11 класі ви познайомитеся з новими видами функцій — показниковою і логарифмічною, відповідними рівняннями й нерівностями, а також принципово новим поняттям — інтегралом, навчитеся застосовувати його до розв'язування задач, більшість з яких виникла внаслідок практичної діяльності людини.

У 9 класі ви починали знайомитися з основами комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики. Цього року ви поглибите свої знання в цій галузі, навчитеся користуватися відповідними інструментами цієї науки, усвідомите її значення в житті сучасної людини.

У курсі **Геометрії** ви докладніше дізнаєтеся про многогранники, познайомитеся з тілами обертання, навчитеся будувати їх перерізи, обчислювати об'єми і площі поверхонь, — це може знадобитися навіть тим, хто не збирається пов'язувати своє життя з математикою, — хоча б для того, щоб зробити святковий ковпачок малечі чи склеїти модель лицарського замку.

Сподіваємося, ви отримаєте задоволення, опановуючи курс **Математики**, а набутий досвід допоможе вам успішно впоратися з багатьма задачами, які постануть перед вами в дорослому житті.

Бажаємо вам успіхів!

Як користуватися підручником

Підручник містить дві частини: «Алгебра і початки аналізу» і «Геометрія». Кожна частина складається з трьох розділів, кожний розділ — із параграфів (у першій частині деякі параграфи поділяються на пункти). Параграфи і пункти, як правило, складаються з таких структурних блоків.

Довідкові таблиці наведені на початку більшості параграфів і містять основні означення, ознаки та властивості розглядуваних понять теми, систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів з розв'язування завдань*. Радимо опрацювати цей матеріал у першу чергу, а вже після цього переходити до наступного блоку.

Пояснення й обґрунтування містять докладне викладення теоретичного матеріалу, наведеного в таблицях. Таке подання навчального матеріалу (спочатку структурованого у вигляді таблиць, а потім описаного детально) дозволить кожному з вас вибирати свій власний рівень ознайомлення з обґрунтуваннями, будуючи власну освітню траєкторію.

Приклади розв'язування завдань (задач) ознайомлять вас із основними ідеями щодо розв'язування завдань, допоможуть усвідомити й засвоїти способи дій з основними математичними поняттями, набути необхідних предметних компетентностей. Для того щоб виділити орієнтовні основи діяльності з розв'язування завдань (загальні орієнтири), у прикладах власне розв'язання супроводжуються коментарями, які допоможуть вам скласти план розв'язування аналогічних завдань.

Розв'язання	Коментар
Як можна записати розв'язання задачі або завдання	Як можна міркувати під час розв'язування таких задач або завдань

За такого подання коментар не заважає сприйняттю основної ідеї розв'язування завдань певного типу і дає змогу за потреби отримати детальну консультацію щодо розв'язування, яка міститься в коментарі.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу наприкінці кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ.

Запитання для контролю допоможуть вам пригадати й осмислити вивчене, звернути увагу на головне, оцінити рівень засвоєння матеріалу параграфа.

Вправи подано за трьома рівнями складності:

- *задачі середнього рівня* мають позначку «°»;
- *задачі достатнього рівня* (дещо складніші) подано без позначки;
- *задачі високого рівня* мають позначку «*».

До більшості вправ наприкінці підручника наведено *відповіді*.

У рубриці **«Виявіть свою компетентність»** наведено задачі практичного змісту та завдання, які для отримання розв'язку вимагають аналізу та узагальнення набутих знань.

Зверніть також увагу на запропоновані в тексті параграфів супроводжуючі запитання, що спонукають до більш глибокого самостійного осмислення навчального матеріалу, та завдання, виконання яких, на нашу думку, сприятиме формуванню певних предметних та ключових компетентностей. Ці запитання та завдання мають відповідні позначення. Матеріали рубрик **«Відомості з історії»** та **«Видатні постаті в математиці»** допоможуть вам дослідити розвиток математики як науки й дізнатися про досягнення видатних учених України та світу від давнини до сьогодення. Інтернет-підтримка підручника дозволить здійснити онлайн-тестування за кожною темою на сайті interactive.ranok.com.ua, а також детальніше ознайомитися з навчальним матеріалом.

Для того щоб підручник допоміг вам у повній мірі, радимо ознайомитися із системою умовних позначень:

▸… ■ початок і закінчення обґрунтування твердження, розв'язання завдання;

? запитання до учнів;

i матеріали, пов'язані з ІКТ та інтернет-підтримкою підручника;

завдання, які вимагають самостійного опрацювання, сприяють активізації розумової діяльності;

діяльність, розрахована на роботу в команді.

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1

ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

У цьому розділі ви:

- ознайомитеся з показниковою функцією, її властивостями та графіком;
- ознайомитеся з поняттям логарифма та властивостями логарифмів;
- дізнаєтеся про логарифмічну функцію, її властивості та графік;
- навчитеся будувати графіки показникових і логарифмічних функцій та розв'язувати показникові й логарифмічні рівняння і нерівності.

§ 1. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

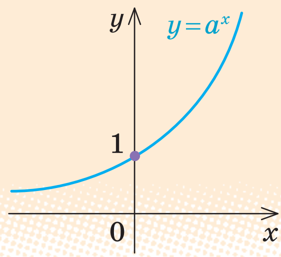
Таблиця 1

1. Поняття показникової функції та її графік

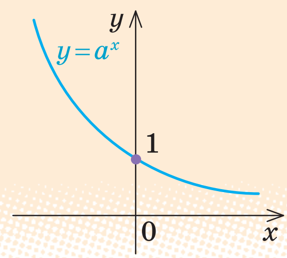
Означення. ***Показниковою функцією*** **називається функція виду** $y = a^x$**, де** $a > 0$ **і** $a \neq 1$**.**

Графік показникової функції (експонента)

$a > 1$



$0 < a < 1$



2. Властивості показникової функції

1. *Область визначення*: $x \in \boldsymbol{R}$. $\boxed{D(a^x) = \boldsymbol{R}}$

2. *Область значень*: $y > 0$. $\boxed{E(a^x) = (0; +\infty)}$

3. *Функція* ***ні парна, ні непарна.***

4. *Точки перетину з осями координат:* Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases}}$ Ox $\boxed{\textbf{немає}}$.

5. *Проміжки зростання і спадання*:
   при $a > 1$ функція $y = a^x$ **зростає на всій області визначення**;
   при $0 < a < 1$ функція $y = a^x$ **спадає на всій області визначення**.

6. *Проміжки знакосталості:* $y > 0$ *при всіх значеннях* $x \in \boldsymbol{R}$.

7. *Найбільшого і найменшого значень функція не має.*

8. *Для будь-яких дійсних значень* u *і* v ($a > 0$, $b > 0$) *виконуються рівності*:

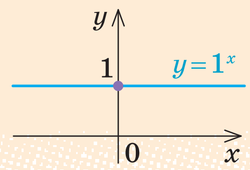
$$a^u a^v = a^{u+v} \qquad (ab)^u = a^u b^u \qquad \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u} \qquad (a^u)^v = a^{uv}$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Поняття показникової функції та її графік

О **Означення.** ***Показниковою функцією*** **називається функція виду $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$.**

Рис. 1.1



Наприклад, $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, $y = \pi^x$ — показникові функції.

Зазначимо, що *функція виду $y = a^x$ існує і при $a = 1$*. Тоді $y = a^x = 1^x$, тобто $y = 1$ при всіх значеннях $x \in \boldsymbol{R}$. Але в цьому випадку функція $y = 1^x$ *не називається показниковою*. (Графік функції $y = 1^x$ — пряма, зображена на рис. 1.1.)

Оскільки при $a > 0$ вираз a^x означений при всіх дійсних значеннях x, то *областю визначення показникової функції $y = a^x$ є всі дійсні числа*.

Спочатку побудуємо графіки деяких показникових функцій, наприклад $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, «за точками», а потім перейдемо до характеристики загальних властивостей показникової функції.

Складемо таблицю деяких значень функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	–3	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	2	4	8
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Побудуємо на координатній площині відповідні точки і сполучимо їх плавними лініями. Отримаємо графіки функцій $y = 2^x$ (рис. 1.2) і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 1.3).

Рис. 1.2

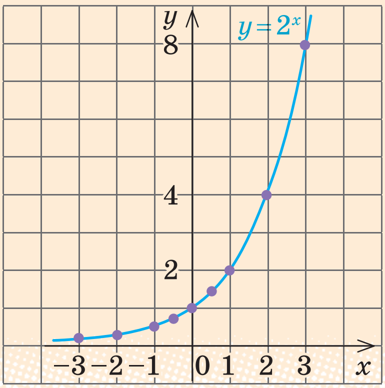
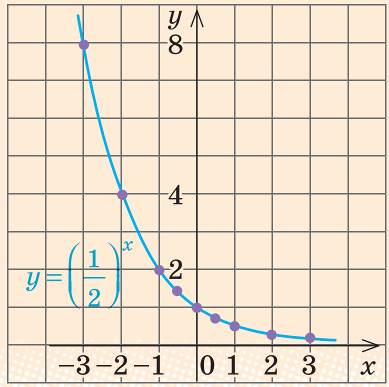


Рис. 1.3



Як бачимо з графіків, функція $y=2^x$ є *зростаючою* функцією, а функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ є *спадною* функцією, які набувають всіх значень із проміжку $(0;+\infty)$.

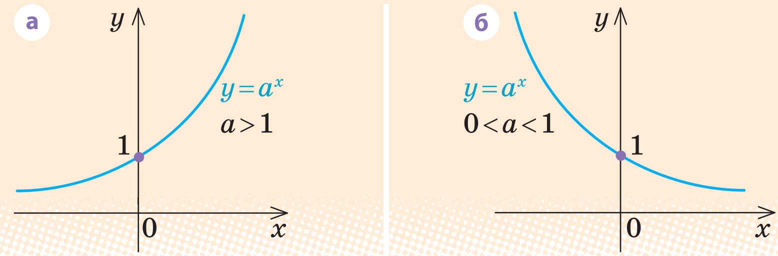
Зауважимо, що графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ можна одержати з графіка функції $y=2^x$ за допомогою геометричних перетворень. Приймемо $f(x)=2^x$, тоді $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}=2^{-x}=f(-x)$. Отже, графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симетричний графіку функції $y=2^x$ відносно осі Oy (див. підручник для 10 класу*, п. 1.3) і тому, якщо функція $y=2^x$ є зростаючою, функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ обов'язково буде спадною.

Виявляється, завжди при $a>1$ графік функції $y=a^x$ схожий на графік функції $y=2^x$, а при $0<a<1$ — на графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 1.4).

Графік показникової функції називають *експонентою*.

* Мається на увазі підручник: Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 328 с.

Рис. 1.4



2. Властивості показникової функції

Як було показано вище, ***областю визначення показникової функції*** $y = a^x$ ***(*** $a > 0$, $a \neq 1$***) є всі дійсні числа:*** $D(a^x) = \boldsymbol{R}$.

Областю значень функції $y = a^x$ ***є множина всіх додатних чисел, тобто функція*** $y = a^x$ ***набуває тільки додатних значень, причому будь-яке додатне число є значенням функції, або*** $E(a^x) = (0; +\infty)$.

Це означає, що графік показникової функції $y = a^x$ завжди розміщений вище від осі Ox і будь-яка пряма, паралельна осі Ox і розташована вище від неї, перетинає цей графік.

При $a > 1$ ***функція*** $y = a^x$ ***зростає на всій області визначення, а при*** $0 < a < 1$ ***функція*** $y = a^x$ ***спадає на всій області визначення.***

Обґрунтування області значень та проміжків зростання й спадання показникової функції проводять так. Ці властивості перевіряють послідовно для натуральних, цілих, раціональних показників, а потім уже узагальнюють для довільних дійсних показників. Ураховуючи громіздкість таких обґрунтувань, приймемо їх без доведення.

Усі інші **властивості** показникової функції легко обґрунтовуються за допомогою цих властивостей.

Функція $y = a^x$ ***ні парна, ні непарна,*** оскільки $f(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} \neq f(x) = a^x$ (за означенням $a \neq 1$). Також $f(-x) \neq -f(x)$, оскільки $f(-x) = a^{-x} > 0$ (тому що $E(a^x) = (0; +\infty)$), а $-f(x) = -a^x < 0$.

Точки перетину з осями координат:

- ***графік функції*** $y = a^x$ ***перетинає вісь*** Oy ***у точці*** $y = 1$ (дійсно, на осі Oy значення $x = 0$, тоді $y = a^0 = 1$);
- ***графік показникової функції*** $y = a^x$ ***(*** $a > 0$, $a \neq 1$***) не перетинає вісь Ox***, оскільки на осі Ox $y = 0$, а значення $y = 0$ не входить до області значень показникової функції $y = a^x$ ($y = a^x = 0$ тільки при $a = 0$, але за означенням $a > 0$).

Проміжки знакосталості: $y > 0$ ***при всіх дійсних значеннях x,*** оскільки $y = a^x > 0$ при $a > 0$.

Зазначимо ще одну властивість показникової функції. Оскільки графік функції $y = a^x$ перетинає вісь Oy в точці $y = 1$, то, враховуючи зростання функції при $a > 1$ та спадання при $0 < a < 1$, одержуємо такі *співвідношення між значеннями функції й відповідними значеннями аргумента*.

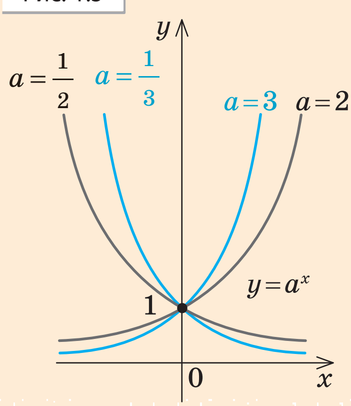
Значення функції	Значення аргумента	
	при $a > 1$	при $0 < a < 1$
$y > 1$	$x \in (0; +\infty)$	$x \in (-\infty; 0)$
$0 < y < 1$	$x \in (-\infty; 0)$	$x \in (0; +\infty)$

Функція $y = a^x$ ***не має ні найбільшого, ні найменшого значень,*** оскільки її область значень — проміжок $(0; +\infty)$, який не містить ні найменшого, ні найбільшого чисел.

Властивості показникової функції, зазначені в п. 8 табл. 1, а саме: $a^u a^v = a^{u+v}$; $(ab)^u = a^u b^u$; $\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$; $\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$; $(a^u)^v = a^{uv}$, — аналогічні до властивостей степеневої функції, які було розглянуто в курсі 10 класу.

Крім спільних властивостей показникової функції при $a > 1$ і $0 < a < 1$, зазначимо деякі особливості «поведінки» графіків показникових функцій при конкретних значеннях a. Так, на рис. 1.5 наведено графіки показникових функцій $y = a^x$ для випадків, коли основа a набуває значень 2; 3; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

Рис. 1.5



Порівнюючи ці графіки, можна зробити висновок: *чим більшою є основа* $a > 1$, *тим крутіше «піднімається» графік функції* $y = a^x$, *якщо точка рухається вправо, і тим швидше графік наближається до осі Ox, якщо точка рухається вліво.* Аналогічно, *чим меншою є основа* $0 < a < 1$, *тим крутіше «піднімається» графік функції* $y = a^x$, *якщо точка рухається вліво, і тим швидше графік наближається до осі Ox, якщо точка рухається вправо.*

Завершуючи розмову про показникову функцію, звернемо увагу на ті причини, які заважають розглядати показникові функції з від'ємною або нульовою основою.

Показникова функція $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) означена при всіх дійсних значеннях x. Певна річ, вираз a^x можна розглядати і при $a = 0$, і при $a < 0$, але в цих випадках він уже буде означений не при всіх дійсних значеннях x. Зокрема, вираз 0^x означений при всіх $x > 0$ (і тоді $0^x = 0$), а вираз $(-2)^x$ — при всіх цілих значеннях x (наприклад, $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$). Через це й не беруть за основу показникової функції $a = 0$ (отримуємо сталу функцію при $x > 0$) та $a < 0$ (одержуємо функцію, означену тільки при окремих значеннях x, а саме $x \in \boldsymbol{Z}$). Але наведені міркування щодо доцільності вибору основи показникової функції не впливають на область допустимих значень виразу a^x. Наприклад, як було зазначено вище, пара значень $a = -2$, $x = -3$ входить до його ОДЗ, і це доводиться враховувати під час розв'язування деяких завдань.

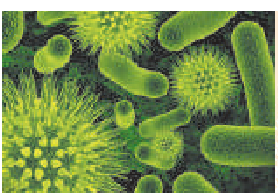
Зазначимо, що за допомогою показникової функції можна описати значну кількість процесів, які відбуваються в природі.

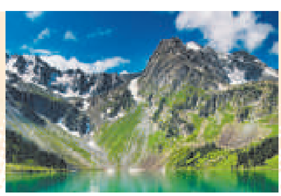
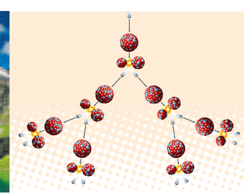
Наприклад, зростання кількості бактерій (за відсутності негативних для їх росту факторів і наявності великої кількості поживних речовин) відбувається за законом $N = 5^t$, де t — час дослідження, N — число бактерій у колонії.

Зростання кількості деревини під час росту дерева відбувається за законом $A = A_0 \cdot a^{kt}$, де A_0 — початкова кількість деревини, A — кількість деревини через час t, k і a — деякі сталі.

Тиск повітря зменшується з висотою за законом $p = p_0 \cdot a^{-kh}$, де p_0 — тиск на рівні моря, p — тиск на висоті h, a і k — деякі сталі.

Маса речовини під час радіоактивного розпаду зменшується за законом $M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, де M_0 — початкова маса речовини, M — маса в момент часу t, T — період напіврозпаду речовини (тобто час, за який розпадається половина атомів заданої речовини). Оскільки періоди напіврозпаду певних речовин добре відомі, цю залежність застосовують для визначення віку археологічних знахідок.



ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Порівняйте значення виразів:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4}$ і $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}$.

Розв'язання

1) ▶ Функція $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ є спадною, оскільки $\frac{2}{3}<1$, тому з нерівності $-3>-5$ одержуємо $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$. ■

2) ▶ Функція $y=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{x}$ є зростаючою, оскільки $\frac{\sqrt{7}}{2}>1$, тому з нерівності $4>3$ одержуємо $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4}>\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}$. ■

Коментар

Урахуємо, що функція $y=a^x$ при $a>1$ зростаюча, а при $0<a<1$ спадна. Отже, спочатку порівняємо задану основу степеня a з одиницею, а потім, порівнюючи аргументи, зробимо висновок про співвідношення між заданими значеннями функції.

Приклад 2. Порівняйте з одиницею додатну основу степеня a, якщо відомо, що виконується нерівність:

1) $a^{\sqrt{5}}>a^{\sqrt{11}}$; 2) $a^{-\frac{1}{3}}<a^{-\frac{1}{5}}$.

Розв'язання

1) ▶ Оскільки $\sqrt{5}<\sqrt{11}$ і за умовою $a^{\sqrt{5}}>a^{\sqrt{11}}$, то функція $y=a^x$ є спадною, отже, $0<a<1$. ■

2) ▶ Оскільки $-\frac{1}{3}<-\frac{1}{5}$ і за умовою $a^{-\frac{1}{3}}<a^{-\frac{1}{5}}$, то функція $y=a^x$ є зростаючою, отже, $a>1$. ■

Коментар

Задані в кожній нерівності вирази — це два значення функції $y=a^x$.
Проаналізуємо, яке значення функції відповідає більшому значенню аргумента (для цього спочатку порівняємо аргументи).

Якщо більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції, то функція $y=a^x$ є зростаючою і $a>1$; якщо відповідає менше значення функції, то функція $y=a^x$ спадна і $0<a<1$.

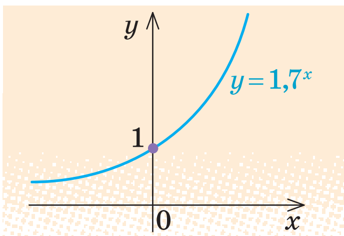
Приклад 3. Побудуйте графік функції: 1) $y=1{,}7^x$; 2) $y=0{,}3^x$.

Коментар

Якщо $a>0$, то $a^x>0$, отже, графік функції $y=a^x$ завжди розташований вище від осі Ox. Цей графік перетинає вісь Oy в точці $y=1$ $(a^0=1)$.
При $a>1$ показникова функція зростає, отже, графіком функції $y=1{,}7^x$ буде крива (експонента), точки якої при збільшенні аргумента «піднімаються» вгору.
При $0<a<1$ показникова функція спадає, отже, графіком функції $y=0{,}3^x$ буде крива, точки якої при збільшенні аргумента «опускаються» вниз. (Нагадаємо, що, «опускаючись» вниз, графік наближається до осі Ox, але ніколи її не перетинає.)
Щоб уточнити поведінку графіків заданих функцій, знайдемо координати кількох додаткових точок.

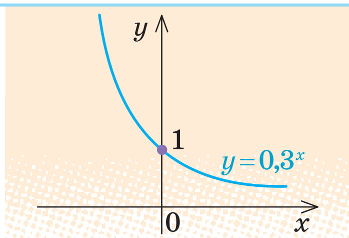
Розв’язання

1) $y=1{,}7^x$



x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{17}$	1	1,7	2,89

2) $y=0{,}3^x$



x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{3}$	1	0,3	0,09

Приклад 4*. Зобразіть схематично графік функції $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|$.

Розв’язання

Послідовно будуємо графіки:

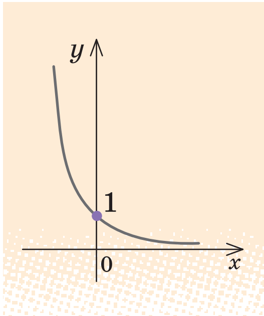
$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \to y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} \to$$

$$\to y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3 \to y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|.$$

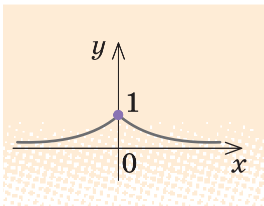
Коментар

Складемо план побудови графіка заданої функції за допомогою послідовних геометричних перетворень (див. підручник для 10 класу, п. 1.3).

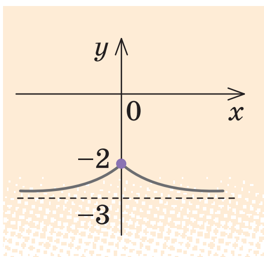
1) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$



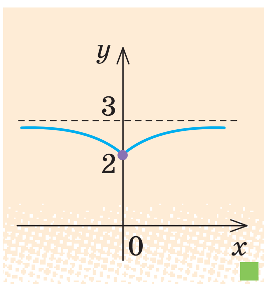
2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$



3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3$



4) $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|$



1) Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ (основа $a=\frac{1}{3}<1$, отже, показникова функція спадає).

2) Потім можна побудувати графік функції $y=g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=f(|x|)$: праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік функції $y=f(x)$ залишається без зміни, і саме ця частина графіка симетрично відображається відносно осі Oy.

3) Після цього можна побудувати графік функції

$$y=\varphi(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3=g(x)-3:$$

паралельно перенести графік функції $g(x)$ уздовж осі Oy на –3 одиниці.

4) Далі можна побудувати графік заданої функції $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|=|\varphi(x)|$: частина графіка функції $y=\varphi(x)$, розташована вище від осі Ox (і на самій осі), повинна залишитися без зміни (але таких точок графік функції $y=\varphi(x)$ не має), а частина графіка, розташована нижче від осі Ox, симетрично відображається відносно осі Ox (тобто весь графік функції $y=\varphi(x)$ потрібно відобразити симетрично відносно осі Ox).

ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте означення показникової функції.
2. Побудуйте графіки показникової функції $y=a^{x}$ при $a>1$ та при $0<a<1$ (виберіть конкретні значення a). Через яку точку проходять графіки всіх показникових функцій?

3. Користуючись графіком показникової функції $y=a^x$ (при $a>1$ та при $0<a<1$), охарактеризуйте її властивості.

4. Поясніть, як, використовуючи зростання чи спадання відповідної показникової функції, порівняти значення:
а) 7^5 і 7^9; б) $0{,}7^5$ і $0{,}7^9$.

ВПРАВИ

1.1. Укажіть, які із заданих функцій зростають, а які спадають:

1°) $y=4^x$; 4°) $y=\pi^x$; 7*) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$;

2°) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$; 5) $y=\left(\sqrt{5}-2\right)^x$; 8*) $y=2^{-x}$;

3°) $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$; 6*) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^x$; 9*) $y=-5^x$.

1.2°. Побудуйте графік функції:

1) $y=3^x$; 3) $y=0{,}2^x$; 5) $y=0{,}7^x$.

2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$; 4) $y=2{,}5^x$;

1.3. Знаючи, що $a>b>1$, зобразіть схематично в одній системі координат графіки функцій $y=a^x$ і $y=b^x$.

1.4. Знайдіть область значень функції:

1) $y=3^x+1$; 2) $y=-5^x$; 3) $y=7^x-2$.

1.5. Побудуйте графік функції:

1°) $y=-3^x$; 3*) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 5*) $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right|$.

2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x+3$; 4*) $y=5^{|x|}$;

1.6. Порівняйте значення виразів:

1°) $3^{1,5}$ і $3^{1,4}$; 5) $0{,}5^{\sqrt{3}}$ і $0{,}5^{\sqrt{7}}$; 9) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-4}$ і $\left(\frac{5}{4}\right)^5$;

2°) $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,3}$ і $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,8}$; 6) $2^{\sqrt{2}}$ і $2^{\sqrt{3}}$; 10) $0{,}2^{-10}$ і 5^{11}.

3°) $0{,}78^{-0,7}$ і $0{,}78^{-0,6}$; 7) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^8$ і $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^9$;

4) $\left(\sqrt{2}\right)^{-3}$ і $\left(\sqrt{2}\right)^{-5}$; 8) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$ і $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

1.7. Порівняйте показники степеня m і n, якщо відомо, що є правильною нерівність:

1) $3{,}2^m < 3{,}2^n$; 4) $0{,}99^m < 0{,}99^n$; 7) $\left(\sqrt{5}-1\right)^m < \left(\sqrt{5}-1\right)^n$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^m > \left(\frac{1}{9}\right)^n$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^m > \left(\sqrt{2}\right)^n$; 8) $\left(\sqrt{2}-1\right)^m < \left(\sqrt{2}-1\right)^n$.

3) $\left(\frac{7}{6}\right)^m > \left(\frac{7}{6}\right)^n$; 6) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$;

1.8. Порівняйте з одиницею додатну основу степеня a, якщо відомо, що є правильною нерівність:

1) $a^{100} > a^{99}$; 3) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{7}}$; 5) $a^{-\frac{1}{17}} < a^{-\frac{1}{8}}$;

2) $a^{0{,}2} < a^{\frac{1}{3}}$; 4) $a^{\sqrt{17}} < a^4$; 6) $a^{-0{,}25} > a^{-\sqrt{3}}$.

1.9. Порівняйте з одиницею значення виразу:

1) $0{,}01^{1{,}2}$; 3) $\left(\frac{13}{12}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $0{,}007^0$; 7) $3^{-\sqrt{2}}$;

2) $0{,}99^{100}$; 4) $\left(\frac{30}{31}\right)^{-\frac{1}{5}}$; 6) $100^{-0{,}01}$; 8) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\sqrt{3}}$.

1.10. Який висновок можна зробити про знак числа x, якщо:

1) $3^x = 0{,}6$; 2) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 10$; 3) $10^x = 4$; 4) $0{,}3^x = 0{,}1$?

1.11. Розташуйте числа в порядку їх зростання:

1) $2^{\frac{1}{3}},\ 2^{-1{,}5},\ 2^{\sqrt{2}},\ 2^{-\sqrt{2}},\ 2^{1{,}4},\ 1$;

2) $0{,}3^9,\ 1,\ 0{,}3^{-\sqrt{5}},\ 0{,}3^{\frac{1}{2}},\ 0{,}3^{-9},\ 0{,}3^{\frac{1}{3}}$.

Виявіть свою компетентність

1.12*. Унаслідок радіоактивного розпаду за x діб маса M_0 речовини зменшується до маси M. Цей процес можна описати формулою $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Звідси $\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Покажіть графічно, як зі зміною x змінюється відношення $\frac{M}{M_0}$. Використовуючи за необхідності побудований графік, дайте відповіді (точні або наближені) на запитання.

1) У скільки разів зменшиться маса радіоактивної речовини через 1,5 доби; 2,5 доби; 3 доби; 4 доби?

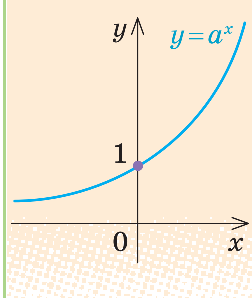
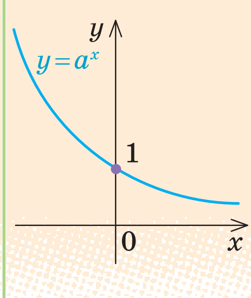
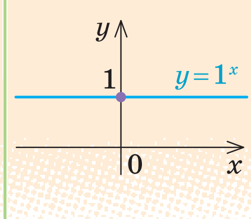
2) Скільки часу має минути, щоб початкова маса радіоактивної речовини зменшилася у 2,5 разу; у 3 разу; у 4 рази?

§ 2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

2.1. Найпростіші показникові рівняння

Таблиця 2

1. Основні формули та співвідношення

	Графік функції $y=a^x$ $(a>0)$		
$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ $(ab)^u = a^u \cdot b^u$ $\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$ $(a^u)^v = a^{uv}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a>1$  зростає	$0<a<1$  спадає	$a=1$  стала

2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових рівнянь

Орієнтир	Приклад	
При $a>0$ і $a \neq 1$ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$	$3^{2x+4} = 9.$ $3^{2x+4} = 3^2;$ $2x+4 = 2;$ $x = -1.$ *Відповідь*: –1.	$6^{x+3} = -36.$ Коренів немає, оскільки $6^t > 0$ для всіх t. *Відповідь*: коренів немає.

3. Зведення деяких показникових рівнянь до найпростіших	
Орієнтир	Приклад
1) Якщо ліва й права частини показникового рівняння містять тільки добутки, частки, корені або степені, то доцільно за допомогою основних формул спробувати записати обидві частини рівняння як степені з однією основою.	$2^{x-3}\cdot 4^x=\frac{\sqrt{2}}{16^x}$. ▸ $2^{x-3}\cdot 2^{2x}=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}}$; $2^{3x-3}=2^{\frac{1}{2}-4x}$; $3x-3=\frac{1}{2}-4x$; $x=\frac{1}{2}$. *Відповідь*: $\frac{1}{2}$. ■
2) Якщо в одній частині показникового рівняння стоїть число, а в іншій усі члени містять вираз виду a^{kx} (показники степенів відрізняються тільки вільними членами), то зручно в цій частині рівняння винести за дужки найменший степінь a.	$5^x-2\cdot 5^{x-2}=23$. ▸ $5^{x-2}\left(5^2-2\right)=23$; $5^{x-2}\cdot 23=23$; $5^{x-2}=1$; $5^{x-2}=5^0$; $x-2=0$; $x=2$. *Відповідь*: 2. ■

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

О **Означення.** ***Показниковими*** **зазвичай називаються рівняння, у яких показник степеня містить змінну, а основа цього степеня не містить змінної.**

Розглянемо найпростіше показникове рівняння

$$a^x=b, \tag{1}$$

де $a>0$ і $a\neq 1$. Оскільки при цих значеннях a функція $y=a^x$ строго монотонна (зростає при $a>1$ і спадає при $0<a<1$), то кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргумента. Це означає, що **рівняння $a^x=b$ при $b>0$ має єдиний корінь.** Щоб його знайти, достатньо подати b у вигляді $b=a^c$.

Очевидно, що $x=c$ — корінь рівняння $a^x=a^c$.

Графічно це проілюстровано на рис. 2.1.1.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $7^x = 49$, достатньо подати це рівняння у вигляді $7^x = 7^2$ і записати його єдиний корінь $x = 2$.

Якщо $b \leqslant 0$, то рівняння $a^x = b$ (при $a > 0$) коренів не має, оскільки a^x завжди більше нуля. (На графіках, наведених на рис. 2.1.2, пряма $y = b$ не перетинає графік функції $y = a^x$ при $b \leqslant 0$.) Наприклад, рівняння $7^x = -7$ не має коренів.

Узагальнюючи наведені вище міркування щодо розв'язування найпростіших показникових рівнянь, зазначимо, що **при $a > 0$ і $a \neq 1$ рівняння**

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \tag{2}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \tag{3}$$

Коротко це твердження можна записати так: **при $a > 0$ і $a \neq 1$** $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Щоб обґрунтувати цю рівносильність, достатньо помітити, що рівності (2) і (3) можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y = a^t$ є строго монотонною й кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргумента t (тобто з рівності степенів (2) обов'язково випливає рівність показників степеня (3)). Отже, усі корені рівняння (2) (які перетворюють це рівняння на правильну рівність) будуть і коренями рівняння (3), та навпаки, усі корені рівняння (3) будуть коренями рівняння (2). А це й означає, що рівняння (2) і (3) рівносильні.

У найпростіших випадках під час розв'язування показникових рівнянь треба за допомогою основних формул дій над степенями (див. табл. 2) звести (якщо це можливо) задане рівняння до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Для розв'язування більш складних показникових рівнянь найчастіше використовують

Рис. 2.1.1

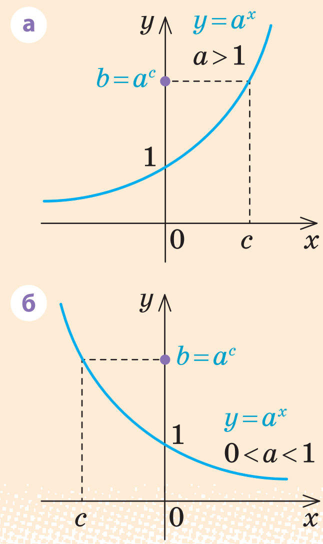
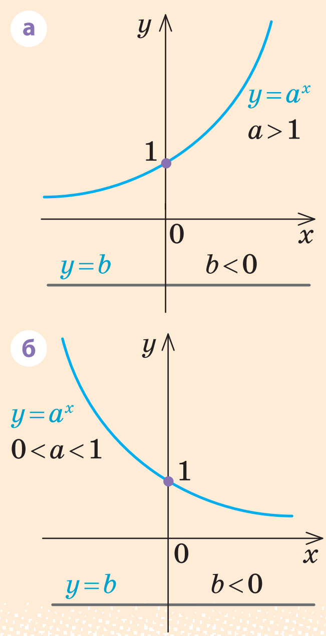


Рис. 2.1.2



заміну змінних (застосування цього методу розглянуто далі, в табл. 3) або властивості відповідних функцій.

Як відомо, всі рівносильні перетворення рівняння завжди виконуються на його області допустимих значень (ОДЗ), тобто на спільній області визначення всіх функцій, які входять до запису цього рівняння. Але в показникових рівняннях найчастіше областю допустимих значень є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ не знаходять і не записують до розв'язання рівняння (див. приклади 1–3 до п. 2.1).

Якщо ж у процесі розв'язування показникових рівнянь рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то доводиться згадувати про ОДЗ (приклад 4 до п. 2.1).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x = 64$; 2) $5^x = -1$; 3) $12^{x^2-4} = 1$.

Розв'язання

1) $4^x = 64$; $4^x = 4^3$; $x = 3$;

2) $5^x = -1$ — коренів немає, оскільки $5^x > 0$ завжди;

3) $12^{x^2-4} = 1$; $12^{x^2-4} = 12^0$; $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$.

Коментар

При $a > 0$ завжди $a^x > 0$, тому рівняння $5^x = -1$ не має коренів.

Інші рівняння зведемо до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (де $a > 0$ і $a \neq 1$) і перейдемо до рівносильного рівняння $f(x) = g(x)$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot (0,04)^{x-2}$; 2) $2^x \cdot 3^x = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{2x-3}$.

Розв'язання

1) Задане рівняння рівносильне рівнянням $\dfrac{(5^{-1})^{x-0,5}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5 \cdot (5^{-2})^{x-2}$;

$\dfrac{5^{-x+0,5}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^1 \cdot 5^{-2x+4}$; $5^{-x+0,5-\frac{1}{2}} = 5^{1+(-2x+4)}$;

$5^{-x} = 5^{5-2x}$; $-x = 5 - 2x$; $x = 5$.

Відповідь: 5.

Коментар

Ліва і права частини заданих рівнянь містять тільки добутки, частки, корені або степені. У цьому випадку для зведення рівняння до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ спробуємо використати основні формули дій над степенями, щоб записати обидві частини рівняння як степені з однією основою.

2) ▶ Задане рівняння рівносильне рівнянням

$(2\cdot 3)^x = (6^{-1})^{2x-3}$;

$6^x = 6^{-2x+3}$;

$x = -2x+3$;

$x = 1$.

Відповідь: 1. ■

У першому рівнянні треба звернути увагу на те, що $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, а $0,04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 5^{-2}$ і $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$. Отже, ліву і праву частини цього рівняння можна записати як степені числа 5.

Для перетворення другого рівняння пригадаємо, що всі формули можна використовувати як зліва направо, так і справа наліво, наприклад, для лівої частини цього рівняння скористаємося формулою $a^u b^u = (ab)^u$, тобто $2^x \cdot 3^x = (2\cdot 3)^x = 6^x$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $3^{2x+2} + 5\cdot 3^{2x-2} = 86$.

Розв'язання

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянням

$3^{2x-2}(3^4+5) = 86$; $3^{2x-2}\cdot 86 = 86$;

$3^{2x-2} = 1$; $3^{2x-2} = 3^0$; $2x-2 = 0$;

$x = 1$.

Відповідь: 1. ■

Коментар

У лівій частині рівняння всі члени містять вирази виду 3^{2x} (*показники степенів відрізняються тільки вільними членами*). У цьому випадку зручно винести за дужки в лівій частині рівняння найменший степінь числа 3, тобто 3^{2x-2}.

Приклад 4*. Розв'яжіть рівняння $(1+b^2)^{\sqrt{x}} = (1+b^2)^{4-\sqrt{x}}$.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $x \geqslant 0$, $b \in \boldsymbol{R}$.

Розглянемо два випадки.

1) При $b = 0$ одержуємо рівняння $1^{\sqrt{x}} = 1^{4-\sqrt{x}}$, корені якого — усі дійсні числа, що входять до ОДЗ, тобто $x \geqslant 0$.

2) При $b \neq 0$ $1+b^2 \neq 1$, і тоді задане рівняння рівносильне рівнянню $\sqrt{x} = 4-\sqrt{x}$.

Звідси $\sqrt{x} = 2$, тоді $x = 4$.

Відповідь: 1) при $b = 0$ $x \in [0; +\infty)$;
2) при $b \neq 0$ $x = 4$. ■

Коментар

У заданому рівнянні x — змінна, b — буквений коефіцієнт (параметр). Проаналізувавши основу степенів у цьому рівнянні, робимо висновок, що при будь-яких значеннях b основа $1+b^2 \geqslant 1$. Функція $y = a^x$ при $a > 1$ є зростаючою, а при $a = 1$ — сталою (див. графіки функції $y = a^x$, наведені у табл. 2).

Основа $1+b^2$ при $b = 0$ дорівнює 1, а при всіх інших значеннях b — більша за 1.

Розглянемо кожний із цих випадків окремо: $b = 0$ і $b \neq 0$.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, у яких випадках показникове рівняння $a^x = b$ (де $a > 0$ і $a \neq 1$) має корені. У яких випадках воно не має коренів? Наведіть приклади, проілюструйте їх графічно.
2. Якому рівнянню рівносильне показникове рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0$ і $a \neq 1$? Наведіть приклади.

3*. Чи зміниться відповідь на запитання 2, якщо для основи степенів буде задано тільки обмеження $a > 0$?

ВПРАВИ

У завданнях 2.1.1–2.1.5 розв'яжіть рівняння.

2.1.1. 1°) $4^x = 8$; 2°) $3^x = 9^{x+1}$; 3°) $5^{3x-1} = 0{,}2$; 4°) $7^{1-4x} = 1$; 5°) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \sqrt[4]{2}$; 6°) $3^{x^2-4x} = 9$; 7) $4^x = 2^{6+x-x^2}$; 8) $2^{2^x} = 2$; 9°) $2^x = 4$; 10°) $2^x = 16$; 11°) $3^x = -1$; 12°) $2^x = 32$; 13°) $3^x = 0$; 14°) $5^x = 1$; 15) $3^x - 3 = 0$; 16) $3^{2x} = 81$; 17°) $2^{3x} = 8$; 18) $3^{x^2-5x+8} = 9$; 19) $25^x = 5^{3-x}$; 20*) $2^x \cdot 3^{x+1} = 108$; 21*) $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$.

2.1.2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{16}\right)^x = \frac{3}{8}$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{10}{15}\right)^x = \frac{2}{5}$; 3) $\left(\frac{2}{8}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

2.1.3. 1) $2^{x^2} = \frac{16^2}{4^x}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} = 4^{-x} \cdot 8^{-4}$; 3) $(0{,}5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$; 4) $\frac{3^{x^2}}{27} = 9^x$; 5) $2^{x(x+2)-\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2} \cdot 4^x$.

2.1.4. 1°) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$; 2°) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$; 3°) $4^{x+1} + 4^x = 320$; 4°) $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$; 5°) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-2} = 79$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4{,}8$; 7) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 162$; 8) $5 \cdot 9^x + 9^{x-2} = 406$.

2.2. Розв'язування показникових рівнянь, які зводяться до найпростіших

Таблиця 3

Схема пошуку плану розв'язування показникових рівнянь	
Орієнтир	**Приклад**
1) **Позбуваємося числових доданків у показниках степенів** (використовуємо справа наліво основні формули дій над степенями, наведені в табл. 2).	$$4^{x+1}-3\cdot 2^x-10=0.$$ ▶ $4^x\cdot 4^1-3\cdot 2^x-10=0.$ Ураховуючи, що $4^x=2^{2x}$, зводимо степені до однієї основи 2: $4\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x-10=0.$
2) Якщо можливо, **зводимо всі степені (зі змінною в показнику) до однієї основи** *і виконуємо заміну змінної.*	Виконавши заміну $2^x=t$, отримаємо рівняння $4t^2-3t-10=0;\ t_1=2,\ t_2=-\frac{5}{4}.$ У результаті оберненої заміни маємо: $2^x=2$, тобто $x=1$, або $2^x=-\frac{5}{4}$ — коренів немає. *Відповідь*: 1. ■
3) Якщо не можна звести всі степені до однієї основи, то пробуємо звести їх **до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння** (усі члени якого мають однаковий сумарний степінь і яке розв'язується почленним діленням обох частин рівняння на найбільший степінь однієї з двох одержаних основ).	$$4^x+3\cdot 6^x-4\cdot 9^x=0.$$ ▶ Зведемо всі степені до двох основ 2 і 3: $$2^{2x}+3\cdot 2^x\cdot 3^x-4\cdot 3^{2x}=0.$$ Маємо однорідне рівняння (сумарний степінь всіх членів однаковий — $2x$). Для його розв'язування поділимо обидві частини на $3^{2x}\neq 0$: $$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\left(\frac{2}{3}\right)^x-4=0.$$ Виконаємо заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$, одержимо: $$t^2+3t-4=0;\ t_1=1,\ t_2=-4.$$ У результаті оберненої заміни маємо: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=-4$ — коренів немає, або $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$, тоді $x=0$. *Відповідь*: 0. ■

4) В інших випадках **переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо розкласти одержаний вираз на множники** або застосовуємо спеціальні прийоми розв'язування, у яких *використовуються властивості відповідних функцій.*

$$6^x - 9\cdot 2^x - 2\cdot 3^x + 18 = 0.$$

Якщо попарно згрупувати члени в лівій частині рівняння і в кожній парі винести за дужки спільний множник, то одержимо

$$2^x\left(3^x - 9\right) - 2\left(3^x - 9\right) = 0.$$

Тепер можна винести за дужки спільний множник $3^x - 9$:

$$\left(3^x - 9\right)\cdot\left(2^x - 2\right) = 0.$$

Тоді $3^x - 9 = 0$ або $2^x - 2 = 0$.

Одержуємо два рівняння:

1) $3^x = 9$, тоді $x = 2$;

2) $2^x = 2$, тоді $x = 1$.

Відповідь: 2; 1.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Для розв'язування більш складних показникових рівнянь (порівняно з тими, які було розглянуто в п. 2.1) найчастіше використовують *заміну змінних*. Щоб зорієнтуватися, чи можна ввести заміну змінних у заданому показниковому рівнянні, часто буває корисно на початку розв'язування *позбутися числових доданків у показниках степенів*, використовуючи формули $a^{u+v} = a^u a^v$ і $a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v}$.

Наприклад, у рівнянні

$$4^{x+1} - 3\cdot 2^x - 10 = 0 \quad (1)$$

замість 4^{x+1} записуємо добуток $4^x\cdot 4^1$ і одержуємо рівняння

$$4^x\cdot 4 - 3\cdot 2^x - 10 = 0, \quad (2)$$

рівносильне заданому.

Потім намагаємося *всі степені* (зі змінною в показнику) *звести до однієї основи і виконати заміну змінної*.

Наприклад, у рівнянні (2) степінь з основою 4 можна записати як степінь з основою 2: $4^x = \left(2^2\right)^x = 2^{2x}$ і одержати рівняння

$$2^{2x}\cdot 4 - 3\cdot 2^x - 10 = 0. \quad (3)$$

Нагадаємо загальний **орієнтир.**

Якщо у рівнянні, нерівності або тотожності кілька разів присутній один і той самий вираз зі змінною, то зручно цей вираз позначити однією буквою (новою змінною).

Звертаємо увагу на те, що $2^{2x}=\left(2^x\right)^2$. Отже, до рівняння (3) змінна фактично входить тільки у вигляді степеня 2^x, тому в цьому рівнянні зручно ввести заміну $2^x=t$ і одержати квадратне рівняння

$$4t^2-3t-10=0. \qquad (4)$$

Знаходимо корені цього рівняння, а потім виконуємо обернену заміну (див. розв'язання, наведене в табл. 3).

Зазначимо, що використання як основних формул дій над степенями, так і заміни змінної та оберненої заміни завжди приводить до рівняння, рівносильного заданому на його ОДЗ (у рівнянні (1) — на множині всіх дійсних чисел), через те що всі вказані перетворення ми можемо виконати і в прямому, і в зворотному напрямках. (Отже, ми завжди зможемо довести, що кожний корінь одного рівняння є коренем другого й навпаки, — аналогічно обґрунтуванню рівносильного переходу для найпростіших показникових рівнянь у п. 2.1.)

У тих випадках, коли всі степені (зі змінною в показнику) у показниковому рівнянні, яке не зводиться безпосередньо до найпростішого, не вдається звести до однієї основи, потрібно *спробувати звести всі степені до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння*.

Наприклад, розглянемо рівняння

$$4^x+3\cdot 6^x-4\cdot 9^x=0. \qquad (5)$$

Усі степені в цьому рівнянні можна подати як степені з основами 2 і 3, оскільки $4^x=\left(2^2\right)^x=2^{2x}$; $9^x=\left(3^2\right)^x=3^{2x}$; $6^x=(2\cdot 3)^x=2^x\cdot 3^x$.

Одержуємо рівняння

$$2^{2x}+3\cdot 2^x\cdot 3^x-4\cdot 3^{2x}=0. \qquad (6)$$

Усі одночлени, розташовані в лівій частині цього рівняння, мають степінь $2x$ (степінь одночлена $2^x\cdot 3^x$ теж дорівнює $x+x=2x$).

Нагадаємо означення і загальний орієнтир (розглянутий в п. 12.3 підручника для 10 класу).

Означення. Якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), мають однаковий сумарний степінь*, то рівняння називається *однорідним*.

* Якщо рівняння має вигляд $f=0$ (де f — многочлен), то йдеться тільки про степінь членів многочлена f, оскільки нуль-многочлен степеня не має.

Орієнтир. *Розв'язують однорідне рівняння почленним діленням обох його частин на найбільший степінь однієї з двох одержаних основ.*

Отже, рівняння (6) є однорідним і його можна розв'язати діленням обох частин або на 2^{2x}, або на 3^{2x}. Зазначимо, що при всіх значеннях x вирази 2^{2x} і 3^{2x} відмінні від нуля. Отже, під час ділення на ці вирази не може відбутися втрата коренів (як це могло бути, наприклад, для однорідних тригонометричних рівнянь) і в результаті ділення обох частин рівняння на будь-який із цих виразів завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому.

Наприклад, якщо розділити обидві частини рівняння (6) на $3^{2x} \neq 0$, одержуємо $\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{3 \cdot 2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} - \frac{4 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} = 0$, або після скорочення $\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + 3 \cdot \frac{2^x}{3^x} - 4 = 0$. В останньому рівнянні всі члени можна подати як степені з однією основою $\frac{2}{3}$, тобто: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0$, і виконати заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Подальше розв'язання одержаного рівняння повністю аналогічне розв'язанню рівняння (2).

Повне розв'язання цього рівняння наведено в табл. 3.

Складаючи план розв'язування окремих показникових рівнянь, слід пригадати про доцільність *перенесення всіх членів рівняння в один бік і подальшого розкладання одержаного виразу на множники*, наприклад із використанням групування членів, як це зроблено в табл. 3 для рівняння $6^x - 9 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x + 18 = 0$.

Для розв'язування деяких показникових рівнянь можна використовувати *властивості відповідних функцій*.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\frac{6}{3^x} - \frac{4}{3^x + 1} = 1$.

Розв'язання

Застосувавши заміну змінної $3^x = t$, $t > 0$, одержуємо

$$\frac{6}{t} - \frac{4}{t+1} = 1.$$

Тоді $6(t+1) - 4t = t(t+1)$;
$t^2 - t - 6 = 0$. Звідси $t_1 = -2$, $t_2 = 3$.

Коментар

У задане рівняння змінна входить тільки у вигляді степеня з однією основою: 3^x, тому зручно застосувати заміну $3^x = t$ і одержати дробове рівняння. Знаходимо його корені, а потім виконуємо обернену заміну.
Як уже зазначалося, заміна і обернена заміна змінної — це рівносильні перетворення

В результаті оберненої заміни маємо:

$3^x = -2$ (коренів немає) або $3^x = 3$, тоді $x = 1$.

Відповідь: 1. ■

заданого рівняння, але під час розв'язування одержаного дробового рівняння треба подбати про те, щоб не отримати сторонніх коренів (для цього, наприклад, достатньо урахувати, що $t = 3^x > 0$, і тоді ОДЗ одержаного рівняння $t \neq -1$ і $t \neq 0$ буде врахована автоматично).

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$.

Розв'язання

▸ $2^x \cdot 2^3 - 3^x - 3^x \cdot 3^1 + 2^x = 0;$

$9 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x = 0 \,\Big|\, : 3^x \neq 0;$

$9 \cdot \dfrac{2^x}{3^x} - \dfrac{4 \cdot 3^x}{3^x} = 0;$

$9\left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 4 = 0;$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{4}{9};$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2;$

$x = 2.$

Відповідь: 2. ■

Коментар

1) Позбуваємося числових доданків у показниках степенів, переносимо всі члени рівняння в один бік і зводимо подібні члени.
2) Звертаємо увагу на те, що степені всіх членів одержаного рівняння $9 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x = 0$ (з двома основами 2 і 3) однакові (дорівнюють x), отже, це рівняння однорідне, його можна розв'язати діленням обох частин на степінь з основою 2 або 3 і найбільшим показником — або на 2^x, або на 3^x.

Ураховуючи, що $3^x \neq 0$ при всіх значеннях x, у результаті ділення на 3^x отримуємо рівняння, рівносильне попередньому (а відповідно, і заданому).

Під час розв'язування систем рівнянь, що містять показникові функції, найчастіше використовують традиційні методи розв'язування систем рівнянь: *метод підстановки* і *метод заміни змінних*.

Приклад 3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 1, \\ 4^x + 4^y = 5. \end{cases}$

Розв'язання

▸ Із першого рівняння системи маємо:

$$y = 1 - x.$$

Тоді з другого рівняння одержуємо

$4^x + 4^{1-x} = 5$, тобто $4^x + \dfrac{4^1}{4^x} = 5$.

Коментар

Якщо з першого рівняння системи y виразити через x і підставити в друге рівняння, то одержимо показникове рівняння, яке ми вже вміємо розв'язувати

Виконаємо заміну $4^x = t$, $t > 0$, одержуємо рівняння $t + \frac{4}{t} = 5$, з якого отримуємо рівняння $t^2 - 5t + 4 = 0$, що має корені $t_1 = 1$ і $t_2 = 4$. Виконуємо обернену заміну. Одержуємо: $4^x = 1$, тоді $x_1 = 0$, або $4^x = 4$, звідки $x_2 = 1$. Знаходимо відповідні значення змінної y:

$$y = 1 - x.$$

Якщо $x_1 = 0$, то $y_1 = 1$;

якщо $x_2 = 1$, то $y_2 = 0$.

Відповідь: $(0;1)$, $(1;0)$. ■

(аналогічно до того, як це було зроблено в прикладі 2).

Виконуючи заміну змінної, ураховуємо, що $t = 4^x \neq 0$. Тоді в одержаному дробовому рівнянні $t + \frac{4}{t} = 5$ знаменник $t \neq 0$. Отже, це дробове рівняння рівносильне рівнянню $t^2 - 5t + 4 = 0$.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть на прикладах, як можна скласти план розв'язування показникових рівнянь, які не вдається безпосередньо звести до найпростіших.
2. Яку заміну змінних можна виконати під час розв'язування рівняння $4^{2x} + 2 \cdot 4^x - 3 = 0$? Яке рівняння одержимо після виконання заміни?
3. Поясніть, чому рівняння $5^x = 7^x$ і $2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 5^x - 4 \cdot 5^{2x} = 0$ є однорідними. Як можна їх розв'язати?

ВПРАВИ

У завданнях 2.2.1–2.2.4 розв'яжіть рівняння.

2.2.1° 1) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$;

2) $6^{2x} - 5 \cdot 6^x - 6 = 0$;

3) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x = 3$;

4) $\frac{8}{5^x - 3} - \frac{6}{5^x + 1} = 3$;

5) $\frac{6}{4^x - 2} - \frac{5}{4^x + 1} = 2$.

2.2.2. 1) $49^x - 6\cdot 7^x - 7 = 0$;

2) $64^x - 7\cdot 8^x - 8 = 0$;

3) $2^x + 2^{2-x} = 5$;

4) $3^x + 3^{2-x} = 10$;

5) $2^{x+1} + 4^x = 80$;

6) $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2$;

7) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$;

8*) $10^{\sin^2 x} + 10^{\cos^2 x} = 11$.

2.2.3. 1°) $7^x = 9^x$;

2°) $5\cdot 3^x - 3\cdot 5^x = 0$;

3) $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$;

4) $4^{x+1} + 4\cdot 3^x = 3^{x+2} - 4^x$;

5) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2\cdot 5^x + 5^{x+1}$;

6) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

2.2.4. 1) $2^{2x} + 2^x\cdot 5^x - 2\cdot 5^{2x} = 0$;

2) $3^{2x} + 2\cdot 3^x\cdot 7^x - 3\cdot 7^{2x} = 0$;

3) $4^x = 3\cdot 49^x - 2\cdot 14^x$;

4) $4\cdot 9^x - 7\cdot 12^x + 3\cdot 16^x = 0$;

5) $5\cdot 4^x - 7\cdot 10^x + 2\cdot 25^x = 0$.

2.2.5. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $2^x = 3 - x$;

2) $3^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = x + 3$;

4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = x + 1$.

2.2.6*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 2.2.5, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

2.2.7. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 5^{x+2y-1} = 1; \end{cases}$

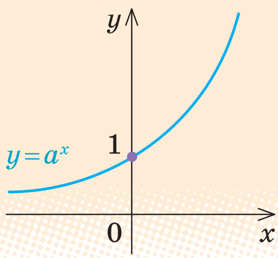
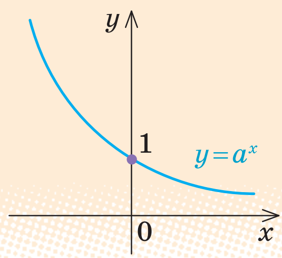
2) $\begin{cases} 3^{2y-x} = \dfrac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2^x + 2^y = 6; \end{cases}$

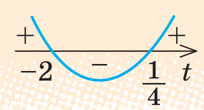
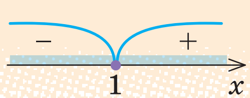
4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3^x - 3^y = 24. \end{cases}$

2.3. Розв’язування показникових нерівностей

Таблиця 4

1. Графік показникової функції $y=a^x$ ($a>0$ і $a\neq 1$)	
$a>1$	$0<a<1$
 	
2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових нерівностей	
$a>1$	$0<a<1$
$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$ *знак нерівності зберігається*	$a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$ *знак нерівності змінюється на протилежний*
Приклади	
$2^{x-3}>4.$ ▸ $2^{x-3}>2^2.$ Функція $y=2^t$ є зростаючою, отже: $x-3>2;\ x>5.$ *Відповідь*: $(5;+\infty)$. ■	$0{,}7^{x-3}>0{,}49.$ ▸ $0{,}7^{x-3}>0{,}7^2.$ Функція $y=0{,}7^t$ є спадною, отже: $x-3<2;\ x<5.$ *Відповідь*: $(-\infty;5)$. ■

3. Розв’язування показникових нерівностей, які зводяться до найпростіших

Орієнтир	Приклад
I. За допомогою рівносильних перетворень (за схемою розв’язування показникових рівнянь, табл. 3) **задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду** (квадратної, дробової тощо). Після розв’язування одержаної нерівності приходимо до найпростіших показникових нерівностей.  	$4^{x+1}+7\cdot 2^x-2>0$. ▸ $4^x\cdot 4+7\cdot 2^x-2>0$; $2^{2x}\cdot 4+7\cdot 2^x-2>0$. Виконаємо заміну $2^x=t$, одержимо нерівність $4t^2+7t-2>0$, множина її розв’язків $t<-2$ або $t>\frac{1}{4}$ (див. рисунок). У результаті оберненої заміни отримаємо $2^x<-2$ (розв’язків немає) або $2^x>\frac{1}{4}$, звідки $2^x>2^{-2}$, тобто $x>-2$. *Відповідь*: $(-2;+\infty)$. ■
II. Застосовуємо загальний метод інтервалів — зводимо задану нерівність до виду $f(x)\gtrless 0$ і використовуємо таку схему. **1. Знайти ОДЗ.** **2. Знайти нулі функції $f(x)$.** **3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які ОДЗ розбивається нулями.** **4. Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.**  	$3^x+4^x>7$. ▸ Розв’яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності $3^x+4^x-7>0$. Позначимо $f(x)=3^x+4^x-7$. 1) ОДЗ: $x\in \boldsymbol{R}$. 2) Нулі функції: $f(x)=0$; $3^x+4^x-7=0$. Оскільки функція $f(x)=3^x+4^x-7$ є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то значення 0 вона набуває тільки в одній точці області визначення: $x=1$ $\left(f(1)=3^1+4^1-7=0\right)$. 3) Позначаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок), і записуємо множину розв’язків нерівності $f(x)>0$. *Відповідь*: $(1;+\infty)$. ■

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Розв’язування найпростіших показникових нерівностей виду $a^x > b$ (або $a^x < b$), де $a > 0$ і $a \neq 1$, ґрунтується на властивостях функції $y = a^x$, яка зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$. Наприклад, щоб знайти множину розв’язків нерівності $a^x > b$ при $b > 0$, достатньо подати b у вигляді $b = a^c$. Одержуємо нерівність

$$a^x > a^c. \qquad (1)$$

При $a > 1$ функція $y = a^x$ зростає, отже, більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента, тому з нерівності (1) одержуємо $x > c$ (знак цієї нерівності збігається зі знаком нерівності (1)).

При $0 < a < 1$ функція $y = a^x$ спадає, отже, більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента, тому з нерівності (1) одержуємо $x < c$ (знак цієї нерівності протилежний до знака нерівності (1)).

Графічно це проілюстровано на рис. 2.3.1.

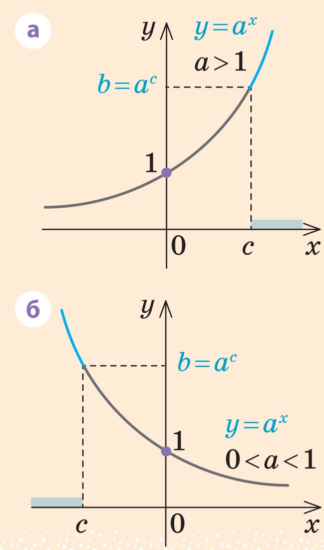
Наприклад, щоб розв’язати нерівність $5^x > 25$, достатньо подати її у вигляді $5^x > 5^2$, урахувати, що $5 > 1$ (функція $y = 5^x$ зростаюча, отже, при переході від порівняння функцій до порівняння аргументів знак нерівності не змінюється), і записати множину розв’язків: $x > 2$.

Зауважимо, що множину розв’язків заданої нерівності можна записувати у вигляді нерівності $x > 2$ або у вигляді проміжку $(2; +\infty)$.

Аналогічно, щоб розв’язати нерівність $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$, достатньо подати цю нерівність у вигляді $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, урахувати, що $\frac{1}{4} < 1$ (функція $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ спадна, отже, при переході від порівняння функцій до порівняння аргументів знак нерівності змінюється на протилежний), і записати множину розв’язків: $x < 2$.

Ураховуючи, що при будь-яких додатних значеннях a значення a^x завжди більше нуля, одержуємо, що при $b \leqslant 0$ **нерівність $a^x < b$ розв’язків не має, а нерівність $a^x > b$ виконується при всіх дійсних значеннях x.**

Рис. 2.3.1



Наприклад, нерівність $7^x < -7$ не має розв'язків, а множиною розв'язків нерівності $7^x > -7$ є всі дійсні числа.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язування найпростіших показникових нерівностей, зазначимо, що **при $a > 1$ нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ — нерівності $f(x) < g(x)$.**

Коротко це твердження можна записати так:

- якщо $a > 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (*знак нерівності зберігається*);
- якщо $0 < a < 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (*знак нерівності змінюється на протилежний*).

Щоб обґрунтувати рівносильність відповідних нерівностей, достатньо зазначити, що при $a > 1$ нерівності

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \tag{2}$$

$$f(x) > g(x) \tag{3}$$

можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y = a^t$ при $a > 1$ є зростаючою і більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента (і навпаки: більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції). Отже, усі розв'язки нерівності (2) (які перетворюють її на правильну числову нерівність) будуть і розв'язками нерівності (3), та навпаки: усі розв'язки нерівності (3) будуть розв'язками нерівності (2). А це означає, що нерівності (2) і (3) рівносильні. ■

Аналогічно обґрунтовується рівносильність нерівностей $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ і $f(x) < g(x)$ при $0 < a < 1$.

У найпростіших випадках під час розв'язування показникових нерівностей, як і під час розв'язування показникових рівнянь, треба за допомогою основних формул дій над степенями звести (якщо це можливо) задану нерівність до виду $a^{f(x)} \gtrless a^{g(x)}$.

Для розв'язування більш складних показникових нерівностей найчастіше використовують *заміну змінних* або *властивості відповідних функцій*.

Аналогічно до розв'язування показникових рівнянь усі рівносильні перетворення нерівності завжди виконуються на її області допустимих значень (ОДЗ), тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цієї нерівності. Для показникових нерівностей досить часто областю допустимих значень є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ не знаходять і не записують до розв'язання нерівності (див. приклад 1). Якщо ж у процесі розв'язування показникової нерівності рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то доводиться враховувати ОДЗ (див. приклад 2).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $0{,}6^{x^2-7x+6} \geqslant 1$.

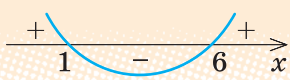
Розв'язання

$0{,}6^{x^2-7x+6} \geqslant 0{,}6^0$.

Оскільки функція $y = 0{,}6^t$ є спадною, то $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$.

Звідси $1 \leqslant x \leqslant 6$ (див. рисунок 2.3.2).

Рис. 2.3.2



Відповідь: $[1; 6]$.

Коментар

Запишемо праву частину нерівності як степінь числа $0{,}6$, тобто $1 = 0{,}6^0$.
Оскільки $0{,}6 < 1$, то при переході від порівняння степенів до порівняння показників степеня знак нерівності змінюється на протилежний (одержуємо нерівність, рівносильну заданій).
Для розв'язування одержаної квадратної нерівності використаємо графічну ілюстрацію.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

Розв'язання

ОДЗ: $x \geqslant 0$.

$$3^{\sqrt{x}} - \frac{3^2}{3^{\sqrt{x}}} \leqslant 8.$$

Виконуємо заміну змінної $3^{\sqrt{x}} = t$ $(t > 0)$, в результаті отримуємо нерівність $t - \frac{9}{t} \leqslant 8$, яка рівносильна нерівності

$$\frac{t^2 - 8t - 9}{t} \leqslant 0.$$

Коментар

Оскільки рівносильні перетворення нерівностей виконуються на ОДЗ початкової нерівності, то врахуємо цю ОДЗ. Використовуючи формулу $a^{u-v} = \frac{a^u}{a^v}$, позбуваємося числового доданка в показнику степеня й одержуємо степені

Оскільки $t>0$, одержуємо $t^2-8t-9\leqslant 0$. Звідси $-1\leqslant t\leqslant 9$. Ураховуючи, що $t>0$, маємо $0<t\leqslant 9$.

Виконуючи обернену заміну, одержуємо $0<3^{\sqrt{x}}\leqslant 9$. Тоді

$$3^{\sqrt{x}}\leqslant 3^2.$$

Функція $y=3^t$ зростаюча, отже, $\sqrt{x}\leqslant 2$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо

$$0\leqslant x\leqslant 4.$$

Відповідь: $[0;4]$. ■

з однією основою 3, що дозволяє виконати заміну змінної $3^{\sqrt{x}}=t$, де $t>0$.

В одержаній нерівності знаменник є додатним, тому цю дробову нерівність можна звести до рівносильної їй квадратної. Після виконання оберненої заміни треба врахувати не тільки зростання функції $y=3^t$, а й ОДЗ початкової нерівності.

Приклад 3*. Розв'яжіть нерівність $(3^x-9)\sqrt{x^2-2x-8}\leqslant 0$.

Коментар

Задану нестрогу нерівність зручно розв'язувати методом інтервалів. Записуючи відповідь, треба враховувати, що *у випадку, коли ми розв'язуємо нестрогу нерівність* $f(x)\leqslant 0$, *усі нулі функції* $f(x)$ *мають увійти до відповіді.*

Розв'язання

▶ Позначимо $f(x)=(3^x-9)\sqrt{x^2-2x-8}$.

1) ОДЗ: $x^2-2x-8\geqslant 0$. Тоді $x\leqslant -2$ або $x\geqslant 4$ (рис. 2.3.3).

2) Нулі функції: $f(x)=0$;
$(3^x-9)\sqrt{x^2-2x-8}=0$,
тоді $3^x-9=0$ або $\sqrt{x^2-2x-8}=0$.

Із першого рівняння: $x=2$ — не входить до ОДЗ; із другого: $x_1=-2$, $x_2=4$.

3) Позначаємо нулі функції $f(x)$ на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які нулями розбивається ОДЗ (рис. 2.3.4), і записуємо множину розв'язків нерівності $f(x)\leqslant 0$: $x\in(-\infty;-2]$ або $x=4$.

Відповідь: $x\in(-\infty;-2]\cup\{4\}$. ■

Рис. 2.3.3

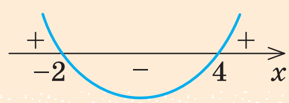
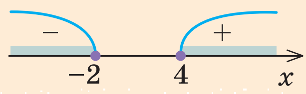


Рис. 2.3.4



ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, у яких випадках показникові нерівності $a^x > b$ і $a^x < b$ (де $a > 0$ і $a \neq 1$) мають розв'язки. У яких випадках дані нерівності не мають розв'язків? Наведіть приклади. Проілюструйте їх графічно.
2. Якій нерівності рівносильна показникова нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$; при $0 < a < 1$? Наведіть приклади.

ВПРАВИ

У завданнях 2.3.1–2.3.4 розв'яжіть нерівність.

2.3.1. 1°) $2^x > 1$; 5°) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 9$; 9*) $0{,}3^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}} \leqslant 1$;

2°) $2^x > \frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \leqslant 4$; 10*) $1{,}3^{\frac{x^2-9x+8}{x-4}} \geqslant 1$.

3) $3^x > 0$; 7°) $5^x \geqslant 25\sqrt{5}$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$; 8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} < 16$;

2.3.2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > \frac{5}{2}$; 4) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leqslant 0$;

2°) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$; 5) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$;

3) $3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 \geqslant 0$; 6) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 \leqslant 0$.

2.3.3. 1) $3^x > 5^x$; 3*) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \geqslant 0$;

2) $7^{x-1} \leqslant 2^{x-1}$; 4*) $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} \leqslant 8 \cdot 15^x$.

2.3.4*. 1) $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$; 3) $\sqrt{6 \cdot 3^x - 2} > 3^x + 1$;

2) $(3^{x-2} - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$; 4) $\sqrt{2 \cdot 5^{x+1} - 1} > 5^x + 2$.

§ 3. ЛОГАРИФМ ЧИСЛА. ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

Таблиця 5

1. Логарифм числа	
Означення	Приклади
Логарифмом додатного числа b за основою a **(** $a>0,\ a\neq 1$**) називається показник степеня, до якого треба піднести** a**, щоб одержати** b**.** Позначення: $\log_a b$.	1) $\log_4 16=2$, оскільки $4^2=16$; 2) $\log_7 \sqrt{7}=\frac{1}{2}$, оскільки $7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$.
***Десятковий логарифм — це логарифм за основою* 10**. Позначення: $\log_{10} b=\lg b$.	3) $\lg 1000=3$, оскільки $10^3=1000$.
***Натуральний логарифм — це логарифм за основою* e** (e — ірраціональне число, наближене значення якого $e\approx 2{,}7$). Позначення: $\log_e b=\ln b$.	4) $\ln\frac{1}{e^2}=-2$, оскільки $e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.
2. Основна логарифмічна тотожність	
$\boxed{a^{\log_a b}=b}$, де $a>0,\ a\neq 1,\ b>0$	1) $3^{\log_3 5}=5$; 2) $10^{\lg 2}=2$.
3. Властивості логарифмів і формули логарифмування ($a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ y>0$)	
1) $\log_a 1=0$	*Логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю.*
2) $\log_a a=1$	*Логарифм числа, яке збігається з основою, дорівнює одиниці.*
3) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$	*Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників.*
4) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$	*Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого й дільника.*
5) $\log_a x^n=n\log_a x$	*Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня.*

4. Формула переходу до логарифмів з іншою основою

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},\ \text{де}\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1,\ x>0$$

Наслідок: $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Логарифм числа

Якщо розглянути рівність $2^3 = 8$, то, знаючи будь-які два числа з цієї рівності, можна знайти третє.

Задана рівність	Що відомо	Що знаходимо	Запис	Назва
$2^3 = 8$	числа 2 і 3	число 8	$8 = 2^3$	степінь
	числа 8 і 3	число 2	$2 = \sqrt[3]{8}$	корінь третього степеня
	числа 8 і 2	число 3	$3 = \log_2 8$	логарифм

Перші дві операції, наведені в таблиці (піднесення до степеня й добування кореня n-го степеня), нам уже відомі, а з третьою — *логарифмуванням*, тобто знаходженням логарифма заданого числа, — ми ознайомимося в цьому параграфі.

У загальному вигляді операція логарифмування дозволяє з рівності $a^x = b$ (де $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$) знайти показник степеня x. Результат виконання цієї операції позначається $\log_a b$.

О Означення. ***Логарифмом додатного числа b за основою a ($a>0$, $a\neq 1$) називається показник степеня, до якого треба піднести a, щоб одержати b.***

Наприклад, $\log_2 8 = 3$, оскільки $2^3 = 8$;

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2,\ \text{оскільки}\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$$

$$\log_4\left(\frac{1}{16}\right)=-2, \text{ оскільки } 4^{-2}=\frac{1}{16}.$$

Зазначимо, що для додатних чисел b і a $(a\neq 1)$ рівняння $a^x=b$ завжди має єдиний розв'язок, оскільки функція $y=a^x$ набуває всіх значень з проміжку $(0;+\infty)$ і при $a>1$ є зростаючою, а при $0<a<1$ — спадною (рис. 3.1).

Отже, кожного свого значення $b>0$ функція $y=a^x$ набуває тільки при одному значенні x. Тому *для будь-яких додатних чисел b і a $(a\neq 1)$ рівняння $a^x=b$ має єдиний корінь $x=\log_a b$.*

При $b\leqslant 0$ рівняння $a^x=b$ **$(a>0,\ a\neq 1)$** не має коренів, отже, *при $b\leqslant 0$ значення виразу $\log_a b$ не існує.*

Наприклад, не існують $\log_3(-9)$, $\log_{\frac{1}{2}}(-7)$, $\log_2 0$.

Зазначимо, що існують логарифми, які мають власні назви.

Логарифм за основою 10 називають десятковим логарифмом і позначають lg.

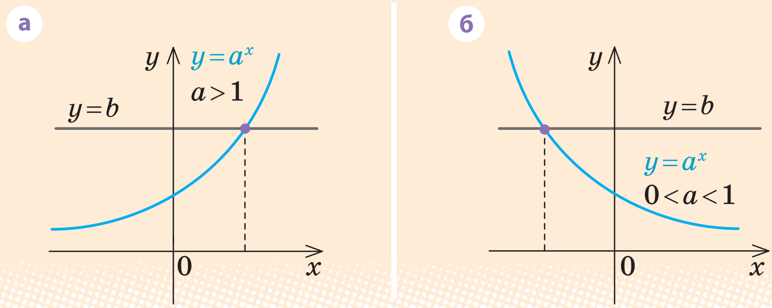
Наприклад, $\log_{10}7=\lg 7$, $\lg 100=\log_{10}100=2$.

У недалекому минулому десятковим логарифмам віддавали перевагу й складали дуже детальні таблиці десяткових логарифмів, які використовувалися в різних обчисленнях. В епоху загальної комп'ютеризації десяткові логарифми втратили свою провідну роль. У сучасній науці й техніці широко використовуються логарифми, основою яких є особливе число e (так само відоме, як і число π). Число e, як і число π, — ірраціональне, $e=2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots$.

Логарифм за основою e називають натуральним логарифмом і позначають ln.

Наприклад, $\log_e 7=\ln 7$, $\ln\frac{1}{e}=\log_e\frac{1}{e}=-1$.

Рис. 3.1



2. Основна логарифмічна тотожність

За означенням логарифма, якщо $\log_a b = x$, то $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$). Якщо в останню рівність підставити замість x його значення, одержимо рівність, яка називається *основною логарифмічною тотожністю*:

$$a^{\log_a b} = b, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$$

Наприклад, $5^{\log_5 9} = 9$, $10^{\lg 7} = 7$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = 2$.

3. Властивості логарифмів і формули логарифмування

У всіх наведених нижче формулах $a > 0$ і $a \neq 1$.

1) З означення логарифма одержуємо, що

$$\log_a 1 = 0,$$

оскільки $a^0 = 1$ (при $a > 0$, $a \neq 1$).

Отже, *логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю.*

2) Оскільки $a^1 = a$, то

$$\log_a a = 1.$$

Отже, *логарифм числа, яке збігається з основою, дорівнює одиниці.*

3) Щоб одержати формулу логарифма добутку xy ($x > 0$, $y > 0$), позначимо $\log_a x = u$, $\log_a y = v$. Тоді за означенням логарифма

$$x = a^u \text{ і } y = a^v. \qquad (1)$$

Перемноживши почленно дві останні рівності, отримаємо $xy = a^{u+v}$. За означенням логарифма з урахуванням уведених позначень з останньої рівності одержуємо $\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$. Отже,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y. \qquad (2)$$

Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників.

4) Аналогічно, щоб одержати формулу логарифма частки $\frac{x}{y}$ ($x > 0$, $y > 0$), достатньо поділити почленно рівності (1). Тоді $\frac{x}{y} = a^{u-v}$. За означенням логарифма з урахуванням уведених позначень з останньої рівності одержуємо $\log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y$. Отже,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y. \qquad (3)$$

Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника.

5) Щоб одержати формулу логарифма степеня x^n (де $x>0$), позначимо $\log_a x = u$. За означенням логарифма $x = a^u$, тоді $x^n = a^{nu}$. За означенням логарифма з урахуванням позначення для u маємо $\log_a x^n = nu = n\log_a x$. Отже,

$$\log_a x^n = n\log_a x. \qquad (4)$$

Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня.

Ураховуючи, що при $x>0$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, за формулою (4) маємо $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$. Отже, при $x>0$ можна користуватися формулою

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x.$$

Цю формулу можна не запам'ятовувати, а кожного разу записувати корінь із додатного числа як відповідний степінь.

Інколи доводиться знаходити логарифм добутку xy і в тому випадку, коли числа x і y від'ємні ($x<0$, $y<0$). Тоді $xy>0$ і $\log_a(xy)$ існує, але формулою (2) скористатися не можна — вона обґрунтована тільки для додатних значень x і y. У випадку $xy>0$ маємо $xy = |x|\cdot|y|$, і тепер $|x|>0$ та $|y|>0$, отже, для логарифма добутку $|x|\cdot|y|$ можна скористатися формулою (2). Тому при $x<0$ і $y<0$ можемо записати

$$\log_a(xy) = \log_a(|x|\cdot|y|) = \log_a|x| + \log_a|y|.$$

Одержана формула справедлива і при $x>0$ та $y>0$, оскільки в цьому випадку $|x| = x$ і $|y| = y$. Отже,

$$\boxed{\text{при } xy>0 \quad \log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|.} \qquad (2')$$

Аналогічно можна узагальнити й формули (3) і (4):

$$\boxed{\text{при } \frac{x}{y}>0 \quad \log_a\frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|,} \qquad (3')$$

$$\boxed{\text{при } x\neq 0 \quad \log_a x^{2k} = 2k\log_a|x|.} \qquad (4')$$

4. Формула переходу до логарифмів з іншою основою

Нехай $\log_a x = u$ ($x>0$, $a>0$, $a \neq 1$). Тоді за означенням логарифма $a^u = x$. Прологарифмуємо обидві частини останньої рівності за основою b ($b>0$, $b \neq 1$). Одержимо $\log_b a^u = \log_b x$.

Використовуючи для лівої частини цієї рівності формулу логарифма степеня, отримаємо $u \log_b a = \log_b x$. Звідси $u = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$. Ураховуючи, що $u = \log_a x$, одержуємо:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ де } a>0,\ a \neq 1,\ b>0,\ b \neq 1,\ x>0.$$

Отже, *логарифм додатного числа x за старою основою a дорівнює логарифму цього самого числа x за новою основою b, поділеному на логарифм старої основи a за новою основою b.* ■

За допомогою останньої формули можна одержати такий *наслідок*. Запишемо $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a}$. Ураховуючи, що $\log_b b = 1$, маємо:

$$\mathbf{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}, \text{ де } a>0,\ a \neq 1,\ b>0,\ b \neq 1.$$

Логарифми широко застосовуються для моделювання різноманітних процесів навколишнього життя. Наприклад, за відомим психофізіологічним законом Вебера — Фехнера сила p відчуття людиною певного подразника пропорційна логарифму інтенсивності S цього подразника. Гучність (рівень звукового тиску) звучання музичних інструментів, побутових приладів тощо обчислюють за формулою $p = 10 \lg \dfrac{S}{S_0}$, де S — значення інтенсивності звуку, а S_0 — нижнє граничне значення інтенсивності звуку (якщо $S < S_0$, то ми звук зовсім не чуємо). Величину p вимірюють в децибелах. Зазначимо, що безпечною для слуху людини вважають гучність 40–50 децибел — це інтенсивність звучання звичайної розмови. Якщо ж ви прослуховуєте музику за допомогою навушників, які ввімкнені так, щоб «перекричати» навколишній світ (тобто з інтенсивністю 80–100 децибел), то це шкідливо для здоров'я і може призвести до погіршення слуху або й зовсім до глухоти.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Обчисліть:

1) $\log_5 125$; 2) $\log_{\frac{1}{27}} 3$.

Розв'язання

1) ▸ $\log_5 125 = 3$, оскільки $5^3 = 125$; ■

2) ▸ $\log_{\frac{1}{27}} 3 = -\frac{1}{3}$, оскільки

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$ ■

Коментар

Ураховуючи означення логарифма, потрібно підібрати такий показник степеня, щоб при піднесенні основи логарифма до цього степеня одержати число, яке стоїть під знаком логарифма.

Приклад 2. Запишіть розв'язки найпростіших показникових рівнянь:

1) $5^x = 3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$; 3) $10^x = \frac{1}{3}$.

Розв'язання

За означенням логарифма:

1) ▸ $x = \log_5 3$; ■

2) ▸ $x = \log_{\frac{1}{3}} 10$; ■

3) ▸ $x = \lg\frac{1}{3}$. ■

Коментар

Для будь-яких додатних чисел b і a $(a \neq 1)$ рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь. Показник степеня x, до якого потрібно піднести основу a, щоб одержати b, називається логарифмом b за основою a, тому $x = \log_a b$.

Приклад 3. Виразіть логарифм за основою 3 виразу $\frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}}$ (де $a > 0$ і $b > 0$) через логарифми за основою 3 чисел a і b. (Коротко кажуть: «прологарифмуйте заданий вираз за основою 3».)

Розв'язання

▸ $\log_3 \frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}} = \log_3 \frac{3^3 a^2}{b^{\frac{1}{5}}} =$

Коментар

Спочатку запишемо вирази в чисельнику і знаменнику заданого виразу як степені чисел і букв.

$$=\log_3(3^3a^2)-\log_3 b^{\frac{1}{5}}=$$
$$=\log_3 3^3+\log_3 a^2-\log_3 b^{\frac{1}{5}}=$$
$$=3\log_3 3+2\log_3 a-\frac{1}{5}\log_3 b=$$
$$=3+2\log_3 a-\frac{1}{5}\log_3 b.$$ ■

Потім урахуємо, що логарифм частки $\frac{3^3a^2}{b^{\frac{1}{5}}}$ додатних чисел дорівнює різниці логарифмів чисельника і знаменника, а потім те, що логарифм добутку (3^3a^2) дорівнює сумі логарифмів множників.

Приклад 4. Відомо, що $\log_2 5=a$, $\log_2 7=b$. Виразіть $\log_2 700$ через a і b.

Розв'язання

► $\log_2 700=\log_2(7\cdot 5^2\cdot 2^2)=$
$=\log_2 7+\log_2 5^2+\log_2 2^2=$
$=\log_2 7+2\log_2 5+2\log_2 2=$
$=b+2a+2.$ ■

Коментар

Спочатку подамо число 700 як добуток степенів чисел 5 і 7 (заданих) та 2 (основи логарифма), а потім використаємо властивості логарифмів та підставимо в одержаний вираз значення $\log_2 5$ і $\log_2 7$.

Приклад 5*. Прологарифмуйте за основою 10 вираз $\frac{ab^3}{c^2}$.

Розв'язання

► Якщо $\frac{ab^3}{c^2}>0$, то
$\lg\frac{ab^3}{c^2}=\lg|ab^3|-\lg|c^2|=$
$=\lg(|a|\cdot|b^3|)-\lg|c^2|=$
$=\lg|a|+\lg|b^3|-2\lg|c|=$
$=\lg|a|+3\lg|b|-2\lg|c|.$ ■

Коментар

Оскільки логарифми існують тільки для додатних чисел, ми можемо прологарифмувати заданий вираз тільки у випадку, коли $\frac{ab^3}{c^2}>0$.

З умови не випливає, що в заданому виразі значення a, b і c додатні. Тому будемо користуватися узагальненими формулами логарифмування (2′–4′), а також урахуємо, що $|ab^3|=|a|\cdot|b^3|$, $|b^3|=|b|^3$, $|c^2|=|c|^2$.

Інколи доводиться шукати вираз, знаючи його логарифм. Таку операцію називають *потенціюванням*.

Приклад 6. Знайдіть x за його логарифмом:

1) $\lg x = \lg 5 - 2\lg 3 + 3\lg 2$; 2) $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$.

Розв'язання

1) ▸ $\lg x = \lg 5 - 2\lg 3 + 3\lg 2$;

$\lg x = \lg 5 - \lg 3^2 + \lg 2^3$;

$\lg x = \lg \frac{5 \cdot 2^3}{3^2}$; $x = \frac{5 \cdot 2^3}{3^2} = \frac{40}{9}$. ◼

2) ▸ $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$;

$\log_a x = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_a c^5 - \log_a p$;

$\log_a x = \log_a \frac{b^{\frac{1}{2}} c^5}{p}$; $x = \frac{b^{\frac{1}{2}} c^5}{p}$. ◼

Коментар

Користуючись формулами логарифмування справа наліво, запишемо праві частини заданих рівностей у вигляді логарифма якогось виразу M.

З одержаної рівності $\log_a x = \log_a M$ отримуємо $x = M$.

(Як буде показано в § 5, значення x, що задовольняє рівність $\log_a x = \log_a M$, — єдине.)

ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте означення логарифма додатного числа b за основою a $(a > 0,\ a \neq 1)$.
2. Який логарифм називають десятковим і який — натуральним? Наведіть приклади запису й обчислення таких логарифмів.
3. Запишіть і обґрунтуйте основну логарифмічну тотожність. Наведіть приклади її використання.
4. 1) Запишіть формули логарифмування. Сформулюйте їх зміст. Наведіть приклади використання цих формул.
   2*) Обґрунтуйте формули логарифмування.
5. 1) Запишіть формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої. Наведіть приклади використання цієї формули.
   2*) Обґрунтуйте формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої.

ВПРАВИ

3.1°. Перевірте правильність рівності:

1) $\log_2 16 = 4$; 3) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$;

2) $\log_3 27 = 3$; 4) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$; 6) $\log_{0,2} 0,008 = 3$.

3.2. Обчисліть:

1°) $\log_5 25$; 5) $\log_9 \frac{1}{27}$; 9*) $\log_{7+4\sqrt{3}}\left(7-4\sqrt{3}\right)$;

2°) $\log_4 64$; 6°) $\log_{\frac{1}{7}} 1$; 10*) $\log_{9-4\sqrt{5}}\left(9+4\sqrt{5}\right)$.

3°) $\log_3 \frac{1}{9}$; 7*) $\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$;

4°) $\log_6 \sqrt{6}$; 8*) $\log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$;

3.3°. Користуючись означенням логарифма, запишіть розв'язки найпростіших показникових рівнянь:

1) $4^x = 9$; 3) $10^x = 11$; 5) $0,2^x = 0,7$;

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 15$; 4) $5^x = 19$; 6) $e^x = 3$.

3.4. Користуючись основною логарифмічною тотожністю, спростіть вираз:

1) $5^{\log_5 7}$; 3) $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}}$; 5*) $7^{1+\log_7 2}$;

2) $3^{\log_3 4}$; 4) $3,5^{\log_{3,5} 13}$; 6*) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 6-2}$.

3.5. Прологарифмуйте вираз за заданою основою, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$:

1°) $10a^3c^4$ за основою 10; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{c^2}$ за основою e;

2) $\dfrac{0,1a^2b^5}{c^7}$ за основою 10; 5°) $9a^7\sqrt[3]{b}$ за основою 3;

3°) $a^2c\sqrt{b}$ за основою e; 6) $\dfrac{a^{\frac{2}{5}}b^4}{c^{\frac{1}{2}}}$ за основою 3.

3.6*. Прологарифмуйте вираз за основою 10, якщо $ab>0$ і $c\neq 0$:

1) $a^3b^5c^8$; 2) $\frac{\sqrt[3]{ab}}{c^2}$; 3) $\frac{c^4}{(ab)^{\frac{2}{5}}}$; 4) $100\sqrt[5]{abc^2}$.

3.7. Відомо, що $\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$. Виразіть через a і b:

1) $\log_5 15$; 2) $\log_5 12$; 3) $\log_5 30$; 4) $\log_5 72$.

3.8. Знайдіть x, якщо:

1) $\log_6 x=3\log_6 2+0{,}5\log_6 25-2\log_6 3$;

2) $\lg x=\frac{1}{3}\lg(5a)-2\lg b+5\lg c$;

3) $\lg x=3\lg m+\frac{2}{7}\lg n-\frac{1}{5}\lg p$;

4) $\log_3 x=\frac{1}{3}\log_3 8-2\log_3 20-3\log_3 2$.

3.9. Перейдіть у заданому логарифмі до основи 3:

1) $\log_{\frac{1}{3}} a$; 4) $\log_{\sqrt{3}} a$;

2) $\log_9 a$; 5) $\log_2 a$.

3) $\log_{\frac{1}{9}} a$;

3.10*. Обчисліть значення виразу:

1) $6^{\frac{3}{\log_{\sqrt{2}} 6}+\frac{1}{3}\log_6 27}$; 3) $\log_4 5\log_5 6\log_6 7\log_7 32$;

2) $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}} 3}+\frac{1}{4}\log_3 16}$; 4) $\log_9 10\lg 11\log_{11} 12\log_{12} 27$.

3.11*. Знайдіть:

1) $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18=a$;

2) $\log_9 15$, якщо $\log_{45} 25=a$.

§ 4. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

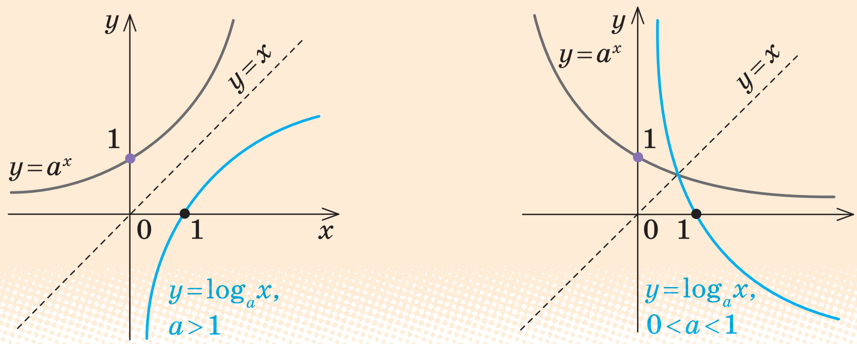
4.1. Графік логарифмічної функції та її властивості

Таблиця 6

Означення. ***Логарифмічною функцією*** **називається функція виду** $y=\log_a x$**, де** $a>0,\ a\neq 1$**.**

1. Графік логарифмічної функції

Функції $y=a^x$ і $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ є взаємно оберненими функціями, тому їх графіки симетричні відносно прямої $y=x$.



2. Властивості логарифмічної функції

1. *Область визначення*: $x>0$. $\boxed{D(\log_a x)=(0;+\infty)}$
2. *Область значень*: $y\in \boldsymbol{R}$. $\boxed{E(\log_a x)=\boldsymbol{R}}$
3. *Функція* ***ні парна, ні непарна***.
4. *Точки перетину з осями координат*: з віссю Oy **немає**, з віссю Ox $\boxed{\begin{cases} y=0, \\ x=1 \end{cases}}$
5. *Проміжки зростання і спадання*:
   - при $a>1$ функція $y=\log_a x$ **зростає на всій області визначення**;
   - при $0<a<1$ функція $y=\log_a x$ **спадає на всій області визначення**.
6. *Проміжки знакосталості:*
   - якщо $a>1$, то $y>0$ при $x>1$, $y<0$ при $0<x<1$;
   - якщо $0<a<1$, то $y>0$ при $0<x<1$, $y<0$ при $x>1$.
7. *Найбільшого і найменшого значень функція не має.*

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Поняття логарифмічної функції та її графік

Означення. ***Логарифмічною функцією*** **називається функція виду** $y=\log_a x$**, де** $a>0$, $a\neq 1$.

Покажемо, що ця функція є оберненою до функції $y=a^x$.

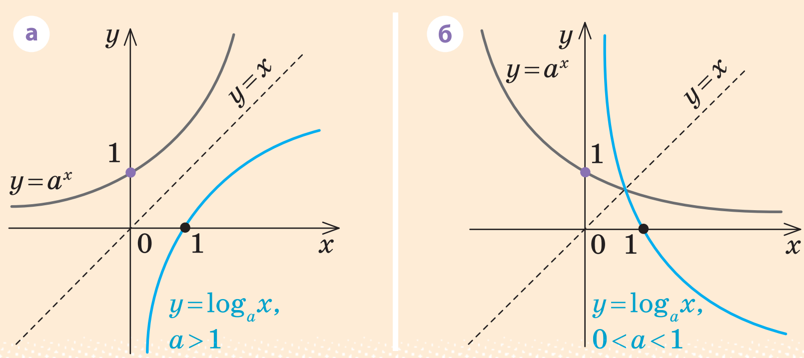
Справді, показникова функція $f(x)=a^x$ при $a>1$ зростає на множині $\boldsymbol{R}$, а при $0<a<1$ спадає на множині $\boldsymbol{R}$. Областю значень функції $f(x)=a^x$ є проміжок $(0;+\infty)$. Отже, як було показано в підручнику для 10 класу, функція $f(x)$ оборотна і має обернену функцію, областю визначення якої є проміжок $(0;+\infty)$ і областю значень — множина $\boldsymbol{R}$. Нагадаємо, що для запису формули оберненої функції достатньо з рівності $y=f(x)$ виразити x через y і в одержаній формулі $x=g(y)$ аргумент позначити через x, а функцію — через y.

Тоді з рівняння $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ за означенням логарифма одержуємо формулу оберненої функції $x=\log_a y$, у якій аргумент позначено через y, а функцію — через x. Змінюючи позначення на традиційні, отримуємо формулу $y=\log_a x$ — формулу функції, оберненої до функції $y=a^x$. ■

Як відомо, графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y=x$. Отже, графік функції $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ можна одержати з графіка функції $y=a^x$ симетричним відображенням відносно прямої $y=x$. На рис. 4.1.1 наведено графіки логарифмічних функцій для $a>1$ і $0<a<1$.

Графік логарифмічної функції називають *логарифмічною кривою*.

Рис. 4.1.1



2. Властивості логарифмічної функції

Властивості функції $y=\log_a x$ можна або визначити з одержаного графіка цієї функції, або обґрунтувати, спираючись на властивості функції $y=a^x$.

З відповідним обґрунтуванням можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\log_5(3-x)$; 2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3)$; 3) $y=\log_7(x^2-x)$.

Розв'язання

1) $y=\log_5(3-x)$.
Область визначення задається нерівністю $3-x>0$. Звідси $x<3$, тобто $D(y)=(-\infty;3)$. ■

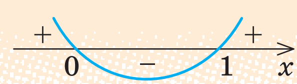
2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3)$.
Область визначення задається нерівністю $x^2+3>0$. Ця нерівність виконується при всіх дійсних значеннях x. Отже, $D(y)=\boldsymbol{R}$. ■

3) $y=\log_7(x^2-x)$.
Область визначення задається нерівністю $x^2-x>0$. Розв'язуючи цю квадратну нерівність, одержуємо $x<0$ або $x>1$ (рис. 4.1.2). Отже, $D(y)=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. ■

Коментар

Оскільки вираз, що стоїть під знаком логарифма, має бути додатним, то для знаходження області визначення заданої функції треба знайти ті значення аргумента x, при яких вираз, що стоїть під знаком логарифма, буде додатним.

Рис. 4.1.2



Приклад 2. Зобразіть схематично графік функції:

1) $y=\log_2 x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Коментар

Область визначення $D(y)$ функції $y=\log_a x$ така: $x>0$, отже, графік цієї функції завжди розташований праворуч від осі Oy. Цей графік перетинає вісь Ox у точці $x=1$ (оскільки $\log_a 1=0$).

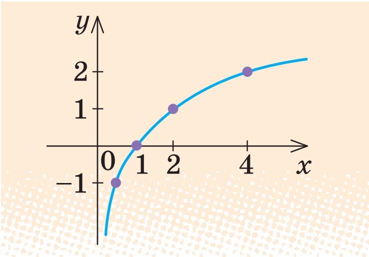
При $a > 1$ логарифмічна функція зростає, отже, графіком функції $y = \log_a x$ буде логарифмічна крива, точки якої при збільшенні аргумента «піднімаються вгору».

При $0 < a < 1$ логарифмічна функція спадає, отже, графіком функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ буде логарифмічна крива, точки якої при збільшенні аргумента «опускаються вниз».

Щоб уточнити поведінку графіків заданих функцій, знайдемо координати кількох додаткових точок.

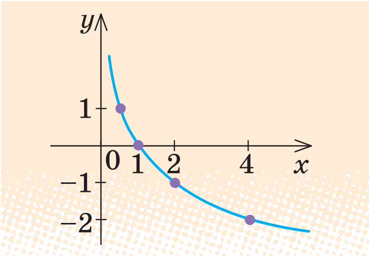
Розв'язання

▸ $y = \log_2 x$



x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	−1	0	1	2

▸ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$



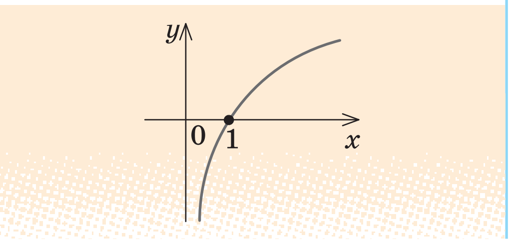
x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	1	0	−1	−2

Приклад 3*. Зобразіть схематично графік функції $y = \log_3 |x - 2|$.

Розв'язання

▸ Послідовно будуємо графіки:

1) $y = \log_3 x$

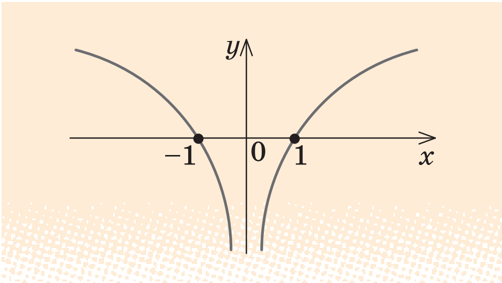


Коментар

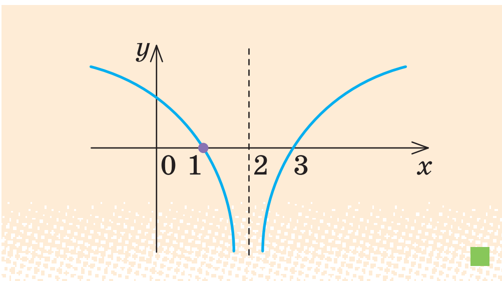
Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції за допомогою геометричних перетворень.

1) Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = \log_3 x$ (основа логарифма $a = 3 > 1$, отже, логарифмічна функція зростає).

2) $y = \log_3 |x|$



3) $y = \log_3 |x-2|$



2) Потім можна побудувати графік функції $y = g(x) = \log_3 |x| = f(|x|)$ (праворуч від осі Oy графік $f(x)$ залишається без зміни, і ця сама частина графіка симетрично відображується відносно осі Oy).

3) Після цього можна побудувати графік заданої функції $y = \log_3 |x-2| = g(x-2)$ паралельним перенесенням графіка функції $y = g(x)$ уздовж осі Ox на 2 одиниці вправо.

Короткий план побудови шуканого графіка зручно зобразити схематично у такий спосіб:

$$y = \log_3 x \to y = \log_3 |x| \to y = \log_3 |x-2|.$$

Приклад 4. Порівняйте додатні числа b і c, знаючи, що:

1) $\log_3 b > \log_3 c$; 2) $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$.

Розв'язання

1) ▶ Оскільки функція $y = \log_3 x$ зростаюча, то для додатних чисел b і c з нерівності $\log_3 b > \log_3 c$ одержуємо $b > c$. ■

2) ▶ Оскільки функція $y = \log_{0,3} x$ спадна, то для додатних чисел b і c з нерівності $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$ одержуємо $b < c$. ■

Коментар

У кожному завданні задані вирази — це значення логарифмічної функції $y = \log_a x$ у точках b і c. Використовуємо зростання або спадання відповідної функції:

1) при $a = 3 > 1$ функція $y = \log_3 x$ є зростаючою, тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента;

2) при $a = 0,3 < 1$ функція $y = \log_{0,3} x$ є спадною, тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента.

Приклад 5. Порівняйте з одиницею додатне число *a*, знаючи, що $\log_a 6 < 0$.

Розв'язання

► Оскільки $6 > 1$, а з умови маємо, що $\log_a 6 < 0 = \log_a 1$ (тобто $\log_a 6 < \log_a 1$), то функція $y = \log_a x$ є спадною, отже, $0 < a < 1$. ■

Коментар

Числа $\log_a 6$ і 0 — це два значення функції $y = \log_a x$. Ураховуючи задану нерівність, з'ясовуємо, якою є ця функція — зростаючою або спадною, і згадуємо, що вона зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$.

ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте означення логарифмічної функції.
2. Як розташовані графіки функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ відносно прямої $y = x$? Відповідь поясніть. Побудуйте зазначені графіки для $a > 1$ і $0 < a < 1$.
3. Користуючись графіком функції $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, охарактеризуйте її властивості.
4. Поясніть, як, ураховуючи зростання або спадання відповідної логарифмічної функції, порівняти значення:

   а) $\log_5 7$ і $\log_5 3$; б) $\log_{\frac{1}{5}} 7$ і $\log_{\frac{1}{5}} 3$.

ВПРАВИ

4.1.1. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y = \log_{11}(2x + 6)$;
5) $y = \log_{\frac{3}{8}}(2x^2 + 1)$;
9*) $y = \log_{3,1} \dfrac{|x| + 5}{|x| - 3}$;

2°) $y = \log_{\frac{1}{6}}(x - 3)$;
6) $y = \log_{\pi}(x^2 + x + 1)$;
10*) $y = \log_x (2x - x^2)$;

3) $y = \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 1)$;
7*) $y = \log_{0,4} \dfrac{2x - 6}{x + 2}$;
11*) $y = \log_{2x-3}(5x - x^2)$.

4) $y = \log_{5,2}(3x - x^2)$;
8*) $\log_{\sqrt{7}} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$;

У завданнях 4.1.2, 4.1.3 зобразіть схематично графік заданої функції.

4.1.2. 1°) $y=\log_3 x$; 3°) $y=\log_{0,3} x$; 5) $y=\log_{\frac{1}{6}} x$;

2°) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$; 4) $y=\log_{\sqrt{5}} x$; 6) $y=\log_{\sqrt{2}} x$.

4.1.3. 1) $y=\log_2(-x)$; 4) $y=\log_4 x+3$; 7*) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)\right|$;

2) $y=\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$; 5) $y=-\log_6 x$; 8*) $y=\log_4 \frac{x^2}{|x|}$;

3) $y=\log_4(x+3)$; 6*) $y=\left|\log_3|x|\right|$; 9*) $y=\log_3 \log_3 x$.

4.1.4. Порівняйте числа:

1) $\log_2 3{,}5$ і $\log_2 4{,}5$; 6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 10$ і $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 20$;

2) $\log_{0,1} 1{,}3$ і $\log_{0,1} 1{,}1$; 7) $\log_2 3$ і 0;

3) $\log_{\frac{1}{5}} 2$ і $\log_{\frac{1}{5}} 5$; 8) $\log_7 \frac{1}{3}$ і 0;

4) $\log_{\sqrt{3}} 2{,}3$ і $\log_{\sqrt{3}} 0{,}2$; 9) $\log_3 4$ і 1;

5) $\log_\pi 5$ і $\log_\pi 7$; 10) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$ і 1.

4.1.5. Порівняйте додатні числа b і c, якщо:

1) $\log_5 b>\log_5 c$; 3) $\log_{\sqrt{7}} b<\log_{\sqrt{7}} c$;

2) $\log_{0,5} b>\log_{0,5} c$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} b<\log_{\frac{1}{3}} c$.

4.1.6. Порівняйте з одиницею додатне число a, якщо:

1) $\log_a 5>0$; 3) $\log_a 2{,}3<0$;

2) $\log_a \frac{1}{3}>0$; 4) $\log_a 0{,}2<0$.

4.2. Похідні логарифмічної та показникової функцій

Таблиця 7

$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0$, a — стала)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, a — стала)	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (на ОДЗ правої частини формули)

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Щоб обґрунтувати *формули похідних показникової та логарифмічної функцій*, використаємо без доведення властивість функції $y = e^x$ (вона доводиться в курсі вищої математики*): **похідна функції $y = e^x$ дорівнює цій самій функції $y = e^x$**, тобто

$$(e^x)' = e^x.$$

- Якщо $a > 0$, за основною логарифмічною тотожністю маємо:

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

Тоді за правилом знаходження похідної складеної функції одержуємо:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a, \text{ тобто } (a^x)' = a^x \ln a.$$

За одержаною формулою ми можемо знайти значення похідної показникової функції для будь-якого значення x. Отже, *показникова функція диференційовна в кожній точці області визначення*, а відповідно, *і неперервна в кожній точці своєї області визначення* (тобто при всіх дійсних значеннях x).

- Для логарифмічної функції спочатку знайдемо похідну функції $y = \ln x$, приймаючи без доведення існування похідної. Область визначення цієї функції $x > 0$, тобто $(0; +\infty)$. Якщо $x > 0$, за основною логарифмічною тотожністю маємо $e^{\ln x} = x$. Ця рівність означає, що за умови $x > 0$ функції $y = e^{\ln x}$ і $y = x$ збігаються (це одна і та сама функція, задана на множині R_+), а отже, збігаються

* Нагадаємо, що e — ірраціональне число, $e = 2{,}71828182\ldots$.

їхні похідні. Використовуючи для лівої частини рівності правило знаходження похідної складеної функції, одержуємо:

$\left(e^{\ln x}\right)' = (x)'$; $e^{\ln x}(\ln x)' = 1$, тобто $x(\ln x)' = 1$. Звідси $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (де $x > 0$).

Оскільки $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\ln x$, то $(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a}\ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' =$
$= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$.

Отже, $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ (де $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, a — стала). ■

Формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ (див. § 14 підручника для 10 класу) була запропонована тільки для цілих значень n. Доведемо, що вона виконується і при будь-яких дійсних значеннях n.

- Якщо n — довільне неціле число, то функція $y = x^n$ означена тільки при $x > 0$.

  Тоді за основною логарифмічною тотожністю $x^n = e^{\ln x^n} = e^{n\ln x}$.

  За правилом обчислення похідної складеної функції одержуємо

$$\left(x^n\right)' = \left(e^{n\ln x}\right)' = e^{n\ln x}(n\ln x)' = x^n n(\ln x)' = x^n n\frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$ ■

Отже, надалі формулою $(x^n)' = nx^{n-1}$ можна користуватися при будь-яких дійсних значеннях n (нагадаємо, що в цьому випадку *її можна використовувати тільки при тих значеннях x, при яких визначена її права частина*).

З обґрунтуванням формули похідної функції $y = \sqrt[n]{x}$ та прикладами розв'язування більш складних завдань із використанням похідних можна ознайомитись, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \sin^2 x + e^{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x) = \frac{\ln x}{\cos 3x}$.

Розв'язання	Коментар
1) ▸ $f'(x) = \left(\sin^2 x + e^{\frac{x}{2}}\right)' = \left(\sin^2 x\right)' + \left(e^{\frac{x}{2}}\right)' =$	Послідовно визначаємо, від якого виразу береться похідна (орієнтуючись на результат останньої дії).

$$= 2\sin x(\sin x)' + e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= 2\sin x\cos x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \sin 2x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}.$$ ■

2) ▸ $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\cos 3x}\right)' =$

$$= \frac{(\ln x)'\cos 3x - (\cos 3x)'\ln x}{(\cos 3x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cos 3x - (-\sin 3x)(3x)'\ln x}{\cos^2 3x} =$$

$$= \frac{\cos 3x + 3x\sin 3x\ln x}{x\cos^2 3x}.$$ ■

У завданні 1 спочатку знаходимо похідну суми: $(u+v)' = u' + v'$. Потім для кожного з доданків використовуємо формулу похідної складеної функції: знаходимо похідні u^2 та e^u і множимо на u'. Одержаний результат бажано спростити за формулою $2\sin x\cos x = \sin 2x$.

У завданні 2 спочатку знаходимо похідну частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, а для похідної знаменника використовуємо формулу похідної складеної функції: знаходимо похідну $\cos u$ і множимо на u'.

Приклад 2. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = xe^x$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання

▸ Якщо $f(x) = xe^x$,

то $f(x_0) = f(1) = e$;

$$f'(x) = x'e^x + (e^x)'x = e^x + xe^x.$$

Тоді $f'(x_0) = f'(1) = 2e$. Підставляючи ці значення в рівняння дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, одержуємо: $y = e + 2e(x-1)$.

Отже, $y = 2ex - e$ — шукане рівняння дотичної. ■

Коментар

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 у загальному вигляді записується так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Щоб записати це рівняння для заданої функції, потрібно знайти $f(x_0)$, похідну $f'(x)$ і значення $f'(x_0)$. Для виконання відповідних обчислень зручно позначити задану функцію через $f(x)$, а для знаходження її похідної використати формулу похідної добутку $(uv)' = u'v + v'u$.

ЗАПИТАННЯ

1. Запишіть формули для знаходження похідних показникової і логарифмічної функцій.

ВПРАВИ

У завданнях 4.2.1, 4.2.2 знайдіть похідну функції.

4.2.1°. 1) $y=3e^x+4$; 3) $y=e^{-x}+x^5$;

2) $y=e^x-\ln x$; 4) $y=\ln(2x-1)$.

4.2.2. 1) $y=e^{5x}\cos x$; 3) $y=\sqrt{x}\lg x$;

2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; 4) $y=x^3\log_2 x$.

4.2.3. Розв'яжіть нерівність $f'(x)>0$, якщо:

1°) $f(x)=e^{2x}-x$; 3) $f(x)=x\ln x$;

2°) $f(x)=2x-\ln x$; 4) $f(x)=(1-x)e^{-2x}$.

4.2.4. Знайдіть значення x, при яких значення похідної функції $f(x)$: а) дорівнює нулю; б) додатне; в) від'ємне, якщо:

1) $f(x)=x^2\ln x$; 3) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

2) $f(x)=x^3-3\ln x$; 4) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

4.2.5. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x)=\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$; 3) $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$, $x_0=0$;

2) $f(x)=\operatorname{tg}2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{8}$; 4) $f(x)=\ln x-x$, $x_0=1$.

4.2.6. Знайдіть абсциси x_0 точок графіка функції $y=f(x)$, у яких дотична до нього утворює кут φ з додатним напрямком осі Ox, якщо:

1) $f(x)=\sin 2x$, $\varphi=0°$; 3) $f(x)=e^{-x}$, $\varphi=135°$.

2) $f(x)=\ln 2x$, $\varphi=45°$;

4.2.7*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=e^{5x+1}$, якщо дотична паралельна прямій $y=5x-8$.

4.2.8*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)=e^{3x-2}$, якщо дотична паралельна прямій $y=3x+17$.

4.2.9. Знайдіть найбільше і найменше значення заданої функції на вказаному відрізку:

1) $f(x)=x+e^{-x}$, $[-1;2]$; 2) $f(x)=\ln(2x)-6x^2+11x$, $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

§ 5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

5.1. Розв'язування логарифмічних рівнянь

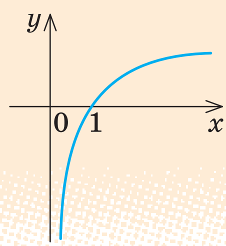
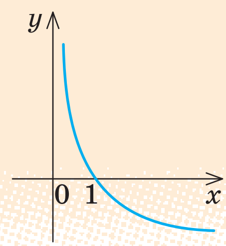
Таблиця 8

1. Основні означення та співвідношення

Означення. ***Логарифмом додатного числа*** b ***за основою*** a **(**$a>0$, $a\neq1$**) називається показник степеня, до якого треба піднести** a**, щоб одержати** b**.**

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

Графік функції $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$

$a>1$	$0<a<1$
	
зростає	спадає

2. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь

Орієнтир	Приклад
Якщо *a* — число ($a>0$ і $a\neq1$), то $\log_a f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=a^c$ (*використовуємо означення логарифма*)	$\log_3(x-1)=2$. ▸ $x-1=3^2$; $x=10$. *Відповідь*: 10. ■

3. Використання рівнянь-наслідків

Орієнтир	Приклад
Якщо з припущення, що перша рівність правильна, випливає правильність кожної наступної, то гарантовано одержуємо рівняння-наслідки.	$\log_x(x+2)=2$. ▸ За означенням логарифма одержуємо: $x+2=x^2$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$.

При використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування.	*Перевірка.* $x=-1$ — сторонній корінь (в основі логарифма одержуємо від'ємне число); $x=2$ — корінь ($\log_2(2+2)=2,\ \log_2 4=2,\ 2=2$). *Відповідь*: 2.

4. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь

Заміна змінних

Орієнтир	Приклад
Якщо у рівняння (нерівність або тотожність) змінна входить в одному й тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною).	$\lg^2 x-2\lg x-3=0.$ Виконаємо заміну: $\lg x=t;\ t^2-2t-3=0;\ t_1=-1,\ t_2=3.$ Отже, $\lg x=-1$ або $\lg x=3$. Тоді $x=10^{-1}=0{,}1$ або $x=10^3=1000$. *Відповідь*: 0,1; 1000.

Рівняння виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ ($a>0$ і $a\neq 1$)

Орієнтир	Приклад
$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)>0, \\ g(x)>0\end{cases}$ ОДЗ (*ураховуємо ОДЗ і прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів*).	$\log_3(x^2-2)=\log_3(4x-5).$ ОДЗ: $\begin{cases}x^2-2>0,\\ 4x-5>0.\end{cases}$ На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням $x^2-2=4x-5;\ x^2-4x+3=0;\ x_1=1,\ x_2=3.$ $x=1$ — сторонній корінь (не задовольняє умови ОДЗ); $x=3$ — корінь (задовольняє умови ОДЗ). *Відповідь*: 3.

Рівносильні перетворення рівнянь в інших випадках	
Орієнтир	Приклад
1) **Ураховуємо ОДЗ** заданого рівняння (і *уникаємо перетворень, які призводять до звуження ОДЗ*). 2) Стежимо за тим, щоб **на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності рівності**.	$\log_2(x+1)=3-\log_2(x+3)$. ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0. \end{cases}$ На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$; $\log_2((x+1)(x+3))=3$; $(x+1)(x+3)=2^3$; $x^2+4x-5=0$; $x_1=1$, $x_2=-5$. $x=1$ — корінь (задовольняє умови ОДЗ); $x=-5$ — сторонній корінь (не задовольняє умови ОДЗ). *Відповідь*: 1.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь

Найпростішим логарифмічним рівнянням зазвичай вважають рівняння

$$\log_a x = c \quad (a>0 \text{ і } a\neq 1).$$

Логарифмічна функція зростає (або спадає) на всій області визначення, тобто при $x>0$ (див. графіки в п. 1 табл. 8), і тому кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргумента. Ураховуючи, що логарифмічна функція набуває всіх дійсних значень, рівняння

$$\log_a x = c \tag{1}$$

завжди має єдиний корінь, який можна визначити, скориставшись означенням логарифма:

$$x=a^c.$$

Якщо розглянемо рівняння

$$\log_a f(x) = c \tag{2}$$

і виконаємо заміну змінної $f(x)=t$, то одержимо найпростіше логарифмічне рівняння $\log_a t = c$, яке має єдиний корінь $t=a^c$. Виконуючи обернену заміну, одержуємо, що розв'язки рівняння (2) збігаються з розв'язками рівняння

$$f(x)=a^c. \tag{3}$$

Отже, рівняння (2) і (3) є рівносильними. У такий спосіб ми обґрунтували, що *для рівносильного перетворення найпростішого логарифмічного рівняння* (1) або рівняння (2) (яке ми теж будемо відносити до найпростіших за умови, що основа a є числом) *достатньо використати означення логарифма*.

Коротко це можна записати так: $\log_a f(x)=c \Leftrightarrow f(x)=a^c$.

Нагадаємо, що всі рівносильні перетворення рівняння виконуються на його ОДЗ. Для рівняння (2) ОДЗ задається умовою $f(x)>0$. Для всіх коренів рівняння (3) ця умова виконується автоматично (через те що $a>0$). Тому *для найпростіших логарифмічних рівнянь ОДЗ можна не записувати* (оскільки вона враховується автоматично при переході від рівняння (2) до рівняння (3)).

Наприклад, рівняння $\log_5(2x-3)=2$ рівносильне рівнянню $2x-3=5^2$, корінь якого $x=14$ і є коренем заданого рівняння. Аналогічно записано й розв'язання найпростішого рівняння $\log_3(x-1)=2$ в табл. 8.

2. Використання рівнянь-наслідків під час розв'язування логарифмічних рівнянь

У процесі розв'язування рівняння головне — не загубити його корені, тому важливо стежити за тим, щоб кожен корінь першого рівняння залишався коренем наступного — у цьому випадку одержуємо рівняння-наслідки.

Нагадаємо, що кожний корінь заданого рівняння перетворює його на правильну числову рівність. Використовуючи означення кореня рівняння, можна обґрунтувати такий **орієнтир**: *якщо з припущення про правильність першої рівності випливає правильність кожної наступної, ми одержуємо рівняння-наслідки* (оскільки кожний корінь першого рівняння буде коренем наступного рівняння). Нагадаємо, що при використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів.

Тому *перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування при використанні рівнянь-наслідків.*

Приклад розв'язування логарифмічного рівняння за допомогою рівнянь-наслідків та оформлення такого розв'язання наведено в п. 3 табл. 8.

3. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь

Одним із часто використовуваних рівносильних перетворень рівнянь є заміна змінної.

Нагадаємо загальний **орієнтир**, якого ми дотримувалися під час розв'язування рівнянь у 10 класі: *якщо до рівняння* (нерівності або тотожності) *змінна входить в одному й тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою* (*новою змінною*).

Наприклад, до рівняння $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$ змінна входить тільки у вигляді $\lg x$, тому для розв'язування цього рівняння доцільно використати заміну $\lg x = t$, одержати квадратне рівняння $t^2 - 2t - 3 = 0$, яке має корені $t_1 = -1$ і $t_2 = 3$, а потім виконати обернену заміну й одержати найпростіші логарифмічні рівняння $\lg x = -1$ і $\lg x = 3$. Тоді за означенням логарифма визначимо корені заданого рівняння: $x = 10^{-1} = 0{,}1$ і $x = 10^3 = 1000$.

Ураховуючи, що заміна змінної (разом з оберненою заміною) є рівносильним перетворенням рівняння на будь-якій множині, для виконання заміни не обов'язково знаходити ОДЗ заданого рівняння. А після виконання оберненої заміни ми одержали найпростіші логарифмічні рівняння, для яких (як було показано вище) ОДЗ ураховується автоматично. Отже, у наведеному розв'язанні ОДЗ заданого рівняння врахована автоматично, і тому ОДЗ можна не записувати до розв'язання. Саме так і оформлено розв'язання цього рівняння в п. 4 табл. 8.

З поясненням і обґрунтуванням інших прикладів рівносильних перетворень логарифмічних рівнянь, наведених у п. 4 табл. 8, можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Виконуючи **рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь у більш складних випадках**, можна дотримуватися **орієнтира**, який було наведено в 2.1 підручника для 10 класу:

1. *Ураховуємо ОДЗ заданого рівняння.*

2. *Стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності рівності.*

Наприклад, розв'яжемо рівняння

$$\log_2(x+1) = 3 - \log_2(x+3) \qquad (4)$$

за допомогою рівносильних перетворень.

Для цього достатньо врахувати ОДЗ заданого рівняння $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0, \end{cases}$ а потім, виконуючи кожне перетворення рівняння, стежити за тим, чи можна на ОДЗ виконати це перетворення й у зворотному напрямку. Коли відповідь ствердна, то виконані перетворення рівносильні. Якщо ж якесь перетворення для всіх значень змінної з ОДЗ можна виконати тільки в одному напрямку (від початкового рівняння до наступного), а для його виконання у зворотному напрямку потрібні якісь додаткові обмеження, то ми одержимо тільки рівняння-наслідок, і отримані корені доведеться перевіряти підстановкою в задане рівняння.

Застосуємо зазначений орієнтир до розв'язування рівняння (4).

Щоб звести це рівняння до найпростішого, перенесемо всі члени рівняння, які містять логарифми, в його ліву частину. Одержимо рівносильне рівняння

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3. \qquad (5)$$

(Рівносильність рівнянь (4) і (5) випливає з відомої теореми: якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу доданки із протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне заданому на будь-якій множині. Рівносильність цих рівнянь випливає також із того, що ми можемо перейти не тільки від рівності (4) до рівності (5), а й виконати зворотне перетворення, користуючись властивостями числових рівностей.)

Ураховуючи, що сума логарифмів додатних (на ОДЗ) чисел дорівнює логарифму добутку, одержуємо рівняння

$$\log_2\left((x+1)(x+3)\right)=3. \qquad (6)$$

На ОДЗ заданого рівняння можна виконати і зворотне перетворення: оскільки $x+1>0$ і $x+3>0$, то логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників. Отже, від рівності (6) можна повернутися до рівності (5), тобто цей перехід теж приводить до рівносильного рівняння. Рівняння (6) — це найпростіше логарифмічне рівняння. Воно рівносильне рівнянню, яке отримуємо за означенням логарифма: $(x+1)(x+3)=2^3$. Виконуючи рівносильні перетворення одержаного рівняння, маємо: $x^2+4x-5=0$; $x_1=1$, $x_2=-5$.

Оскільки всі рівносильні перетворення виконувалися на ОДЗ заданого рівняння, урахуємо її, підставляючи одержані корені в обмеження ОДЗ:

- $x=1$ — корінь, оскільки задовольняє умови ОДЗ;
- $x=-5$ не є коренем (сторонній корінь), тому що не задовольняє умови ОДЗ.

Отже, задане рівняння має тільки один корінь $x=1$.

Звичайно, розглянуте рівняння можна було розв'язати з використанням рівнянь-наслідків, без явного врахування ОДЗ, але з перевіркою одержаних розв'язків підстановкою в початкове рівняння. Отже, можна самостійно обирати шлях розв'язування рівняння: або це буде використання рівнянь-наслідків, або рівносильні перетворення заданого рівняння. Але для багатьох рівнянь перевірку одержаних коренів виконати досить непросто, а для нерівностей взагалі не можна користуватися наслідками. Це пов'язано з тим, що не вдається перевірити всю множину розв'язків нерівностей, оскільки вона, як правило, нескінченна. Отже, для нерівностей доводиться виконувати тільки рівносильні перетворення (для цього можна використовувати орієнтири, повністю аналогічні наведеним вище).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння

$$\lg(x-2)-\frac{1}{2}\lg(3x-6)=\lg 2. \qquad (1)$$

Розв'язання

$$2\lg(x-2)-\lg(3x-6)=2\lg 2; \quad (2)$$

$$\lg(x-2)^2-\lg(3x-6)=\lg 2^2; \quad (3)$$

$$\lg\frac{(x-2)^2}{3x-6}=\lg 4; \quad (4)$$

$$\frac{(x-2)^2}{3x-6}=4; \quad (5)$$

$$(x-2)^2=4(3x-6); \quad (6)$$

$$x^2-16x+28=0; \quad (7)$$

$$x_1=2,\ x_2=14.$$

Перевірка. $x=2$ — сторонній корінь (під знаком логарифма отримуємо 0),

$x=14$ — корінь, оскільки маємо:

$$\lg(14-2)-\frac{1}{2}\lg(3\cdot 14-6)=\lg 2;$$

Коментар

Розв'яжемо задане рівняння за допомогою наслідків. Нагадаємо, що *під час використання наслідків головне — гарантувати, що у випадку, коли перша рівність буде правильною, усі наступні теж будуть правильними.*

Щоб позбутися дробового коефіцієнта, помножимо обидві частини рівняння (1) на 2 (якщо рівність (1) правильна, то й рівність (2) теж правильна). Якщо рівності (1) або (2) правильні (при тих значеннях x, що є коренями цих рівнянь), то при таких значеннях x існують усі записані логарифми, тоді вирази $x-2$ і $3x-6$ додатні. Але для додатних a, b, c можна скористатися формулами

$$2\lg a=\lg a^2,\ \lg b-\lg c=\lg\frac{b}{c},$$

отже, рівності (3) і (4) теж будуть правильними. Ураховуючи, що функція $y=\lg t$ зростаюча, тобто кожного свого значення

$$\lg 12 - \frac{1}{2}\lg 36 = \lg 2;$$

$$\lg 12 - \lg\sqrt{36} = \lg 2;$$

$$\lg\frac{12}{6} = \lg 2;$$

$$\lg 2 = \lg 2.$$

Відповідь: 14.

набуває тільки при одному значенні аргумента, з рівності логарифмів (4) одержуємо рівність відповідних аргументів (5).

Якщо рівність (5) правильна, то знаменник дробу відмінний від нуля, і після множення обох її частин на $3x - 6 \neq 0$ одержуємо правильну рівність (6) (отже, і правильну рівність (7)). Оскільки ми користувалися рівняннями-наслідками, необхідно виконати перевірку знайдених коренів.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

Розв'язання

$$3^x - 8 = 3^{2-x}; \qquad (1)$$

$$3^x - 8 = \frac{3^2}{3^x}.$$

Виконаємо заміну $3^x = t$.

Одержимо: $t - 8 = \frac{9}{t};$ (2)

$$t^2 - 8t - 9 = 0; \qquad (3)$$

$$t_1 = 9,\ t_2 = -1.$$

Виконавши обернену заміну, отримаємо:

$3^x = 9$, тоді $x = 2$,

або $3^x = -1$ — коренів немає.

Відповідь: 2.

Коментар

Якщо розглянути задане рівняння як найпростіше логарифмічне, то можна стверджувати, що за означенням логарифма воно рівносильне рівнянню $3^x - 8 = 3^{2-x}$. Як уже було зазначено раніше, ОДЗ заданого рівняння $3^x - 8 > 0$ для всіх коренів рівняння (1) ураховується автоматично, оскільки $3^{2-x} > 0$ завжди. Далі розв'язуємо рівняння (1) за схемою, наведеною в табл. 3 для показникових рівнянь.

Оскільки $t = 3^x > 0$, то $t \neq 0$, і тому рівняння (2) рівносильне рівнянню (3).

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші логарифмічні рівняння, користуючись означенням логарифма.
2. Поясніть, як можна розв'язати рівняння $\log_5(x - 2) = \log_5(x^2 - 2)$:
   а) за допомогою рівнянь-наслідків;
   б) за допомогою рівносильних перетворень.

3. Поясніть на прикладі використання заміни змінних під час розв'язування логарифмічних рівнянь. У яких випадках доцільно використовувати заміну змінних?

ВПРАВИ

У завданнях 5.1.1–5.1.5 розв'яжіть рівняння.

5.1.1°. 1) $\log_2 x = 4$; 3) $\log_4 x = \frac{1}{2}$;

2) $\log_{0,2} x = -1$; 4) $\lg x = 2$.

5.1.2. 1°) $\log_3 (2x-1) = 2$; 3) $\log_\pi \left(x^2 + 2x - 2\right) = 0$;

2°) $\log_{\frac{1}{3}} (5x-21) = -2$; 4) $\lg (3-x) = -1$.

5.1.3. 1°) $\lg (x+9) + \lg (2x+8) = 2$; 3) $2\log_2 x - \log_2 (3x-4) = 1$;

2°) $\log_3 (x+1) + \log_3 (x+3) = 1$; 4) $\frac{1}{2}\log_5 (x-4) + \frac{1}{2}\log_5 (2x-1) = \log_5 3$.

5.1.4. 1°) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$; 3) $\log_3^2 x + \log_3 x^2 = 8$;

2°) $\frac{1}{3-\lg x} + \frac{1}{1+\lg x} = 1$; 4) $\lg^3 x^2 = 8\lg x$.

5.1.5. 1) $\log_2 \left(10 - 2^x\right) = x + 2$;

2) $\lg 2 + \lg \left(4^{x-2} + 9\right) = 1 + \lg \left(2^{x-2} + 1\right)$;

3) $\log_7 \left(6 + 7^{-x}\right) = 1 + x$;

4) $\log_2 2\left(4 \cdot 3^x - 6\right) - \log_2 \left(9^x - 6\right) = 1$.

5.1.6. Розв'яжіть графічно задане рівняння і перевірте підстановкою, що знайдене значення x дійсно є коренем рівняння:

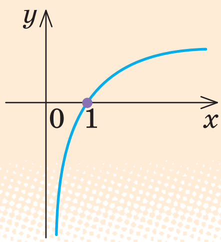
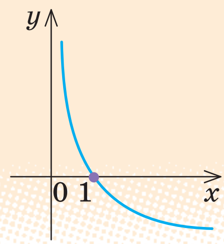
1) $\log_2 x = 3 - x$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$;

2) $\log_3 x = \log_{\frac{1}{2}} x$; 4) $\lg x = 11 - x$.

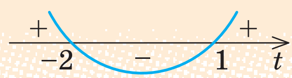
5.1.7*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 5.1.6, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

5.2. Розв'язування логарифмічних нерівностей

Таблиця 9

1. Графік функції $y=\log_a x$ $(a>0;\ a\neq 1)$	
$a>1$	$0<a<1$
 зростає	 спадає
2. Рівносильні перетворення найпростіших логарифмічних нерівностей	
$a>1$	$0<a<1$
$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x),\\ f(x)>0,\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x),\\ g(x)>0.\end{cases}$ *Знак нерівності не змінюється, і враховується ОДЗ.*	$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)>0,\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)>0.\end{cases}$ *Знак нерівності змінюється, і враховується ОДЗ.*
Приклади	
$\log_2(x-5)>3.$ ОДЗ: $x-5>0$, тобто $x>5$. $\log_2(x-5)>\log_2 2^3.$ Функція $y=\log_2 t$ є зростаючою, отже, $x-5>2^3;\ x>13.$ Ураховуючи ОДЗ, маємо $x>13$. *Відповідь*: $(13;+\infty)$.	$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)>3.$ ОДЗ: $x-5>0$, тобто $x>5$. $\log_{\frac{1}{2}}(x-5)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3.$ Функція $y=\log_{\frac{1}{2}} t$ є спадною, отже, $x-5<\left(\frac{1}{2}\right)^3;\ x<5\frac{1}{8}.$ Ураховуючи ОДЗ, маємо $5<x<5\frac{1}{8}$. *Відповідь*: $\left(5;5\frac{1}{8}\right)$.

3. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей

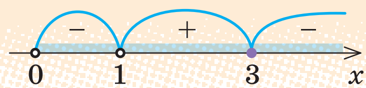
Орієнтир	Приклад
I. За допомогою рівносильних перетворень задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду. *Схема рівносильних перетворень нерівності* 1) **Ураховуємо ОДЗ** заданої нерівності (і уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ). 2) Стежимо за тим, щоб **на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності нерівності.**	$\lg^2(10x) - \lg x \geqslant 3.$ ▸ ОДЗ: $x > 0$. На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівностям $(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$; $(1 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3.$ Виконаємо заміну $\lg x = t$. Одержимо нерівність $(1+t)^2 - t \geqslant 3$, тобто $t^2 + t - 2 \geqslant 0$, множина розв'язків якої $t \leqslant -2$ або $t \geqslant 1$ (див. рисунок).  Виконавши обернену заміну, отримаємо: $\lg x \leqslant -2$ або $\lg \geqslant 1.$ Тоді $\lg x \leqslant \lg 10^{-2}$ або $\lg x \geqslant \lg 10.$ Ураховуючи, що функція $y = \lg x$ є зростаючою, одержуємо: $x \leqslant 10^{-2}$ або $x \geqslant 10.$ Після врахування ОДЗ маємо: $0 < x \leqslant 0{,}01$ або $x \geqslant 10.$ *Відповідь*: $(0; 0{,}01] \cup [10; +\infty).$ ■
II. Застосовуємо метод інтервалів (задана нерівність зводиться до нерівності виду $f(x) \gtrless 0$). *Схема методу інтервалів* 1) **Знайти ОДЗ нерівності.** 2) **Знайти нулі функції** $f(x)$.	$\log_x(2x+3) < 2.$ ▸ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Вона рівносильна нерівності $\log_x(2x+3) - 2 < 0.$ Позначимо $f(x) = \log_x(2x+3) - 2.$ 1) ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x>0, \\ x \neq 1, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

3) **Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які ОДЗ розбивається нулями.**

4) **Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.**

2) Нулі функції: $f(x)=0$; $\log_x(2x+3)-2=0$; $\log_x(2x+3)=2$. На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянню $2x+3=x^2$ (яке одержуємо за означенням логарифма). Тоді $x^2-2x-3=0$; $x_1=-1$, $x_2=3$. До ОДЗ входить тільки $x=3$, отже, $f(x)$ має єдиний нуль $x=3$.

3) Позначаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок), і записуємо множину розв'язків нерівності $f(x)<0$.



Відповідь: $(0;1)\cup(3;+\infty)$. ■

З поясненням і обґрунтуванням способів розв'язування логарифмічних нерівностей, наведених в табл. 9, можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant-1$.

Коментар

Розв'яжемо задану нерівність за допомогою рівносильних перетворень. Як і під час розв'язування рівнянь, для цього достатньо *урахувати ОДЗ заданої нерівності й стежити за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності нерівності.*

Оскільки на ОДЗ вирази, що стоять під знаком логарифмів, є додатними, то формулу $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$ для додатних b і c можна використовувати як у прямому, так і у зворотному напрямках. Отже, виконуючи перетворення нерівності за цією формулою, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на її ОДЗ).

Щоб скористатися властивостями логарифмічної функції, запишемо число -1 як значення логарифмічної функції: $-1=\log_{0,2}(0,2)^{-1}$ (зрозуміло, що і цю формулу можна використовувати як у прямому, так і у зворотному напрямках) і врахуємо, що $0,2^{-1}=\left(\frac{2}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$.

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0, \\ x+3>0. \end{cases}$ Тоді $x>1$.

На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівності

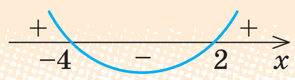
$$\log_{0,2}((x-1)(x+3)) \geqslant \log_{0,2}(0,2)^{-1}.$$

Функція $y=\log_{0,2} t$ є спадною, отже, $(x-1)(x+3) \leqslant (0,2)^{-1}$.

Одержуємо: $x^2+2x-3 \leqslant 5$; $x^2+2x-8 \leqslant 0$.

Множина розв'язків останньої нерівності така (рис. 5.2.1): $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

Рис. 5.2.1



Ураховуючи ОДЗ, одержуємо: $1<x \leqslant 2$.

Відповідь: $(1;2]$. ■

Приклад розв'язування більш складної логарифмічної нерівності наведено в інтернет-підтримці підручника.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші логарифмічні нерівності, користуючись властивостями логарифмічної функції.
2. Поясніть на прикладі використання методу інтервалів для розв'язування логарифмічних нерівностей.

ВПРАВИ

У завданнях 5.2.1–5.2.6 розв'яжіть нерівність.

5.2.1°. 1) $\log_3 x > 2$; 3) $\log_{0,5} x < 1$;
2) $\log_{0,2} x > -1$; 4) $\lg x < 2$.

5.2.2. 1) $\log_2(3x-2) > 2$; 3) $\log_5(3x-2) < 2$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) > -2$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1) > -1$.

5.2.3°. 1) $\lg(2x-1)>\lg(x+2)$; 3) $\log_{0,2}x<\log_{0,2}(3x-6)$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$; 4) $\log_4(2x-1)\leqslant\log_4(x+3)$.

5.2.4. 1) $\log_3^2 x-3\log_3 x+2>0$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-4\leqslant 0$;
2) $\dfrac{1}{3-\lg x}+\dfrac{1}{1+\lg x}>1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x+\log_{\frac{1}{2}}x-2\geqslant 0$.

5.2.5. 1) $\lg x+\lg(x-9)>1$; 3) $\log_2\left(x^2-x-12\right)<3$;
2) $\log_{0,1}(x+4)+\log_{0,1}(x-5)\leqslant -1$; 4) $\log_\pi(x+1)+\log_\pi x\geqslant\log_\pi 2$.

5.2.6*. 1) $\log_3\log_2\log_{0,5}x\geqslant 0$; 3) $\log_2 x+\log_x 2\leqslant 2,5$;
2) $\log_x\sqrt{x+12}>1$; 4) $\log_{\frac{2x-1}{x-3}}3<0$.

Деякі показникові та логарифмічні рівняння і нерівності можна розв’язати, застосовуючи властивості відповідних функцій. З основними прийомами, які використовують для цього, та прикладами розв’язування рівнянь і нерівностей можна ознайомитись, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Теми навчальних проектів

1. Показникова функція в науці, природі й техніці.
2. Логарифмічна функція в науці й природі.
3. Застосування показникової і логарифмічної функцій в економіці.
4. Показникові й логарифмічні рівняння і нерівності з параметрами.

Для виконання проекту створюється кілька груп, кожна має знайти певну інформацію.
Результати роботи над проектом кожна група оформлює у вигляді комп’ютерної презентації, захист проектів доцільно провести у формі дебатів.

З етапами роботи над проектом можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 1

1. Знайдіть область визначення функції $y=\log_5(6-2x)$.

А $(-\infty;+\infty)$ Б $(-\infty;-3)$ В $(-\infty;3)$ Г $(0;+\infty)$ Д $(3;+\infty)$

2. Знайдіть область значень функції $y=-5^x+2$.

А $(-\infty;+\infty)$ Б $(-\infty;-2)$ В $(-\infty;2)$ Г $(-2;+\infty)$ Д $(2;+\infty)$

3. Розв'яжіть рівняння $2^{1-3x}=\frac{1}{32}$ і вкажіть проміжок, до якого входять всі його корені.

А $(-\infty;-5)$ Б $[-5;-2)$ В $[-2;0)$ Г $[0;2)$ Д $[2;+\infty)$

4. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}(x-3)\geqslant -1$.

А $(-\infty;3)$ Б $(3;5]$ В $(3;5)$ Г $[3;5)$ Д $[5;+\infty)$

5. Установіть відповідність між виразами (1–3) та значеннями (А–Г) цих виразів.

1 $\ln\log_2\log_5 25$	А 9
2 $\lg 25+\lg 4$	Б 2
3 $5^{2\log_5 3}$	В 1
	Г 0

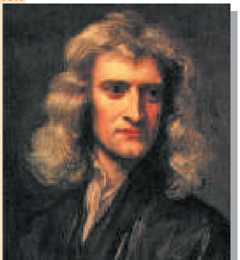
6. Розв'яжіть рівняння $4\cdot 5^x-25\cdot 2^x=0$.

7. Розв'яжіть рівняння $\log_5(x-1)+\log_5(x-5)=1$. Якщо воно має декілька коренів, знайдіть їх добуток.

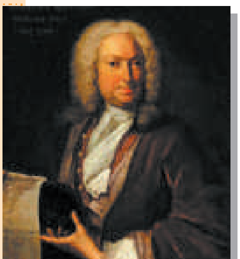
8. Розв'яжіть нерівність $0{,}5^{2x}-3\cdot 0{,}5^x+2<0$.

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

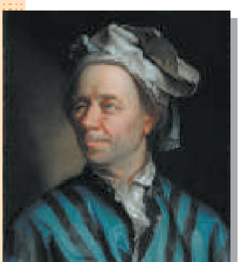
Відомості з історії



І. Ньютон (1642–1727)



Й. Бернуллі (1667–1748)



Л. Ейлер (1707–1783)

Поняття показникової функції було введено на основі степеневої функції з раціональним показником, яка має давню історію. Зокрема дробовими показниками степеня й найпростішими правилами дій над степенями з дробовими показниками оперував у XIV ст. французький математик **Н. Орем** (бл. 1323–1382). Відомо, що **Н. Шюке** (бл. 1445 — бл. 1500) розглядав степені з від'ємними і нульовим показниками.

С. Стевін запропонував розуміти під $a^{\frac{1}{n}}$ корінь $\sqrt[n]{a}$. Але систематично дробові й від'ємні показники став застосовувати **І. Ньютон**.

Німецький математик **М. Штіфель** (1487–1567) запропонував позначення $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$, і ввів назву *показник* (це переклад із німецької *exponent*). Термін *логарифм* походить від сполучення грецьких слів «логос» (у значенні «відношення») і «аритмос» (число) і перекладається як *відношення чисел*. Вибір винахідником логарифмів **Дж. Непером** (1550–1617) такої назви у 1594 р. пояснюється тим, що логарифми виникли внаслідок зіставлення двох чисел, одне з яких є членом арифметичної прогресії, а друге — геометричної. Логарифми з основою e увів **Дж. Спейдел** (1600–1634), який склав перші таблиці для функції $y = \ln x$. Назву *натуральний* (природний) для цього логарифма запропонував **Н. Меркатор** (1620–1687), який виявив, що $\ln x$ — це площа фігури під *гіперболою* $\frac{1}{x}$.

Близьке до сучасного розуміння логарифмування як операції, оберненої до піднесення до степеня, уперше з'явилося в роботах **Дж. Волліса** (1616–1703) і **Й. Бернуллі** (1667–1748), а остаточно було уточнено у XVIII ст. **Л. Ейлером** (1707–1783). У книзі «Вступ до аналізу нескінченних» у 1748 р. Ейлер сформулював сучасне означення як показникової, так і логарифмічної функцій і навів їх розкладання у степеневі ряди, зазначив особливу роль натурального логарифма.

Розділ 2

ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

У цьому розділі ви:

- ознайомитеся з поняттям первісної, інтеграла і криволінійної трапеції;
- навчитеся знаходити первісні та інтеграли, а також застосовувати інтеграли до визначення площ криволінійних трапецій.

§ 6. ПЕРВІСНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 10

1. Первісна

Означення

Означення. **Функція $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ на даному проміжку, якщо для будь-якого x із цього проміжку**

$$F'(x)=f(x).$$

Приклад

Для функції $f(x)=x^3$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ первісною є функція $F(x)=\frac{x^4}{4}$, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=\frac{1}{4}\cdot 4x^3=x^3.$$

2. Основна властивість первісної

Властивість

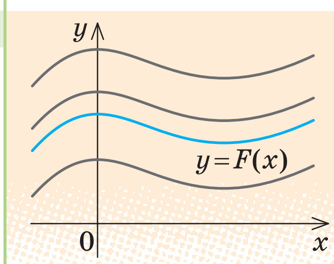
Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C — довільна стала, то функція $F(x)+C$ також є первісною для функції $f(x)$, при цьому будь-яку первісну для функції $f(x)$ на даному проміжку можна записати у вигляді $F(x)+C$, де C — довільна стала.

Геометричний зміст

Графіки будь-яких первісних для заданої функції одержують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy.

Приклад

Оскільки функція $F(x)=\frac{x^4}{4}$ є первісною для функції $f(x)=x^3$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ (див. вище), то *загальний вигляд усіх первісних для функції* $f(x)=x^3$ можна записати так: $\frac{x^4}{4}+C$, де C — довільна стала.



3. Невизначений інтеграл

Означення

Означення. **Сукупність усіх первісних для даної функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом*.**

Невизначений інтеграл позначають символом $\int f(x)\,dx$, тобто

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

де $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$, а C — довільна стала.

Приклад

$$\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}+C,$$

оскільки для функції $f(x)=x^3$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ усі первісні можна записати так: $\frac{x^4}{4}+C$ (див. п. 2 табл. 10).

4. Правила знаходження первісних (правила інтегрування)

Якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F+G$ — первісна для функції $f+g$. *Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків.*	1) $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ *Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків.*
Якщо F — первісна для f, а c — стала, то cF — первісна для функції cf.	2) $\int c\cdot f(x)dx=c\int f(x)dx$, де c — стала. *Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.*
Якщо F — первісна для f, а k і b — сталі (причому $k\neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.	3) $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$.

5. Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x)+C$, де C — довільна стала	Запис за допомогою невизначеного інтеграла
0	C	$\int 0\cdot dx=C$
1	$x+C$	$\int dx=x+C$
x^{α} $(\alpha\neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+C$	$\int \frac{dx}{x}=\ln\|x\|+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\int \sin x dx=-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$	$\int \cos x dx=\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$
e^x	e^x+C	$\int e^x dx=e^x+C$
a^x $(a>0,\ a\neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Поняття первісної. Основна властивість первісних

У 10 класі ми знаходили похідну заданої функції і застосовували цю операцію — диференціювання — до розв'язування різноманітних задач. Однією з таких задач було знаходження швидкості й прискорення прямолінійного руху за відомою залежністю від часу координати $x(t)$ матеріальної точки:

$$v(t)=x'(t),\quad a(t)=v'(t)=x''(t).$$

Наприклад, якщо в початковий момент часу $t=0$ швидкість тіла дорівнює нулю, тобто $v(0)=0$, то в процесі вільного падіння тіло за проміжок часу t (тобто на момент часу t) пройде шлях

$$s(t)=\frac{gt^2}{2}.$$

Швидкість і прискорення знаходять за допомогою диференціювання:

$$v(t)=s'(t)=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=\frac{g}{2}\cdot 2t=gt,\quad a(t)=v'(t)=(gt)'=g.$$

Але важливо вміти не тільки знаходити похідну заданої функції, а й розв'язувати обернену задачу: знаходити функцію $f(x)$ за її заданою похідною $f'(x)$. Наприклад, у механіці часто доводиться визначати координату $x(t)$, знаючи залежність від часу швидкості $v(t)$, а також знаходити швидкість $v(t)$, знаючи залежність від часу прискорення $a(t)$. Знаходження функції $f(x)$ за її заданою похідною $f'(x)$ називають операцією *інтегрування*.

Отже, *операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання*. Операція інтегрування дозволяє за заданою похідною $f'(x)$ знайти (відновити) функцію $f(x)$.

> Інтегрування — від. латин. *integratio* — відновлення.

Наведемо означення понять, пов'язаних з операцією інтегрування.

Означення. **Функція $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ на даному проміжку, якщо для будь-якого x із цього проміжку $F'(x)=f(x)$.**

Наприклад, для функції $f(x)=3x^2$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ первісною є функція $F(x)=x^3$, оскільки $F'(x)=(x^3)'=3x^2$.

Зазначимо, що функція x^3+5 має таку саму похідну $(x^3+5)'=3x^2$. Отже, функція x^3+5 також є первісною для функції $3x^2$ на множині $\boldsymbol{R}$. Зрозуміло, що замість числа 5 можна підставити будь-яке інше число. Тому задача знаходження первісної має безліч розв'язків. Знайти всі ці розв'язки дозволяє **основна властивість первісної.**

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C — довільна стала, то функція $F(x)+C$ також є первісною для функції $f(x)$. При цьому будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x)+C$, де C — довільна стала.

Вираз $F(x)+C$ називають *загальним виглядом первісних* для функції $f(x)$.

1) За умовою функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку I. Отже, $F'(x)=f(x)$ для будь-якого x із цього проміжку I. Тоді

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x),$$

тобто $F(x)+C$ теж є первісною для функції $f(x)$.

2) Нехай функція $F_1(x)$ — інша первісна для функції $f(x)$ на тому самому проміжку I, тобто $F_1'(x)=f(x)$ для всіх $x\in I$. Тоді

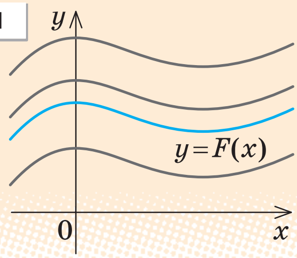
$$(F_1(x)-F(x))'=F_1'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

За умовою сталості функції (§ 16 підручника для 10 класу), *якщо похідна функції $F_1(x)-F(x)$ дорівнює нулю на проміжку I, то ця функція набуває деякого сталого значення C на цьому проміжку*. Отже, для всіх $x\in I$ функція $F_1(x)-F(x)=C$. Звідси $F_1(x)=F(x)+C$. Маємо: будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x)+C$, де C — довільна стала. ■

Наприклад, оскільки для функції $f(x)=2x$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ однією з первісних є функція $F(x)=x^2$ (справді, $F'(x)=(x^2)'=2x$), то загальний вигляд усіх первісних функції для функції $f(x)=2x$ можна записати так: x^2+C, де C — довільна стала.

Зазвичай при знаходженні первісної для функції $f(x)$ проміжок, на якому задано функцію $f(x)$, не вказують. При цьому мають на увазі проміжки найбільшої довжини.

Рис. 6.1



Геометричний зміст основної властивості первісної: *графіки будь-яких первісних для даної функції $f(x)$ одержують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy* (рис. 6.1). Справді, графік довільної первісної $F(x)+C$ можна одержати з графіка первісної $F(x)$ паралельним перенесенням уздовж осі Oy на C одиниць.

2. Невизначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ має на деякому проміжку первісну $F(x)$. Тоді за основною властивістю первісної сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на заданому проміжку задається формулою $F(x)+C$, де C — довільна стала.

Означення. Сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом.*

Невизначений інтеграл позначають символом $\int f(x)dx$, тоді $\int f(x)dx = F(x)+C$, де $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$, а C — довільна стала.

У наведеній рівності знак $\int$ називають *знаком інтеграла*, функцію $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, вираз $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*, змінну x — *змінною інтегрування* і доданок C — *сталою інтегрування*.

Наприклад, як зазначалося вище, загальний вигляд первісних для функції $f(x)=2x$ записують так: x^2+C, отже, $\int 2x dx = x^2+C$.

3. Правила знаходження первісних (правила інтегрування)

Ці правила подібні до відповідних правил диференціювання.

Правило 1. *Якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F+G$ — первісна для $f+g$.*
Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків.

Справді, якщо F — первісна для f (у цьому короткому формулюванні мається на увазі, що функція $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$), то $F'=f$. Аналогічно, якщо G — первісна для g то $G' = g$. Тоді за правилом обчислення похідної суми маємо:

$$(F+G)' = F' + G' = f + g,$$

а це й означає, що $F+G$ — первісна для $f+g$. ■

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

тобто *інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків.*

Правило 1 можна поширити на будь-яку кількість доданків (оскільки похідна від будь-якої кількості доданків дорівнює сумі похідних доданків).

Правило 2. *Якщо F — первісна для f, а c — стала, то cF — первісна для функції cf.*

Справді, якщо F — первісна для f, то $F' = f$. Ураховуючи, що сталий множник можна виносити за знак похідної, маємо $(cF)' = cF' = cf$, а це й означає, що cF — первісна для cf. ■

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int c \cdot f(x)dx = c\int f(x)dx, \text{ де } c \text{ — стала,}$$

тобто *сталий множник можна виносити за знак інтеграла.*

Правило 3. *Якщо F — первісна для f, а k і b — сталі (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.*

Справді, якщо F — первісна для f, то $F' = f$. Ураховуючи правило обчислення похідної складеної функції, маємо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b),$$

а це й означає, що $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$. ■

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

4. Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Для обчислення первісних (чи невизначених інтегралів), крім правил знаходження первісних, корисно пам'ятати табличні значення первісних для деяких функцій. Їх наведено в п. 5 табл. 10. Щоб обґрунтувати правильність цього пункту таблиці, достатньо перевірити, що похідна від указаної первісної (без сталого доданку C) дорівнює заданій функції. Це буде означати, що розглянута функція дійсно є первісною для заданої функції. Оскільки в записі всіх первісних у другій колонці присутній сталий доданок C, то за основною властивістю первісних можна зробити висновок, що це загальний вигляд усіх первісних заданої функції.

Наведемо обґрунтування формули, за якою знаходять первісну для функцій x^α.

Для інших функцій пропонуємо провести аналогічну перевірку самостійно.

Для всіх x з області визначення функції x^α при $\alpha \neq -1$ похідна $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)x^\alpha = x^\alpha$. Отже, функція $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $\alpha \neq -1$ є первісною для функції x^α. Тоді за основною властивістю первісних **загальний вигляд усіх первісних для функції x^α при $\alpha \neq -1$ буде таким:**

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

За допомогою невизначеного інтеграла це твердження записують так:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Перевірте, чи є функція $F(x) = 2\sqrt{x}$ первісною для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

Розв'язання

$F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, це й означає, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Коментар

За означенням функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.

Приклад 2. Знайдіть:

1) одну з первісних для функції $f(x)=x^4$ на $\boldsymbol{R}$;

2) усі первісні для функції $f(x)=x^4$;

3*) $\int x^4 dx$.

Розв'язання

1) ▶ Однією з первісних для функції $f(x)=x^4$ на множині $\boldsymbol{R}$ є функція

$F(x)=\frac{x^5}{5}$, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5x^4=x^4.$$

■

2) ▶ За основною властивістю первісних усі первісні для функції $f(x)=x^4$ можна записати у вигляді $\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ■

3*) ▶ $\int x^4 dx=\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ■

Коментар

1) Первісну для функції $f(x)=x^4$ спробуємо знайти підбором. В процесі можна міркувати так: щоб після знаходження похідної одержати x^4, потрібно брати похідну від x^5. Але $(x^5)'=5x^4$, щоб похідна дорівнювала x^4, достатньо поставити перед функцією x^5 коефіцієнт $\frac{1}{5}$.

Простіше використати формулу з п. 5 табл. 10 (таблиці первісних): *однією з первісних для функції x^α є функція*

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

2) *Якщо ми знаємо одну первісну $F(x)$ для функції $f(x)$, то* за основною властивістю первісних *будь-яку первісну для функції $f(x)$ можна записати у вигляді $F(x)+C$*, де C — довільна стала.

3) За означенням $\int f(x)dx=F(x)+C$,

тобто невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ — це спеціальне позначення загального виду всіх первісних для даної функції $f(x)$ (який ми вже знайшли в п. 2 розв'язання).

Приклад 3. Для функції $f(x)=\sqrt{x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(9;10)$.

Розв'язання

$D(f)=[0;+\infty)$. Тоді $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$.

Загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$ такий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

За умовою графік первісної проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ одержуємо

$$\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+C=10.$$

Звідси $C=-8$. Тоді шукана первісна:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8.$$

Коментар

Спочатку запишемо загальний вигляд первісних для заданої функції: $F(x)+C$. Потім використаємо те, що графік одержаної функції проходить через точку $M(9;10)$, отже, при $x=9$ значення функції $F(x)+C$ дорівнює 10.

Щоб знайти первісну для функції $f(x)=\sqrt{x}$, урахуємо, що її область визначення $x\geqslant 0$. Тоді цю функцію можна записати так: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ і використати формулу знаходження первісної для функції x^{α}, а саме: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

З прикладом розв'язування більш складного завдання, пов'язаного зі знаходженням первісних, можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, у якому випадку функцію $F(x)$ називають первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку. Наведіть приклади.
2. Сформулюйте основну властивість первісних і проілюструйте її на прикладах.
3. Сформулюйте правила знаходження первісних. Поясніть їх на прикладах.

4*. Доведіть правила знаходження первісних.

5. Запишіть загальний вигляд первісних для функцій: x^{α} $(\alpha\neq -1)$, $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sin^2 x}$, e^x, a^x $(a>0,\ a\neq 1)$. Поясніть, як перевірити правильність запису кожної первісної.

ВПРАВИ

У завданнях 6.1, 6.2 доведіть, що функція $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на зазначеному проміжку.

6.1°. 1) $F(x)=x^5$, $f(x)=5x^4$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

2) $F(x)=x^{-3}$, $f(x)=-3x^{-4}$, $x\in(0;+\infty)$;

3) $F(x)=\frac{1}{7}x^7$, $f(x)=x^6$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

4) $F(x)=-\frac{1}{6}x^{-6}$, $f(x)=x^{-7}$, $x\in(0;+\infty)$.

6.2. 1) $F(x)=\sin^2 x$, $f(x)=\sin 2x$, $x\in \boldsymbol{R}$;

2) $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$, $f(x)=-\sin 2x$, $x\in \boldsymbol{R}$;

3) $F(x)=\sin 3x$, $f(x)=3\cos 3x$, $x\in \boldsymbol{R}$;

4) $F(x)=3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $f(x)=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, $x\in(-\pi;\pi)$.

6.3. Перевірте, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)$, якщо:

1) $F(x)=\sin x-x\cos x$, $f(x)=x\sin x$;

2) $F(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

3) $F(x)=\cos x+x\sin x$, $f(x)=x\cos x$;

4) $F(x)=x-\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1+x^2}{x^2}$.

У завданнях 6.4, 6.5 визначте, чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на зазначеному проміжку.

6.4°. 1) $F(x)=3-\sin x$, $f(x)=\cos x$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

2) $F(x)=5-x^4$, $f(x)=-4x^3$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

3) $F(x)=\cos x-4$, $f(x)=-\sin x$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

4) $F(x)=x^{-2}+2$, $f(x)=\frac{1}{2x^3}$, $x\in(0;+\infty)$.

6.5. 1) $F(x)=2x+\cos\frac{x}{2}$, $f(x)=2-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x\in\boldsymbol{R}$;

2) $F(x)=\sqrt{4-x^2}$, $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x\in(-2;2)$;

3) $F(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(x)=14-\frac{1}{x^2}$, $x\in(0;+\infty)$;

4) $F(x)=4x\sqrt{x}$, $f(x)=6\sqrt{x}$, $x\in(0;+\infty)$.

У завданнях 6.6, 6.7 знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)$.

6.6°. 1) $f(x)=2-x^4$;

2) $f(x)=x+\cos x$;

3) $f(x)=4x$;

4) $f(x)=-8$;

5) $f(x)=x^6$;

6) $f(x)=\frac{1}{x^3}-2$;

7) $f(x)=1-\frac{1}{x^4}$;

8) $f(x)=x^3$.

6.7*. 1) $f(x)=2-x^3+\frac{1}{x^3}$;

2) $f(x)=x-\frac{2}{x^5}+\cos x$;

3) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x$;

4) $f(x)=5x^2-1$;

5) $f(x)=(2x-8)^5$;

6) $f(x)=3\sin 2x$;

7) $f(x)=(4-5x)^7$;

8) $f(x)=-\frac{1}{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

9) $f(x)=\frac{3}{(4-15x)^4}$.

6.8. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що набуває заданого значення в зазначеній точці:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right)=-12$;

2) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$;

3) $f(x)=x^3$, $F(-1)=2$;

4) $f(x)=\sin x$, $F(-\pi)=-1$.

У завданнях 6.9, 6.10 для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку M.

6.9. 1) $f(x)=2x+1$, $M(0;0)$; 3) $f(x)=x+2$, $M(1;3)$;

2) $f(x)=3x^2-2x$, $M(1;4)$; 4) $f(x)=-x^2+3x$, $M(2;-1)$.

6.10°. 1) $f(x)=2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{2};1\right)$; 3) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3};-1\right)$;

2) $f(x)=1-x^2$, $M(-3;9)$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2};3\right)$.

Виявіть свою компетентність

6.11. Швидкість матеріальної точки, що рухається прямолінійно, задана формулою $v(t)=t^2+2t-1$. Запишіть формулу залежності її координати x від часу t, якщо відомо, що в початковий момент часу ($t=0$ с) точка перебувала в початку координат (v вимірюється у метрах на секунду).

6.12*. Матеріальна точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t)=12t^2+4$. Знайдіть закон руху точки, якщо в момент часу $t=1$ с її швидкість дорівнює 10 м/с, а координата — 12 м (a вимірюється у метрах на секунду в квадраті).

6.13*. Матеріальна точка масою m рухається по осі Ox під дією сили $F(t)$, напрямленої вздовж цієї осі. Запишіть формулу залежності $x(t)$, якщо відомо, що при $t=t_0$ швидкість точки дорівнює v_0, а координата — x_0 ($F(t)$ вимірюють у ньютонах, t — у секундах, v — у метрах на секунду, m — у кілограмах):

1) $F(t)=6-9t$, $t_0=1$, $v_0=4$, $x_0=-5$, $m=3$;

2) $F(t)=14\sin t$, $t_0=\pi$, $v_0=2$, $x_0=3$, $m=7$;

3) $F(t)=25\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, $v_0=2$, $x_0=4$, $m=5$;

4) $F(t)=8t+8$, $t_0=2$, $v_0=9$, $x_0=7$, $m=4$.

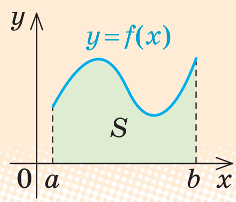
§ 7. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Таблиця 11

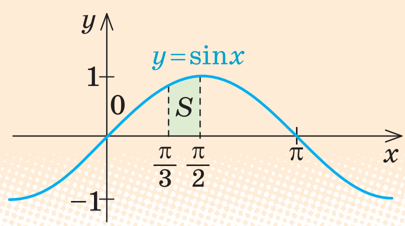
1. Обчислення визначеного інтеграла (формула Ньютона — Лейбніца)

Формула	Приклад
Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ — її довільна первісна на цьому відрізку $(F'(x)=f(x))$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b)-F(a).$	Оскільки для функції $f(x)=x^2$ однією з первісних є функція $F(x)=\frac{x^3}{3}$, то $\int\limits_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big\vert_1^2 = \frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$

2. Криволінійна трапеція

Означення	Ілюстрація
Нехай на відрізку $[a;b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка набуває на ньому тільки невід'ємних значень. **Фігура, обмежена графіком функції $y=f(x)$, відрізком $[a;b]$ осі Ox і прямими $x=a$ і $x=b$, називається *криволінійною трапецією*.**	

3. Площа криволінійної трапеції

Формула	Приклад
$S=\int\limits_a^b f(x)dx$	Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$. Зобразивши ці лінії, отримаємо криволінійну трапецію.  $S=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big\vert_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$

4. Властивості визначених інтегралів		
$\int_a^a f(x)dx=0$	$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$	$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$		Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і $c\in[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

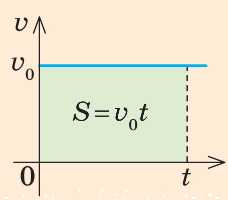
1. Геометричний зміст і означення визначеного інтеграла

Як було зазначено в § 6, *інтегрування — це дія, обернена до диференціювання*. Вона дозволяє за заданою похідною функції знайти (відновити) цю функцію. Покажемо, що ця операція тісно пов'язана із задачею обчислення площі фігури.

Наприклад, у механіці часто доводиться визначати координату $x(t)$ матеріальної точки, що рухається прямолінійно, знаючи залежність її швидкості від часу $v(t)$ (нагадаємо, що $v(t)=x'(t)$).

Розглянемо спочатку випадок, коли точка рухається з постійною швидкістю $v=v_0$. Графіком швидкості в системі координат $(t;v)$ є пряма $v=v_0$, паралельна осі часу t (рис. 7.1). Якщо вважати, що в початковий момент часу $t=0$ точка перебувала в початку координат, то шлях s, пройдений нею за час t, обчислюють за формулою $s=v_0t$. Величина v_0t дорівнює площі S прямокутника, обмеженого графіком швидкості, віссю абсцис і двома вертикальними прямими, тобто шлях точки можна обчислити як площу фігури, розташованої під графіком швидкості.

Рис. 7.1



Розглянемо випадок нерівномірного руху. Тепер швидкість можна вважати постійною тільки на маленькому відрізку часу Δt. Якщо швидкість v змінюється за законом $v=v(t)$, то шлях, пройдений за відрізок часу $[t;t+\Delta t]$, наближено виражається

Рис. 7.2

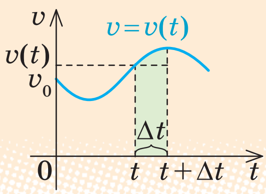


Рис. 7.3

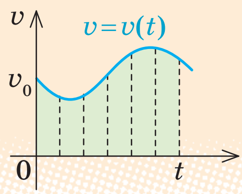
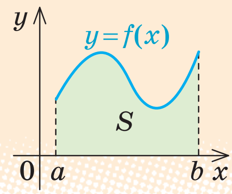


Рис. 7.4



добутком $v(t)\cdot\Delta t$, На графіку цей добуток дорівнює площі прямокутника зі сторонами Δt і $v(t)$ (рис. 7.2). Точне значення шляху, пройденого за відрізок часу $[t; t+\Delta t]$, дорівнює площі *криволінійної трапеції*, виокремленої на цьому рисунку. Тоді весь шлях, пройдений матеріальною точкою за відрізок часу $[0; t]$, можна обчислити додаванням площ таких криволінійних трапецій, тобто шлях дорівнюватиме площі зафарбованої фігури під графіком швидкості (рис. 7.3).

Наведемо відповідні означення й обґрунтування, які дозволять зробити ці міркування більш строгими.

Нехай на відрізку $[a; b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка набуває на цьому відрізку тільки невід'ємних значень.

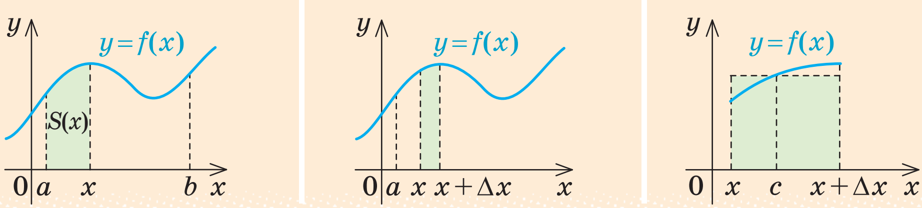
О **Означення.** **Фігура, обмежена графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, називається *криволінійною трапецією* (рис. 7.4).**

Відрізок $[a; b]$ називають *основою криволінійної трапеції*.

З'ясуємо, як можна обчислити площу криволінійної трапеції за допомогою первісної для функції $f(x)$.

Позначимо через $S(x)$ площу криволінійної трапеції з основою $[a; x]$ (рис. 7.5, *а*), де x — будь-яка точка відрізка $[a; b]$. При $x = a$ відрі-

Рис. 7.5 а б в



зок $[a;x]$ вироджується в точку, і тому $S(a)=0$; при $x=b$ маємо $S(b)=S$, де S — площа криволінійної трапеції з основою $[a;b]$ (див. рис. 7.4).

- Покажемо, що *функція* $S(x)$ *є первісною для функції* $f(x)$, тобто що $S'(x)=f(x)$.

  Відповідно до означення похідної потрібно довести, що $\frac{\Delta S}{\Delta x}\to f(x)$ при $\Delta x\to 0$.

  Для спрощення міркувань розглянемо випадок $\Delta x>0$ (випадок $\Delta x<0$ розглядається аналогічно).

  Оскільки $\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$, то з точки зору геометрії ΔS — площа фігури, виокремленої на рис. 7.5, *б*.

  Розглянемо тепер прямокутник із такою самою площею ΔS, однією зі сторін якого є відрізок $[x;x+\Delta x]$ (рис. 7.5, *в*). Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то верхня сторона цього прямокутника перетинає графік функції в деякій точці з абсцисою $c\in[x;x+\Delta x]$ (інакше розглянутий прямокутник або містить криволінійну трапецію, виокремлену на рис. 7.5, *в*, або міститься в ній, і, відповідно, його площа буде більшою або меншою від площі ΔS). Висота прямокутника дорівнює $f(c)$. За формулою площі прямокутника маємо: $\Delta S=f(c)\Delta x$.

  Тоді $\frac{\Delta S}{\Delta x}=\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=f(c)$. (Ця формула буде правильною і при $\Delta x<0$.)

  Оскільки точка c лежить між точками x і $x+\Delta x$, то c прямує до x, якщо $\Delta x\to 0$. Ураховуючи неперервність функції $f(x)$, одержуємо також, що $f(c)\to f(x)$ при $\Delta x\to 0$.

  Отже, $\frac{\Delta S}{\Delta x}\to f(x)$ при $\Delta x\to 0$. Це означає, що $S'(x)=f(x)$, тобто $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$. ■

Оскільки функція $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то за основною властивістю первісних будь-яка інша первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ для всіх $x\in[a;b]$ відрізняється від $S(x)$ на постійну C, тобто

$$F(x)=S(x)+C. \quad (1)$$

Щоб знайти C, підставимо $x=a$. Одержуємо $F(a)=S(a)+C$. Оскільки $S(a)=0$, то $C=F(a)$ і рівність (1) можна записати так:

$$S(x)=F(x)-F(a). \quad (2)$$

Ураховуючи, що площа криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$, підставляємо у формулу (2) $x=b$ і одержуємо $S=S(b)=F(b)-F(a)$.

Тобто, **площу криволінійної трапеції** (див. рис. 7.4) **можна обчислити за формулою**

$$S = F(b) - F(a), \tag{3}$$

де $F(x)$ **— довільна первісна для функції** $f(x)$.

Отже, обчислення площі криволінійної трапеції зводиться до знаходження первісної $F(x)$ для функції $f(x)$, тобто до інтегрування функції $f(x)$.

Означення. **Різниця** $F(b) - F(a)$ **називається** ***визначеним інтегралом функції*** $f(x)$ **на відрізку** $[a; b]$.

Визначений інтеграл позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Запис $\int_a^b f(x)dx$ читають: «інтеграл від *a* до *b* еф від ікс де ікс».

Числа a і b називають *межами інтегрування*: a — нижньою межею, b — верхньою. Отже, за наведеним означенням

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Формулу (4) називають **формулою Ньютона — Лейбніца**.

В записі обчислення визначеного інтеграла різницю $F(b) - F(a)$ прийнято позначати так: $F(x)\Big|_a^b$, тобто $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Користуючись цим позначенням, формулу Ньютона — Лейбніца можна записати в такому вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Наприклад, оскільки для функції $f(x) = e^x$ однією з первісних є $F(x) = e^x$, то $\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.

У тому випадку коли для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, функцію $f(x)$ називають *інтегрованою на відрізку* $[a; b]$.

Із формул (3) і (4) випливає, що *площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної на відрізку* $[a; b]$ *функції* $y = f(x)$, *відрізком* $[a;b]$ *осі* Ox *і прямими* $x=a$ і $x=b$ (див. рис. 7.4), *можна обчислювати за формулою* $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

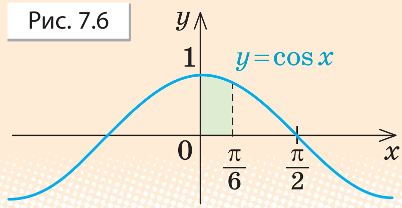


Рис. 7.6

Це співвідношення відображає **геометричний зміст визначеного інтеграла.**

Наприклад, площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=\cos x$, відрізком $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ осі Ox і прямими $x=0$ і $x=\frac{\pi}{6}$ (рис. 7.6), можна обчислити за формулою $S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

(В процесі обчислення визначеного інтеграла враховано, що для функції $f(x)=\cos x$ однією з первісних є функція $F(x)=\sin x$.)

Більш детально з обчисленням площ і об'ємів за допомогою визначених інтегралів можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

У задачах із курсу алгебри і початків аналізу на обчислення площ як відповідь найчастіше наводять числове значення площі. Оскільки на координатній площині, де зображено фігуру, завжди вказують одиницю виміру по осях, то ми маємо й одиницю виміру площі — квадрат зі стороною 1.
Інколи, щоб підкреслити, що одержане число виражає саме площу, відповідь до останнього прикладу записують так: $S=\frac{1}{2}$ (кв. од.), тобто вказують кількість квадратних одиниць. Зазначимо, що у такий спосіб записують тільки числові відповіді. Якщо в результаті обчислень площі ми одержали, наприклад, $S=2a^2$, то ніяких одиниць площі не записують, оскільки відрізок a був виміряний у якихось лінійних одиницях, і тоді вираз a^2 містить інформацію про квадратні одиниці, у яких вимірюють площу в цьому випадку.

2. Властивості визначених інтегралів

Формулюючи означення визначеного інтеграла, ми вважали, що $a<b$. Доцільно розширити поняття визначеного інтеграла.

Для випадку $a>b$ приймемо за означенням, що

$$\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx. \qquad (5)$$

Для випадку $a=b$ також за означенням вважатимемо, що

$$\int_a^a f(x)dx=0. \qquad (6)$$

Формальне застосування формули Ньютона — Лейбніца до обчислення інтегралів у формулах (5) і (6) дає такий самий результат. Справді, якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то

$$\int_a^a f(x)dx=F(x)\Big|_a^a=F(a)-F(a)=0.$$

Також

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=-\big(F(a)-F(b)\big)=-\int_b^a f(x)dx.$$

За допомогою формули Ньютона — Лейбніца легко обґрунтувати й інші властивості визначених інтегралів, наведені в п. 4 табл. 11.

Ознайомитись із відповідним обґрунтуванням, а також з можливістю іншого означення визначеного інтеграла, яке використовується в курсах математичного аналізу, ви можете, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Корисно знати, що визначений інтеграл широко використовується для опису різноманітних процесів у різних науках, наприклад у фізиці та економіці.

Економіка

Π — дисконтована вартість грошового потоку,
I — швидкість грошового потоку,
p — річна відсоткова ставка,
t — час

$$\Pi=\int_0^T I(t)e^{-pt}dt$$

f — продуктивність,
t — час,
V — об'єм продукції

$$V=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

q — кількість товару,
p — ціна товару (вартість одиниці),
$(p_0;q_0)$ — точка рівноваги попиту і пропозиції,
CS — надлишок для споживача,
PS — надлишок виробника

$$CS=\int_0^{q_0} p(q)dq-p_0q_0; \quad PS=p_0q_0-\int_0^{q_0} p(q)dq$$

Фізика

A — робота,
F — сила,
N — потужність

$$A=\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

$$A=\int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt$$

Q — кількість теплоти,
c — теплоємність

$$Q=\int_{t_1}^{t_2} c(t)\,dt$$

s — переміщення,
v — швидкість,
a — прискорення

$$v=\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

q — електричний заряд,
I — сила току

$$q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt$$

m — маса тонкого стрижня,
ρ — лінійна густина

$$m=\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\,dx$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. Обчисліть $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Розв'язання

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}0=$$

$$=1-0=1.$$

Відповідь: 1.

Коментар

Оскільки для функції $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ми знаємо первісну: $F(x)=\operatorname{tg} x$ (див. табл. 10), то заданий інтеграл можна обчислити безпосереднім застосуванням формули Ньютона — Лейбніца

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Приклад 2. Обчисліть $\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx$.

Розв'язання

I спосіб

Для функції $f(x) = \frac{4}{x} - x$ однією з первісних є функція $F(x) = 4\ln|x| - \frac{x^2}{2}$. Тоді

$$\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx = \left(4\ln|x| - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(4\ln|3| - \frac{3^2}{2}\right) - \left(4\ln|1| - \frac{1^2}{2}\right) =$$

$$= 4\ln 3 - 4.$$

II спосіб

$$\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx = \int_1^3 \frac{4dx}{x} - \int_1^3 x dx =$$

$$= 4\int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^3 x dx = 4\ln|x|\Big|_1^3 - \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^3 =$$

$$= 4(\ln|3| - \ln|1|) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) =$$

$$= 4\ln 3 - 4.$$

Коментар

Можливі два шляхи обчислення заданого інтеграла.

1) Спочатку знайти первісну для функції $f(x) = \frac{4}{x} - x$, використовуючи правила обчислення первісних і таблицю первісних, а потім знайти інтеграл за формулою Ньютона — Лейбніца.

2) Використати формулу

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

і записати заданий інтеграл як алгебраїчну суму двох інтегралів, кожний із яких можна безпосередньо обчислити, як у прикладі 1 (для першого доданка можна також використати формулу $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ і винести сталий множник 4 за знак інтеграла).

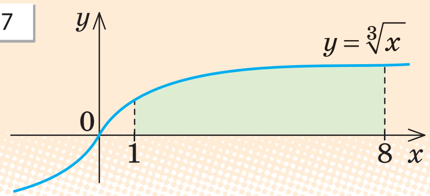
Заданий інтеграл розглядають на відрізку $[1; 3]$, де $x > 0$. Але при $x > 0$ однією з первісних для функції $f(x) = \frac{1}{x}$ є функція $F(x) = \ln x$. Тому, враховуючи, що $x > 0$, можна, наприклад, записати, що $\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^3$. Хоча, звичайно, наведений вище запис первісної теж є правильним (оскільки при $x > 0$ $\ln|x| = \ln x$).

Приклад 3. Обчисліть площу фігури, обмеженої прямими $x=1$, $x=8$, віссю Ox і графіком функції $y=\sqrt[3]{x}$.

Розв'язання

▶ Зображуючи зазначені лінії, бачимо, що задана фігура — криволінійна трапеція (рис. 7.7).

Рис. 7.7



Тоді її площа

$$S=\int_1^8\sqrt[3]{x}\,dx=\int_1^8 x^{\frac{1}{3}}dx=\left.\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right|_1^8=\left.\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right|_1^8=$$

$$=\frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8^4}-1\right)=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $11\frac{1}{4}$. ■

Коментар

Задана фігура є криволінійною трапецією, і тому її площу можна обчислити за формулою

$$S=\int_a^b f(x)dx,$$

де $a=1$, $b=8$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Також потрібно врахувати, що на заданому відрізку $[1;8]$ значення $x>0$, і за цієї умови можна записати $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

ВПРАВИ

7.1. Обчисліть інтеграл:

1°) $\int_{-1}^{2} x^4dx$;

2°) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;

3°) $\int_{1}^{3} x^3dx$;

4°) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

5) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2}$;

6) $\int_{0}^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}dx$;

7) $\int_{1}^{10} \frac{dx}{x^2}$;

8) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.

7.2. Доведіть правильність рівності:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^1 dx$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$;

4) $\int\limits_0^1 (2x+1)dx = \int\limits_0^2 (x^3-1)dx$.

7.3. Обчисліть інтеграл:

1) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3} dx$;

2) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$;

3) $\int\limits_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}}$;

4) $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;

5) $\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$;

6) $\int\limits_0^2 (1+2x)^3 dx$;

7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x) dx$;

8) $\int\limits_1^4 \left(x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$.

У завданнях 7.4–7.8 обчисліть (попередньо виконавши рисунок) площу фігури, обмеженої заданими лініями.

7.4. 1) $y = x^4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;

2) $y = x^4$, $y = 1$;

3) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$;

4) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$.

7.5. 1) $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = 0$;

2) $y = 2 - x^3$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$;

3) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;

4) $y = -x^2 - 4x$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -1$.

7.6. 1) $y=x^3$, $y=8$, $x=1$;

2) $y=2\cos x$, $y=1$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$;

3) $y=x^2-2x+4$, $y=3$, $x=-1$;

4) $y=\sin x$, $y=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=-\frac{5\pi}{6}$.

7.7. 1) $y=4x-x^2$, $y=4-x$;

2) $y=\frac{16}{x^2}$, $y=2x$, $x=4$;

3) $y=x^2$, $y=2x$;

4) $y=6-2x$, $y=6+x-x^2$.

7.8. 1) $y=x^2-4x+4$, $y=4-x^2$;

2) $y=x^2-2x+2$, $y=2+6x-x^2$;

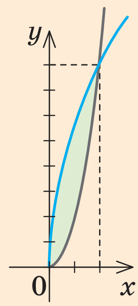
3) $y=x^2$, $y=2x-x^2$;

4) $y=x^2$, $y=x^3$.

Виявіть свою компетентність

7.9. Потрібно пофарбувати з однієї сторони 30 однакових плоских металевих деталей. Ескіз деталі зображено на рис. 7.8 (верхня межа деталі задається графіком функції $y=8\sqrt{x}$, а нижня — графіком функції $y=x^2$, одиничний відрізок на ескізі дорівнює 20 см). Скільки банок, що містять по 0,9 кг фарби, потрібно придбати, якщо для фарбування 1 м² поверхні витрачається 130 г фарби?

Рис. 7.8



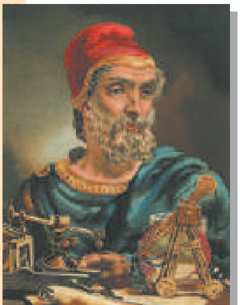
7.10. Під дією сили $F=10$ Н пружина розтягується на 2 см. Яку роботу при цьому виконує сила F, якщо за законом Гука $F=kx$, де x — деформація пружини, k — коефіцієнт (формула для обчислення роботи наведена у схемі перед прикладами розв'язування задач).

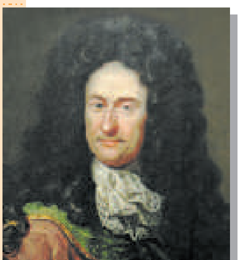
7.11. Чому формула Ньютона — Лейбніца має таку назву? Знайдіть відповідну інформацію в мережі Інтернет і підготуйте невеличке повідомлення.

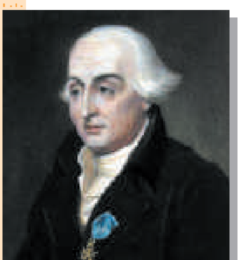
Теми навчальних проектів

1. Практичні застосування інтеграла.
2. Диференціальні рівняння та їх застосування для моделювання різноманітних процесів.

Відомості з історії


Архімед
(287–212 рр. до н. е)


Г. Лейбніц
(1646–1716)


Ж.-Л. Лагранж
(1736–1813)

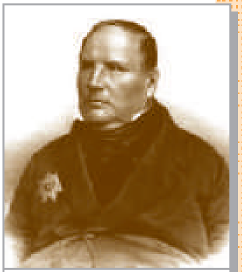
Інтегральне числення й поняття інтеграла виникло через необхідність обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл. Ідеї інтегрального числення беруть свій початок у роботах стародавніх математиків. Зокрема, важливе значення для розвитку інтегрального числення мав *метод вичерпування*, запропонований **Євдоксом Кнідським** (бл. 408 — бл. 355 рр. до н. е.) і вдосконалений **Архімедом**. За цим методом для обчислення площі плоскої фігури навколо неї описують ступінчасту фігуру і в неї вписують ступінчасту фігуру. Збільшуючи кількість сторін одержаних многокутників, знаходять границю, до якої прямують площі ступінчастих фігур (саме так у курсі геометрії було доведено формулу площі круга). Архімед передбачив багато ідей інтегрального числення. Але пройшло більш як півтори тисячі років, перш ніж ці ідеї було доведено до рівня числення. Зазначимо, що математики XVII ст., які здобули багато нових результатів, брали за основу праці Архімеда. У XVII ст. було зроблено багато відкриттів стосовно інтегрального числення, уведено основні поняття і терміни.

Символ $\int$ увів **Г. Лейбніц** (1675). Цей знак є зміненою латинською буквою S (перша буква слова *summa*). Саме́ слово *інтеграл* увів **Я. Бернуллі** (1690). Інші відомі вам терміни, що стосуються інтегрального числення, з'явилися значно пізніше. Термін *первісна функція*, що застосовується тепер, замінив попередню назву *примітивна функція*, яку ввів **Ж.-Л. Лагранж** (1797). Латинське слово *primitivus* перекладається як *початковий*: функція $F(x)=\int f(x)dx$ — початкова (або первісна) для функції $f(x)$, яка утворюється з $F(x)$ диференціюванням. Поняття *невизначеного інтеграла* та його позначення ввів Лейбніц, а позначення *визначеного інтеграла* $\int_a^b f(x)dx$ увів **Ж.-Б. Фур'є** (1768–1830).

Слід зауважити, що при всій значущості результатів, здобутих математиками XVII ст., інтегрального числення ще не було. Необхідно було окреслити загальні ідеї, на яких ґрунтується розв'язування багатьох окремих задач, а також установити зв'язок операцій диференціювання й інтегрування. Це виконали **І. Ньютон** і **Г. Лейбніц**, які відкрили незалежно один від одного факт, відомий під назвою *формула Ньютона — Лейбніца*. Тим самим остаточно оформився загальний метод. Треба було ще навчитися знаходити первісні для багатьох функцій, дати логічні основи нового числення тощо. Але головне вже було зроблено: диференціальне й інтегральне числення створено. Методи інтегрального числення активно розвивались у наступному столітті (насамперед слід назвати імена **Л. Ейлера**, який завершив систематичне дослідження інтегрування елементарних функцій, та **Й. Бернуллі**). У розвиток інтегрального числення значний внесок зробили математики з України **В. Я. Буняковський** (1804–1889) і **М. В. Остроградський** (1801–1862). Багато теорем і формул Остроградського ввійшли до різних математичних курсів. Математикам усього світу добре відомі метод інтегрування Остроградського, правило Остроградського, формула Остроградського тощо.


Ж.-Б. Фур'є (1768–1830)


В. Я. Буняковський (1804–1889)


М. В. Остроградський (1801–1862)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 2

1. Для функції $f(x)=4x^3$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(0;1)$.

А $F(x)=-x^4-1$ В $F(x)=x^4$ Д $F(x)=x^4+1$
Б $F(x)=x^4-1$ Г $F(x)=-x^4+1$

2. Серед наведених нижче функцій вкажіть ту, первісною для якої є функція $F(x)=\mathrm{ctg}\,x+C$.

А $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ В $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ Д $f(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$
Б $f(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}$ Г $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$

3. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)=\cos x-e^x$.

А $F(x)=-\sin x-e^x$ В $F(x)=\sin x-e^x+C$ Д $F(x)=\sin x+e^x+C$
Б $F(x)=\sin x-e^x$ Г $F(x)=-\sin x-e^x+C$

4. Установіть відповідність між інтегралами (1–3) та їхніми значеннями (А–Г).

1 $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$	А 1
2 $\int_0^1 x^2 dx$	Б $\frac{7}{24}$
3 $\int_1^2 \frac{1}{x^4}dx$	В $\frac{1}{3}$
	Г $\frac{2}{3}$

5. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y=\frac{1}{x^2}$, прямими $x=1$, $x=4$ та віссю Ox.

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Розділ 3

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

У цьому розділі ви:

- систематизуєте й узагальните знання й уміння, пов'язані з комбінаторикою, теорією ймовірностей і математичною статистикою;
- ознайомитеся з формулами для обчислення числа перестановок, розміщень і комбінацій;
- навчитеся застосовувати ймовірнісні характеристики до аналізу навколишніх явищ для прийняття правильних рішень.

§ 8. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Таблиця 12

Комбінаторика

Комбінаторика — розділ математики, у якому вивчають способи вибору та розміщення елементів деякої скінченної множини на основі певних умов.

Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають *сполуками*.

Якщо всі елементи різні, то одержуємо сполуку без повторень, а якщо елементи можуть повторюватися, то сполуку з повтореннями. Ми будемо розглядати сполуки без повторень.

Перестановки

Означення. ***Перестановкою з n елементів* називається будь-яка впорядкована множина з n заданих елементів** (тобто така *множина, для якої вказано, який елемент розташований на першому місці, який — на другому, ..., який — на n-му*).

Формула числа перестановок (P_n)	Приклад
$P_n = n!$, де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (читають: «ен факторіал»)	Кількість різних шестицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторюючи ці цифри в одному числі, дорівнює: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Розміщення

Означення. ***Розміщенням з n елементів по k* називається будь-яка впорядкована множина з k елементів, складена з елементів заданої n-елементної множини.**

Формула числа розміщень (A_n^k)	Приклад
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Кількість різних трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри не повторюються, дорівнює: $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120.$

Комбінації

Означення. ***Комбінацією без повторень з n елементів по k*** **називається будь-яка k-елементна підмножина заданої n-елементної множини.**

Формула числа комбінацій $\left(C_n^k\right)$	Приклад
$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (за означенням вважають, що $C_n^0 = 1$)	Із класу, що складається з 25 учнів, можна вибрати 5 учнів для чергування по школі C_{25}^5 способами, тобто: $C_{25}^5 = \dfrac{25!}{5!(25-5)!} = \dfrac{25!}{5!\cdot 20!} = \dfrac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} =$ $= 53\,130$ способами.

Деякі властивості числа комбінацій без повторень

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (зокрема $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$)

$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Схема складання плану розв'язування комбінаторних задач

Правило суми	Правило добутку
Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами (при цьому вибір елемента A виключає одночасний вибір і елемента B), то A або B можна вибрати $(m+n)$ способами.	Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то A і B можна вибрати $(m\cdot n)$ способами.

Вибір формули

Чи враховується порядок наступності елементів у сполуці?

- Так → Чи всі елементи входять до сполуки?
  - Так → **Перестановки**: $P_n = n!$
  - Ні → **Розміщення**: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- Ні → **Комбінації**: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

8.1. Правило суми й добутку. Упорядковані множини. Розміщення

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Поняття сполуки. Правило суми й добутку

Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться вибирати з певної сукупності об'єктів елементи, що мають ті або інші властивості, розміщувати ці елементи в певному порядку тощо. Оскільки в таких задачах ідеться про ті або інші комбінації об'єктів, то такі задачі називають *комбінаторними*. Розділ математики, у якому розглядають методи розв'язування комбінаторних задач, називають *комбінаторикою*. У комбінаториці розглядають вибір і розміщення елементів деякої скінченної множини на основі якихось умов.

Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають *сполуками*. Якщо всі елементи сполуки різні, то одержуємо сполуку без повторень, а якщо елементи можуть повторюватися, то одержуємо сполуку з повтореннями.

Надалі в цьому розділі будемо розглядати тільки сполуки без повторень, тому не будемо окремо вказувати на це у кожному випадку.

Розв'язування багатьох комбінаторних задач спирається на два основних правила — *правило суми* й *правило добутку*.

Правило суми

Якщо на тарілці лежить 5 груш і 4 яблука, то вибрати один фрукт (тобто грушу або яблуко) можна 9 способами $(5+4=9)$. У загальному вигляді справедливе таке твердження.

Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами (при цьому вибір елемента A виключає одночасний вибір і елемента B), то A *або* B можна вибрати $(m+n)$ способами.

Правило добутку

Якщо в крамниці продають ручки 5 видів і зошити 4 видів, то вибрати набір із ручки й зошита (тобто пару — ручку і зошит) можна

$5 \cdot 4 = 20$ способами (оскільки до кожної з 5 ручок можна взяти будь-який із 4 зошитів). У загальному вигляді має місце таке твердження.

Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то A і B можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.

Це твердження означає, що оскільки для кожного з m елементів A можна взяти в пару будь-який з n елементів B, то кількість пар дорівнює добутку $m \cdot n$.

Повторюючи наведені міркування декілька разів (більш строго — використовуючи метод математичної індукції), одержуємо, що правила суми й добутку можна застосовувати при виборі довільної скінченної кількості елементів.

2. Упорядковані множини

Під час розв'язування комбінаторних задач доводиться розглядати не тільки множини, у яких елементи можна записувати в будь-якому порядку, а й так звані *впорядковані множини*. Для впорядкованих множин суттєвим є порядок розміщення їх елементів, тобто те, який елемент записано на першому місці, який на другому і т. д. Зокрема, якщо одні й ті самі елементи записати в різному порядку, то отримаємо різні впорядковані множини. Щоб відрізнити запис упорядкованої множини від невпорядкованої, елементи впорядкованої множини часто записують у круглих дужках, наприклад $(1; 2; 3) \neq (1; 3; 2)$.

Розглядаючи впорядковані множини, треба враховувати, що одну й ту саму множину можна впорядкувати по-різному. Наприклад, множину з трьох чисел $\{-5; 1; 3\}$ можна впорядкувати за зростанням: $(-5; 1; 3)$, за спаданням: $(3; 1; -5)$, за зростанням абсолютної величини числа: $(1; 3; -5)$ тощо.

Будемо розуміти, що, *для того щоб задати скінченну впорядковану множину з n елементів, достатньо вказати, який елемент розміщено на першому місці, який на другому, ..., який на n-му.*

3. Розміщення

Означення. *Розміщенням* з n елементів по k називається будь-яка впорядкована множина з k елементів, складена з елементів заданої n-елементної множини.

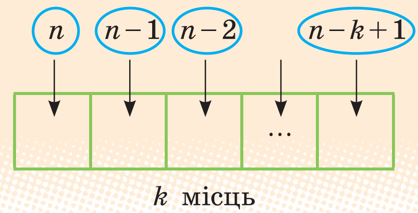
Наприклад, із множини з трьох цифр $\{1;5;7\}$ можна скласти такі розміщення з двох елементів:

$$(1;5),\ (1;7),\ (5;7),\ (5;1),\ (7;1),\ (7;5).$$

Кількість розміщень із n елементів по k позначають A_n^k (читають: «A з n по k»). Як бачимо, $A_3^2=6$.

З'ясуємо, скільки можна скласти розміщень із n елементів по k. Складання розміщення уявимо як послідовне заповнення k місць, які будемо зображати у вигляді клітинок (рис. 8.1.1).

Рис. 8.1.1



На перше місце ми можемо помістити один з n елементів заданої множини (тобто елемент для першої клітинки можна вибрати n способами). На друге місце можна вибрати тільки один елемент із тих, що залишилися, тобто з $(n-1)$. Тепер уже два елементи використано й на третє місце можна вибрати тільки один із $(n-2)$ елементів тощо. На k-те місце можна вибрати тільки один із $n-(k-1)=n-k+1$ елементів (див. рис. 8.1.1). Оскільки нам потрібно вибрати елементи й на перше, і на друге, ... , і на k-те місце, то використовуємо правило добутку й одержуємо **формулу числа розміщень із n елементів по k:**

$$A_n^k=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\text{ множників}}.$$

Кількість розміщень із n елементів по k позначають A_n^k. A — перша літера французького слова *arrangement* — розміщення.

Наприклад, $A_3^2=3\cdot2=6$ (що збігається з відповідним значенням, одержаним вище).

Під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач важливо правильно вибрати формулу, за якою будуть проводитись обчислення кількості сполук. Для цього достатньо з'ясувати:

- *чи враховують порядок розміщення елементів у сполуці;*
- *чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки.*

Якщо, наприклад, порядок розміщення елементів ураховують і з n заданих елементів у сполуці використовують тільки k елементів, то за означенням це розміщення з n елементів по k.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1. На змагання з легкої атлетики приїхала команда з 12 спортсменок. Скількома способами тренер може визначити, хто з них побіжить в естафеті 4 по 100 м на першому, другому, третьому й четвертому етапах?

Розв'язання

Кількість способів вибрати з дванадцяти спортсменок чотирьох для участі в естафеті дорівнює кількості розміщень з 12 елементів по 4, тобто

$$A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880.$$

Коментар

Для вибору формули відповідаємо на запитання, наведені вище. Оскільки для спортсменок важливо, у якому порядку вони будуть бігти, то порядок розміщення під час вибору елементів ураховується. До одержаної сполуки входять не всі 12 заданих елементів. Отже, відповідна сполука — розміщення з 12 елементів по 4.

Приклад 2. Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри в числі не повторюються.

Розв'язання

Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, дорівнює числу розміщень із 7 елементів по 3, тобто

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Коментар

Для вибору формули з'ясовуємо, що для чисел, які ми будемо складати, порядок розміщення враховується й не всі елементи вибираються (тільки 3 із заданих семи). Отже, відповідна сполука — розміщення з 7 елементів по 3.

Приклад 3*. Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, якщо цифри в числі не повторюються.

Коментар

Вибір формули проводять так само, як і в прикладі 2. Але треба врахувати, що коли число, складене з трьох цифр, починається цифрою 0, то його не вважають трицифровим. Отже, для відповіді на запитання задачі можна спочатку із заданих 7 цифр утворити всі числа, що складаються з 3 цифр (див. приклад 2), а потім від кількості одержаних чисел відняти кількість тих чисел, які складені з трьох цифр, але починаються цифрою 0. В останньому випадку ми фактично будемо з усіх цифр, крім нуля (їх 6), складати двоцифрові числа. Тоді їх кількість дорівнює числу розміщень із 6 елементів по 2 (див. розв'язання завдання).

Також можна виконати безпосереднє обчислення, послідовно заповнюючи три місця в трицифровому числі й використовуючи правило добутку. У цьому випадку зручно унаочнити міркування, зображаючи відповідні розряди в трицифровому числі у вигляді клітинок, наприклад так:

6 можливостей	6 можливостей	5 можливостей

Розв'язання

Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з 7 цифр (серед яких немає цифри 0), дорівнює числу розміщень із 7 елементів по 3, тобто A_7^3.

Але серед заданих цифр є цифра 0, з якої не може починатися трицифрове число. Тому з розміщень із 7 елементів по 3 необхідно вилучити ті розміщення, у яких першим елементом є цифра 0. Їх кількість дорівнює числу розміщень із 6 елементів по 2, тобто A_6^2. Отже, шукана кількість трицифрових чисел дорівнює:

$$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180.$$

ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте й поясніть на прикладах правило суми й правило добутку для розв'язування комбінаторних задач.
2. Поясніть, яку скінченну множину вважають упорядкованою. Наведіть приклади впорядкованих скінченних множин.
3. Поясніть, що називають розміщенням з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади.
4. Запишіть формулу для обчислення числа розміщень із n елементів по k без повторень. Наведіть приклади її використання.
5*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа розміщень із n елементів по k без повторень.

ВПРАВИ

8.1.1°. Маємо 4 різні конверти без марок і 3 різні марки. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для відправки листа?

8.1.2°. У коробці міститься 10 білих і 6 чорних куль. Скількома способами з коробки можна витягти:
1) одну кулю будь-якого кольору; 2) дві кулі різного кольору?

8.1.3. У корзині лежать 12 яблук і 9 апельсинів (усі різні). Петрик вибирає або яблуко, або апельсин, після чого Надійка вибирає з тих фруктів, що залишилися, і яблуко, і апельсин. Скільки існує таких виборів? При якому виборі Петрика в Надійки більше можливостей вибору?

8.1.4*. Дитині потрібно виконати 4 тести протягом 8 днів. Скількома способами може бути складений розклад її тестування, якщо в один день вона може виконувати тільки один тест?

8.1.5*. Скількома способами може розміститися родина з трьох осіб у чотиримісному купе, якщо інших пасажирів у купе немає?

8.1.6. Із 30 присутніх на зборах треба вибрати голову та секретаря. Скількома способами це можна зробити?

8.1.7. Скількома способами можуть зайняти перше, друге й третє місця 8 учасниць фінального забігу на дистанцію 100 м (припускаємо, що всі вони покажуть різний час)?

8.1.8. Скількома способами можна виготовити трикольоровий прапор з вертикальними смугами, якщо є матеріал 7 різних кольорів?

8.1.9. На площині відмітили 5 точок. Їх потрібно позначити латинськими буквами. Скількома способами це можна зробити (у латинському алфавіті 26 букв)?

8.1.10. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7, 9, якщо цифри в числі не повторюються?

8.1.11*. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 2, 4, 6, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

8.1.12. Скільки існує семицифрових телефонних номерів, у яких усі цифри різні й перша цифра відмінна від нуля?

8.1.13*. Скільки різних трицифрових чисел (без повторення цифр) можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб одержані числа були:
1) парними; 2) кратними 5?

8.2. Перестановки

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Означення. ***Перестановкою* з n елементів називається будь-яка впорядкована множина з n заданих елементів.**

Нагадаємо, що впорядкована множина — це така *множина, для якої вказано, який елемент розміщено на першому місці, який на другому, ..., який на n-му.*

Наприклад, переставляючи цифри в числі 236 (тут множина цифр $\{2; 3; 6\}$ уже впорядкована), можна скласти такі *перестановки без повторень*: $(2; 3; 6)$, $(2; 6; 3)$, $(3; 2; 6)$, $(3; 6; 2)$, $(6; 2; 3)$, $(6; 3; 2)$ — усього 6 перестановок*.

Кількість перестановок із n елементів позначають P_n. Як бачимо, $P_3 = 6$.

Фактично перестановки з n елементів є розміщеннями з n елементів по n, тому

$$P_n = A_n^n = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{n\text{ множників}}.$$

Кількість перестановок з n елементів позначають P_n. P — перша літера французького слова *permutation* — перестановка.

Добуток $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ позначають $n!$. Тому одержана **формула числа перестановок без повторень із n елементів** може бути записана так:

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n.$$

Наприклад, $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ (що збігається з відповідним значенням, одержаним вище).

За допомогою факторіалів формулу для числа розміщень без повторень

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\text{ множників}} \quad (1)$$

можна записати в іншому вигляді. Для цього помножимо й поділимо вираз у формулі (1) на добуток $(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = (n-k)!$. Одержуємо:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

* Зазначимо, що кожна така перестановка визначає трицифрове число, складене з цифр 2, 3, 6, так, що цифри в числі не повторюються.

Отже, **формула для числа розміщень без повторень із n елементів по k** може бути записана так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Для того щоб цією формулою можна було користуватися при всіх значеннях k, зокрема при $k = n-1$ та при $k = n$, домовилися вважати, що:

$$\mathbf{1! = 1 \text{ і } 0! = 1.}$$

Наприклад, за формулою (2) $A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Зауважимо, що в тих випадках, коли значення $n!$ виявляється дуже великим, відповіді залишають записаними за допомогою факторіалів.

Наприклад, $A_{30}^{25} = \frac{30!}{(30-25)!} = \frac{30!}{5!}.$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Нагадаємо: для вибору формули під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач достатньо відповісти на запитання:

- *чи враховують порядок розміщення елементів у сполуці;*
- *чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки?*

Якщо, наприклад, порядок розміщення елементів ураховується і всі n заданих елементів використовуються у сполуці, то за означенням це перестановки з n елементів.

Приклад 1. Знайдіть, скількома способами можна вісім учнів вишикувати в колону по одному.

Розв'язання

Кількість способів дорівнює числу перестановок із 8 елементів.

Тобто

$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$ ■

Коментар

Для вибору відповідної формули з'ясовуємо відповіді на запитання, наведені вище. Оскільки порядок розміщення елементів ураховується й усі 8 заданих елементів вибираються, то відповідні сполуки — це перестановки з 8 елементів. Їх кількість можна обчислити за формулою:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Приклад 2. Знайдіть кількість різних чотирицифрових чисел, які можна скласти з цифр 0, 3, 7, 9 (цифри в числі не повторюються).

Розв'язання

З чотирьох цифр 0, 3, 7, 9 можна одержати P_4 перестановок. Але ті перестановки, які починаються з 0, не будуть записом чотирицифрового числа — їх кількість P_3. Тоді шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює:

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! =$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18.$$

Коментар

Оскільки порядок розміщення елементів ураховується і для одержання чотирицифрового числа потрібно використати всі елементи, то потрібна сполука — це перестановки з 4 елементів. Їх кількість P_4. Але ще потрібно врахувати, що в чотирицифровому числі на першому місці не може стояти цифра 0. Таких чисел буде стільки, скільки разів ми зможемо виконати перестановки з 3 цифр, які залишилися, тобто P_3.

Приклад 3*. З десяти книжок чотири — підручники. Скількома способами можна поставити ці книжки на полицю так, щоб усі підручники стояли поряд один з одним?

Розв'язання

Спочатку будемо розглядати підручники, що стоять поряд, як одну книжку. Тоді на полиці потрібно розставити не 10, а 7 книжок. Це можна зробити P_7 способами.

У кожному з одержаних наборів книжок ще можна виконати P_4 перестановок підручників. За правилом добутку шукана кількість способів дорівнює:

$$P_7 \cdot P_4 = 7! \cdot 4! = 5040 \cdot 24 = 120\,960.$$

Коментар

Задачу можна розв'язувати у два етапи. На першому етапі умовно будемо вважати всі підручники за 1 книжку. Тоді одержимо 7 книжок (6 не підручників і 1 умовна книжка-підручник).

Порядок розміщення елементів ураховується, і використовуються всі елементи (поставити на полицю потрібно всі книжки). Отже, відповідна сполука — це перестановки з 7 елементів. Їх кількість — P_7.

На другому етапі розв'язування будемо переставляти між собою тільки підручники. Це можна зробити P_4 способами. Оскільки нам потрібно переставити і підручники, і інші книжки, то використовуємо правило добутку.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що називається перестановкою з n елементів без повторень. Наведіть приклади.
2. Запишіть формулу для обчислення числа перестановок із n елементів без повторень. Наведіть приклади її використання.
3*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа перестановок із n елементів без повторень.

ВПРАВИ

8.2.1°. Скількома способами 4 людини можуть розміститися на чотиримісній лавці?

8.2.2°. Кур'єр повинен рознести пакети в 7 різних установ. Скільки маршрутів він може вибрати?

8.2.3°. Скільки існує виразів, тотожно рівних добутку $abcde$, що одержуються з нього перестановкою множників?

8.2.4°. Ольга пам'ятає, що телефон подруги закінчується цифрами 5, 7, 8, але забула, у якому порядку ці цифри розміщено. Укажіть найбільше число варіантів, що їй доведеться перебрати, щоб зателефонувати подрузі (якщо вона пам'ятає всі інші цифри номера).

8.2.5. Скільки шестицифрових чисел (без повторення цифр) можна скласти з цифр:
1) 1, 2, 5, 6, 7, 8; 2) 0, 2, 5, 6, 7, 8?

8.2.6. Скільки серед чотирицифрових чисел, складених із цифр 3, 5, 7, 9 (без повторення цифр), є таких, що:
1) починаються з цифри 3; 2) кратні 5?

8.2.7. Знайдіть суму цифр усіх чотирицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7 (без повторення цифр у числі).

8.2.8. У розкладі на понеділок шість уроків: алгебра, геометрія, іноземна мова, історія, фізкультура, хімія. Скількома способами можна скласти розклад уроків на цей день так, щоб два уроки математики стояли поспіль?

8.2.9*. Скількома способами можна розставити на полиці 12 книжок, із яких 5 книжок — це збірники віршів, так, щоб збірники стояли поряд у довільному порядку?

8.3. Комбінації

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Означення. ***Комбінацією без повторень із n елементів по k*** **називається будь-яка k-елементна підмножина заданої n-елементної множини.**

Наприклад, із множини $\{a, b, c, d\}$ можна скласти такі комбінації без повторень із трьох елементів: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Кількість комбінацій без повторень із n елементів по k позначають символом C_n^k (читають: «число комбінацій із n по k» або «це із n по k»). Як бачимо, $C_4^3 = 4$.

З'ясуємо, скільки всього можна скласти комбінацій без повторень із n елементів по k. Для цього використаємо відомі нам формули числа розміщень і перестановок.

Складання розміщення без повторень із n елементів по k проведемо у два етапи. Спочатку виберемо k різних елементів із заданої n-елементної множини, не враховуючи порядок вибору цих елементів (тобто виберемо k-елементну підмножину з n-елементної множини — комбінацію без повторень із n елементів по k). За нашим позначенням це можна зробити C_n^k способами. Після цього одержану множину з k різних елементів упорядкуємо. Її можна впорядкувати $P_k = k!$ способами. Одержимо розміщення без повторень із n елементів по k. Отже, кількість розміщень без повторень із n елементів по k в $k!$ разів більша за число комбінацій без повторень із n елементів по k, тобто $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Звідси $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. Ураховуючи, що за формулою (2) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (див. п. 8.2), одержуємо:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3)$$

Кількість комбінацій без повторень із n елементів по k позначають символом C_n^k.
C — перша літера французького слова *combinaison* — комбінація

Наприклад, $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4$, що збігається зі значенням, одержаним вище.

Використовуючи формулу (3), легко обґрунтувати *властивість 1 числа комбінацій без повторень*, наведену в табл. 12.

1) Оскільки $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\big((n-(n-k))\big)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$, то

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (4)$$

Для того щоб формулу (4) можна було використовувати і при $k = n$, домовилися вважати, що $C_n^0 = 1$. Тоді за формулою (4) $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Зауважимо, що формулу (4) можна отримати без обчислень за допомогою досить простих комбінаторних міркувань.

Коли ми вибираємо k предметів із n, то $n - k$ предметів ми залишаємо. Якщо ж, навпаки, вибрані предмети залишимо, а інші $n - k$ — виберемо, то одержимо спосіб вибору $n - k$ предметів із n. Зазначимо, що ми одержали *взаємно однозначну відповідність* способів вибору k і $n - k$ предметів із n. Отже, кількість тих і інших способів однакова. Але кількість одних C_n^k, а інших C_n^{n-k}, тому $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Якщо у формулі (3) скоротити чисельник і знаменник на $(n-k)!$, то отримаємо формулу, за якою зручно обчислювати C_n^k при малих значеннях k:

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{k \text{ множників}}}{k!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{k \text{ множників}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}_{k \text{ множників}}}. \qquad (5)$$

Наприклад, $C_{25}^2 = \dfrac{\overbrace{25 \cdot 24}^{2 \text{ множники}}}{1 \cdot 2} = 25 \cdot 12 = 300$, $C_8^3 \dfrac{\overbrace{8 \cdot 7 \cdot 6}^{3 \text{ множники}}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 = 56$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Зауважимо, що, як і раніше, для вибору формули під час розв’язування найпростіших комбінаторних задач достатньо відповісти на запитання:

- *чи враховується порядок розміщення елементів у сполуці;*
- *чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки?*

Але для з’ясування того, що задана сполука є комбінацією, достатньо відповісти тільки на перше запитання (див. схему в табл. 12). Якщо порядок розміщення елементів не враховується, то за означенням це комбінації з n елементів по k.

Приклад 1. Із 12 членів туристичної групи потрібно вибрати 3 чергових. Скількома способами можна зробити цей вибір?

Розв'язання

Кількість способів вибрати з 12 туристів 3 чергових дорівнює кількості комбінацій із 12 елементів по 3, тобто

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} =$$

$$= \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220.$$

Коментар

Для вибору відповідної формули з'ясовуємо відповіді на запитання, наведені вище. Оскільки порядок розміщення елементів не враховується (для чергових не важливо, у якому порядку їх виберуть), то відповідна сполука є комбінацією з 12 елементів по 3. Для обчислення можна використати формули (3) або (5), у даному випадку застосували формулу (3):

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад 2. Із вази з фруктами, у якій лежить 10 різних яблук і 5 різних груш, потрібно вибрати 2 яблука і 3 груші. Скількома способами можна зробити такий вибір?

Розв'язання

Вибрати 2 яблука з 10 можна C_{10}^2 способами. При кожному виборі яблук груші можна вибрати C_5^3 способами. Тоді за правилом добутку вибір потрібних фруктів можна виконати $C_{10}^2 \cdot C_5^3$ способами.

Одержуємо:

$$C_{10}^2 \cdot C_5^3 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 450.$$

Коментар

Спочатку окремо виберемо 2 яблука з 10 і 3 груші з 5. Оскільки при виборі яблук чи груш порядок розміщення елементів не враховується, то відповідні сполуки — комбінації без повторень.

Ураховуючи, що треба вибрати і 2 яблука, і 3 груші, використовуємо правило добутку й перемножуємо одержані можливості вибору яблук $\left(C_{10}^2\right)$ і груш $\left(C_5^3\right)$.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що називається комбінаціями з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади.
2. Запишіть формулу для обчислення числа комбінацій із n елементів по k без повторень. Наведіть приклади її використання.

3*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа комбінацій із n елементів по k без повторень.

4. Поясніть на прикладах, як можна вибирати відповідну формулу під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач.

ВПРАВИ

8.3.1°. У класі 7 учнів успішно навчаються математики. Скількома способами можна вибрати з них 2 учнів для участі в математичній олімпіаді?

8.3.2°. У магазині «Філателія» продають 8 різних наборів марок на спортивну тематику. Скількома способами можна вибрати з них 3 набори?

8.3.3°. Учням дали список із 10 книжок, що рекомендовано прочитати під час канікул. Скількома способами учень (учениця) може вибрати з них 6 книжок?

8.3.4. На полиці стоїть 12 книжок: англо-український словник і 11 художніх творів англійською мовою. Скількома способами читач може вибрати 3 книжки, якщо:
1) словник потрібний йому обов'язково;
2) словник йому не потрібний?

8.3.5°. У класі навчаються 16 хлопчиків і 12 дівчаток. Для прибирання території потрібно виділити чотирьох хлопчиків і трьох дівчаток. Скількома способами це можна зробити?

8.3.6. Під час зустрічі 16 осіб потисли одне одному руки. Скільки всього зроблено рукостискань?

8.3.7. Група однокласників та однокласниць із 30 осіб вирішила обмінятися фотокартками. Скільки всього фотокарток потрібно було для цього?

8.3.8°. Скільки перестановок можна зробити з букв слова ХАРКІВ?

8.3.9°. Із 12 робітників-бурильників потрібно відрядити 5 для роботи в сусідній області. Скількома способами можна утворити таку бригаду для відрядження?

8.3.10. Скількома різними способами збори, на яких присутні 40 осіб, можуть обрати з числа своїх учасників голову зборів, його заступника та секретаря?

8.3.11. Скільки прямих ліній можна провести через 8 точок, з яких ніякі три не лежать на одній прямій? (Кожна пряма має проходити через дві задані точки.)

8.3.12. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без їх повторень?

8.3.13. Визначте число всіх діагоналей правильного:
1) п'ятикутника;
2) восьмикутника;
3) дванадцятикутника
4) п'ятнадцятикутника.

8.3.14. Скільки різних трикольорових прапорів можна зробити, комбінуючи 3 вертикальні смуги жовтого, чорного та червоного кольорів?

8.3.15. Скільки різних площин можна провести через 10 точок, якщо ніякі чотири точки не лежать в одній площині?

8.3.16*. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна написати за допомогою цифр 0, 2, 4, 6, 8 без їх повторень?

8.3.17. Серед перестановок із цифр 1, 2, 3, 4, 5 скільки таких, що не починаються цифрою 5? числом 12? числом 123?

8.3.18. Серед комбінацій із 10 букв a, b, c, ... по 4 скільки таких, що не містять букви a? букв a і b?

8.3.19. Серед розміщень із 12 букв a, b, c, ... по 5 скільки таких, що не містять букви a? букв a і b?

§ 9. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Таблиця 13

1. Випадкові події	
Поняття	Приклади
Під *експериментами з випадковими результатами* (або, коротше, *випадковими експериментами*) розуміють різні експерименти, досліди, випробовування, спостереження, виміри, результати яких залежать від випадку і які можна повторити багато разів в однакових умовах.	Експерименти з рулеткою, підкиданням грального кубика, підкиданням монети, серія пострілів одного стрільця по одній і тій самій мішені, участь у лотереї тощо.
Будь-який результат випадкового експерименту називають *випадковою подією*. Унаслідок такого експерименту ця подія може або відбутися, або не відбутися. Випадкові події зазвичай позначають великими літерами латинського алфавіту: $A, B, C, D, \ldots$.	Події: випадання «герба», випадання «числа» при підкиданні монети; виграш у лотерею; випадання певної кількості очок при підкиданні грального кубика тощо.
2. Поняття, пов'язані з випадковими подіями в деякому експерименті	
Події $B_1, B_2, \ldots, B_n$ називають *рівноможливими*, якщо в даному експерименті немає ніяких підстав вважати, що одна з них може відбутися переважніше за будь-яку іншу.	В експерименті з одноразового підкидання однорідної монети правильної форми рівноможливими є події: A — випав «герб», B — випало «число».
Події A і B називають *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в даному експерименті.	В експерименті з підкидання монети події A — випав «герб» і B — випало «число» — несумісні.
Події $C_1, C_2, \ldots, C_n$ називають *несумісними*, якщо кожна пара з них несумісна в даному експерименті.	Для експерименту з підкидання грального кубика події C_1 — випадання 1 очка, C_2 — випадання 3 очок, C_3 — випадання 5 очок, C_4 — випадання парного числа очок — несумісні.
Подію U називають *вірогідною*, якщо в результаті даного експерименту вона обов'язково відбудеться.	Випадання менше 7 очок при підкиданні звичайного грального кубика (на гранях якого позначено від 1 до 6 очок).

Подію $\varnothing$ називають *неможливою*, якщо вона не може відбутися в даному експерименті.	Випадання 7 очок при підкиданні грального кубика.

3. Простір елементарних подій

Поняття	Приклад
Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних подій u_1, u_2, ..., u_n. Назвемо ці події *елементарними подіями*, а множину всіх цих подій $$U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$ — *простором елементарних подій*.	1. Для експерименту з підкидання монети елементарними будуть події: u_1 — випав «герб», u_2 — випало «число». Тоді простір елементарних подій буде складатися з двох подій: $U=\{u_1, u_2\}$. (Ці події попарно несумісні, у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій.)
Будь-яку підмножину простору елементарних подій U вважатимемо випадковою подією A.	2. Для експерименту з підкидання грального кубика елементарними можуть бути події u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, де u_k — випадання k очок, $k=1$, 2, 3, 4, 5, 6. У цьому випадку простір елементарних подій буде складатися з шести подій: $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

4. Класичне означення ймовірності (для рівноможливих елементарних подій)

Нехай задано простір елементарних подій, усі елементарні події якого — рівноможливі. *Ймовірність події A* — це відношення числа сприятливих для неї елементарних подій (m) до числа всіх рівноможливих елементарних подій (n) у даному експерименті: $$P(A)=\frac{m}{n}.$$	**Приклад** Знайдіть імовірність випадання більше чотирьох очок при підкиданні грального кубика. ▶ Розглянемо як елементарні події шість рівноможливих результатів підкидання кубика — випало 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок (отже, $n=6$). Подія A — випало більше 4 очок. Сприятливими для події A є тільки дві елементарні події — випало 5 або 6 очок (тобто $m=2$). Тоді $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. ■

Ймовірність вірогідної (U) та неможливої ($\varnothing$) подій:

$$P(U)=1 \qquad P(\varnothing)=0$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Випадкові експерименти й випадкові події

Нам часто доводиться проводити різні спостереження, досліди, брати участь в експериментах або випробуваннях. Часто такі експерименти завершуються результатом, який заздалегідь передбачити неможливо. Наприклад, ми купуємо лотерейний квиток і не знаємо, виграємо чи ні; підкидаємо монету і не знаємо, що випаде — «число» чи «герб». Чи можна якимось чином оцінити шанси появи результату, який нас цікавить? Відповідь на ці запитання дає розділ математики, що має назву *теорія ймовірностей*. Ми ознайомимося тільки з основами цієї теорії.

Одним з основних понять, які розглядаються в теорії ймовірностей, є поняття *експерименту з випадковими результатами*.

Прикладом такого експерименту може бути підкидання монети суддею футбольного матчу перед його початком із метою визначення, яка з команд почне матч із центра поля.

Під експериментами з випадковими результатами (або, коротше, випадковими експериментами) розуміють різні експерименти, досліди, випробовування, спостереження, виміри, результати яких залежать від випадку і які можна повторити багато разів в однакових умовах. Наприклад, це серія пострілів одного стрільця по одній і тій самій мішені, участь у лотереї, витягання пронумерованих куль із коробки, експерименти з рулеткою, підкиданням грального кубика, підкиданням монети.

Будь-який результат випадкового експерименту називають *випадковою подією*.

Унаслідок експерименту, який розглядається, ця подія може або відбутися, або не відбутися. Зазначимо, що для кожного випадкового експерименту звичайно заздалегідь домовляються, які його результати розглядаються як елементарні події, а потім випадкова подія розглядається як підмножина отриманої множини (див. п. 3 табл. 13).

Надалі, як правило, будемо позначати випадкові події великими латинськими літерами: A, B, C, D, ...

Говорячи про випадкові події, будемо вважати, що вони пов'язані з одним конкретним випадковим експериментом.

Зауважимо, що багато важливих і потрібних фактів теорії ймовірностей спочатку були одержані за допомогою дуже простих експериментів. Велику роль у розвитку теорії ймовірностей як науки зіграли звичайні монети та гральні кубики.

Але *ті монети й кубики, які розглядаються в теорії ймовірностей, є математичними образами справжніх монет і кубиків* (тому про них іноді говорять, що це математична монета й математичний гральний кубик).

Наприклад, *математична монета*, яку використовують у теорії ймовірностей, позбавлена багатьох якостей справжньої монети. У математичної монети немає кольору, розміру, ваги та ціни. Вона не зроблена ні з якого матеріалу й не може служити платіжним засобом. Монета, з погляду теорії ймовірностей, має тільки дві сторони, одна з яких називається «герб», а інша — «число». Монету кидають, і вона падає однією зі сторін угору. Ніяких інших властивостей у математичної монети немає. Математична монета вважається *симетричною*. Це означає, що кинута *на стіл монета має рівні шанси випасти «гербом» або «числом»*. При цьому мається на увазі, що ніякий інший результат кидання монети неможливий — вона не може загубитися, закотившись у куток і, тим більше, не може «стати на ребро».

Справжня металева монета служить лише ілюстрацією для математичної монети. Справжня монета може бути трохи ввігнутою, може мати інші дефекти, які впливають на результати кидання. Проте, щоб перевірити на практиці досліди з підкиданням математичної монети, ми кидаємо звичайну монету (без явних дефектів).

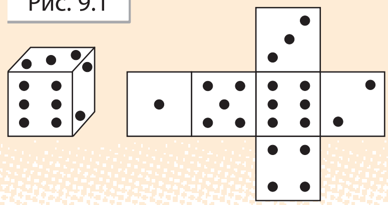
? Оскільки справжня монета не є ідеальною, чи може статися, що випадання «герба» для справжньої монети більш імовірне, ніж випадання «числа» або навпаки? Дізнайтеся, чи проводилися відповідні дослідження у світі. Якщо так, то які їх результати? Як залежить результат від країни походження монети?

Гральний кубик також служить прекрасним засобом для ілюстрації випадкових подій. Гральний кубик має дивовижну історію. Гра з кубиками — одна з найдавніших. Вона була відома в глибокій давнині в Індії, Китаї, Лідії, Єгипті, Греції й Римі. Гральні кубики знаходили в Єгипті (датуються XX ст. до н. е.) і в Китаї (VI ст. до н. е.) при розкопках стародавніх поховань.

Правильні (симетричні) кубики забезпечують однакові шанси випадання кожної грані. Для цього всі грані повинні бути однакової площі, плоскими й однаково гладенькими. Кубик має бути саме кубічної форми, а його центр ваги має збігатися з геометричним центром. Вершини й ребра кубиків повинні мати правильну форму. Якщо вони округлі, то всі округлення мають бути однаковими. Отвори, які маркують кількість очок на гранях, повинні бути просвердлені на однакову глибину. Сума очок на протилежних гранях правильного кубика дорівнює 7 (рис. 9.1).

Математичний гральний кубик, який обговорюється в теорії ймовірностей, — це *математичний образ правильного кубика*. Випадання всіх граней рівноможливе. Подібно до математичної монети, математичний кубик не має ні кольору, ні розміру, ні ваги, ні інших матеріальних якостей.

Рис. 9.1



2. Деякі поняття, пов'язані з випадковими подіями

Нехай проведено якийсь випадковий експеримент. Як зазначалося вище, його результатами є деякі випадкові події. Унаслідок такого експерименту кожна з подій може або відбутися, або не відбутися. Ці події пов'язані з конкретним випадковим експериментом.

Означення. Події називаються *рівноможливими*, якщо в даному експерименті немає ніяких підстав вважати, що одна з них може відбутися переважніше за будь-яку іншу.

Наприклад, в експерименті з одноразового підкидання однорідної монети правильної форми рівноможливими є події: A — випав «герб», B — випало «число».

Означення. Події A і B називаються *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно в даному експерименті.

Так, в експерименті з одноразового підкидання монети події A — випав «герб» і B — випало «число» — несумісні.

Події C_1, C_2, ..., C_n називають *несумісними*, якщо кожна пара з них несумісна в даному експерименті. Для експерименту з підкидання грального кубика події: C_1 — випадання 1 очка, C_2 — випадання 2 очок, C_3 — випадання 3 очок, C_4 — випадання 4 очок, C_5 — випадання 5 очок, C_6 — випадання 6 очок — несумісні (і рівноможливі).

Означення. Подія U називається *вірогідною*, якщо в результаті даного експерименту вона обов'язково відбудеться.

Наприклад, випадання менше 10 очок при підкиданні грального кубика (на гранях якого позначено від 1 до 6 очок) є вірогідною подією.

Означення. Подія $\varnothing$ називається *неможливою*, якщо вона не може відбутися в даному експерименті.

Наприклад, випадання 9 очок при підкиданні грального кубика — неможлива подія.

3. Простір елементарних подій

Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних подій u_1, u_2, ..., u_n. Назвемо їх *елементарними подіями*, а множину всіх цих подій $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ — *простором елементарних подій*.

Наприклад, для експерименту з підкидання монети елементарними подіями будуть: u_1 — випадання «герба», u_2 — випадання «числа». Тоді простір елементарних подій буде складатися з двох подій: $U = \{u_1, u_2\}$. (Ці події несумісні, і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій.)

Для експерименту з підкидання грального кубика елементарними подіями можуть бути: u_1 — випадання 1 очка, u_2 — випадання 2 очок, u_3 — випадання 3 очок, u_4 — випадання 4 очок, u_5 — випадання 5 очок, u_6 — випадання 6 очок. У цьому випадку простір елементарних подій буде складатися з шести подій: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

Будь-яку підмножину простору елементарних подій U вважатимемо випадковою подією A. Наприклад, для експерименту з підкидання грального кубика випадковою є подія A — випадання парної кількості очок, оскільки $A = \{u_2, u_4, u_6\}$ — підмножина U.

4. Класичне означення ймовірності

Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути одна й тільки одна з n попарно несумісних і рівноможливих елементарних подій u_1, u_2, ..., u_n (тобто простір U елементарних подій даного випадкового експерименту складається з рівноможливих елементарних подій u_1, u_2, ..., u_n. І нехай у даному експерименті подія A полягає в тому, що відбувається одна з m наперед виокремлених елементарних подій u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_m} тобто $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ (у цьому випадку говорять, що елементарні події u_{i_1}, u_{i_2}, ..., u_{i_m} сприяють події A).

Буква P (позначення ймовірності) — перша буква французького слова *probabiliteé* або латинського слова *probabilitas*, що в перекладі означає *ймовірність*.

Ймовірність події A означимо як відношення числа m елементарних подій, що сприяють події A, до загального числа n

елементарних подій у даному експерименті, тобто як відношення $\frac{m}{n}$. Ймовірність події A звичайно позначають $P(A)$. Тоді

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Цією рівністю виражається *класичне означення ймовірності*, яке можна сформулювати таким чином.

Означення. Якщо розглядається простір рівноможливих елементарних подій, то *ймовірність події* A — це відношення числа сприятливих для неї елементарних подій до числа всіх рівноможливих елементарних подій у даному експерименті.

Наприклад, в експерименті з підкидання монети рівноможливими елементарними подіями є дві $(n=2)$ події: A — випав «герб» і B — випало «число». Події A сприяє тільки один випадок $(m=1)$, тому $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$. Очевидно, що ймовірність події B також дорівнює $\frac{1}{2}$: $P(B)=\frac{1}{2}$. Отже, в експерименті з одноразового підкидання монети ймовірність випадання «герба» (або «числа») дорівнює $\frac{1}{2}$.

Аналогічно обґрунтовується, що в експерименті з підкидання грального кубика ймовірність події A_i — випало i очок ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) дорівнює $\frac{1}{6}$.

Обґрунтуйте це самостійно.

Зазначимо, що коли в будь-якому експерименті розглянути неможливу подію $\varnothing$, то немає елементарних подій, що сприяють цій події, тобто число елементарних подій, сприятливих для неї, дорівнює нулю $(m=0)$, і тоді $P(\varnothing)=\frac{0}{n}=0$.

Отже, **ймовірність неможливої події дорівнює 0.**

Наприклад, в експерименті з підкидання грального кубика ймовірність неможливої події A — випало 7 очок — дорівнює 0.

Якщо в будь-якому експерименті розглянути вірогідну подію U, то їй сприяють усі елементарні події в цьому експерименті $(m=n)$, і тоді

$$P(U)=\frac{n}{n}=1.$$

Отже, **ймовірність вірогідної події дорівнює 1.**

Наприклад, в експерименті з підкидання грального кубика подія A — випало 1 очко, або 2 очки, або 3 очки, або 4 очки, або 5 очок, або 6 очок — вірогідна і її ймовірність дорівнює 1.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ*

Приклад 1. Користуючись класичним означенням ймовірності, знайдемо ймовірність події A — випадання числа очок, кратного 3, при підкиданні грального кубика.

Розв'язання

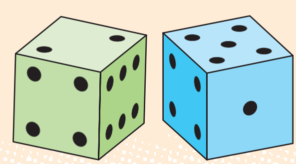
Як зазначалося вище, в експерименті з підкидання кубика існує шість попарно несумісних рівноможливих елементарних подій — випало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок (також можна сказати, що простір елементарних подій складається з шести вказаних попарно несумісних рівноможливих подій). Сприятливими для події A є тільки дві елементарні події: випало 3 очки і випало 6 очок. Отже, ймовірність події A дорівнює: $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Приклад 2. Петро й Павло кидають зелений і блакитний гральні кубики і кожного разу підраховують суму очок, що випали (рис. 9.2). Вони домовилися, що у випадку, коли в черговій спробі в сумі випаде 8 очок, виграє Петро, а коли в сумі випаде 7 очок — виграє Павло. Чи є ця гра справедливою?

Розв'язання

При киданні кубиків на кожному з них може випасти 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок. Кожному числу очок, які випали на зеленому кубику (1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок), відповідає шість варіантів числа очок, які випали на блакитному кубику. Отже, усього одержуємо 36 попарно несумісних рівноможливих елементарних подій — результатів цього експерименту, які наведено в таблиці:

Рис. 9.2



* Коментар включено в запис розв'язання.

$(1;1)$	$(2;1)$	$(3;1)$	$(4;1)$	$(5;1)$	$(6;1)$
$(1;2)$	$(2;2)$	$(3;2)$	$(4;2)$	$(5;2)$	$(6;2)$
$(1;3)$	$(2;3)$	$(3;3)$	$(4;3)$	$(5;3)$	$(6;3)$
$(1;4)$	$(2;4)$	$(3;4)$	$(4;4)$	$(5;4)$	$(6;4)$
$(1;5)$	$(2;5)$	$(3;5)$	$(4;5)$	$(5;5)$	$(6;5)$
$(1;6)$	$(2;6)$	$(3;6)$	$(4;6)$	$(5;6)$	$(6;6)$

(У кожній парі чисел на першому місці записано число очок, яке випало на зеленому кубику, а на другому місці — число очок, що випало на блакитному кубику.)

Нехай подія A означає, що при киданні кубиків у сумі випало 8 очок, а подія B — що при киданні кубиків у сумі випало 7 очок.

Для події A сприятливими є такі 5 результатів (елементарних подій):

$$(2;6),\ (3;5),\ (4;4),\ (5;3),\ (6;2).$$

Для події B сприятливими є такі 6 результатів (елементарних подій):

$$(1;6),\ (2;5),\ (3;4),\ (4;3),\ (5;2),\ (6;1).$$

Тоді

$$P(A)=\frac{5}{36},\quad P(B)=\frac{6}{36}.$$

Отже, шансів виграти в Павла більше, ніж у Петра. Тобто така гра не буде справедливою. ■

Зазначимо, що результати експерименту з підкидання двох гральних кубиків, наведені у прикладі 2, дозволяють обчислити ймовірності появи тієї або іншої суми очок, що випадають при підкиданні двох гральних кубиків.

Сума очок	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ймовірність	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Приклад 3*. Із 15 виготовлених велосипедів 3 виявилися з дефектами. Яка ймовірність того, що 2 велосипеди, вибрані навмання з цих 15, будуть без дефектів?

Розв'язання

▸ Нехай подія A полягає в тому, що 2 вибрані навмання велосипеди будуть без дефектів. Із 15 велосипедів вибрати 2 можна C_{15}^{2} способами (число комбінацій із 15 по 2). Усі ці вибори є рівноможливими й попарно несумісними. Отже, загальна кількість рівноможливих результатів (тобто загальна кількість елементарних подій) дорівнює C_{15}^2. Сприятливим результатом для події A є вибір 2 бездефектних велосипедів із 12 бездефектних $(15-3=12)$. Отже, число сприятливих результатів (подій) для події A дорівнює C_{12}^2. Звідси одержуємо

$$P(A)=\frac{C_{12}^2}{C_{15}^2}=\frac{\dfrac{12!}{2!(12-2)!}}{\dfrac{15!}{2!(15-2)!}}=\frac{12\cdot 11}{15\cdot 14}=\frac{22}{35}.$$

Зауважимо, що залежно від задачі, яка розглядається, для одного й того самого експерименту простір елементарних подій можна вводити у різні способи. Найчастіше для цього незалежні елементарні події підбирають так, щоб подія, ймовірність якої потрібно знайти, сама була елементарною або виражалася через суму елементарних подій. Але для того щоб використати класичне означення ймовірності, потрібно бути впевненим, що всі виділені елементарні події — рівноможливі.

Наприклад, як уже зазначалось у задачі про підкидання грального кубика, простір елементарних подій може складатися з 6 незалежних рівноможливих подій — випадання 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок. Але якщо в задачі просять знайти ймовірність випадання парного числа очок, то простором елементарних подій для цього експерименту може бути множина тільки двох подій: u_1 — випадання парної кількості очок, u_2 — випадання непарної кількості очок (оскільки ці події попарно несумісні й у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій). Ці події рівноможливі (оскільки серед чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 рівно половина парних і половина непарних). Отже, за класичним означенням ймовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{2}$. Звичайно, якби ми розглянули перший з указаних просторів елементарних подій, то теж змогли б розв'язати цю задачу: всього подій — 6, а сприятливих — 3 (випадання парного числа очок: 2, 4, 6). Тоді ймовірність випадання парного числа очок дорівнює $\frac{3}{6}$, тобто $\frac{1}{2}$.

Спробуємо ввести для розв'язування цієї задачі такий простір елементарних подій: u_1 — випадання парної кількості очок, u_2 — випадання 1 очка, u_3 — випадання 3 очок, u_4 — випадання 5 очок. Ці події дійсно утворюють простір елементарних подій експерименту з підкидання грального кубика, оскільки вони попарно несумісні й у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій. Але, користуючись таким простором елементарних подій, ми не зможемо застосувати класичне означення ймовірності, оскільки, як ми вже бачили, вказані елементарні події не є рівноможливими: $P(u_1)=\frac{1}{2}$, $P(u_2)=\frac{1}{6}$, $P(u_3)=\frac{1}{6}$, $P(u_4)=\frac{1}{6}$.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке випадковий експеримент та випадкова подія. Наведіть приклади.
2. Поясніть, які події вважають рівноможливими. Наведіть приклади рівноможливих та нерівноможливих подій. Які події вважають несумісними? Наведіть приклади.
3. Поясніть зміст класичного означення ймовірності. Наведіть приклади. Як позначають імовірність події A?
4. Яку подію вважають вірогідною, а яку неможливою? Наведіть приклади. Чому дорівнюють імовірності вірогідної та неможливої подій?

ВПРАВИ

9.1°. Укажіть, які з подій у наведених експериментах є вірогідними, які — неможливими, які — просто випадковими.

№	Експеримент	Подія
1	Виконання пострілу	Попадання в ціль
2	Нагрівання води (при звичайних умовах)	Вода перетворилася на лід
3	Участь у лотереї	Ви виграєте, беручи участь у лотереї
4	Участь у безпрограшній лотереї	Ви не виграєте, беручи участь у безпрограшній лотереї
5	Підкидання звичайного грального кубика	Випало 5 очок
6	Підкидання звичайного грального кубика	Випало менше 8 очок
7	Перевірка роботи дзвінка	Ви натиснули на кнопку дзвінка, а він не задзвонив
8	Витягання кулі з коробки з білими кулями	Витягли чорну кулю
9	Витягання кулі з коробки з білими кулями	Витягли білу кулю
10	Витягання двох куль із коробки з 10 білими й 5 чорними кулями	Витягли білу й чорну кулі
11	Витягання карти з колоди	Витягли туза

9.2. Наведіть по три приклади вірогідних, неможливих і просто випадкових подій. Приклади запишіть у вигляді таблиці (див. вправу 9.1).

9.3°. Відомо, що на 100 батарейок зустрічаються 3 браковані. Яка ймовірність купити браковану батарейку?

9.4°. У магазині підрахували, що звичайно з 1000 телевізорів виявляється 2 бракованих. Яка ймовірність того, що телевізор, вибраний навмання в цьому магазині, буде бракованим?

9.5°. За статистикою в місті N у середньому за рік із 1000 автомобілістів 2 потрапляють в аварію. Яка ймовірність того, що автомобіліст у цьому місті весь рік проїздить без аварій?

9.6°. Яка ймовірність того, що в Києві сонце зійде на заході?

9.7°. Яка ймовірність того, що після 31 грудня настане 1 січня?

9.8°. У пакеті лежать 20 зелених і 10 жовтих груш. Яка ймовірність вийняти з пакета грушу? Яка ймовірність вийняти з пакета яблуко?

9.9°. До екзамену з вищої математики у технічному виші викладач підготував 24 білети. Студент Андрій не розібрався в одному білеті й дуже боїться його витягнути. Яка ймовірність того, що Андрію дістанеться «нещасливий» білет?

9.10°. На запитання вікторини було отримано 1250 листівок із правильними відповідями, у тому числі й ваша. Для визначення призера ведучий повинен навмання витягти одну листівку. Яка ймовірність того, що приз дістанеться вам?

9.11. У лотереї 10 виграшних квитків і 240 квитків без виграшу. Яка ймовірність виграти в цю лотерею, купивши один квиток?

9.12. *Задача Д'Аламбера.* Яка ймовірність того, що при двох підкиданнях монети хоча б один раз випаде «герб»?

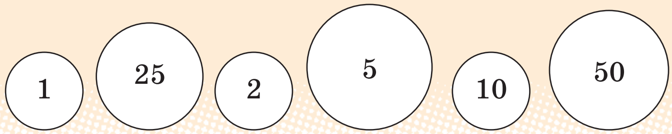
9.13. За перемогу в телегрі Яна одержить головний приз — подорож, якщо за одну спробу вгадає, у якому з 12 секторів табло (рис. 9.3) захований приз. Яка ймовірність того, що Яна вирушить у подорож?

9.14. У лотереї 100 квитків, із них 5 виграшних. Яка ймовірність програшу?

Рис. 9.3

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Рис. 9.4



9.15. У кишені хлопчика лежать 6 монет (рис. 9.4). Яка ймовірність вийняти навмання монету:
1) з номіналом, що є парним числом;
2) з номіналом, що є непарним числом;
3) з номіналом менше 20?

9.16. На картці Суперлото (6 з 52) Данило позначив номери: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наталя на своїй картці позначила номери: 5, 12, 17, 23, 35, 49. Як ви гадаєте, виграш якого набору чисел більш імовірний? Поясніть свою відповідь.

9.17. Ілля позначив у картці Суперлото (6 з 52) номери: 7, 11, 15, 29, 38, 40 — і виграв. Тоді він вирішив, що ця комбінація чисел щаслива і він буде відмічати її у всіх тиражах. Чи дійсно він збільшить свої шанси на виграш? Поясніть свою відповідь.

9.18. У сумці лежать 12 червоних, 10 зелених і 3 жовтих яблука.
1) Яблуко якого кольору ймовірніше всього вийняти навмання із сумки?
2) Яка ймовірність вийняти навмання:
а) яблуко; б) грушу; в) зелене яблуко; г) не червоне яблуко?

9.19. Ви виграєте, якщо куля, вийнята навмання з коробки, біла. Яку з коробок вигідніше вибрати для гри, щоб імовірність виграшу була більшою, якщо:
- у коробці А лежить 15 білих куль із 45;
- у коробці Б лежить 40 білих куль із 120;
- у коробці В лежать 22 білі кулі й 44 червоні;
- у коробці Г порівну білих, червоних і чорних куль.

9.20. Грані звичайного грального кубика пофарбовано в червоний і жовтий кольори. Ймовірність випадання червоної грані дорівнює $\frac{1}{6}$, ймовірність випадання жовтої грані дорівнює $\frac{5}{6}$. Скільки червоних і жовтих граней у кубика?

9.21. У коробці половина цукерок у червоних обгортках, третина — у синіх, решта — у зелених. Навмання вийняли одну цукерку. Обгортка якого кольору найменш імовірна в цієї цукерки? Знайдіть цю ймовірність.

9.22. У шухляді лежать 8 червоних, 2 синіх і 20 зелених олівців. Ви навмання виймаєте олівець.
1) Яка ймовірність того, що це:
а) червоний олівець;
б) жовтий олівець;
в) не зелений олівець?
2) Яку найменшу кількість олівців потрібно вийняти, щоб з імовірністю, яка дорівнює 1, серед них був зелений олівець?

9.23. Кидають одночасно два гральні кубики. Яка ймовірність того, що сума очок буде дорівнювати 12?

9.24. На лавку довільним чином сідають двоє чоловіків і жінка. Яка ймовірність того, що чоловіки опиняться поруч?

9.25. Із 5 карток із буквами М, Р, О, А, Е навмання вибирають 4 картки. Знайдіть імовірність того, що, поклавши їх у ряд у тому порядку, у якому їх вибирали, одержать слово МОРЕ.

9.26. Випущено партію з 500 лотерейних білетів. Імовірність того, що перший вибраний навмання білет із цієї партії буде виграшним, дорівнює 0,2. Визначте кількість білетів *без виграшу* серед цих 500 білетів.

9.27. У коробці лежать різнокольорові кульки, з яких 30 червоних, 10 зелених, а решта — жовті. З'ясуйте, скільки жовтих кульок лежить у коробці, якщо ймовірність вибору випадковим чином жовтої кульки дорівнює 0,6.

9.28*. У торбинці лежать 3 цукерки з молочного шоколаду та m цукерок із чорного шоколаду. Усі цукерки мають однакові форму й розміри. Якого *найменшого значення* може набувати m, якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша від 0,25?

§ 10. ПОНЯТТЯ ПРО СТАТИСТИКУ. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДІВ ДАНИХ

10.1. Поняття про статистику. Генеральна сукупність і вибірка

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Поняття про статистику

Статистика — наука, що вивчає, обробляє й аналізує кількісні дані про найрізноманітніші масові явища в житті.

Економічна статистика вивчає зміну цін, попиту та пропозиції на товари, прогнозує зростання й падіння виробництва й споживання. Медична статистика вивчає ефективність різних ліків і методів лікування, ймовірність виникнення деякого захворювання залежно від віку, статі, спадковості, умов життя, шкідливих звичок, прогнозує поширення епідемій. Демографічна статистика вивчає народжуваність, чисельність населення, його склад (віковий, національний, професійний). А є ще статистика фінансова, податкова, біологічна, метеорологічна...

Статистика — від латин. *status* — стан.

Статистика має багатовікову історію. Уже в стародавньому світі вели статистичний облік населення. Однак довільні тлумачення статистичних даних, відсутність строгої наукової бази статистичних прогнозів навіть у середині XIX ст. ще не дозволяли говорити про статистику як науку. Тільки у XX ст. з'явилася математична статистика — наука, яка спирається на закони теорії ймовірностей. Виявилося, що статистичні методи обробки даних із самих різних галузей життя мають багато спільного. Це дозволило створити універсальні науково обґрунтовані методи статистичних досліджень і перевірки статистичних гіпотез. Отже, ***математична статистика*** **— це розділ математики, який вивчає математичні методи обробки й використання статистичних даних для наукових і практичних висновків.**

У математичній статистиці розглядають методи, які дають можливість за результатами експериментів (статистичними даними) робити певні висновки ймовірнісного характеру.

Математична статистика ділиться на дві широкі галузі:

1) *описова статистика*, яка розглядає методи опису статистичних даних, їх табличне і графічне подання тощо;

2) *аналітична статистика* (теорія статистичних висновків), яка розглядає обробку даних, одержаних у ході експерименту, і формулювання висновків, що мають прикладне значення для конкретної галузі людської діяльності. Теорія статистичних висновків тісно пов'язана з теорією ймовірностей і базується на її математичному апараті.

Серед основних задач математичної статистики можна зазначити такі.

1. *Оцінка ймовірності.* Нехай деяка випадкова подія має ймовірність $p>0$, але її значення нам невідоме. Необхідно оцінити цю ймовірність за результатами експериментів, тобто розв'язати задачу про оцінку ймовірності через частоту.

2. *Оцінка закону розподілу.* Досліджується деяка випадкова величина, точний вираз для закону розподілу якої нам невідомий. Потрібно за результатами експериментів знайти наближений вираз для функції, що задає закон розподілу.

3. *Оцінка числових характеристик випадкової величини.*

4. *Перевірка статистичних гіпотез* (припущень). Досліджується деяка випадкова величина. Виходячи з певних міркувань, висувається гіпотеза, наприклад, про розподіл цієї випадкової величини. Потрібно за результатами експериментів прийняти або відхилити цю гіпотезу.

Результати досліджень, що проводяться методами математичної статистики, застосовуються для прийняття рішень. Зокрема, під час планування й організації виробництва, в процесі контролю якості продукції, вибору оптимального часу наладки або заміни діючої апаратури (наприклад, при визначенні часу заміни двигуна літака, окремих частин верстатів тощо).

Як і в кожній науці, у статистиці використовуються свої специфічні терміни й поняття. Деякі з них наведено в табл. 14. Запам'ятовувати їх означення не обов'язково, достатньо розуміти зміст.

Таблиця 14

Часто вживаний термін	Зміст терміну	Науковий термін	Означення
Загальний ряд даних	Те, звідки вибирають	**Генеральна сукупність**	Множина всіх можливих результатів спостереження (вимірювання)
Вибірка	Те, що вибирають	**Статистична вибірка, статистичний ряд**	Множина результатів, які реально одержані в даному спостереженні (вимірюванні)
Варіанта	Значення одного з результатів спостереження (вимірювання)	**Варіанта**	Одне зі значень елементів вибірки
Ряд даних	Значення всіх результатів спостереження (вимірювання)	**Варіаційний ряд**	Упорядкована множина всіх варіант

2. Генеральна сукупність і вибірка

Для вивчення різних масових явищ проводяться спеціальні статистичні дослідження. Будь-яке статистичне дослідження починається з цілеспрямованого збору інформації про явище або процес, що вивчається. Цей етап називають *етапом статистичних спостережень*. Для отримання статистичних даних у результаті спостережень схожі елементи деякої сукупності порівнюють за різними ознаками. Наприклад, учнів 11 класів можна порівнювати за зростом, розміром одягу, успішністю і т. д. Болти можна порівнювати за довжиною, діаметром, вагою, матеріалом тощо. Практично будь-яка ознака або може бути безпосередньо виміряна, або може одержати умовну числову характеристику (див. приклад з випаданням «герба» й «числа» при підкиданні монети в § 9). Отже, деяку ознаку елементів сукупності можна розглядати як випадкову величину, що набуває тих чи інших числових значень.

В процесі вивчення реальних явищ часто буває неможливо обстежувати всі елементи сукупності. Наприклад, практично неможливо виявити розміри взуття у всіх людей планети. А перевірити, наприклад, наявність аркушів неякісної рентгенівської плівки у великій партії хоча й реально, але безглуздо, тому що повна перевірка призведе до знищення всієї партії плівки.

У подібних випадках замість вивчення всіх елементів сукупності, яку називають *генеральною сукупністю*, обстежують її значну частину, обрану випадковим чином. Цю частину називають *вибіркою*, а число елементів у вибірці — *об'ємом вибірки*.

Якщо у вибірці всі основні ознаки генеральної сукупності присутні в тій самій пропорції і з тією самою відносною частотою, з якою дана ознака виступає в заданій генеральній сукупності, то цю вибірку називають *репрезентативною*.

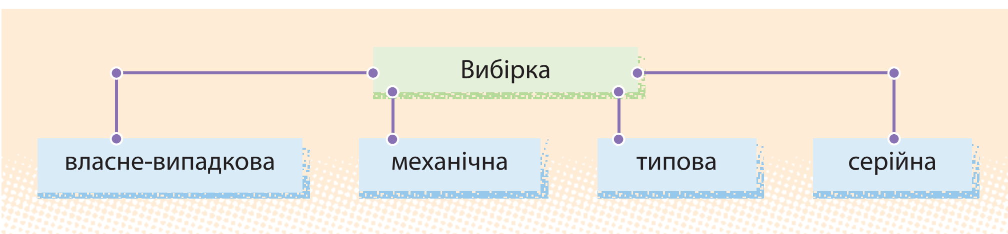
Репрезентативний — від франц. *représentatif* — представницький.

Іншими словами, репрезентативна вибірка є меншою за розміром, але точною моделлю тієї генеральної сукупності, яку вона має відображати. У тій мірі, у якій вибірка є репрезентативною, висновки, що ґрунтуються на вивченні цієї вибірки, можна з великою упевненістю вважати застосовними до всієї генеральної сукупності.

Поняття репрезентативності відібраної сукупності не означає, що вона повністю за всіма ознаками представляє генеральну сукупність, оскільки це практично неможливо забезпечити. Відібрана частина має бути репрезентативною відносно тих ознак, які вивчаються.

Щоб вибірка була репрезентативною, вона має бути виокремлена з генеральної сукупності випадковим чином.

Найчастіше використовують такі види вибірок:



Докладніше ознайомитися з характеристиками кожного виду вибірок ви можете, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Як уже зазначалося, практично будь-яка ознака X, яка вивчається, або безпосередньо вимірюється, або може одержати числову характеристику. Тому первинні експериментальні дані, що характеризують

виокремлену вибірку, зазвичай подані у вигляді набору чисел, записаних дослідником у порядку їх надходження.

Кількість (n) чисел у цьому наборі називають *об'ємом вибірки*, а кількість (m) з'явлень варіанти (одного зі значень елементів вибірки) — *частотою варіанти*. Відношення $\frac{m}{n}$ називають відносною частотою (W) варіанти.

Використовуючи ці поняття, запишемо співвідношення між ними в репрезентативній вибірці.

Нехай S — об'єм генеральної сукупності, n — об'єм репрезентативної вибірки, у якій k значень досліджуваної ознаки розподілено за частотами M_1, M_2, ..., M_k, де $\sum M = n$. Тоді в генеральній сукупності частотам M_1, M_2, ..., M_k будуть відповідати частоти s_1, s_2, ..., s_k тих самих значень ознаки, що й у вибірці $\left(\sum s = S\right)$.

За означенням репрезентативної вибірки одержуємо

$$\frac{M_i}{n} = W_i = \frac{s_i}{S},$$

де i — порядковий номер значення ознаки $(1 \leqslant i \leqslant k)$.
Із цього співвідношення знаходимо

$$s_i = SW_i \quad (\text{або} \quad s_i = S\frac{M_i}{n}), \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \qquad (1)$$

Знак $\sum$ (сигма, читають: «сума») — знак, уведений Л. Ейлером для позначення суми всіх значень деякої величини.

Приклад. Взуттєвий цех має випустити 1000 пар кросівок молодіжного фасону. Для визначення того, скільки кросівок і якого розміру потрібно випустити, були виявлені розміри взуття у 50 випадковим чином вибраних підлітків. Розподіл розмірів взуття за частотами подано в таблиці:

Розмір (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1

$\sum M = n = 50$

Скільки кросівок різного розміру буде виготовляти фабрика?

Розв’язання

Будемо вважати розглянуту вибірку об’ємом $n=50$ підлітків репрезентативною. Тоді в генеральній сукупності (об’ємом $S=1000$) кількість кросівок кожного розміру пропорційна кількості кросівок відповідного розміру у вибірці (і для кожного розміру обчислюється за формулою (1)). Результати розрахунків будемо записувати в таблицю:

Розмір (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1	$\sum M = n = 50$
Відносна частота (W)	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\sum W = 1$
Кількість кросівок (SW)	40	100	120	240	220	140	80	40	20	$\sum (SW) = S = 1000$

Відповідь:

Розмір	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість кросівок	40	100	120	240	220	140	80	40	20

У сільському господарстві для визначення кількісного співвідношення виробів різного сорту користуються так званим *вибірковим методом*. Суть цього методу буде ясна з опису такого досліду.

У коробці ретельно перемішаний горох двох сортів: зелений і жовтий. Ложкою витягають із різних місць коробки порції гороху, у кожній порції підраховують число жовтих горошин M і число всіх горошин n. Для кожної порції знаходять відносну частоту появи жовтої горошини $W=\frac{M}{n}$. Так роблять k разів (на практиці зазвичай беруть $5<k<10$) і щоразу обчислюють відносну частоту. За статистичну ймовірність вилучення жовтої горошини з коробки приймають середнє арифметичне отриманих відносних частот W_1, W_2, ..., W_k:

$$W_{\text{сер}} = \frac{W_1 + W_2 + \ldots + W_k}{k}.$$

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, які завдання розв'язують статистика й математична статистика.
2. Поясніть, як ви розумієте терміни: генеральна сукупність, вибірка, репрезентативна вибірка. Наведіть приклади.

ВПРАВИ

10.1.1. В уривку з художнього твору деякого автора обсягом 600 слів дієслова трапляються 72 рази. Визначте орієнтовну кількість дієслів в уривку обсягом 2000 слів цього автора.

10.1.2. Серед випадковим чином вибраних 100 молодих людей, які влітку носять бейсболки, провели опитування про кольорові переваги для цього виду головних уборів. Результати опитування відображено в таблиці:

Колір	Чорний	Червоний	Синій	Сірий	Білий	Жовтий	Зелений
Частота	32	20	16	14	11	5	2

Вважаючи розглянуту вибірку репрезентативною, запропонуйте рекомендації швейній фабриці з кількості випуску бейсболок кожного кольору, якщо фабрика має випустити 30 000 бейсболок.

10.1.3. Молокозавод випускає молоко різної жирності. У продуктових магазинах міста, для яких завод виробляє молоко, було проведено опитування 50 навмання вибраних покупців про те, якої жирності молоко вони споживають. Результати опитування наведено в таблиці:

Жирність молока (у %)	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Частота	10	6	4	5	12	7	6

Вважаючи розглянуту вибірку репрезентативною, запропонуйте рекомендації молокозаводу щодо об'єму випуску молока кожного виду, якщо молокозавод має випускати 2000 літрів молока щоденно.

10.1.4. **Визначте, яку із запропонованих вибірок в останньому стовпці таблиці можна вважати репрезентативною.**

№	Генеральна сукупність	Мета обстеження	Вибірка
1°	Партія однакових деталей обсягом 10 000 штук	Визначення числа бракованих деталей у партії	1) 100 деталей, які лежать поряд; 2) 100 деталей, вибраних випадковим чином із різних частин партії
2°	Усі екзаменаційні роботи зовнішнього незалежного оцінювання з математики випускників шкіл міста	Виявлення співвідношення між числом учнів, рівень навчальних досягнень із математики яких є достатнім, середнім і високим	1) 10 робіт, узятих випадковим чином із числа всіх робіт; 2) 100 робіт, узятих випадковим чином із числа всіх робіт; 3) 100 робіт випускників однієї школи
3°	Партія штампованих деталей обсягом 100 000 штук	Визначення середньої маси деталі в партії	1) 2 деталі; 2) 100 деталей, які виготовили останніми; 3) 50 випадковим чином вибраних деталей із партії
4	Бідон молока	Визначення жирності молока (у відсотках)	1) Ложка молока, яка взята з поверхні через 2 год після надою; 2) стакан молока, налитий із бідона після 2 год охолодження його в погребі; 3) ложка молока, узята після ретельного перемішування молока
5	Урожай зерна на площі 1000 га	Визначення урожайності зерна на цьому полі	1) Урожай зерна з північного схилу пагорба площею 1 га; 2) середнє арифметичне врожайностей зерна з двох сусідніх ділянок площею 1 га — північного і східного схилів пагорба; 3) середнє арифметичне врожайностей зерна з 10 ділянок, кожна з яких площею 10 соток вибрана на полі випадковим чином

10.2. Табличне і графічне подання даних. Числові характеристики рядів даних

Таблиця 15

Означення	Приклад
Ранжирування ряду даних	
Під *ранжируванням ряду даних* розуміють розташування елементів цього ряду в порядку зростання (мається на увазі, що кожне наступне число або більше, або не менше попереднього).	Якщо ряд даних вибірки має вигляд 5, 3, 7, 4, 6, 4, 6, 9, 4, то після ранжирування він перетворюється на ряд 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9 (1)
Розмах вибірки (R)	
***Розмах вибірки* — це різниця між найбільшим і найменшим значеннями величини у вибірці.**	Для ряду (1) розмах вибірки: $R=9-3=6$.
Мода (Mo)	
***Мода* — це значення елемента вибірки, яке зустрічається частіше за інші.**	У ряді (1) значення 4 зустрічається найчастіше, отже, $Mo=4$.
Медіана (Me)	
***Медіана* — це так зване серединне значення впорядкованого ряду значень випадкової величини:** • *якщо кількість чисел у ряді непарна, то медіана — це число, записане посередині;* • *якщо кількість чисел у ряді парна, то медіана — це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.*	Для ряду (1), у якому 9 членів, медіана — це середнє (тобто п'яте) число — 5: $Me=5$. Якщо розглянути ряд 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9, у якому 10 членів, то медіана — це середнє арифметичне п'ятого і шостого членів: $Me=\frac{4+5}{2}=4,5$.

Середнє значення $(\bar{X})$ вибірки

Середнім значенням вибірки називають середнє арифметичне всіх чисел ряду даних вибірки.

Якщо в ряді даних записані значення x_1, x_2, ..., x_n (серед яких можуть бути й однакові), то

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (2)$$

Якщо відомо, що в ряді даних різні значення x_1, x_2, ..., x_k зустрічаються відповідно до частот m_1, m_2, ..., m_k (тоді $\sum M = n$), то середнє арифметичне можна обчислювати за формулою

$$\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}.$$

Нехай ряд даних заданий таблицею розподілу за частотами M:

X	2	4	5	7
M	3	1	2	2

$$\sum M = n = 8.$$

Тоді за формулою (2)

$$\bar{X} = \frac{2+2+2+4+5+5+7+7}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25$$

або за другою формулою

$$\bar{X} = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25.$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Табличне і графічне представлення даних. Полігони частот

Як уже зазначалося, практично будь-яка ознака X, яка вивчається, або безпосередньо вимірюється, або може одержати числову характеристику. Тому початкові експериментальні дані, що характеризують виділену вибірку, зазвичай подані у вигляді набору чисел, записаних дослідником у порядку їх надходження. Якщо даних багато, то одержаний набір чисел важко осягнути й зробити за ним якісь висновки дуже складно. Тому первинні дані потребують обробки, яка зазвичай починається з їх групування. Групування виконується різними методами залежно від мети дослідження, виду ознаки, що вивчається, і кількості експериментальних даних (об'єму вибірки). Але найчастіше групування зводиться до подання даних у вигляді таблиць, у яких різні значення елементів вибірки впорядковані за зростанням і вказані їх частоти (тобто кількість кожного елемента у вибірці). За необхідності в цій таблиці вказують також відносні частоти для кожного елемента, записаного в першому рядку.

Таку таблицю часто називають рядом розподілу (або *варіаційним рядом*).

Наприклад, нехай у результаті вивчення розміру взуття 30 хлопчиків 11 класу було одержано набір чисел (результати записано в порядку опитування): 39; 44; 41; 39; 40; 41; 45; 42; 44; 41; 41; 43; 42; 43; 41; 44; 42; 38; 40; 38; 41; 40; 42; 43; 42; 41; 43; 40; 40; 42.

Щоб зручніше було аналізувати інформацію, у подібних ситуаціях числові дані спочатку *ранжирують*, розташовуючи їх у порядку зростання (коли кожне наступне число або більше, або не менше за попереднє). У результаті ранжирування одержуємо такий ряд:

38; 38; 39; 39; 40; 40; 40; 40; 40; 41; 41; 41; 41; 41; 41; 41; 42; 42; 42; 42; 42; 42; 43; 43; 43; 43; 44; 44; 44; 45.

Потім складаємо таблицю, у першому рядку якої вказуємо всі різні значення одержаного ряду даних (X — розмір взуття вибраних 30 хлопчиків 11 класу), а в другому рядку — їх частоти M:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
M	2	2	5	7	6	4	3	1

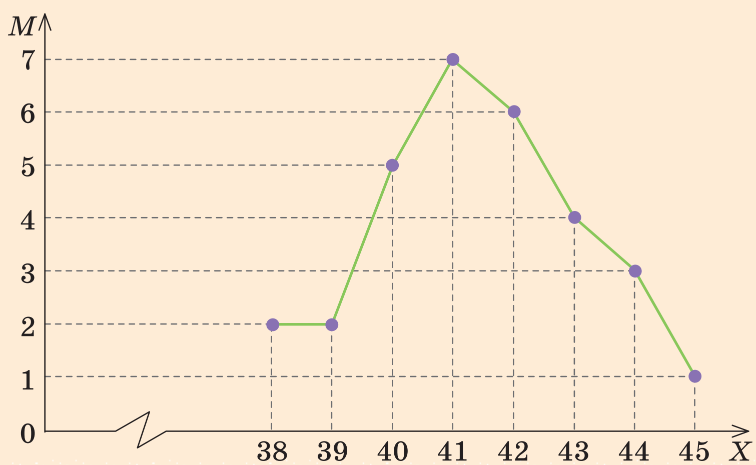
$n = \sum M = 30$

Одержуємо ряд розподілу ознаки X, яка розглядається, за частотами. Іноді зручно проводити аналіз ряду розподілу на основі його графічного зображення.

Позначимо на координатній площині точки з координатами $(x_1; m_1)$, $(x_2; m_2)$, ..., $(x_8; m_8)$ і сполучимо їх послідовно відрізками (рис. 10.2.1).

Одержану ламану лінію називають *полігоном частот*.

Рис. 10.2.1



Означення. ***Полігоном частот*** **називається ламана, відрізки якої послідовно сполучають точки з координатами $(x_1; m_1)$, $(x_2; m_2)$, ..., $(x_k; m_k)$, де x_i — значення різних елементів ряду даних, а m_i — відповідні їм частоти.**

Аналогічно означається й будується *полігон відносних частот* для ознаки X, яка розглядається (будуються точки з координатами $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, ..., $(x_k; w_k)$, де x_i — значення різних елементів ряду даних, а w_i — відповідні їм відносні частоти.

Якщо порахувати відносні частоти для кожного з різних значень ряду даних, розглянутого вище, то розподіл значень ознаки X, яка розглядається, за відносними частотами можна задати таблицею:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
W	$\frac{1}{15} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{15} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{6} \approx 0{,}17$	$\frac{7}{30} \approx 0{,}23$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{2}{15} \approx 0{,}13$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	$\frac{1}{30} \approx 0{,}03$

$$\sum W = 1$$

Також розподіл значень ознаки X, яка розглядається, за відносними частотами можна подати у вигляді полігона відносних частот (рис. 10.2.2), у вигляді лінійної діаграми (рис. 10.2.3) або у вигляді

Рис. 10.2.2

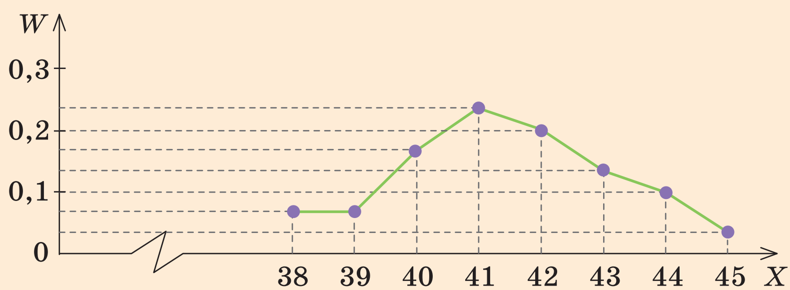
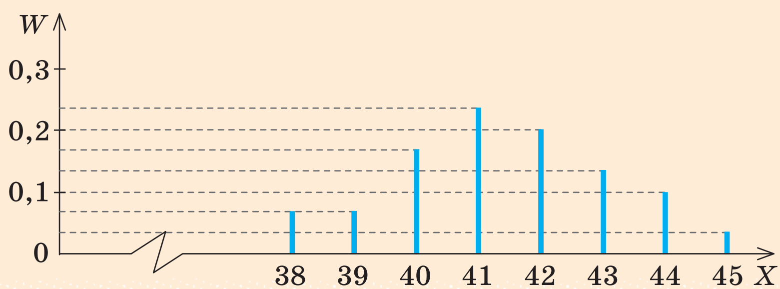
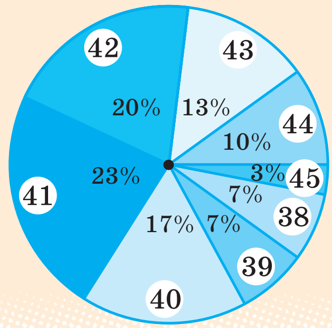


Рис. 10.2.3



кругової діаграми, попередньо записавши значення відносної частоти у відсотках (рис. 10.2.4).

Рис. 10.2.4



Нагадаємо, що для побудови кругової діаграми круг розбивається на сектори, центральні кути яких пропорційні відносним частотам, обчисленим для кожного з різних значень ряду даних. Зауважимо, що кругова діаграма зберігає свою наочність і виразність тільки у випадку невеликої кількості одержаних секторів, в іншому випадку її застосування малоефективне.

Якщо ознака, яка розглядається, набуває багатьох різних значень, то її розподіл можна краще уявити після розбиття всіх значень ряду даних на класи. Кількість класів може бути будь-якою, зручною для дослідження (зазвичай їх вибирають у кількості від 4 до 12). При цьому величини (об'єми) класів мають бути однаковими.

Наприклад, у таблиці подано відомості про заробітну платню 100 працюючих на одному підприємстві (у деяких умовних одиницях). При цьому значення платні (округлені до цілого числа умовних одиниць) згруповані в 7 класів, кожний об'ємом у 100 умовних одиниць.

Класи	Від 400 до 500	Від 500 до 600	Від 600 до 700	Від 700 до 800	Від 800 до 900	Від 900 до 1000	Від 1000 до 1100
Номер класу X	1	2	3	4	5	6	7
Частота (кількість працюючих) M	4	6	18	36	22	10	4

(перевірка: $\sum M = 100$).

Наочно частотний розподіл зарплатні за класами можна подати за допомогою полігона частот (рис. 10.2.5) або стовпчастої діаграми (рис. 10.2.6).

Рис. 10.2.5

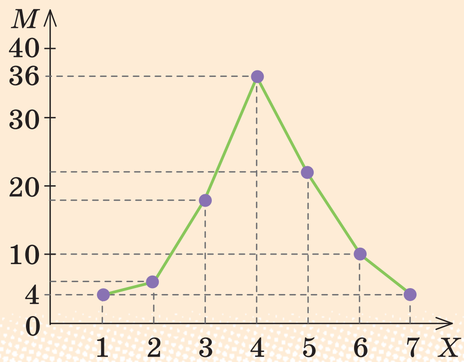
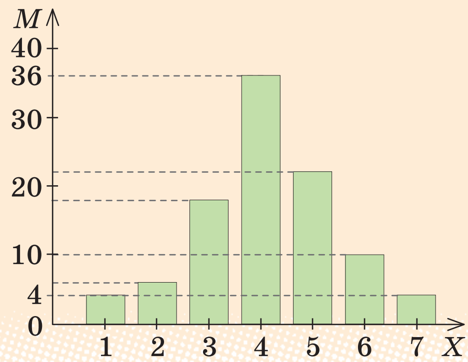


Рис. 10.2.6



2. Числові характеристики рядів даних. Розмах, мода й медіана ряду даних

Іноді вибірку випадкових величин або всю генеральну сукупність цих величин доводиться характеризувати одним числом. На практиці це необхідно, наприклад, для швидкого порівняння двох або більше сукупностей за загальною ознакою.

Розглянемо конкретний приклад.

Нехай після літніх канікул провели опитування 10 дівчат і 9 хлопців одного класу відносно кількості книжок, які вони прочитали за канікули.

Результати було записано в порядку опитування. Одержали такі ряди чисел:

Дівчата: 4, 3, 5, 3, 8, 3, 12, 4, 5, 5.

Хлопці: 5, 3, 3, 4, 6, 4, 4, 7, 4.

Як уже зазначалося, щоб зручніше було аналізувати інформацію, у подібних випадках числові дані ранжирують, розташовуючи їх у порядку зростання (коли кожне наступне число або більше, або не менше за попереднє). У результаті ранжирування одержимо такі ряди:

Дівчата: 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 8, 12. (1)

Хлопці: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7. (2)

Тоді розподіл за частотами M величин: X — число книжок, прочитаних за канікули дівчатами, й Y — число книжок, прочитаних за канікули хлопцями, можна задати таблицями:

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$$\sum M = n = 10$$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$$\sum M = n = 9$$

Ці розподіли можна проілюструвати також графічно за допомогою полігону частот (рис. 10.2.7, *а*, *б*).

Для порівняння рядів (1) і (2) використовують різні характеристики. Наведемо деякі з них.

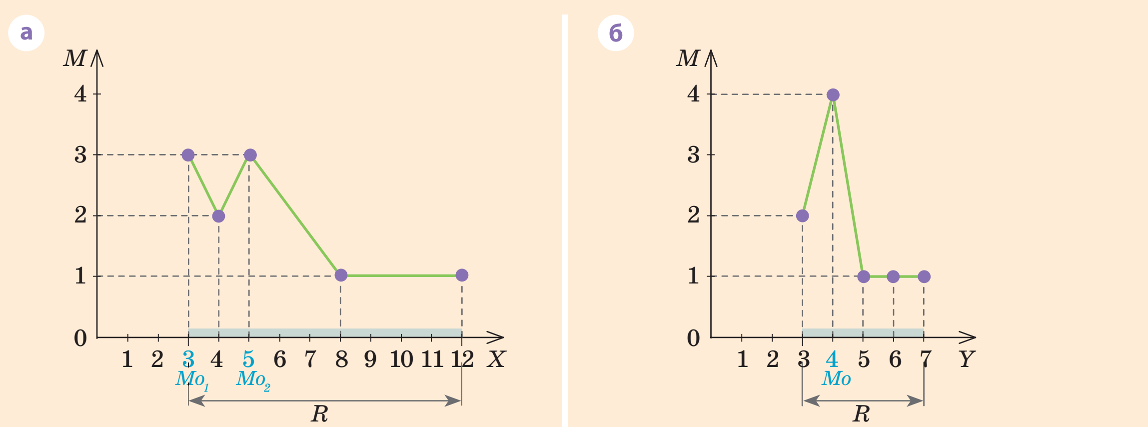
Розмахом ряду чисел (позначають R) називають різницю між найбільшим і найменшим із цих чисел. Оскільки ми аналізуємо вибірку деяких величин, то ***розмах вибірки* — це різниця між найбільшим і найменшим значеннями величини у вибірці.**

Для ряду (1) розмах $R = 12 - 3 = 9$, а для ряду (2) розмах $R - 7 - 3 = 4$. На графіку розмах — це довжина області визначення полігону частот (рис. 10.2.7).

Однією зі статистичних характеристик ряду даних є його *мода*.

Мода — від латин. *modus* — міра, правило.

Рис. 10.2.7



Означення. ***Мода* — це те значення елемента вибірки, яке зустрічається частіше за інші.**

Моду позначають Mo.

Так, у ряді (1) дві моди — числа 3 і 5: $Mo_1 = 3$, $Mo_2 = 5$, а в ряді (2) одна мода — число 4: $Mo = 4$. На графіку мода — це значення абсциси точки, яка відповідає максимуму полігону частот (рис. 10.2.7). Зазначимо, що моди може й не бути, якщо всі значення ознаки, яка розглядається, зустрічаються однаково часто.

Моду ряду даних зазвичай знаходять тоді, коли хочуть з'ясувати деякий типовий показник.

Наприклад, коли вивчаються дані про моделі чоловічих сорочок, які продали в певний день в універмазі, то зручно використати такий показник, як мода, який характеризує модель, що користується найбільшим попитом (власне, цим і пояснюється назва «мода»).

Ще однією статистичною характеристикою ряду даних є його медіана.

Означення. ***Медіана* — це так зване серединне значення впорядкованого ряду значень.**

Медіану позначають Me.

Медіана поділяє впорядкований ряд даних на дві рівні за кількістю елементів частини.

Якщо кількість чисел у ряді непарна, то медіана — це число, записане посередині.

Наприклад, у ряді (2) непарна кількість елементів $(n = 9)$. Тоді його медіаною є число, яке стоїть посередині, тобто на п'ятому місці: $Me = 4$.

3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7

4 — медіана

Отже, про хлопців можна сказати, що одна половина з них прочитала не більше 4 книжок, а друга половина — не менше 4 книжок. (Зазначимо, що у випадку непарного n номер середнього члена ряду дорівнює $\frac{n+1}{2}$.)

Якщо кількість чисел у ряді парна, то медіана — це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.

Наприклад, у ряді (1) парна кількість елементів $(n=10)$. Тоді його медіаною є число, яке дорівнює середньому арифметичному чисел, які стоять посередині, тобто на п'ятому й шостому місцях: $Me=\frac{4+5}{2}=4{,}5$.

3, 3, 3, 4, **4**, **5**, 5, 5, 8, 12

4,5 — медіана

Отже, про дівчат можна сказати, що одна половина з них прочитала менше 4,5 книжок, а друга половина — більше 4,5 книжок. (Зазначимо, що у випадку парного n номери середніх членів ряду дорівнюють $\frac{n}{2}$ і $\frac{n}{2}+1$.)

3. Середнє значення вибірки

Означення. ***Середнім значенням вибірки*** **називається середнє арифметичне всіх чисел ряду даних вибірки.**

Середнє значення позначають $\bar{X}$.

Якщо в ряді даних записані значення x_1, x_2, ..., x_n (серед яких можуть бути й однакові), то

$$\bar{X}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Якщо відомо, що в ряді даних різні значення x_1, x_2, ..., x_k зустрічаються відповідно до частот m_1, m_2, ..., m_k (тоді $\sum M=n$), то, замінюючи однакові доданки в чисельнику на відповідні добутки, одержуємо, що середнє арифметичне можна обчислювати за формулою

$$\bar{X}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{n}. \tag{4}$$

Останню формулу зручно використовувати в тих випадках, коли у вибірці розподіл величини за частотами задано у вигляді таблиці. Нагадаємо, що розподіл за частотами M величин: X — число книжок, прочитаних за канікули дівчатами, й Y — число книжок, прочитаних за канікули хлопцями, було задано такими таблицями:

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$\sum M=n=10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$\sum M=n=9$

Тоді середні значення заданих вибірок дорівнюють:

$$\bar{X} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 12 \cdot 1}{10} = \frac{52}{10} = 5{,}2,$$

$$\bar{Y} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1}{9} = \frac{40}{9} \approx 4{,}4.$$

Оскільки $\bar{X} > \bar{Y}$, то можна сказати, що за один і той самий проміжок часу дівчата в класі читають більше книжок, ніж хлопці.

Зауважимо, що в посібниках зі статистики моду, медіану й середнє значення вибірки об'єднують одним терміном — *міри центральної тенденції*, підкреслюючи тим самим можливість охарактеризувати ряд вибірки одним числом.

Не для кожного ряду даних має сенс формально знаходити центральні тенденції. Наприклад, якщо досліджується ряд

$$5,\ 5,\ 8,\ 110 \qquad (5)$$

річних прибутків чотирьох людей (у тисячах умовних одиниць), то очевидно, що ні мода (5), ні медіана (6,5), ні середнє значення (32) не можуть виступати в ролі єдиної характеристики всіх значень ряду даних. Це пояснюється тим, що розмах ряду (105) є сумірним із найбільшим значенням елемента ряду.

У даному випадку можна шукати центральні тенденції, наприклад, для частини ряду (5):

$$5,\ 5,\ 8,$$

умовно назвавши його вибіркою річного прибутку низькооплачуваної частини населення.

Якщо у вибірці середнє значення суттєво відрізняється від моди, то його недоречно вибирати як типову характеристику розглянутої сукупності даних (чим більше значення моди відрізняється від середнього значення, тим «більш несиметричним» є полігон частот сукупності).

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що називають полігоном частот ознаки X, яка розглядається. Наведіть приклади побудови полігону частот і полігону відносних частот.
2. На прикладі ряду даних 2, 2, 3, 5, 5, 5, 13 поясніть, що таке розмах, мода, медіана та середнє значення ряду й дайте відповідні означення.

ВПРАВИ

10.2.1°. На основі даних таблиці подайте у вигляді стовпчастої і кругової діаграм розподіл значень деякої ознаки X.

1)

X	1	2	3	4
W	0,1	0,3	0,4	0,2

2)

X	1	2	3	4	5
W	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

10.2.2. Побудуйте полігон частот і полігон відносних частот значень деякої ознаки X, розподіл якої подано в таблиці:

1)

X	1	3	5	7	9
M	3	0	5	7	5

2)

X	11	12	13	14	15	16
M	6	5	2	3	1	3

10.2.3°. На рис. 10.2.8 побудовано полігони, що ілюструють розподіл частоти продажів магазином протягом тижня комп'ютерів (зелена лінія) і телевізорів (синя лінія).

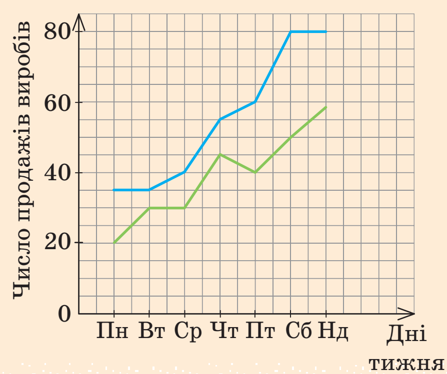
Укажіть два дні, які безпосередньо слідують один за одним, коли:

1) число проданих телевізорів зросло більше, ніж число проданих комп'ютерів;

2) число проданих телевізорів збільшилося, а число проданих комп'ютерів зменшилося;

3) число проданих комп'ютерів зросло, а число проданих телевізорів залишилося тим самим.

Рис. 10.2.8



10.2.4. Знайдіть розмах, моду, медіану й середнє значення ряду даних деякої величини X:

1) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5;

2) –3, –2, –2, –1, 0, 2, 2, 2, 3, 5.

Побудуйте полігон частот значень величини X. Укажіть на рисунку розмах, моду й медіану заданого ряду даних.

10.2.5. Знайдіть розмах, моду, медіану й середнє значення вибірки, заданої таблицею розподілу значень величини X за частотами.

1)

X	2	3	4	5
M	3	4	1	3

2)

X	–1	3	4	5	7
M	2	3	4	4	1

Побудуйте полігон частот значень величини X. Укажіть на рисунку розмах, моду й медіану заданої сукупності даних.

10.2.6. Дівчата 11 класу на уроці фізкультури в стрибках у висоту показали такі результати (у см):
90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140.
Знайдіть моду, медіану й середнє значення цієї сукупності даних. Яке з цих значень найкраще характеризує спортивну підготовку дівчат класу?

10.2.7. За даними Українського центра оцінювання якості освіти учасники ЗНО з математики у 2018 р. отримали такі результати (дані згруповані за класами): з 106 484 учасників 19 806 не подолали поріг, 26 301 учасник отримав від 100 до 120 балів, 17 783 — від 120 до 140 балів, 18 102 — від 140 до 160 балів, 14 695 — від 160 до 180 балів, 9797 — від 180 до 200 балів. Подайте результати тестування за класами у вигляді частотної таблиці, побудуйте полігон частот. Визначте міри центральної тенденції вибірки.

Виявіть свою компетентність

10.2.8. Користуючись мережею Інтернет, знайдіть інформацію щодо розподілу за расами населення кожного континенту і населення Земної кулі в цілому. Побудуйте відповідні діаграми. Дослідіть динаміку зростання населення Землі та динаміку зміни його розподілу за расами за останні 100 років.

10.2.9. Дослідіть споживання вашою родиною протягом року:
1) свіжих овочів, фруктів та зелені;
2) круп;
3) м’яса та м’ясних продуктів.
Побудуйте діаграми, що ілюструють залежність споживання зазначених продуктів від пори року. Зробіть висновки. Скільки ваша родина споживає цих продуктів у середньому на місяць (у розрахунку на одну особу)?

10.2.10. Користуючись таблицею розбудови Київського метрополітену, побудуйте полігон частот кількості станцій за період 1960–2013 рр.

Рік	Кількість станцій	Рік	Кількість станцій	Рік	Кількість станцій
1960	5	1987	28	2010	49
1965	10	1992	35	2011	50
1971	14	2000	40	2012	51
1976	17	2004	43	2013	52
1981	23	2008	46		

10.2.11. Користуючись таблицею статистичних даних щодо кількості медалей, які здобули українські спортсмени на літніх Олімпійських іграх, побудуйте:

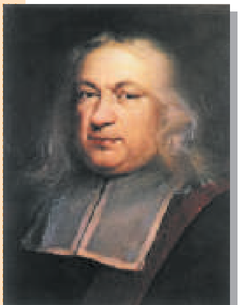
Кількість здобутих медалей	Рік проведення олімпіади					
	1996	2000	2004	2008	2012	2016
Золоті	9	3	9	7	6	2
Срібні	2	10	5	5	5	5
Бронзові	12	10	9	15	8	4
Усього	23	23	23	27	19	11

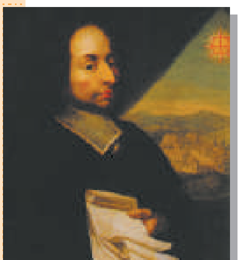
1) полігон частот кількості золотих медалей;
2) полігон частот загальної кількості медалей;
3) кругову діаграму розподілу медалей за видами (золоті, срібні та бронзові) на іграх 2008 р.

10.2.12. У таблиці подано статистичні дані щодо кількості медалей, які здобули українські школярі на Міжнародних математичних олімпіадах у 2013–2018 рр.
Побудуйте:
1) полігон частот загальної кількості медалей;
2) стовпчасту діаграму розподілу загальної кількості здобутих медалей за роками;
3) полігон частот кількості золотих медалей;
4) кругову діаграму розподілу медалей за видами (золоті, срібні та бронзові) на олімпіаді 2015 р.

Кількість здобутих медалей	Рік проведення олімпіади					
	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Золоті	1	2	2	0	1	4
Срібні	3	3	3	2	2	2
Бронзові	1	1	1	4	2	0
Усього	5	6	6	6	5	6

Видатні постаті в математиці


П. Ферма
(1601–1665)


Б. Паскаль
(1623–1662)

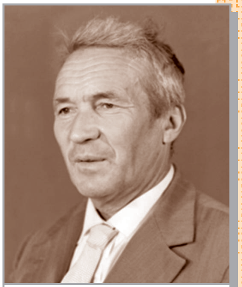

А. А. Марков
(1856–1922)

Елементарні задачі, які пізніше були віднесені до стохастики, тобто до комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики, ставилися й розв'язувалися ще за часів Стародавніх Єгипту, Греції та Риму. Цей період так званої передісторії теорії ймовірностей закінчився в XVI ст. працями італійських математиків **Д. Кардано** (1501–1576) «Книга про гру в кості», **Н. Тарталья** (1499–1557) «Загальний трактат про число та міру», **Г. Галілея** (1564–1642) «Про випадання очок під час гри в кості». У цих працях уже фігурує поняття ймовірності, використовується теорема про ймовірність добутку незалежних подій, висловлюються деякі міркування щодо так званого закону великих чисел. У XVII–XVIII ст. питаннями теорії ймовірностей цікавилися французькі математики **П. Ферма** (1601–1665) і **Б. Паскаль** (1623–1662), нідерландський математик **Х. Гюйґенс** (1629–1695), швейцарські математики **Я. Бернуллі** (1654–1705), **Н. Бернуллі** (1687–1759), **Д. Бернуллі** (1700–1782) та російський математик **Л. Ейлер** (1707–1788). У своїх працях вони вже використовували теореми додавання і множення ймовірностей, поняття залежних та незалежних подій, математичного сподівання.

Велику роль у розповсюдженні ідей теорії ймовірностей та математичної статистики відіграли видатні українські математики **В. Я. Буняковський** (1804–1889) та **М. В. Остроградський** (1801–1862).

Подальший розвиток теорії ймовірностей потребував уточнення її основних положень. Велику роботу в цьому напрямку провів видатний російський математик **П. Л. Чебишов** (1821–1894). Його учень

А. А. Марков (1856–1922) став видатним математиком саме завдяки своїм дослідженням у теорії ймовірностей. Книжка А. А. Маркова «Числення ймовірностей», перше видання якої відбулося в 1900 р., а четверте — у 1924 р., протягом багатьох років була найкращою серед тих, за якими навчалися багато майбутніх математиків.


А. М. Колмогоров (1908–1987)

У XX ст. теорія ймовірностей поступово перетворилась на строгу аксіоматичну теорію. Це відбулося завдяки працям багатьох математиків. Але дійсно вирішальним етапом розвитку теорії ймовірностей стала праця **А. М. Колмогорова** (1908–1987) «Основні поняття теорії ймовірностей» (видана в 1933 р.), у якій він виклав свою аксіоматику теорії ймовірностей. Завдяки цьому теорія ймовірностей стала нарівні з іншими математичними дісциплінами.


М. Й. Ядренко (1932–2004)

Великі досягнення в теорії ймовірностей та математичній статистиці мали також російські та українські математики **О. Я. Хінчин** (1894–1959), **Є. Є. Слуцький** (1880–1948), **Б. В. Гнєденко** (1911–1995) **Й. І. Гіхман** (1918–1985), **В. С. Михалевич** (1930–1994), **М. Й. Ядренко** (1932–2004), **Ю. М. Єрмольєв** (нар. 1936), **І. М. Коваленко** (нар. 1935), **В. С. Королюк** (1925 р. н.), **А. В. Скороход** (1930–2011), **А. Ф. Турбін** (нар. 1940) та інші.


Дж. Ф. Неш (1928–2015)

В останній час все більше математиків звертають увагу на теорію ігор — один з напрямків застосування теорії ймовірностей. Широко відомі дослідження Дж. Ф. Неша (1928–2015), американського математика, лауреата Нобелівської премії (1994 р.), за мотивами біографії якого було знято фільм «Ігри розуму».

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 3

1. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 складено всі можливі п'ятицифрові числа без повторення цифр. Скільки серед цих чисел таких, які починаються записом «423»?

   А 2 Б 24 В 36 Г 96 Д 118

2. Із натуральних чисел від 1 до 30 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число непарне?

   А $\frac{1}{6}$ Б $\frac{1}{5}$ В $\frac{1}{4}$ Г $\frac{1}{3}$ Д $\frac{1}{2}$

3. У коробці лежать 60 різнокольорових кульок: червоні, сині й жовті. З'ясуйте, скільки жовтих кульок лежить у коробці, якщо ймовірність вибору випадковим чином жовтої кульки дорівнює $\frac{1}{3}$.

   А 10 Б 15 В 20 Г 30 Д 40

4. Установіть відповідність між центральними тенденціями (1–3) вибірки та їхніми значеннями (А–Г).

   1 Середнє значення вибірки: 10; 11; 10; 9; 8; 10; 8; 9; 9; 10
   2 Мода вибірки: 10; 11; 10; 9; 8; 10; 8; 9; 9; 10
   3 Медіана вибірки: 10; 11; 10; 9; 8; 10; 8; 9; 9; 10

   А 9,4
   Б 9,5
   В 9,7
   Г 10

5. Гральний кубик підкидають двічі. Знайдіть імовірність того, що випаде різна кількість очок.

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Теми навчальних проектів

1. Комбінаторика в навколишньому житті.
2. Ймовірність навколо нас.
3. Випадкові величини навколо нас і їх числові характеристики.
4. Частота в статистиці й розв'язування економічних задач.
5. Математична статистика навколо нас.

ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 1

МНОГОГРАННИКИ

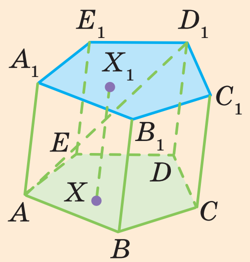
У цьому розділі ви:

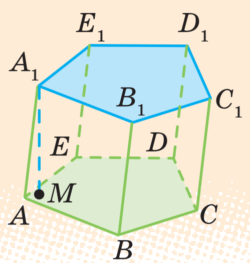
- детальніше ознайомитесь із поняттям многогранника, з призмою, зокрема паралелепіпедом, пірамідою, правильним многогранником і розглянете їхні основні властивості;
- навчитеся розв'язувати задачі, пов'язані з многогранниками.

§ 1. МНОГОГРАННИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. ПРИЗМА

Таблиця 1

Призма
Означення й основні поняття





Призмою **називається многогранник, утворений двома плоскими многокутниками, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіма відрізками, які сполучають відповідні точки цих многокутників.**

$ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основи призми;

AA_1, BB_1, ... — бічні ребра;

ABB_1A_1, BCC_1B_1, ... — бічні грані;

AD_1 — діагональ призми (відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не належать одній грані).

Висота призми **— перпендикуляр, проведений із точки однієї основи призми до площини другої її основи.** Довжину цього перпендикуляра також називають *висотою призми* (це відстань між площинами її основ).

$$A_1M \perp \text{пл. } ABCDE; \; A_1M = H \text{ — висота.}$$

Властивості

1) Основи призми рівні.

$$ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1$$

2) Основи призми лежать у паралельних площинах.

$$\text{пл. } ABCDE \parallel \text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1$$

3) Бічні ребра призми паралельні й рівні.

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \; ...;$$

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \; ...$$

4) Бічні грані призми є паралелограмами.

$$ABB_1A_1 \text{ — паралелограм, } BCC_1B_1 \text{ — паралелограм, ...}$$

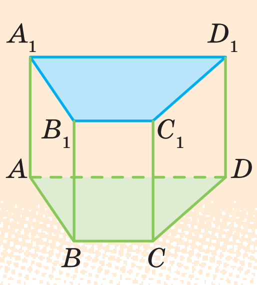
5) Площа бічної поверхні похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу призми на довжину бічного ребра.

$$S_{\text{бічн}} = P_{\perp \text{ перер}} \cdot AA_1$$

$$\left(S_{\text{бічн}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} + \ldots + S_{AEE_1A_1}\right)$$

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$$

Пряма призма



Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ.

$$AA_1 \perp \text{пл. } ABCD,$$

$$BB_1 \perp \text{пл. } ABCD, \ldots$$

Властивості

1) Висота прямої призми дорівнює бічному ребру.

$$H = AA_1 = BB_1 = \ \ldots$$

2) Бічні грані прямої призми є прямокутниками.

ABB_1A_1 — прямокутник, BCC_1B_1 — прямокутник, ...

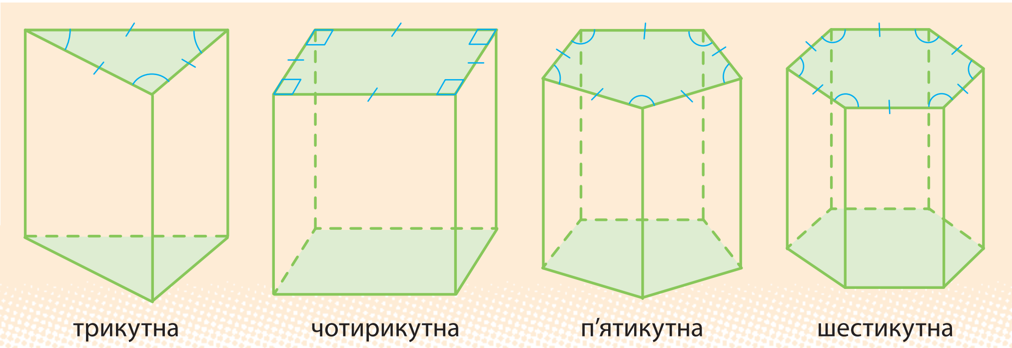
3) Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми, тобто на довжину бічного ребра.

$$S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1$$

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$$

Правильна призма

Пряма призма називається *правильною*, якщо її основи є правильними многокутниками.



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

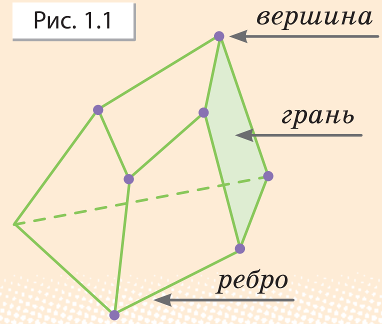
1. Многогранник і його елементи. Опуклі многогранники

Як було зазначено в підручнику для 10 класу, деякі фігури, розглянуті в курсі стереометрії, називають *тілами*. Наочно геометричне тіло можна уявити собі як частину простору, зайняту фізичним тілом і обмежену його поверхнею. Наприклад, поверхня кулі — *сфера* — складається з усіх точок простору, віддалених від однієї точки — *центра* — на відстань, яка дорівнює радіусу. Ця поверхня обмежує *кулю*, що складається з усіх точок простору, які віддалені від однієї точки — *центра* — на відстань, не більшу за радіус.

Відомі вам куб, паралелепіпед, призма і піраміда є многогранниками.

Многогранник — це тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників (рис. 1.1–1.3).

Рис. 1.1



Означення. Многогранник називається *опуклим*, якщо він розташований по один бік від площини кожного плоского многокутника його поверхні.

Наприклад, куб (рис. 1.2) — опуклий многогранник. Неопуклий многогранник зображено на рис. 1.3.

Рис. 1.2

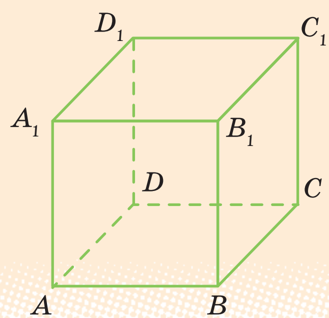
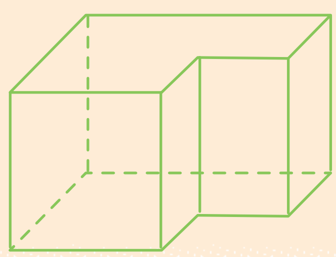


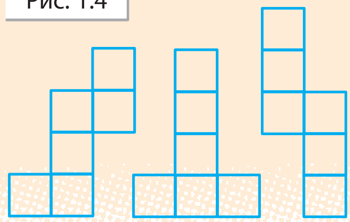
Рис. 1.3



Кожний плоский многокутник, із яких складається поверхня многогранника, називають *гранню многогранника*. Грані опуклого многогранника є плоскими опуклими многокутниками. Сторони граней називають *ребрами многогранника*, а вершини — *вершинами многогранника*.

Пояснимо сказане на прикладі куба (див. рис. 1.2). Куб — це опуклий многогранник. Його поверхня складається з шести квадратів: $ABCD$, ABB_1A_1, ..., які є гранями куба. Ребра куба — сторони цих квадратів: AB, BB_1, ... Вершинами куба є вершини квадратів: A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1. У куба шість граней, дванадцять ребер і вісім вершин.

Рис. 1.4



Якщо поверхню куба (або іншого многогранника) розрізати по декількох його ребрах і розкласти на площині, то одержимо розгортку цього куба (многогранника). Інакше кажучи, *розгорткою многогранника* називають об'єднання скінченного числа многокутників, які відповідно дорівнюють граням цього многогранника. При цьому вказують, які сторони й вершини многокутників зображують одні й ті самі ребра і вершини заданого многогранника, тому повинні склеюватися одне з одним. (Склеювання двох відрізків — рівних сторін многокутників розгортки означає встановлення між їхніми точками такої відповідності, за якої зберігається відстань між двома довільними точками, а відповідні точки відрізків ототожнюють, тобто вважають їх однією точкою розгортки, отже, однією точкою заданого многогранника.)

Поверхню одного многогранника можна розгорнути по-різному. Наприклад, на рис. 1.4 показано кілька розгорток одного куба.

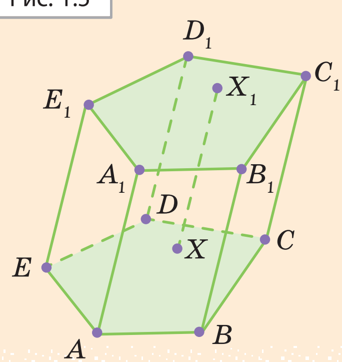
Нагадаємо, що *площа поверхні многогранника* — це сума площ усіх його граней. Вона дорівнює площі розгортки заданого многогранника.

Простим многогранникам — призмам і пірамідам, які будуть основними об'єктами нашого вивчення в цьому розділі, — ми дамо означення, які, по суті, не використовують поняття тіла. Розглядатимемо геометричні фігури, визначаючи всі точки простору, які їм належать.

2. Призма

О **Означення.** ***Призмою* називається многогранник, утворений двома плоскими многокутниками, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників (рис. 1.5).**

Рис. 1.5



Многокутники називають *основами призми*, а відрізки, що сполучають відповідні вершини, — *бічними ребрами призми*.

Означення. Призма називається *n-кутною*, якщо її основами є *n*-кутники.

Надалі розглядатимемо тільки призми, основами яких є опуклі многокутники. Такі призми є *опуклими многогранниками*.

На рис. 1.5 зображено п'ятикутну призму $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Її основами є п'ятикутники $ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$, а відрізок XX_1 сполучає відповідні точки основ. Бічні ребра призми — відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1. Бічні грані призми — паралелограми ABB_1A_1, BCC_1B, ...

Ураховуючи властивості паралельного перенесення, з означення призми одержуємо такі її **властивості**.

1. **Основи призми рівні** (оскільки паралельне перенесення — це рух, а многокутники, які суміщаються рухом, є рівними).
2. **Основи призми лежать у паралельних площинах** (оскільки в результаті паралельного перенесення площина переходить у паралельну площину (або в себе)).
3. **Бічні ребра призми паралельні й рівні** (оскільки в результаті паралельного перенесення точки переміщуються по паралельних (або таких, що збігаються) прямих на ту саму відстань).

Поверхня призми складається з двох основ і бічної поверхні. *Бічна поверхня* складається з паралелограмів. У кожного з цих паралелограмів дві сторони є відповідними сторонами основ, а дві інші — сусідніми бічними ребрами.

Як бачимо, визначена в такий спосіб призма має всі такі самі властивості, що були розглянуті в підручнику для 10 класу на основі наочного поняття призми. Нагадаємо деякі поняття, пов'язані з призмами.

Відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не належать одній грані, називають *діагоналлю призми*.

Означення. *Висотою призми* називається перпендикуляр, проведений із точки однієї основи призми до площини другої її основи. Довжину цього перпендикуляра також називають *висотою призми*.

Оскільки площини основ призми паралельні, то *висотою призми є відстань між площинами її основ* (тобто відстань від будь-якої точки однієї площини основи до паралельної площини іншої основи).

Також нагадаємо (див. § 7 підручника для 10 класу), що згідно з правилами паралельного проектування зображення призми будують у такий спосіб. Спочатку будують одну з основ F (рис. 1.6) — деякий плоский многокутник. Потім із вершин многокутника F проводять бічні ребра призми у вигляді паралельних відрізків рівної довжини. Кінці цих відрізків сполучають і одержують другу основу призми. Невидимі ребра зображують штриховими лініями.

Із властивостей паралельних площин випливає, що перерізи призми площинами, паралельними бічним ребрам, є паралелограмами.

Обґрунтуйте це самостійно.

Зокрема, паралелограмами є так звані *діагональні перерізи призми* — перерізи призми площинами, що проходять через бічне ребро і діагональ основи призми (рис. 1.7).

Рис. 1.6

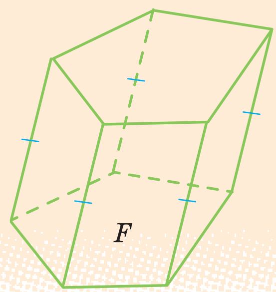
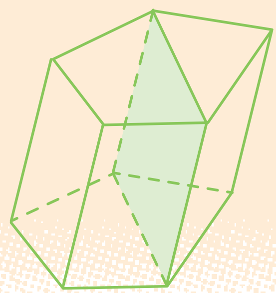
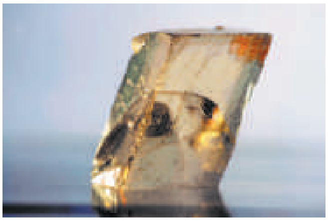


Рис. 1.7



Зазначимо, що призматичну форму мають деякі кристали, наприклад ісландський шпат, смарагд тощо.



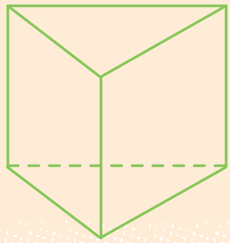
3. Пряма призма

Означення. Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ. Якщо бічні ребра призми не перпендикулярні до основ, то призма називається *похилою*.

У прямої призми всі бічні грані є прямокутниками.

Зображуючи пряму призму, зазвичай бічні ребра проводять вертикально (рис. 1.8).

Рис. 1.8



Властивості прямої призми.

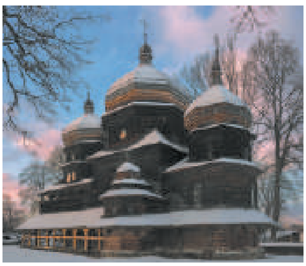
1. **Висота прямої призми дорівнює її бічному ребру** (оскільки кожне бічне ребро перпендикулярне до основи і дорівнює відстані між паралельними площинами основ).

2. Кожна бічна грань прямої призми перпендикулярна до основ призми (оскільки кожна бічна грань проходить через бічне ребро, перпендикулярне до основи).

3. Діагональні перерізи прямої призми є прямокутниками (оскільки кожний діагональний переріз проходить через бічне ребро, перпендикулярне до основи, то всі кути діагонального перерізу є прямими).

Означення. Пряма призма називається *правильною*, якщо її основи є правильними многокутниками.

Форма правильної призми часто використовується в архітектурі, наприклад будівля Пентагона має форму правильної п'ятикутної призми.



Площею бічної поверхні призми (або бічною поверхнею) називають суму площ бічних граней. *Площа повної поверхні призми* дорівнює сумі площ бічної поверхні та площ основ.

Теорема 1.1. Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми, тобто на довжину бічного ребра.

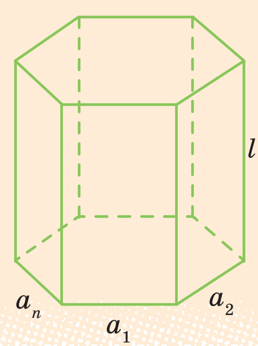
Доведення. Бічні грані прямої призми є прямокутниками. Основи цих прямокутників є сторонами многокутника, який лежить в основі призми, а висоти дорівнюють довжині бічних ребер (рис. 1.9).

Тоді площа бічної поверхні призми дорівнює:

$$S_{\text{бічн}} = a_1 l + a_2 l + \ldots + a_n l = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot l = Pl,$$

де a_1, a_2, ..., a_n — довжини ребер основи; P — периметр основи призми; l — довжина бічних ребер. ■

Рис. 1.9

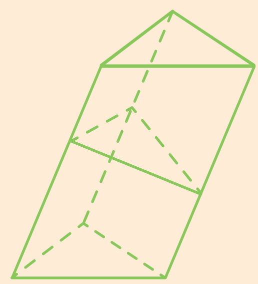


Приклад. У похилій призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра і перпендикулярний до них. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо периметр перерізу дорівнює P, а довжина бічного ребра l.

Розв'язання

Площина проведеного перерізу розбиває призму на дві частини (рис. 1.10).
Застосуємо до однієї з них паралельне перенесення, у результаті якого основи призми сумістяться. При цьому одержимо пряму призму, основою якої є переріз заданої призми, а бічні ребра дорівнюють l. Ця призма має таку саму бічну поверхню, що й задана. Отже, площа бічної поверхні заданої призми дорівнює Pl. ■

Рис. 1.10



Зазначимо, що переріз призми, який перетинає всі бічні ребра і перпендикулярний до бічних ребер, називають *перпендикулярним перерізом*. Тому одержаний результат можна сформулювати так: *площа бічної поверхні (або бічна поверхня) похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу призми на довжину бічного ребра*.

4. Особливості розв'язування стереометричних задач на обчислення, пов'язаних із многогранниками

Під час розв'язування таких задач найчастіше доводиться спочатку обґрунтовувати якусь властивість заданої просторової фігури або тіла і тільки після того, як ця властивість встановлена, виконувати обчислення. Звичайно, у записі розв'язання потрібно обґрунтовувати тільки ті твердження, які будуть використані в ході подальшого розв'язування.

Пропонуємо *схему розв'язування задач на обчислення*, пов'язаних із многогранниками (і тілами обертання).

1. *Обґрунтувати розташування висоти многогранника.*

2. *Обґрунтувати, що просторові кути* і просторові відстані** позначені правильно.*

---

* Під просторовими кутами маються на увазі кут між прямою і площиною, кут між двома площинами, лінійний кут двогранного кута, кут між мимобіжними прямими.

** Під просторовими відстанями маються на увазі відстань від точки до площини, відстані між паралельними прямою і площиною, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими.

3. *Якщо розглядається переріз многогранника, то обґрунтувати його форму (якщо ця форма використовується для розв'язування).*

4. *Якщо розглядається комбінація многогранника і тіла обертання, то описати взаємне розташування їхніх елементів.*

5. *На кожному кроці обчислень указати, елементи якого трикутника визначаються, і якщо він прямокутний, пояснити чому.*

Звичайно, ця схема є орієнтовною, але її використання допомагає впорядкувати міркування в процесі складання плану розв'язування задачі. Це дозволяє не пропустити істотні моменти під час запису її розв'язання. Надалі оформлятимемо розв'язання задач на обчислення, наведених у підручнику, із використанням запропонованої схеми.

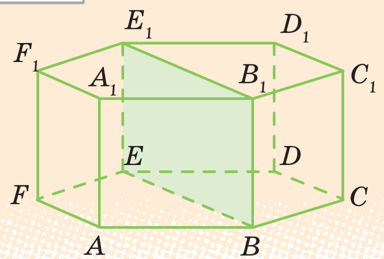
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Площа найбільшого діагонального перерізу правильної шестикутної призми дорівнює 48 см². Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми.

Розв'язання

1) Нехай $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — задана правильна шестикутна призма (рис. 1.11). В основі правильної призми лежить правильний шестикутник $ABCDEF$. Кожне бічне ребро правильної призми є її висотою, тому $BB_1 \perp$ пл. ABC.

Рис. 1.11



Коментар

Використаємо наведену вище схему.

Для обґрунтування розташування висоти достатньо пригадати, що *правильна призма є прямою, тому кожне бічне ребро призми є її висотою.*

За умовою задачі з усіх діагональних перерізів потрібно вибрати найбільший. Оскільки всі діагональні перерізи є прямокутниками з рівними висотами, то найбільшим із них буде той, у якого буде найбільша основа, тобто такий, який проходить через найбільшу діагональ правильного шестикутника.

Для обчислення площі бічної поверхні правильної призми знову слід урахувати, що правильна призма є прямою, тому *площа бічної поверхні правильної призми дорівнює добутку периметра основи на бічне ребро.*

2) Усі діагональні перерізи правильної призми — прямокутники. Їх висоти дорівнюють одна одній і бічному ребру. Основи прямокутників дорівнюють діагоналям основи призми. Тому найбільшим є діагональний переріз, який проходить через найбільшу діагональ основи BE. Тоді $S_{BEE_1B_1} = 48$ см².

3) Нехай $AB = x$, $BB_1 = y$ $(x > 0, y > 0)$.

4) За властивостями правильного шестикутника $BE = 2AB = 2x$. Тому $S_{BEE_1B_1} = BE \cdot BB_1 = 2xy = 48$ см². Звідси $xy = 24$ см².

5) Тоді $S_{\text{бічн}} = 6AB \cdot BB_1 = 6xy = 144$ см².

Відповідь: 144 см². ■

Також потрібно звернути увагу на те, що всі бічні грані призми — рівні прямокутники, тому *для знаходження площі бічної поверхні правильної призми можна знайти площу однієї бічної грані та помножити результат на кількість бічних граней* (на 6).

Розпочинаючи обчислення, слід урахувати орієнтир, наведений в § 2 підручника для 10 класу: *якщо в умові геометричної задачі на обчислення взагалі не задано відрізки (або задані відрізки і кути неможливо об'єднати в зручний для розв'язування задачі трикутник), то зазвичай уводять невідомий відрізок (або невідомий кут, або кілька невідомих)*. Виходячи з цього, треба ввести невідомі відрізки.

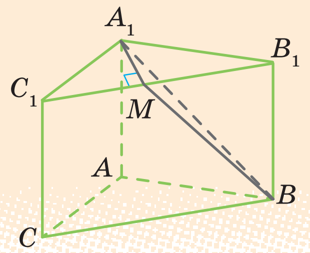
Крім того, вимогу задачі зручно виразити через змінні. Це дозволить за заданим співвідношенням між змінними одержати відповідь.

Задача 2. Основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC, сторони якого $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Висота призми дорівнює 3. Знайдіть кут між прямою A_1B і площиною BCC_1.

Розв'язання

1) Призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.12) пряма, отже, кожне її бічне ребро є висотою призми, тому $BB_1 \perp$ пл. $A_1B_1C_1$.

Рис. 1.12

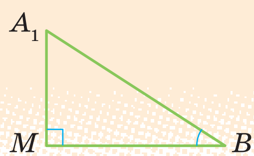


Коментар

Використаємо наведену вище схему. Для обґрунтування розташування висоти достатньо пригадати означення прямої призми. За умовою задачі потрібно вказати кут між прямою A_1B і площиною BCC_1, тобто за означенням — це кут між прямою та її проекцією на цю площину. Щоб одержати проекцію прямої A_1B на площину BCC_1, достатньо з точки A_1 провести перпендикуляр на площину BCC_1.

2) За властивістю прямої призми площина основи $A_1B_1C_1$ перпендикулярна до бічної грані BCC_1B_1. Проведемо в площині $A_1B_1C_1$ перпендикуляр $A_1M \perp B_1C_1$, тоді $A_1M \perp$ пл. BCC_1B_1. Отже, відрізок BM — проекція прямої BA_1 на площину BCC_1B_1 і кут A_1BM — кут між прямою A_1B і площиною BCC_1.
3) У рівнобедреному трикутнику $A_1B_1C_1$ відрізок A_1M — висота, медіана і бісектриса, тоді $MB_1 = 4$.
4) Із прямокутного трикутника A_1MB_1 одержуємо: $A_1M = \sqrt{A_1B_1^2 - B_1M^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
5) Із прямокутного трикутника BB_1M (BB_1C_1C — прямокутник) одержуємо: $BM = \sqrt{BB_1^2 + B_1M^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
6) Із прямокутного трикутника A_1MB $\left(A_1M \perp \text{пл. } BCC_1B_1\right)$ одержуємо (рис. 1.13): $\operatorname{tg} \angle A_1BM = \frac{A_1M}{BM} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Рис. 1.13



Отже, $\angle A_1BM = \operatorname{arctg} 0{,}6$.

Відповідь: $\operatorname{arctg} 0{,}6$. ■

Для цього використаємо такий прийом: *щоб провести перпендикуляр із точки до площини, можна через задану точку провести площину, перпендикулярну до заданої площини, а потім у побудованій площині провести перпендикуляр із заданої точки до прямої перетину розглянутих площин.*

У цьому випадку навіть не потрібно будувати перпендикулярну площину — бічні грані прямої призми перпендикулярні до основ (і є прямокутниками).

Для полегшення аналізу просторових конфігурацій на кожному кроці обчислень можна супроводжувати розв'язування виносними плоскими рисунками (рівнобедреного трикутника $A_1B_1C_1$, прямокутника BB_1C_1C, прямокутного трикутника A_1MB — останній зображено у наведеному розв'язанні).

ЗАПИТАННЯ

1. Який многогранник називають опуклим?
2. Що таке грань опуклого многогранника? ребро? вершина?
3. Що таке призма? основи призми? бічні грані? ребра?
4. Доведіть, що основи призми лежать у паралельних площинах і рівні, бічні ребра паралельні й рівні, бічні грані — паралелограми.

5. Що таке висота призми? діагональ призми?
6. Якою фігурою є переріз призми площиною, паралельною бічним ребрам, зокрема діагональний переріз?
7. Яка призма називається прямою? похилою? Назвіть і обґрунтуйте властивості прямої призми.
8. Яка призма називається правильною?
9. Що таке площа бічної поверхні призми? повної поверхні призми?
10. Доведіть, що площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми.

ВПРАВИ

1.1°. Зобразіть многогранник, який має:
1) шість ребер; 2) вісім ребер; 3) дев'ять ребер.

1.2°. Назвіть многогранник, який має найменшу кількість граней. Скільки в нього вершин, ребер?

1.3°. Одна з граней многогранника — п'ятикутник.
1) Яку найменшу кількість ребер може мати цей многогранник?
2) Яку найменшу кількість граней може мати цей многогранник?

1.4°. Скільки діагоналей має n-кутна призма?

1.5°. Одне бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що інші бічні ребра теж перпендикулярні до площини основи.

1.6. Бічне ребро похилої призми завдовжки 15 см нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту призми.

1.7. Усі ребра правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ рівні. Знайдіть кут між прямими CB_1 і AA_1.

1.8. Основою прямої призми є ромб; діагоналі призми дорівнюють 8 см і 5 см, а висота 2 см. Знайдіть сторону основи.

1.9. Основою призми є правильний шестикутник зі стороною a, а бічні грані є квадратами. Знайдіть діагоналі призми і площі її діагональних перерізів.

1.10. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 144 см², а висота — 14 см. Знайдіть діагональ призми.

1.11. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 32 м^2, а площа повної поверхні 40 м^2. Знайдіть висоту призми.

1.12. Площа бічної грані правильної чотирикутної призми дорівнює Q. Знайдіть площу діагонального перерізу.

1.13. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої завдовжки a утворює:
1) з площиною основи кут $60°$;
2) з площиною бічної грані кут $30°$.

1.14. Усі ребра прямої трикутної призми рівні. Площа бічної поверхні призми дорівнює 12 м^2. Знайдіть висоту цієї призми.

1.15. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з основою $ABCD$ дорівнює 48 м^2, а площа перерізу ABC_1D_1 15 м^2. Знайдіть висоту призми.

1.16. Висота прямої призми дорівнює 15, її основою є рівнобічна трапеція з висотою 10 і основами 25 і 45. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні призми;
2) площу діагонального перерізу призми;
3) двогранні кути при бічних ребрах призми.

1.17. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть площу повної поверхні правильної призми:
1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

1.18*. Діагональ BD_1 правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ завдовжки a утворює з площиною бічної грані BCC_1B_1 кут $30°$. Знайдіть:
1) кут між цією діагоналлю і площиною основи;
2) площу діагонального перерізу BC_1D_1A;
3) площу діагонального перерізу BB_1D_1D.

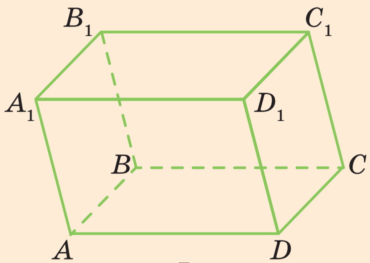
Виявіть свою компетентність

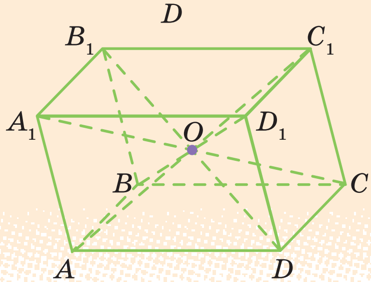
1.19. Підготуйте презентацію, присвячену використанню призм у будівництві. Використайте фотографії будівель у формі різноманітних призм.

§ 2. ПАРАЛЕЛЕПІПЕД. ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

Таблиця 2

Паралелепіпед



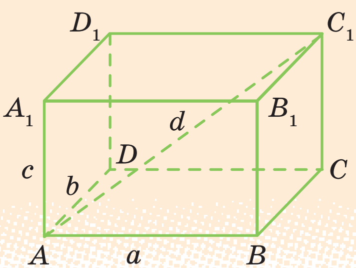


***Паралелепіпедом* називається призма, в основі якої лежить паралелограм.**

Властивості

1) Усі грані паралелепіпеда — паралелограми.
2) Протилежні грані паралелепіпеда паралельні й рівні.
3) Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться навпіл.
   (Точка O — середина A_1C, BD_1, AC_1, B_1D.)

Прямокутний паралелепіпед

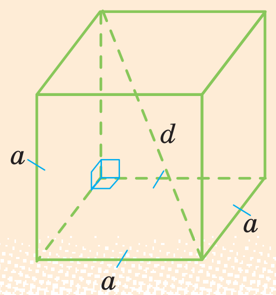


Прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник, називається *прямокутним паралелепіпедом*.

Властивості

1) Усі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.
2) Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $\left(AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2\right)$
3) $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1 = 2(AB + AD) \cdot AA_1 = 2(a+b)c$; $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$

Куб



Кубом **називається прямокутний паралелепіпед, усі ребра якого рівні.**

Властивості

1) Усі грані куба — квадрати.
2) $d = a\sqrt{3}$ $(d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, де a — ребро куба, d — діагональ куба).
3) $S_{\text{бічн. куба}} = 4a^2$, $S_{\text{повн. куба}} = 6a^2$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

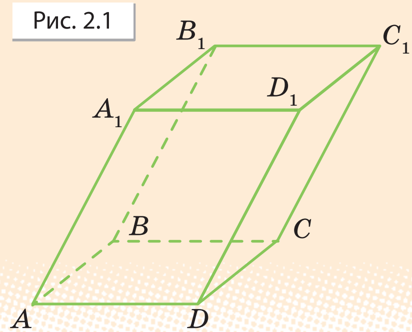
1. Паралелепіпед

Означення. ***Паралелепіпедом*** **називається призма, основою якої є паралелограм.**

Із означення випливає, що в паралелепіпеді всі грані — паралелограми (рис. 2.1).

Грані паралелепіпеда, що не мають спільних вершин, називають *протилежними*.

Рис. 2.1

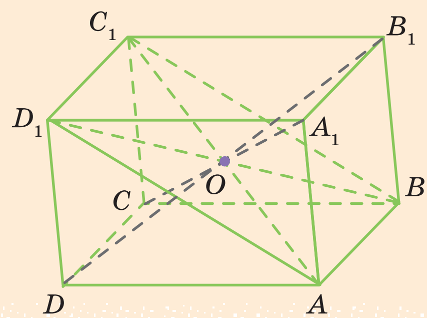


Теорема 2.1. **Протилежні грані паралелепіпеда паралельні й рівні.**

Доведення. Розглянемо довільні дві протилежні грані паралелепіпеда, наприклад AA_1B_1B і DD_1C_1C (рис. 2.1). Оскільки всі грані паралелепіпеда — паралелограми (у яких протилежні сторони паралельні), то пряма AA_1 паралельна прямій DD_1, а пряма AB паралельна прямій DC. За ознакою паралельності площин одержуємо, що площини розглянутих граней паралельні. Із того, що грані паралелепіпеда — паралелограми, випливає, що відрізки AD, BC, A_1D_1, B_1C_1 паралельні й рівні. Тоді в результаті паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{AD}$ грань AA_1B_1B суміститься з гранню DD_1C_1C. Отже, ці грані рівні.

Аналогічно обґрунтовують паралельність і рівність будь-яких інших протилежних граней паралелепіпеда. ■

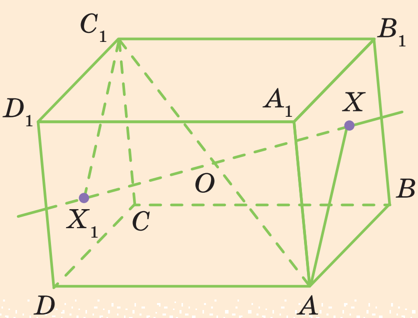
Рис. 2.2



Теорема 2.2. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл.

Доведення. Розглянемо які-небудь дві діагоналі паралелепіпеда, наприклад AC_1 і BD_1 (рис. 2.2). Оскільки грані A_1B_1BA й $A_1B_1C_1D_1$ — паралелограми зі спільною стороною A_1B_1, то їх сторони AB і D_1C_1 паралельні ($AB \parallel A_1B_1$ і $D_1C_1 \parallel A_1B$, тоді $AB \parallel D_1C_1$), отже, лежать в одній площині. Ця площина перетинає площини протилежних граней паралелепіпеда по паралельних прямих AD_1 і BC_1. Тоді чотирикутник ABC_1D_1 — паралелограм. Діагоналі паралелепіпеда AC_1 і BD_1 є діагоналями цього паралелограма, тому вони перетинаються й точкою перетину O діляться навпіл.
Аналогічно доводять, що діагоналі AC_1 і DB_1, а також діагоналі AC_1 і CA_1 перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Звідси одержуємо, що всі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться навпіл. ■

Рис. 2.3



Із теореми 2.2 випливає, що **точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії.**

Доведення. Виберемо довільну пряму, що проходить через точку O — точку перетину діагоналей паралелепіпеда. Нехай вона перетинає поверхню паралелепіпеда в точках X і X_1 (рис. 2.3). Тоді $OX = OX_1$ (це випливає, наприклад, із рівності трикутників AOX і C_1OX_1). Але це й означає, що точка O — центр симетрії паралелепіпеда. ■

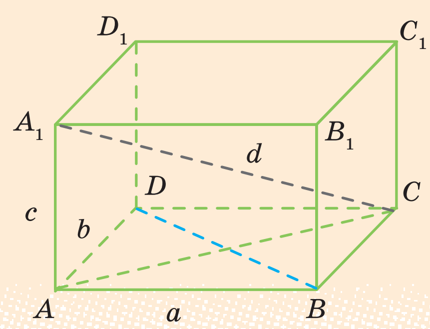
Як і будь-яка призма, паралелепіпед може бути *прямим* і *похилим*. У прямому паралелепіпеді бічні ребра перпендикулярні до основ.

2. Прямокутний паралелепіпед

Означення. **Прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник, називається *прямокутним паралелепіпедом*.**

Із наведеного означення випливає, що всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники, висота дорівнює бічному ребру й кожне ребро перпендикулярне до грані, з якою воно має тільки одну спільну точку. Справді, наприклад, $AD \perp$ пл. ABB_1A_1 (рис. 2.4) за ознакою перпендикулярності прямої і площини, оскільки $AD \perp AB$ й $AD \perp AA_1$.

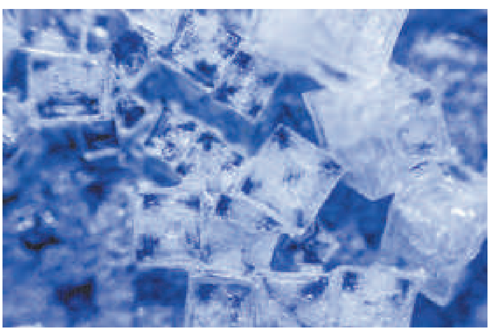
Рис. 2.4



Означення. **Прямокутний паралелепіпед, усі ребра якого рівні, називається *кубом*.**

Нагадаємо, що всі грані куба — *квадрати*.

Зазначимо, що кристали кухонної солі мають форму куба, а незвичне розміщення кубічних форм у будівлях дозволяє створювати оригінальну архітектуру.



Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називають його *лінійними розмірами* (*вимірами*). У прямокутного паралелепіпеда три виміри.

Теорема 2.3. У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

Доведення. Розглянемо прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 2.4) із діагоналлю $A_1C = d$ і трьома вимірами: $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Із прямокутного трикутника ACA_1 за теоремою Піфагора одержуємо: $A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$.

Оскільки $AC = BD$ (як діагоналі прямокутника $ABCD$), то з прямокутного трикутника ABD за теоремою Піфагора одержуємо: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + b^2$. Тоді $A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2 = BD^2 + AA_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Отже, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. ■

Зазначимо, що куб є прямокутним паралелепіпедом, усі виміри якого дорівнюють один одному. Тому, якщо ребро куба дорівнює a, а його діагональ — d, то за теоремою 2.3 маємо: $d^2 = a^2 + a^2 + a^2$, тобто $d^2 = 3a^2$, отже, $d = a\sqrt{3}$.

Симетрія прямокутного паралелепіпеда

У прямокутного паралелепіпеда, як і в будь-якого паралелепіпеда, є центр симетрії — точка перетину його діагоналей. У нього є також три площини симетрії, що проходять через центр симетрії паралельно граням. На рис. 2.5 зображено одну з таких площин. Вона проходить через середини чотирьох паралельних ребер паралелепіпеда. Кінці ребер є симетричними точками.

Якщо всі лінійні розміри паралелепіпеда різні, то в нього немає інших площин симетрії, крім вищеназваних.

Якщо два лінійні розміри паралелепіпеда дорівнюють один одному, то в нього є ще дві площини симетрії. Ці площини діагональних перерізів зображено на рис. 2.6.

Якщо всі лінійні розміри паралелепіпеда дорівнюють один одному, тобто він є кубом, то площина будь-якого його діагонального перерізу є площиною симетрії. Отже, у куба дев'ять площин симетрії.

Рис. 2.5

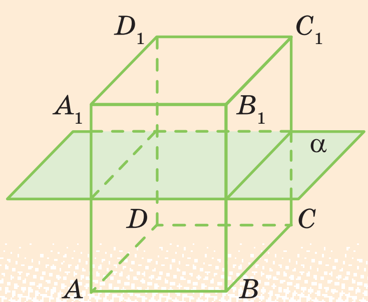
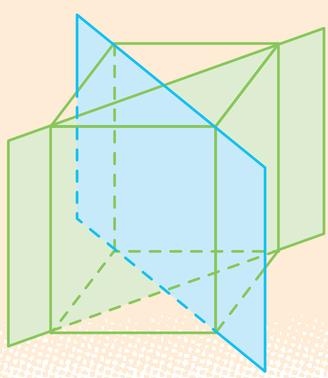


Рис. 2.6



ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайдіть площу повної поверхні прямого паралелепіпеда, усі ребра якого дорівнюють один одному, гострий кут в основі становить 60°, а менша діагональ основи дорівнює a.

Розв'язання

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.7) — заданий прямий паралелепіпед, у якого $\angle BAD = 60°$, $AA_1 = AB = AD$.

Якщо всі сторони паралелограма $ABCD$ дорівнюють одна одній, то паралелограм є ромбом і його менша діагональ лежить проти гострого кута, тобто $BD = a$.

Оскільки трикутник ABD — рівнобедрений із кутом 60°, то він рівносторонній. Отже, $AB = AD = BD = a$.

Тоді $S_{повн} = S_{бічн} + 2S_{осн} =$

$= P_{ABCD} \cdot AA_1 + 2AB \cdot AD \cdot \sin 60° =$

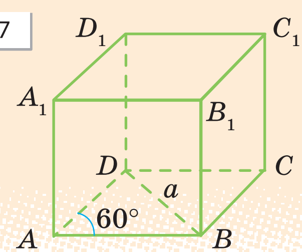
$= 4a \cdot a + a^2\sqrt{3} = \left(4+\sqrt{3}\right)a^2$.

Відповідь: $\left(4+\sqrt{3}\right)a^2$. ■

Коментар

Для обчислення площі бічної поверхні прямого паралелепіпеда слід урахувати, що прямий паралелепіпед є прямою призмою, тому площа бічної поверхні прямого паралелепіпеда дорівнює добутку периметра основи на бічне ребро. Щоб знайти сторону основи, достатньо пригадати відповідний опорний факт із курсу планіметрії: якщо в рівнобедреному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, то цей трикутник рівносторонній.
Також слід пам'ятати, що в ромбі менша діагональ лежить проти гострого кута.

Рис. 2.7



Задача 2*. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною основи кут 45°, а з площиною однієї з бічних граней — кут 30°. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

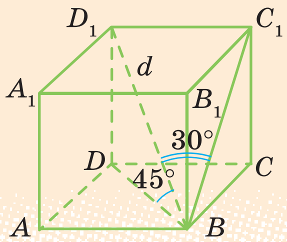
Розв'язання

1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — заданий паралелепіпед із діагоналлю $BD_1 = d$ (рис. 2.8). За властивістю прямокутного паралелепіпеда $D_1D \perp$ пл. $ABCD$ і $D_1C_1 \perp$ пл. BCC_1B_1.

Коментар

Використовуємо основні елементи схеми розв'язування задач на обчислення (див. § 1, п. 4).

Рис. 2.8



2) Тоді DB — проекція D_1B на площину грані $ABCD$, а C_1B — проекція D_1B на площину грані BCC_1B_1. Отже, кут D_1BD — кут між прямою D_1B і площиною грані $ABCD$ $(\angle D_1BD = 45°)$, а кут D_1BC_1 — кут між прямою D_1B і площиною грані BCC_1B_1 $(\angle D_1BC_1 = 30°)$.

3) Із прямокутного трикутника D_1BD одержуємо:
$$DB = D_1B \cdot \cos 45° = d\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$DD_1 = D_1B \cdot \sin 45° = d\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4) Із прямокутного трикутника D_1BC_1 одержуємо: $D_1C_1 = D_1B \cdot \sin 30° = \frac{d}{2}$.

5) Із прямокутного трикутника BCD ($ABCD$ — прямокутник, $DC = D_1C_1 = \frac{d}{2}$) одержуємо:
$BC = \sqrt{DB^2 - DC^2} = \sqrt{\frac{2d^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = \frac{d}{2}$. Тоді
$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = P_{ABCD} \cdot D_1D + 2DC \cdot BC =$$
$$= 2(DC + BC) \cdot D_1D + 2DC \cdot BC =$$
$$= \left(2\frac{d}{2} + \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)d^2.$$

Відповідь: $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)d^2$. ■

1) Обґрунтувати розташування висоти многогранника.
2) Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно.
3) На кожному кроці обчислень указати, елементи якого трикутника визначаємо, і якщо він прямокутний, пояснити чому.

Для обґрунтування розташування висоти врахуємо, що в прямокутному паралелепіпеді будь-яке бічне ребро є його висотою, а для обґрунтування просторових кутів пригадаємо, що кут між похилою й площиною — це кут між заданою похилою і її проекцією на розглянуту площину.

Для обчислення площі бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда слід урахувати, що прямокутний паралелепіпед є прямою призмою, тому площа бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку периметра основи на бічне ребро.

ЗАПИТАННЯ

1. Що таке паралелепіпед?
2. Доведіть, що протилежні грані паралелепіпеда паралельні й рівні.
3. Доведіть, що діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться навпіл.
4. Який паралелепіпед називається прямокутним? Що таке лінійні розміри прямокутного паралелепіпеда?
5. Що таке куб?
6. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.
7. Скільки площин і центрів симетрії має прямокутний паралелепіпед?

ВПРАВИ

2.1°. Зобразіть кілька різних розгорток прямокутного паралелепіпеда.

2.2°. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 дм і 24 дм, а висота паралелепіпеда 8 дм. Знайдіть площу діагонального перерізу.

2.3°. Знайдіть діагоналі прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами:

1) 1, 2, 2; 2) 2, 5, 14; 3) 6, 6, 7.

2.4°. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами:

1) 2 см, 5 см, 10 см; 2) 4 см, 6 см, 8 см; 3) 10 см, 12 см, 5 см.

2.5°. Три грані паралелепіпеда мають площі 1 м^2, 2 м^2 і 3 м^2. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.6°. Знайдіть довжину діагоналі куба, якщо площа його повної поверхні дорівнює 150 см^2.

2.7. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 6 м і 8 м, кут між цими сторонами становить 30°. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 5 м. Знайдіть площу повної поверхні цього паралелепіпеда.

2.8. Знайдіть площу бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює h, площа основи Q, площа діагонального перерізу M.

2.9. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого дорівнює 3 см, а діагоналі бічних граней $\sqrt{5}$ см і $2\sqrt{2}$ см.

2.10. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з його ребрами кути α, β, γ. Доведіть, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2.11. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із діагоналями 6 см і 8 см; діагональ бічної грані дорівнює 13 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.12. Основою паралелепіпеда є ромб зі стороною b і гострим кутом α, а бічні грані — паралелограми з гострим кутом β. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює a. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
2) площу меншого діагонального перерізу;
3) висоту паралелепіпеда.

2.13. Бічне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює 5 м, сторони основи 6 м і 8 м, а одна з діагоналей основи 12 м. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

2.14. У прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомі ребра $AB = 2$, $AD = 1$ і діагональ $AC_1 = 3$. Знайдіть відстань між прямими AB і B_1C_1.

2.15. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, одна з діагоналей основи 4 см. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

2.16*. Доведіть, що сума квадратів площ бічних граней прямого паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів площ його діагональних перерізів.

2.17. Висота прямого паралелепіпеда дорівнює $\sqrt{3}$, діагоналі його утворюють з основою кути 45° і 60°, а основою є ромб. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
2) площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.18. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 13 см і 14 см, менша його діагональ дорівнює 17 см, а площа основи 168 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні.

2.19. Знайдіть діагоналі прямого паралелепіпеда, кожне ребро якого дорівнює a, а гострий кут в основі $60°$.

2.20*. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 2 см і 5 см; відстань між меншими з них 4 см, а бічне ребро $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

2.21*. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, менша сторона якого дорівнює 9 см, а гострий кут становить $60°$. Більша з діагоналей паралелепіпеда дорівнює 29 см, а діагональ його більшої бічної грані 25 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.22. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кут між прямою AB_1 і площиною ABC_1.

2.23*. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомі ребра $AB=35$, $AD=12$, $CC_1=21$. Знайдіть кут між площинами ABC і A_1DB.

Виявіть свою компетентність

2.24. Покажіть на прикладах, що прямокутний паралелепіпед є найбільш уживаним тілом у будівництві. Підготуйте презентацію, у якій використайте фотографії будівель, створених із використанням прямокутних паралелепіпедів.

Прямокутний паралелепіпед є найбільш уживаним тілом у будівництві.

§ 3. ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ ПРИЗМИ Й ЗАДАЧІ, ПОВ'ЯЗАНІ З ПЕРЕРІЗАМИ

Побудова перерізів многогранників була розглянута в курсі геометрії 10 класу. Для побудови можна використовувати властивості паралельності прямих і площин або, наприклад, метод слідів. Нагадаємо ці методи.

1. Використання властивостей паралельних прямих і площин

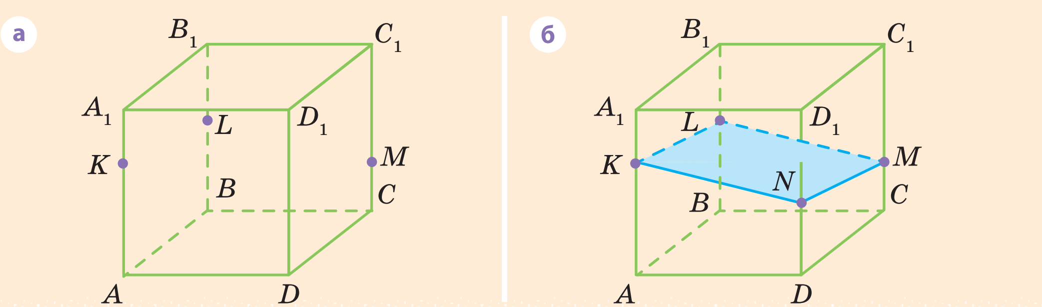
Якщо заданий многогранник містить паралельні грані, які перетинає січна площина, то за властивістю паралельних площин прямі перетину січної площини із цими гранями паралельні.

Побудуємо переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.1, *а*) площиною, що проходить через точки *K*, *L*, *M* на його ребрах ($K \in AA_1$, $L \in BB_1$, $M \in CC_1$). Сполучаємо відрізками пари точок, що лежать в одній грані, — одержуємо відрізки *KL* і *LM* (рис. 3.1, *б*), за якими січна площина перетинає грані ABB_1A_1 і BCC_1B_1 відповідно. Протилежні грані паралелепіпеда попарно паралельні, наприклад пл. $AA_1D_1D \parallel$ пл. BCC_1B_1.

Отже, січна площина перетинає грань AA_1D_1D по прямій *KN*, паралельній прямій *LM* (проводимо $KN \parallel LM$, $N \in D_1D$ і сполучаємо відрізками точки *N* і *M*). Чотирикутник *KLMN* — шуканий переріз.

Іноді використання властивостей паралельних прямих і площин поєднують з іншими методами побудови перерізів многогранників.

Рис. 3.1

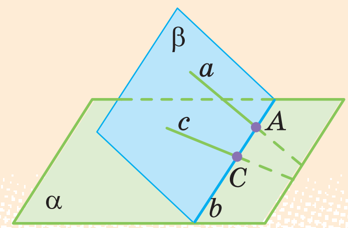


2. Метод слідів

Для побудови більш складних перерізів многогранників зручно застосовувати *метод слідів*: спочатку будують пряму перетину січної площини з площиною якої-небудь грані (слід січної площини на цій грані), а потім уже знаходять точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їхніми продовженнями). Іноді необхідно розглянути допоміжні площини, для яких також будується слід січної площини (або слід цієї допоміжної площини на площині якої-небудь грані).

Нагадаємо: для одержання сліду (прямої b) площини β на площині α (рис. 3.2) достатньо знайти точки перетину двох прямих площини α з площиною β (оскільки дві точки, наприклад A і C, однозначно визначають пряму b). Точка перетину будь-якої прямої a площини β з площиною α завжди лежить на слідові площини β на площині α (на прямій b).

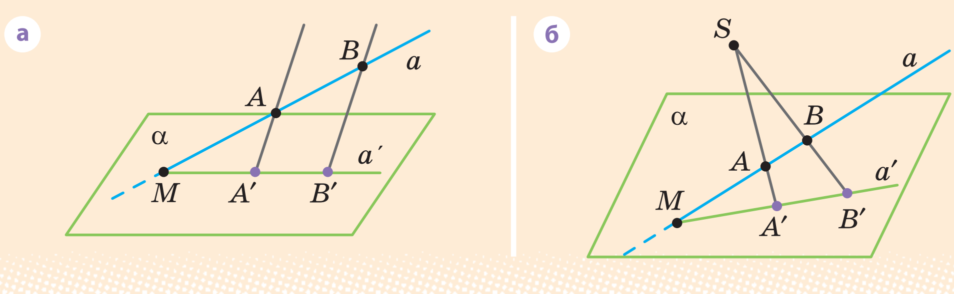
Рис. 3.2



Отримавши уявлення про паралельне і центральне проектування, можна уточнити зміст методу слідів, пов'язаного з використанням відповідних проекцій. Якщо розглядати слід січної площини на площині проекції, то разом із кожною точкою можна розглядати і її проекцію на цю площину. Тоді для побудови відповідного сліду січної площини доводиться двічі знаходити точки перетину прямої й площини за двома заданими точками цієї прямої та їх проекціями на площину.

Нехай, наприклад, пряма a проходить через точки A і B, причому відомі паралельні (рис. 3.3, *а*) або центральні (рис. 3.3, *б*) проекції A', B' цих точок на площину α. Тоді точка M перетину прямої a з її

Рис. 3.3



проекцією — прямою a' (що проходить через точки A' і B') і буде шуканим перетином прямої a з площиною α.

Отже, щоб знайти точку перетину прямої з площиною проекцій, достатньо знайти точку перетину прямої з її проекцією на цю площину.

Таким чином, для побудови перерізів многогранників методом слідів ми можемо використовувати паралельне проектування (у задачах, пов'язаних із призмами) або центральне (у задачах, пов'язаних із пірамідою). Часто за площину проекції вибирають площину основи многогранника (як центр проектування — вершину піраміди, протилежну основі).

За допомогою методу слідів побудуємо переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через три точки K, L, M, які лежать на попарно мимобіжних ребрах куба (рис. 3.4).

Розглянемо паралельне проектування заданих точок на площину основи $ABCD$ у напрямку бічного ребра куба. Тоді проекціями точок K, M, L будуть відповідно точки A, M, L_1, де $LL_1 \parallel D_1D$ (рис. 3.5).

Знайдемо точку перетину прямої LK, що лежить у січній площині, з площиною основи куба. Перетином прямої LK з її проекцією L_1A і є шукана точка P, що належить січній площині й площині основи куба. Отже, січна площина перетинає основу куба по прямій MP (оскільки точки M і P належать як січній площині, так і площині основи $ABCD$). Це і є слід січної площини на площині основи куба. Точка H перетину цієї прямої з ребром AB дає ще одну точку перерізу куба. Сполучимо точки K і H, H і M відрізками.

Далі використовуємо паралельність протилежних граней куба, які січна площина перетинає по паралельних прямих. Через точку L проведемо пряму, паралельну KH, і точку її перетину з ребром CC_1 куба позначимо буквою E. Сполучимо точки E і M відрізком. Через точку L також проведемо пряму, паралельну HM, і точку її перетину з ребром A_1D_1 куба позначимо буквою F. Сполучимо точки L і F, K і F відрізками.

Рис. 3.4

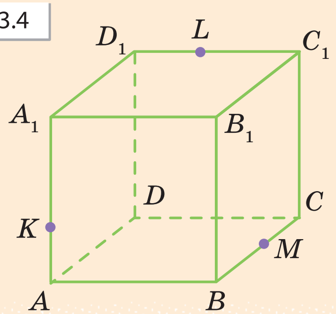
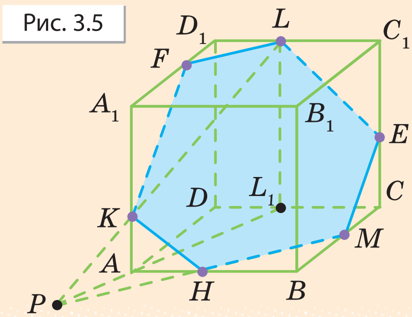


Рис. 3.5



Шестикутник $KHMELF$ і буде шуканим перерізом куба заданою площиною.

Зазначимо, що починати розв'язування задач на обчислення, пов'язаних із перерізами многогранників, можна двома шляхами. Наприклад, якщо в задачі потрібно знайти площу перерізу, то спочатку можна побудувати цей переріз, визначити його форму, а потім знайти його площу. Але оскільки в задачі не вимагають побудувати переріз многогранника, то можна почати розв'язування інакше: прийняти, що переріз уже побудований і, спираючись на властивості паралельності або перпендикулярності прямих і площин, обґрунтувати форму перерізу, а потім знайти його площу (див. інтернет-підтримку підручника).

Також зазначимо, що іноді слід січної площини зручно розглядати не тільки в задачах на побудову перерізів, але й у задачах на обчислення кута між січною площиною й площиною однієї з граней призми або піраміди. У таких випадках нас часто не цікавить вид перерізу, тому його можна не будувати й не обґрунтовувати (див. інтернет-підтримку підручника).

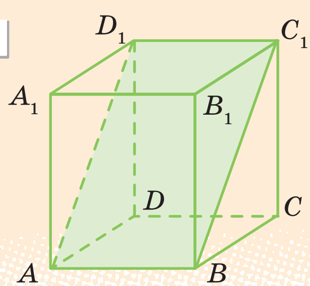
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторони основи AB і AD дорівнюють 5 см і 6 см відповідно, а висота паралелепіпеда 8 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через сторону основи AB і вершину C_1.

Розв'язання

1) Оскільки паралелепіпед прямокутний, то його висотою є бічне ребро, отже, за умовою $DD_1 = 8$ см (рис. 3.6).

Рис. 3.6



Коментар

Використовуємо основні елементи схеми розв'язування задач на обчислення (див. § 1, п. 4).

1) Обґрунтувати розташування висоти многогранника (у цьому випадку достатньо пригадати означення й властивості прямокутного паралелепіпеда).
2) Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно (у цій задачі таких елементів немає).

2) Площини основ $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ паралельні, тому січна площина перетинає їх по паралельних прямих. Січна площина ABC_1 перетинає нижню основу по прямій AB, а верхню — по прямій, яка паралельна прямій AB і проходить через точку C_1. Але через точку C_1 проходить тільки одна пряма, паралельна прямій AB, — це пряма C_1D_1. Отже, перерізом є чотирикутник ABC_1D_1, сторони AB і C_1D_1 якого паралельні й рівні, тобто ABC_1D_1 — паралелограм. Ураховуючи, що $AD \perp AB$ і те, що пряма AD — проекція прямої AD_1 на площину $ABCD$, одержуємо, що $AD_1 \perp AB$ (за теоремою про три перпендикуляри). Отже, ABC_1D_1 — прямокутник.

3) Із прямокутного трикутника ADD_1 (DD_1 — висота паралелепіпеда) маємо:

$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см)}.$$

4) Тоді площа перерізу дорівнює:
$S_{\text{пер}} = AB \cdot AD_1 = 5 \cdot 10 = 50$ (см²).

Відповідь: 50 см². ■

3) Якщо розглядаєте переріз многогранника, то обґрунтувати його форму, якщо цю форму використовуєте для розв'язання (для обчислення площі отриманого перерізу потрібно обґрунтувати, що перерізом є прямокутник).

4) На кожному етапі обчислень указати, елементи якого трикутника визначаєте, і якщо він прямокутний, пояснити чому. Зокрема, щоб обґрунтувати, що трикутник ADD_1 прямокутний, достатньо указати, що DD_1 — висота паралелепіпеда (тоді пряма DD_1 перпендикулярна до площини основи, а це й означає, що вона перпендикулярна до прямої AD, що лежить у цій площині).

З прикладами розв'язування більш складних задач, пов'язаних із перерізами призм, можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАПИТАННЯ

1. Наведіть приклад використання властивостей паралельних площин і прямих для побудови перерізу многогранника.
2. Поясніть зміст методу слідів побудови перерізу многогранника.

ВПРАВИ

3.1°. Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, що проходить через сторону основи й одну з вершин другої основи.

3.2°. Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, що проходить через три точки на бічних ребрах призми.

3.3°. Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює 6 см, а сторона основи 8 см. Знайдіть площу перерізу призми площиною, що проходить через сторону нижньої основи й протилежну вершину верхньої основи.

3.4°. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 10, 17 і 21, а висота 18. Знайдіть площу перерізу, що проходить через бічне ребро й меншу висоту основи.

3.5°. У прямій трикутній призмі через сторону основи під кутом $45°$ до неї проведено площину, що перетинає протилежне бічне ребро. Знайдіть площу перерізу, якщо площа основи дорівнює Q.

3.6. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 13 см, 37 см і 40 см, а бічне ребро 20 см. Знайдіть:
1) площу перерізу призми площиною, що проходить через бічне ребро й меншу висоту основи призми;
2) площу перерізу призми площиною, що проходить через сторону основи під кутом $30°$ до площини основи.

3.7. Основою прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC, де $AB = BC = 25$ см, $AC = 30$ см. Через бічне ребро AA_1 призми проведено площину, перпендикулярну до ребра BC. Визначте висоту призми, якщо площа утвореного перерізу дорівнює 72 см^2.

3.8. Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює $10\sqrt{2}$ см, а висота 20 см. Знайдіть:
1) площу діагонального перерізу призми;
2) площу перерізу, що проходить через протилежні сторони основ призми;
3) площу перерізу призми, що проходить через сторону основи під кутом $45°$ до неї.

3.9. Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а діагональ призми нахилена до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть площу перерізу призми, що проходить через сторону нижньої основи й протилежну сторону верхньої основи.

3.10*. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 20 см і 21 см. Через середину гіпотенузи перпендикулярно до неї проведено площину. Знайдіть площу перерізу, якщо бічне ребро призми дорівнює 42 см.

3.11*. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, площа основи якої дорівнює S, а площа перерізу, проведеного через сторону однієї основи й протилежну вершину іншої основи, дорівнює Q.

3.12. Кожне ребро правильної шестикутної призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дорівнює a. Побудуйте переріз призми площиною, що проходить: 1) через вершини A, C і D_1; 2) через вершини A, B і E_1. Обчисліть площі цих перерізів.

3.13*. Через діагональ основи правильної чотирикутної призми проведено переріз, паралельний діагоналі призми. Знайдіть площу перерізу, якщо висота призми дорівнює 4 см, а сторона її основи 2 см.

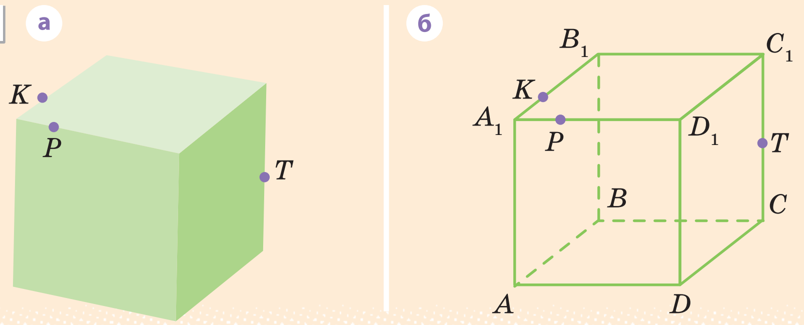
3.14*. У правильній трикутній призмі, кожне ребро якої дорівнює a, побудуйте переріз, що проходить через сторону основи й середину відрізка, який сполучає центри основ. Знайдіть площу перерізу і кут між площиною перерізу й площиною основи.

Виявіть свою компетентність

3.15. Дерев'яний куб із ребром 28 см потрібно розпиляти так, щоб пилка пройшла через точки K, P і T на ребрах куба такі, що точки K і P розташовані на відстані 7 см від найближчої вершини куба, а точка T — середина відповідного ребра куба (рис. 3.7, *а*). Як побудувати на кубі лінії розпилу?

Вказівка. Побудуйте відповідний переріз на зображенні куба і знайдіть відстань DX, де X — точка перетину січної площини з ребром DD_1 (рис. 3.7, *б*).

Рис. 3.7

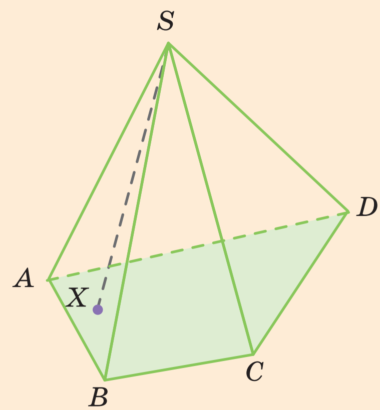


§ 4. ПІРАМІДА

Таблиця 3

Піраміда

Означення. ***Пірамідою*** **називається многогранник, що складається із плоского многокутника (*основи піраміди*), точки, яка не лежить у площині основи (*вершини піраміди*), і всіх відрізків, які сполучають вершину піраміди з точками основи.**



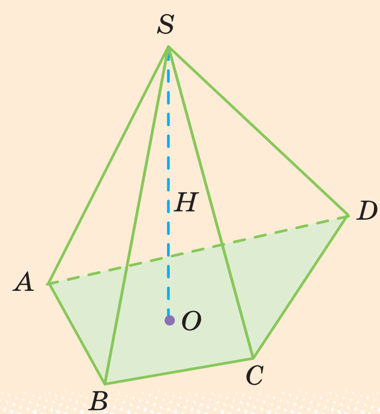
$ABCD$ — основа піраміди;

S — вершина піраміди;

SA, SB, BC, SD — бічні ребра;

$\triangle ASB$, $\triangle BSC$, $\triangle CSD$, $\triangle ASD$ — бічні грані.

Висота піраміди — перпендикуляр, проведений із вершини піраміди на площину основи.



SO — висота піраміди,

$SO = H$ $(SO \perp \text{пл. } ABCD)$;

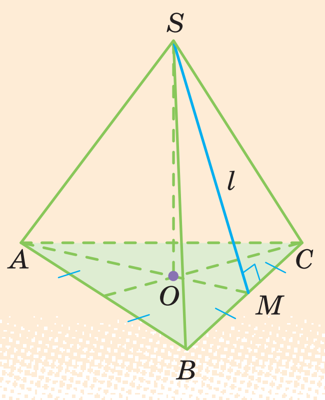
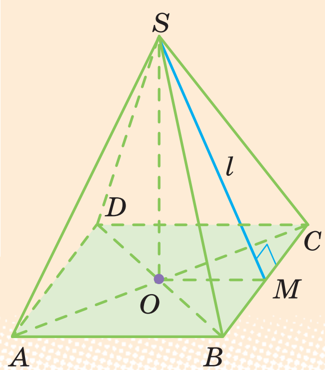
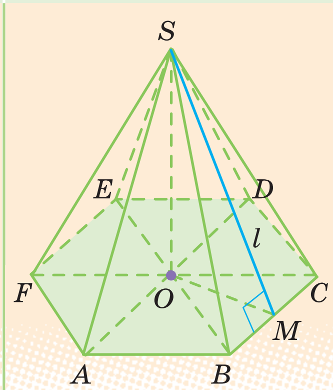
$$S_{\text{бічн. пір}} = S_{\triangle ASB} + S_{\triangle BSC} + S_{\triangle CSD} + S_{\triangle ASD};$$

$$S_{\text{повн. пір}} = S_{\text{бічн. пір}} + S_{\text{осн}}$$

Правильна піраміда

Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника.

Деякі види правильних пірамід

Трикутна	Чотирикутна	Шестикутна
		
$\triangle ABC$ — правильний; O — точка перетину медіан (висот і бісектрис), центр вписаного й описаного кіл	$ABCD$ — квадрат; O — точка перетину діагоналей	$ABCDE$ — правильний шестикутник; O — точка перетину діагоналей AD, BE і FC

SO — висота правильної піраміди ($SO \perp$ пл. ABC; O — центр основи);

SM — апофема правильної піраміди — висота бічної грані $(SM \perp BC)$.

Властивості

1) У правильній піраміді бічні ребра рівні й однаково нахилені до площини основи.

$$SA = SB = SC = ...; \angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = ...$$

2) Бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники, однаково нахилені до основи.

$$\triangle ASB = \triangle BSC = ...$$

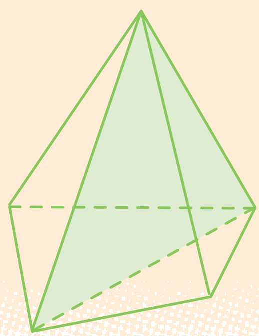
3) $S_{\text{бічн}} = \dfrac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot SM = \dfrac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$, де l — апофема.

4) $S_{\text{бічн}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$, де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до основи;

$$S_{\text{бічн}} = S_{\text{бічн. гр}} \cdot n, \text{ де } n \text{ — число граней.}$$

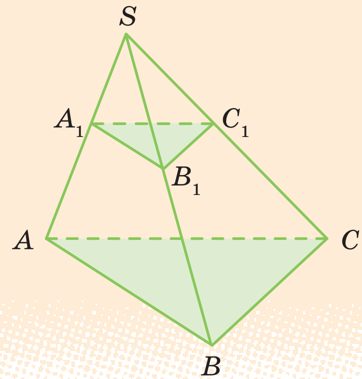
5) $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}$

Перерізи піраміди



Діагональний переріз піраміди — переріз площиною, що проходить через два не сусідні бічні ребра піраміди.

Діагональний переріз піраміди є трикутником.



Переріз піраміди площиною, паралельною основі піраміди.

Площина $A_1B_1C_1$ паралельна площині ABC.

В перерізі одержуємо многокутник (на рисунку — $\triangle A_1B_1C_1$), *подібний многокутнику основи* (і одержуємо піраміду $SA_1B_1C_1$, подібну заданій піраміді). Іншу частину заданої піраміди — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — називають *зрізаною пірамідою*.

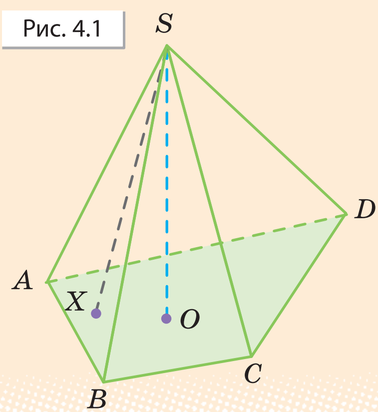
ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Поняття піраміди і її елементів

Сформулюємо означення піраміди, аналогічне означенню призми.

Означення. ***Пірамідою*** **називається многогранник, що утворюється з плоского многокутника —** ***основи піраміди*****, точки, яка не лежить у площині основи, —** ***вершини піраміди*** **— і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи (рис. 4.1).**

Рис. 4.1



Нагадаємо, що відрізки, які сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називають *бічними ребрами*. Наприклад, на рис. 4.1 основою піраміди $SABCD$ є многокутник (чотирикутник) $ABCD$, а бічними ребрами — відрізки SA, SB, SC, SD.

Поверхня піраміди складається з основи й бічних граней. Кожна бічна грань є трикутником. Однією з вершин цього трикутника є вершина піраміди, а протилежною стороною — сторона основи піраміди. Зокрема, у розглянутій піраміді бічними гранями є трикутники SAB, SBC, SCB, SAD. Для знаходження *площі бічної поверхні піраміди* достатньо знайти суму площ усіх її бічних граней, а для знаходження *площі повної поверхні піраміди* — суму площ усіх її граней:

$$S_{\text{бічн}} = S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SCD} + S_{\triangle SAD},$$

$$S_{\text{повн}} = S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SCD} + S_{\triangle SAD} + S_{\triangle ABCD} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}.$$

О **Означення.** ***Висотою піраміди*** **називається перпендикуляр, проведений із вершини піраміди на площину основи** (якщо $SO \perp \text{пл.}\, ABCD$, то SO — **висота піраміди** $SABCD$). **Довжину цього перпендикуляра також називають** *висотою піраміди*.

О **Означення.** **Піраміда називається** ***n-кутною***, **якщо її основою є n-кутник.**

Тетраедр — від. грец. чотиригранник.

Трикутну піраміду іноді називають *тетраедром*. Тетраедр, усі грані якого — правильні трикутники, називають *правильним тетраедром*.

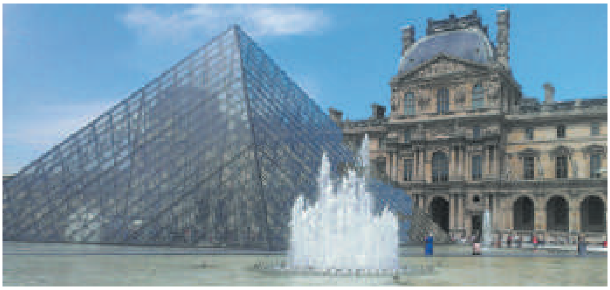
У n-кутній піраміді маємо $n+1$ вершину, $2n$ ребер і $n+1$ грань.

Надалі розглядатимемо тільки піраміди, у яких основи — опуклі многокутники. Такі піраміди є *опуклими многогранниками*.

Відповідно до правил паралельного проектування зображення піраміди будують так. Починають із зображення її основи — деякого плоского многокутника. Потім зображують вершину піраміди, яку сполучають бічними ребрами з вершинами основи (див., наприклад, рис. 4.1). Якщо потрібно зобразити висоту піраміди, то для наочності її зазвичай зображують вертикальним відрізком.

Зазначимо, що за властивостями паралельного проектування зображення висоти у вигляді вертикального відрізка не є обов'язковим — головне, щоб зображуваний відрізок сполучав вершину піраміди з точкою основи, яка є зображенням основи висоти піраміди (див. також табл. 4 в § 5).

Форма піраміди широко використовується в архітектурі. Наприклад новий вхід в Лувр було збудовано у формі піраміди.



2. Правильна піраміда

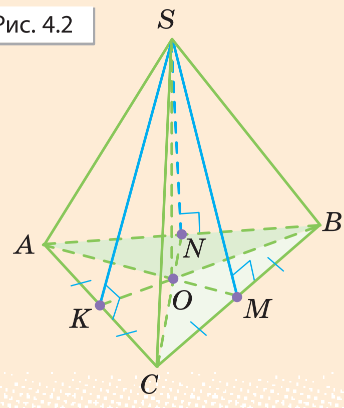
Означення. **Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника.**

Для побудови зображення правильної піраміди будують зображення відповідного правильного многокутника (основи піраміди) і його центра. Потім з отриманого центра проводять висоту (як зазначалося вище, для наочності висоту зображують вертикальним відрізком) і позначають на ній вершину піраміди. Після цього сполучають вершину піраміди з вершинами основи (як завжди, невидимі ребра зображують штриховими лініями).

У табл. 3 наведені зображення правильної трикутної, чотирикутної й шестикутної пірамід. Нагадаємо, що зображенням правильного трикутника може бути довільний трикутник, а центр правильного трикутника (рис. 4.2) зображують точкою перетину медіан трикутника-зображення (див. інтернет-підтримку до § 7 підручника для 10 класу).

Віссю правильної піраміди називають пряму, що містить її висоту. Оскільки всі бічні ребра правильної піраміди рівні (вони мають рівні проекції), то її бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники.

Рис. 4.2



Означення. **Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається *апофемою*.**

Ураховуючи, що всі бічні грані піраміди — рівнобедрені трикутники, робимо висновок, що апофема (висота) є одночасно бісектрисою й медіаною відповідного рівнобедреного трикутника. Отже, якщо SM — апофема, проведена в грані SBC, то точка M — середина сторони основи BC (рис. 4.2).

Оскільки всі бічні грані правильної піраміди рівні, то рівними будуть і відповідні висоти, тобто апофеми. Отже, *усі апофеми правильної піраміди рівні*.

Зазначимо, що коли $BC \perp SM$, то $OM \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), тоді кут SMO — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC, тобто це кут нахилу бічної грані до основи піраміди. Аналогічно кутами нахилу бічних граней до основи піраміди є кути SNO і SKO. Ураховуючи, що прямокутні трикутники SMO, SNO і SKO рівні (за гіпотенузою і катетом), одержуємо: $\angle SMO = \angle SNO = \angle SKO$. Отже, *усі бічні грані правильної піраміди нахилені під рівними кутами до її основи*.

Аналогічно з рівності прямокутних трикутників SAO, SBO і SCO (за гіпотенузою і катетом) одержуємо: $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$. Але це кути нахилу бічних ребер піраміди до площини основи, отже, *усі бічні ребра правильної піраміди нахилені під рівними кутами до площини її основи*.

Зазначимо, що всі наведені результати справедливі не тільки для трикутної, але й для будь-якої правильної піраміди, оскільки всі обґрунтування можна повторити для будь-якої правильної піраміди.

Усі апофеми правильної піраміди рівні; усі бічні грані правильної піраміди нахилені під рівними кутами до її основи; усі бічні ребра правильної піраміди нахилені під рівними кутами до площини її основи.

Наведемо ще одну корисну властивість правильної піраміди.

Теорема 4.1. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.

Доведення. Нехай сторона основи правильної піраміди дорівнює a, число сторін основи — n. Тоді площа бічної поверхні піраміди дорівнює сумі площ n її рівних бічних граней, тобто дорівнює площі бічної грані, помноженої на n:

$$S_{\text{бічн}} = \frac{1}{2} al \cdot n = \frac{an}{2} \cdot l = pl,$$

де l — апофема, а p — півпериметр основи піраміди. ■

Площу бічної поверхні правильної піраміди можна також обчислити за формулою

$$S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi},$$

де φ — кут нахилу бічних граней до основи піраміди.

З обгрунтуванням цієї формули можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

3. Перерізи піраміди

Переріз піраміди площиною, що проходить через її вершину і перетинає її основу, — це завжди трикутник (рис. 4.3). Зокрема, трикутниками є *діагональні перерізи* — перерізи площинами, що проходять через два не сусідні бічні ребра піраміди (рис. 4.4).

Як і в задачах, пов'язаних із призмою (див. § 3), під час побудови або розгляду перерізів піраміди площинами, що не проходять через вершину піраміди, можна використовувати або властивості паралельності й перпендикулярності прямих і площин, або метод слідів (див. також § 3 підручника для 10 класу). Для побудови перерізу піраміди площиною достатньо побудувати відрізки перетину її граней із січною площиною.

З прикладом побудови перерізу піраміди методом слідів можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Інший особливий випадок перерізу піраміди — переріз площиною, паралельною основі піраміди.

Властивість. У перерізі піраміди площиною, паралельною основі, одержуємо многокутник, подібний многокутнику основи (рис. 4.5) **(а також одержуємо піраміду, подібну заданій).**

Із доведенням цієї властивості можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Інша частина піраміди, отримана внаслідок перетину заданої піраміди площиною, паралельною її основі — многогранник, який називають *зрізаною пірамідою*. На рис. 4.5 це многогранник $ABCA_1B_1C_1$.

Грані зрізаної піраміди, *що лежать у паралельних площинах, називають основами;* інші грані називають *бічними* гранями. Ребра зрізаної піраміди, що не лежать у площинах основ, називають *бічними ребрами*. Основи зрізаної піраміди є подібними многокутниками, бічні грані — трапеціями.

Рис. 4.3

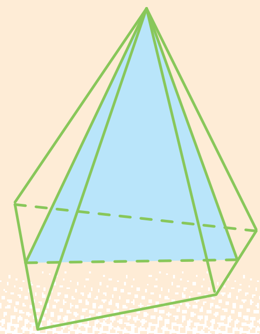


Рис. 4.4

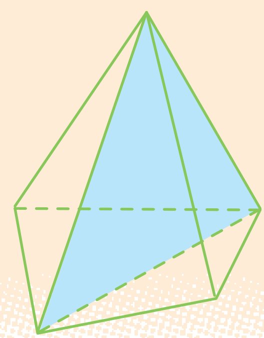
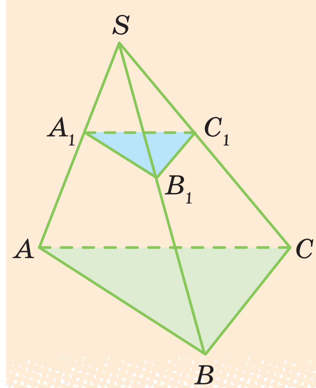


Рис. 4.5



Зрізана піраміда широко використовується в техніці й архітектурі. Наприклад, клавіші клавіатури комп'ютера часто виготовляють у формі зрізаних чотирикутних пірамід. Таку саму форму мають будівлі Інституту мистецтв в Індіанаполісі, США.

Висотою зрізаної піраміди називають перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу основу (нагадаємо, що його довжина дорівнює відстані між паралельними основами зрізаної піраміди).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

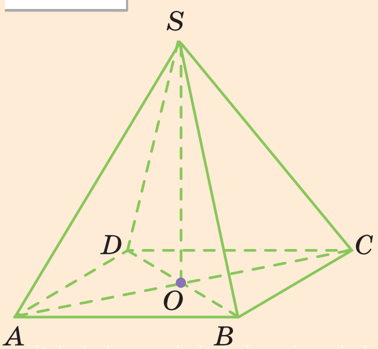
Задача 1. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро, що дорівнює 8 см, нахилене до площини основи під кутом 45° (рис. 4.6). Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

Коментар

Під час розв'язування задачі та її оформлення доцільно користуватися схемою, наведеною в п. 4 § 1. Нагадаємо основні етапи розв'язання за цією схемою.

1) Обґрунтувати розташування висоти піраміди (у цьому випадку достатньо використовувати означення правильної піраміди).
2) Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно (нам задано кут між бічним ребром і площиною основи, тобто кут між цим ребром і його проекцією на площину основи).
3) Обґрунтувати вид і розташування заданого перерізу (у цій задачі перерізу немає).

Рис. 4.6



4) На кожному етапі обчислень указати, елементи якого трикутника визначаєте, і якщо він прямокутний, пояснити чому.

Зазначимо: щоб обґрунтувати, що трикутник SAO прямокутний, достатньо вказати, що SO — висота піраміди (тоді $SO \perp$ пл. $ABCD$, отже, $SO \perp AO$).

Для знаходження площі бічної поверхні піраміди можна врахувати, що всі бічні грані правильної піраміди рівні, тому можна знайти площу однієї грані й результат помножити на 4.

Розв'язання

1) Нехай $SABCD$ (рис. 4.6) — задана піраміда з бічним ребром $SA = 8$ см. За умовою піраміда правильна, отже, основою її висоти SO є центр O основи (точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$).

2) Оскільки $SO \perp$ пл. $ABCD$, то AO — проекція бічного ребра SA на площину основи, тобто кут SAO — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи й $\angle SAO = 45°$.

3) Із прямокутного трикутника SAO (SO — висота піраміди) маємо:

$$AO = SA \cdot \cos 45° = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ (см).}$$

4) За властивістю діагоналей квадрата $AO \perp BD$ і $BO = AO$, тоді з прямокутного трикутника AOB маємо:

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 8 \text{ (см).}$$

5) Отже, у заданій піраміді всі ребра дорівнюють 8 см. Тоді $S_{\text{осн}} = AB^2 = 64$ см².

$$S_{\text{бічн}} = 4S_{\triangle ASB} = 4 \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{).}$$

Тоді $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}} = 64\sqrt{3} + 64 = 64\left(\sqrt{3} + 1\right)$ (см²).

Відповідь: $64\left(\sqrt{3} + 1\right)$ см². ■

З прикладами розв'язування більш складних задач, пов'язаних із пірамідами, а також зі зрізаними пірамідами, можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАПИТАННЯ

1. Що таке піраміда? основа піраміди? бічні грані? ребра? висота?
2. Що таке правильна піраміда? висота правильної піраміди? апофема?

3*. Обґрунтуйте, що в правильній піраміді:
1) усі бічні ребра рівні;
2) усі бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники, а всі апофеми рівні;
3) усі бічні грані нахилені під рівними кутами до основи;
4) усі бічні ребра нахилені під рівними кутами до площини основи.

4. Що таке бічна поверхня піраміди? повна поверхня піраміди?

5*. Доведіть, що площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.

6. Яка фігура є перерізом піраміди площиною, що проходить через її вершину (і перетинає основу піраміди)?

ВПРАВИ

4.1°. У піраміді 31 грань. Скільки в неї ребер?

4.2°. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторона основи 8 см. Знайдіть бічне ребро.

4.3. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть висоту правильної піраміди:
1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

4.4. За стороною основи a і висотою H знайдіть апофему правильної піраміди:
1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

4.5. За стороною основи a і висотою H знайдіть площу повної поверхні правильної піраміди:
1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

4.6. Знайдіть площу повної поверхні правильної шестикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює a і радіус кола, вписаного в основу, r.

4.7. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює 14,76 м^2, а площа повної поверхні 18 м^2. Знайдіть сторону основи й висоту піраміди.

4.8. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см, а апофема 8 см.

4.9. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°, а сторона її основи дорівнює a.

4.10. Знайдіть площу повної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо її апофема дорівнює 10 см, а висота 8 см.

4.11. За стороною основи a знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, діагональний переріз якої рівновеликий основі.

4.12*. Площа бічної поверхні правильної трикутної піраміди в 2 рази більша за площу основи. Знайдіть кут між бічною гранню й основою піраміди.

4.13*. Знайдіть двогранні кути при основі правильної піраміди, площа основи якої дорівнює Q, а площа бічної поверхні S.

4.14*. Знайдіть сторону основи правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см, а площа повної поверхні 16 см^2.

4.15. Центр однієї з граней куба і середини сторін протилежної грані є вершинами піраміди. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо ребро куба дорівнює a.

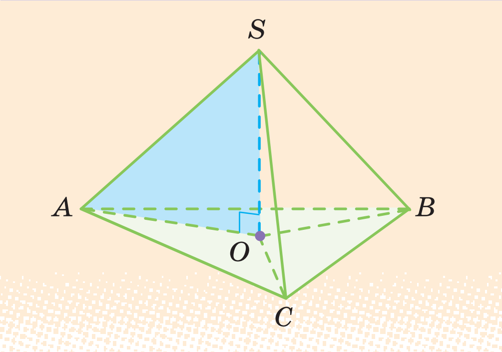
Виявіть свою компетентність

4.16. Підготуйте презентацію, присвячену використанню різноманітних пірамід в архітектурі, дизайні тощо. Використайте відповідні фотографії.

Використання різноманітних пірамід в архітектурі.

§ 5. РОЗТАШУВАННЯ ВИСОТИ В ДЕЯКИХ ВИДАХ ПІРАМІД

Таблиця 4



1. *Якщо* всі бічні ребра піраміди рівні, або нахилені під рівними кутами до площини основи, або утворюють рівні кути з висотою піраміди,

то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи (і навпаки).

Якщо в піраміді $SABC$: $SA = SB = SC$,
або $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$,
або $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$
і $SO \perp \text{пл. } ABC$

то O — центр описаного навколо основи кола $(OA = OB = OC)$.

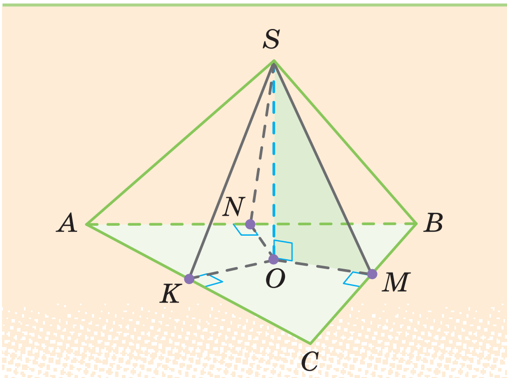
Якщо в піраміді $SABC$:
$SO \perp \text{пл. } ABC$ і точка O — центр описаного навколо основи кола,

то $SA = SB = SC$,
$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$
і $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$.

Для розв'язання використовують прямокутний трикутник SAO, у якому:

$SO \perp AO$, $AO = R_{\text{опис}}$ — радіус описаного навколо основи кола,

$\angle SAO$ — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи.

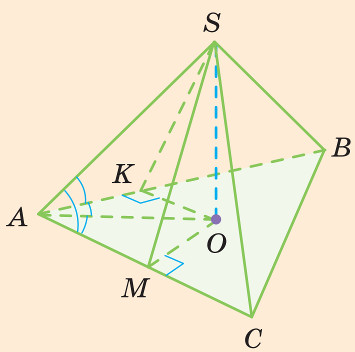


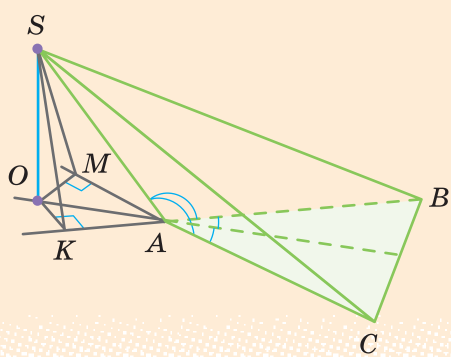
2. *Якщо* всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з основою,

то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу (і навпаки).

Якщо в піраміді $SABC$ грані SAB, SAC і SBC однаково нахилені до основи ABC (тобто $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ — відповідні лінійні кути рівні) і $SO \perp$ пл. ABC, *то* O — центр кола, вписаного в основу $(OK = OM = ON = r)$.	*Якщо* в піраміді $SABC$ $SO \perp$ пл. ABC і точка O — центр кола, вписаного в основу, *то* $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ (тобто всі бічні грані піраміди нахилені під рівними кутами до основи піраміди).

Для розв'язання використовують прямокутний трикутник SOM, у якому:
$SO \perp OM$, $OM = r$ — радіус вписаного в основу кола $(OM \perp BC)$,
$\angle SMO$ — кут нахилу бічної грані SBC до основи
($\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC).
Для пірамід такого виду справедлива формула $S_{\text{бічн}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$,
де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до основи.

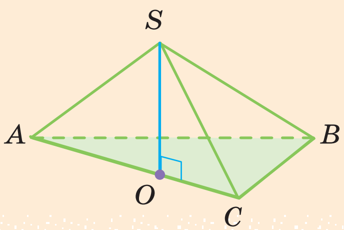




3. *Якщо* тільки дві суміжні бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені до основи або спільне бічне ребро цих граней утворює рівні кути із суміжними з ним сторонами основи, *то* це спільне бічне ребро проектується на пряму, що містить бісектрису кута між суміжними із цим ребром сторонами основи (і навпаки).

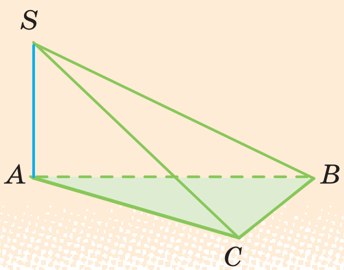
Якщо в піраміді $SABC$ грані SAB і SAC однаково нахилені до основи ABC (тобто $\angle SKO = \angle SMO$) або $\angle SAB = \angle SAC$ і $SO \perp$ пл. ABC, *то* AO — бісектриса кута BAC (або пряма AO містить бісектрису кута BAC).

Якщо в піраміді $SABC$ $SO \perp$ пл. ABC і AO — бісектриса кута BAC (або пряма AO містить бісектрису кута BAC), *то* $\angle SKO = \angle SMO$ (грані SAB і SAC однаково нахилені до основи) і $\angle SAB = \angle SAC$.



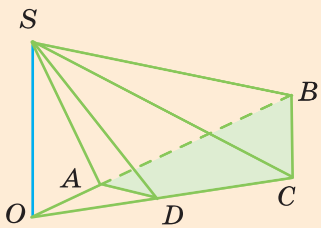
4. *Якщо* тільки одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи,
то висотою піраміди є висота цієї грані.

Якщо в піраміді $SABC$:
$\text{пл.}\, SAC \perp \text{пл.}\, ABC$ і $SO \perp AC$ $(O \in AC)$,
то SO — висота піраміди $(SO \perp \text{пл.}\, ABC)$.



5. *Якщо* дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи,
то висотою піраміди є їхнє спільне бічне ребро.

Якщо $\text{пл.}\, SAB \perp \text{пл.}\, ABC$
і $\text{пл.}\, SAC \perp \text{пл.}\, ABC$,
то SA — висота піраміди $(SA \perp \text{пл.}\, ABC)$.



6. *Якщо* дві несуміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи,
то висотою піраміди є відрізок прямої, по якому перетинаються площини цих граней.

Якщо $\text{пл.}\, SAB \perp \text{пл.}\, ABCD$,
$\text{пл.}\, SCD \perp \text{пл.}\, ABCD$ і пл. SAB перетинає пл. SCD по прямій SO $(O \in \text{пл.}\, ABCD)$,
то SO — висота піраміди.

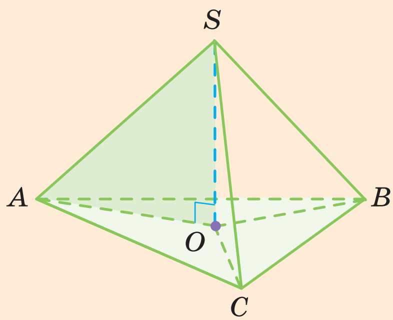
ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Для розв'язування задач, пов'язаних із пірамідою, часто буває зручно використовувати певні **властивості** піраміди, які дозволяють уточнити розташування її висоти й урахувати його вже під час побудови рисунка до задачі. (Зазначимо, що всі запропоновані нижче доведення можуть бути проведені не тільки для трикутних пірамід, зображених на рисунках, але й для всіх n-кутних пірамід із відповідними характеристичними властивостями.)

В **Властивість 1. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, або нахилені під рівними кутами до площини основи, або утворюють рівні кути з висотою піраміди, то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди (і навпаки).**

Доведення. Справді, нехай SO — висота піраміди $SABC$ (рис. 5.1). Потрібне твердження одержуємо з рівності прямокутних трикутників SOA, SOB, SOC (для доведення прямого твердження використовуємо рівність за спільним катетом SO і гіпотенузою або за спільним катетом SO і гострим кутом, а для доведення оберненого твердження — рівність за двома катетами).

Рис. 5.1



Наприклад, якщо всі бічні ребра піраміди рівні: $SA = SB = SC$, то з рівності зазначених трикутників одержуємо: $OA = OB = OC$. Отже, точка O рівновіддалена від точок A, B, C і є центром кола, описаного навколо основи піраміди — трикутника ABC. (Інші прямі й обернені твердження цієї властивості обґрунтуйте самостійно.) ■

Зазначимо, що для розв'язування задач, пов'язаних із пірамідами такого виду, зазвичай використовують прямокутний трикутник SAO, у якому $SO \perp AO$, $AO = R$ (радіус кола, описаного навколо основи піраміди), $\angle SAO$ — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи (оскільки $SO \perp$ пл. ABC, то AO — проекція ребра SA на площину основи).

Аналогічно обґрунтовуються й інші властивості, наведені в табл. 4 (обґрунтуйте їх самостійно, звернувшись за необхідності до інтернет-підтримки підручника).

Властивості 1–6 (див. табл. 4) часто доводиться використовувати не тільки під час запису розв'язання задач, пов'язаних із пірамідою, але й під час побудови рисунків до таких задач. В останньому випадку спочатку в умові задачі виокремлюють фрагменти, які описуються властивостями 1–6, і визначають розташування основи висоти піраміди. Потім зображують проекцію основи піраміди, позначають на ній точку O, яка є проекцією основи висоти піраміди (ураховуючи властивості паралельного проектування), а потім з основи висоти (точка O) вертикально (для більшої наочності) проводять висоту піраміди SO і сполучають точку S із вершинами основи.

Розглянемо як приклад побудову рисунка до задачі 1 (див. далі).

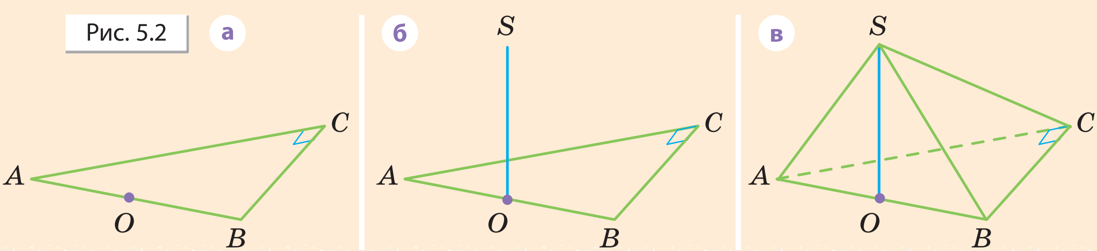
Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим гострим кутом $60°$. *Знайдіть висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра нахилені до площини основи під кутом* $45°$.

Спочатку будуємо проекцію основи піраміди. Проекцією прямокутного трикутника може бути довільний трикутник. Тому зображуємо довільний трикутник ABC, який є зображенням прямокутного трикутника, і позначаємо зображення прямого кута (наприклад, при вершині C, як показано на рис. 5.2, *а*).

Потім звертаємо увагу на ту частину умови, яка відповідає властивостям 1–6. Зокрема, якщо всі бічні ребра піраміди нахилені під рівними кутами до площини основи, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди (властивість 1). Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи. Середина відрізка проектується в середину відрізка проекції, тому проекцією основи висоти є точка O — середина відрізка AB. Проводимо із точки O відрізок SO (бажано вертикально для більшої наочності), який є зображенням висоти піраміди (рис. 5.2, *б*), і, сполучаючи відрізками точку S із вершинами трикутника ABC, одержуємо зображення заданої піраміди $SABC$ (рис. 5.2, *в*). (Розв'язання цієї задачі наведено нижче — задача 1.)

Нагадаємо, що під час розв'язування задач на обчислення, пов'язаних із пірамідами, доцільно використовувати загальну схему розв'язування й запису задач, пов'язаних із многогранником, наведену в § 1.

Рис. 5.2



ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим гострим кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°.

Розв'язання

1) Нехай основою заданої піраміди $SABC$ є прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C ($BC = a$, $\angle ABC = 60°$). Оскільки в заданій піраміді всі бічні ребра нахилені під рівними кутами до площини основи, то основою висоти SO піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди. Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, тому основа висоти SO — точка O — це середина гіпотенузи AB (рис. 5.2, *в*).

2) Оскільки AO — проекція бічного ребра SA на площину основи ABC, то кут SAO — це кут між бічним ребром SA і площиною основи (за умовою $\angle SAO = 45°$).

3) Із прямокутного трикутника ABC одержуємо: $AB = \dfrac{BC}{\cos\angle ABC} = \dfrac{a}{\cos 60°} = 2a$.

Тоді $AO = \dfrac{1}{2}AB = a$.

4) Із прямокутного трикутника SAO (SO — висота піраміди) маємо:
$SO = AO \cdot \mathrm{tg}\angle SAO = a \cdot \mathrm{tg}\,45° = a$.

Відповідь: a. ■

Коментар

Побудову зображення піраміди до цієї задачі наведено на рис. 5.2. Потім доцільно використовувати схему розв'язування задач на обчислення, пов'язаних із многогранниками (див. § 1, п. 4).

Як завжди, на першому етапі розв'язання обґрунтовуємо розташування висоти піраміди, а на другому — розташування просторового кута між прямою і площиною, тобто розташування кута між бічним ребром і площиною основи піраміди (достатньо обґрунтувати розташування тільки одного кута, оскільки за умовою всі вони рівні). Подальшим етапом розв'язання є проведення обчислень. Записуючи цей етап, потрібно на кожному кроці вказувати трикутник, елементи якого визначаємо, і якщо він прямокутний, пояснити чому.

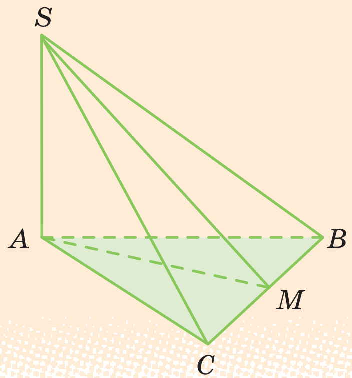
Задача 2. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см (рис. 5.3). Бічні грані піраміди, що містять бічні сторони цього рівнобедреного трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.

Коментар

Як звичайно, на першому етапі розв'язання обґрунтовуємо розташування висоти піраміди (у першу чергу використовуємо опорні факти, наведені в табл. 4). На другому етапі обґрунтовуємо розташування просторового кута між бічною гранню й основою піраміди.

Для побудови лінійного кута двогранного кута з ребром BC в площині основи піраміди проведемо з основи висоти перпендикуляр AM на ребро BC. Потім потрібно сполучити отриману точку M із вершиною S і використати теорему про три перпендикуляри (ураховуючи, що AM — проекція похилої SM на площину основи).

Рис. 5.3



Розв'язання

Нехай в основі піраміди $SABC$ (рис. 5.3) лежить рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см). За умовою суміжні бічні грані SAB і SAC перпендикулярні до площини основи, тому висотою піраміди є спільне бічне ребро цих граней, тобто SA — висота піраміди $(SA \perp \text{пл. } ABC)$. У площині ABC проведемо перпендикуляр $AM \perp BC$.

За теоремою про три перпендикуляри $SM \perp BC$. Отже, кут SMA — лінійний кут двогранного кута з ребром BC, а за умовою $\angle SMA = 60°$.

Із прямокутного трикутника AMC (AM — висота, медіана й бісектриса рівнобедреного трикутника ABC, тому $CM = \frac{1}{2}BC = 3$ см) маємо:

$$AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника SAM $(SA \perp \text{пл. } ABC)$ одержуємо:

$$SA = AM \cdot \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $4\sqrt{3}$ см.

Ще один приклад розв'язування задачі з урахуванням розташування висоти піраміди наведено в інтернет-підтримці підручника.

ЗАПИТАННЯ

1. Укажіть розташування основи висоти піраміди, якщо:
1) усі бічні ребра піраміди рівні або однаково нахилені до площини основи;
2) усі бічні грані піраміди однаково нахилені до основи;
3) тільки дві суміжні бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені до основи або спільне бічне ребро цих граней утворює рівні кути із суміжними з ним сторонами основ;
4) тільки одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи;
5) дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи.
Для кожного випадку побудуйте зображення відповідної піраміди, в основі якої лежить рівнобедрений прямокутний трикутник.

ВПРАВИ

5.1°. Основа піраміди — прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть висоту піраміди.

5.2. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою 6 і висотою 9; усі бічні ребра піраміди дорівнюють 13. Знайдіть висоту піраміди.

5.3°. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою c. Кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Знайдіть висоту піраміди.

5.4. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник із бічною стороною a і кутом при основі α. Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут φ. Знайдіть висоту піраміди.

5.5°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо площа її основи дорівнює Q, а двогранні кути при основі — φ.

5.6. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Бічне ребро, протилежне середній за довжиною стороні основи, перпендикулярне до площини основи й дорівнює 16 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

5.7. Основою чотирикутної піраміди є ромб, а всі бічні ребра піраміди рівні. Доведіть, що ця піраміда є правильною.

5.8. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 5, 6 і 7. Усі бічні ребра піраміди рівні між собою, і кожне з них утворює з висотою піраміди кут 60°. Знайдіть бічне ребро піраміди.

5.9. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник ABC $(AB = BC)$ з кутом A, що дорівнює α. Висота піраміди проходить через центр кола, вписаного в основу, і дорівнює бічній стороні трикутника основи. Знайдіть кут нахилу бічних граней піраміди до основи.

5.10. В основі піраміди $MABCD$ лежить ромб $ABCD$ із діагоналями $AC = 6$, $BD = 8$, а всі бічні грані утворюють з основою кути по 45°. Знайдіть:

1) висоту піраміди;

2) відстань від вершини M до ребра основи.

5.11. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою 12 і бічною стороною 10. Знайдіть висоту піраміди, якщо всі її бічні грані утворюють з основою двогранні кути по 45°.

5.12°. Основа піраміди — прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть висоту піраміди.

5.13. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник зі сторонами 40 см, 25 см і 25 см. Висота піраміди завдовжки 8 см проходить через вершину кута основи, протилежного стороні завдовжки 40 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

5.14*. Основою піраміди є правильний трикутник. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини її основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Під якими кутами нахилені до площини основи бічні ребра?

5.15*. В основі піраміди лежить ромб зі стороною a і кутом 60°. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини її основи, а дві сусідні з нею грані утворюють з основою кути по 45°. Знайдіть висоту піраміди.

Виявіть свою компетентність

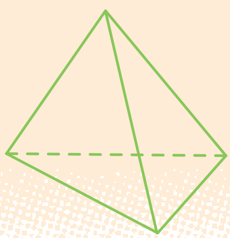
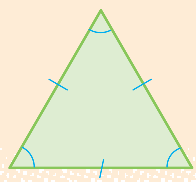
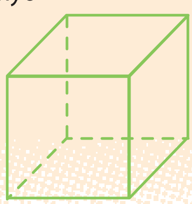
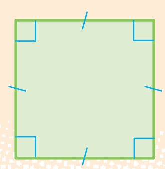
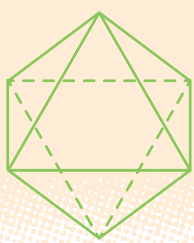
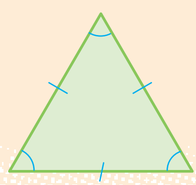
5.16. Скільки квадратних метрів парусини було використано на виготовлення намету без дна, що має форму правильної чотирикутної піраміди, якщо висота піраміди дорівнює 3,2 м, а сторона її основи 4,8 м? (Врахуйте, що на шви й обрізку витрачено 4 % від загальної кількості парусини).

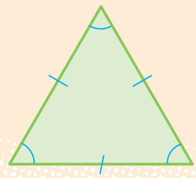
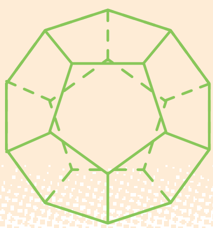
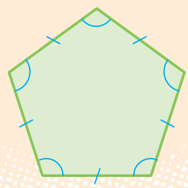
§ 6. ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

Таблиця 5

Правильні многогранники

Означення. **Опуклий многогранник називається *правильним*, якщо його грані є рівними правильними многокутниками й у кожній вершині сходиться одна й та сама кількість ребер.**

№	Тип правильного многогранника	Форма грані	Число граней	Число вершин	Число ребер
1	Тетраедр (чотиригранник) 		4	4	6
2	Гексаедр (шестигранник), або куб 		6	8	12
3	Октаедр (восьмигранник) 		8	6	12

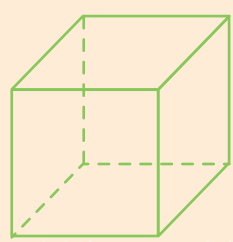
4	Ікосаедр (двадцятигранник) 		20	12	30
5	Додекаедр (дванадцятигранник) 		12	20	30

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Означення. Опуклий многогранник називається *правильним*, якщо його грані є рівними правильними многокутниками й у кожній вершині сходиться одна й та сама кількість ребер.

Прикладом правильного многогранника є куб (рис. 6.1): усі його грані — рівні квадрати, і в кожній вершині сходяться три ребра.

Рис. 6.1



З означення правильного многогранника випливає, що всі його ребра дорівнюють одне одному. Також можна довести, що в правильному многограннику рівні всі двогранні кути, що містять дві грані зі спільним ребром.

Найбільш простим правильним многогранником є трикутна піраміда, усі грані якої — правильні трикутники (рис. 6.2), а в кожній вершині сходяться три ребра. Оскільки у цього многогранника всього чотири грані, його називають також *тетраедром*, що в перекладі з грецької означає «чотиригранник».

Іноді тетраедром називають також довільну трикутну піраміду. Тому у випадку, коли мова йде про правильний многогранник, говоритимемо — *правильний тетраедр*.

Многогранник, гранями якого є правильні трикутники й у кожній вершині якого сходяться чотири ребра, зображено на рис. 6.3. Його поверхня складається з восьми правильних трикутників, тому його називають *октаедром*. Многогранник, гранями якого є правильні трикутники й у кожній вершині якого сходяться п'ять ребер, зображено на рис. 6.4. Його поверхня складається з двадцяти правильних трикутників, тому його називають *ікосаедром*.

Оскільки у вершинах опуклого многогранника може сходитися тільки три квадрати, то, крім куба (рис. 6.1), інших правильних многогранників, у яких гранями є квадрати, не існує. Куб має шість граней, тому його ще називають *гексаедром*.

Многогранник, гранями якого є правильні п'ятикутники й у кожній вершині сходяться три ребра, зображено на рис. 6.5. Його поверхня складається з дванадцяти правильних п'ятикутників, тому його називають *додекаедром*.

Зазначимо, що у вершинах опуклого многогранника не можуть сходитися чотири й більше правильних п'ятикутників. Також не можуть сходитися правильні многокутники з кількістю сторін більше ніж п'ять. Тому інших правильних многогранників не існує, і є тільки п'ять правильних многогранників: тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр і ікосаедр.

Рис. 6.2

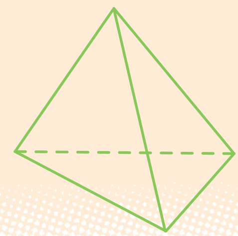


Рис. 6.3

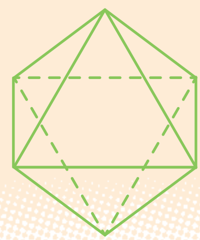


Рис. 6.4

Рис. 6.5

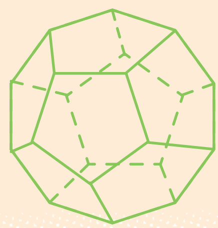
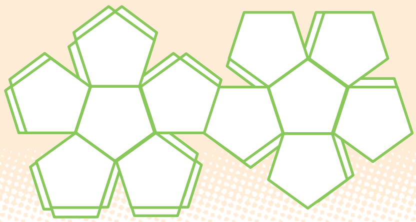
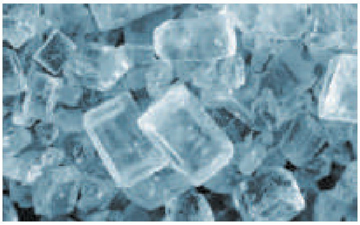


Рис. 6.6



Як і для інших многогранників, моделі правильних многогранників можна виготовити з розгорток або геометричного конструктора. На рис. 6.6 зображено одну з можливих розгорток додекаедра (додаткові частини в правильних п'ятикутниках призначені для склеювання відповідних граней). За такою розгорткою можна виготовити, наприклад, абажур зі спеціальних матеріалів (з урахуванням правил пожежної безпеки!)

Зауважимо, що форму правильних многогранників має більшість кристалів. Ми вже згадували, що кристали добре відомої вам кухонної солі є кубами. У виробництві алюмінію та керамічних фарб використовують алюмокалієві галуни, монокристали яких мають форму правильного октаедра. Сировиною для виробництва сірчаної кислоти, сірки і залізного купоросу є сірчаний колчедан (пірит); останнім часом він усе частіше застосовується як добавка при виробленні цементу. Кристали піриту мають форму додекаедра.



Кристал кухонної солі

Кристал алюмокалієвих галунів

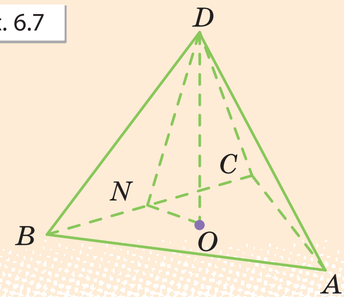
Кристал піриту

Знайдіть у мережі Інтернет приклади кристалів, які мають форму решти зазначених правильних многогранників.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача. Знайдіть двогранні кути правильного тетраедра (рис. 6.7).

Рис. 6.7



Коментар

Правильний тетраедр є правильною трикутною пірамідою, основою якої можна вважати будь-яку грань цього тетраедра.

Справді, в основі лежить правильний трикутник, а основою висоти піраміди є центр цієї основи, оскільки рівні похилі мають рівні проекції.

Отже, основою висоти є центр описаного кола, який у правильному трикутнику збігається з центром вписаного кола і є центром цього правильного трикутника.

Для побудови лінійного кута двогранного кута при ребрі правильного тетраедра зручно вважати обране ребро ребром основи трикутної піраміди, провести висоту піраміди й апофему (тобто висоту) відповідної бічної грані й використовувати теорему про три перпендикуляри.

Також доцільно врахувати, що в запропонованій задачі на обчислення не задано жодного відрізка, тому для її розв'язування зручно ввести невідомий відрізок (наприклад, довжину ребра тетраедра).

Розв'язання

Проведемо з вершини D правильного тетраедра $ABCD$ висоту DN грані BCD і висоту DO тетраедра (рис. 6.7).

Якщо $DN \perp BC$, то $ON \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), тому кут DNO — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC.

Позначимо ребро тетраедра через a, тоді висоти граней дорівнюють $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Оскільки правильний тетраедр є правильною трикутною пірамідою, то основа висоти піраміди — це центр правильного трикутника, який є центром описаного і вписаного в трикутник кіл.

Ураховуючи, що $ON \perp BC$, одержуємо: ON — радіус кола, вписаного в правильний трикутник, і $ON = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Із прямокутного трикутника DON одержуємо: $\cos\angle DNO = \frac{ON}{DN} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$.
Тоді $\angle DNO = \arccos\frac{1}{3}$.

Очевидно, що двогранні кути при інших ребрах тетраедра є такими самими за величиною. ■

ЗАПИТАННЯ

1. Який многогранник називається правильним?
2. Назвіть п'ять типів правильних многогранників і опишіть їх.

ВПРАВИ

6.1°. Чи є правильним многогранником:
1) довільна правильна піраміда;
2) довільна правильна призма?

6.2°. Чи існує правильний многогранник, який є:
1) пірамідою; 2) призмою?

6.3. Многогранник є об'єднанням двох правильних тетраедрів, що мають спільну основу. Чи буде такий многогранник правильним? Чому?

6.4. Які площини симетрії має правильний:
1) тетраедр; 2) гексаедр?

6.5. Скільки площин симетрії має правильний:
1) октаедр; 2) додекаедр; 3) ікосаедр?

6.6°. Площа поверхні правильного тетраедра дорівнює $100\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть його ребро.

6.7*. З однієї вершини куба провели три діагоналі граней і сполучили їхні кінці відрізками. Чи буде утворена піраміда правильним тетраедром? Відповідь обґрунтуйте.

Виявіть свою компетентність

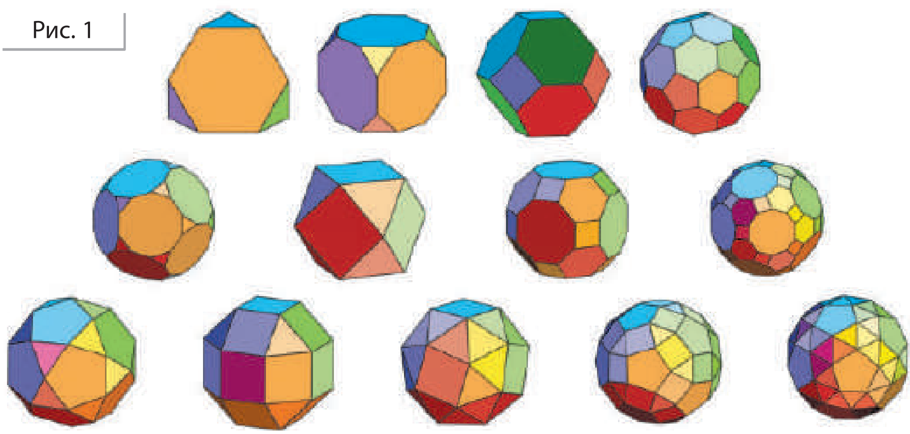
6.8. Побудуйте розгортки правильних многогранників. Виготовте з розгорток моделі правильних многогранників.

Відомості з історії

Многогранники і, зокрема, правильні многогранники з давніх часів привертали увагу вчених, архітекторів, представників багатьох інших професій завдяки своїй красі, досконалості та гармонії. Піфагорійці обожнювали правильні многогранники і використовували їх у своїх філософських творах про сутність світу. Детально описав властивості правильних многогранників давньогрецький вчений **Платон** (429–348 рр. до н. е.). Саме тому правильні многогранники називаються також тілами Платона.

Правильним многогранникам присвячена остання, XIII книга знаменитих «Начал» **Евкліда**. Услід за Евклідом вивченням п’яти правильних многогранників займався **Архімед** (287–212 рр. до н. э.). Переконавшись у тому, що не можна побудувати шостий правильний многогранник, Архімед став будувати многогранники, у яких гранями були правильні, але не однойменні многокутники, а в кожній вершині, як і у правильних многогранниках, сходилася однакова кількість ребер. Так він отримав 13 напівправильних многогранників. В роботі вченого «Про многогранники», яка збереглася до нашого часу, детально описані усі 13 многогранників (рис. 1), названих на честь вченого тілами Архімеда, і наведені відповідні рисунки.

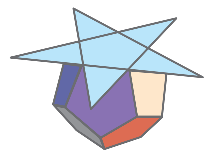
Рис. 1



Крім правильних і напівправильних многогранників, увагу дослідників привертають так звані зірчасті многогранники. Існує тільки чотири правильні зірчасті многогранники. Перші два були відкриті **І. Кеплером** (1571–1630), а два інших майже 200 років по тому побудував **Л. Пуансо** (1777–1859). Саме тому правильні зірчасті многогранники називаються тілами Кеплера — Пуансо.

Зірчасті многогранники можна отримати, продовживши грані або ребра деяких правильних многогранників. З тетраедра, куба й октаедра зірчасті многогранники одержати не можна. Якщо розглянути додекаедр, то продовження його ребер приводить до заміни кожної грані зірчастим правильним п’ятикутником (рис. 2), в результаті виникає многогранник, який називають малим зірчастим додекаедром (рис. 3, *а*).

Рис. 2

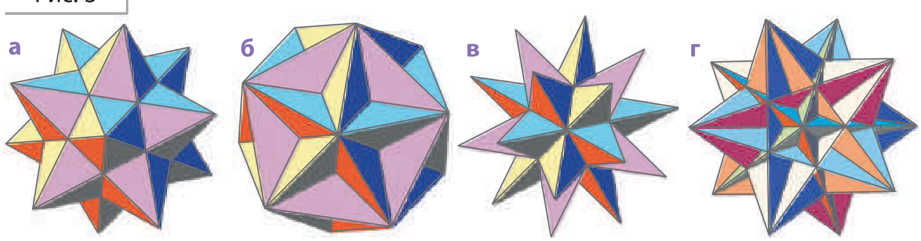


Якщо продовжувати грані додекаедра, можливі два варіанта результату. По-перше, якщо розглядати правильні п’ятикутники, то отримаємо так званий великий додекаедр (рис. 3, *б*). По-друге, якщо як грані розглядати зірчасті п’ятикутники, то одержуємо великий зірчастий додекаедр (рис. 3, *в*).

Ікосаедр має одну зірчасту форму. Продовжуючи грані ікосаедра, одержуємо великий зірчастий ікосаедр (рис. 3, *г*).

Отже, справді існують тільки чотири типи правильних зірчастих многогранників.

Рис. 3



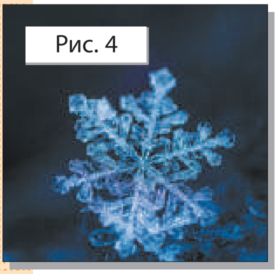


Рис. 4

Багато форм зірчастих многогранників можна помітити, спостерігаючи навколишній світ. Наприклад, сніжинки — це зірчасті многогранники (рис. 4). З давніх-давен люди намагалися описати всі можливі типи сніжинок, складали спеціальні атласи. Зараз відомо кілька тисяч різних типів сніжинок.

В епоху Відродження правильні многогранники надихали скульпторів, архітекторів, художників. Так, **Леонардо да Вінчі** захоплювався теорією многогранників і часто зображував їх на своїх полотнах. Він проілюстрував зображеннями правильних і напівправильних многогранників книгу свого друга ченця **Луки Пачолі** (1445–1514) «Про божественну пропорцію». Іншим видатним художником епохи Відродження, який також захоплювався геометрією, був **А. Дюрер**. У його відомій гравюрі «Меланхолія» (рис. 5) на передньому плані зображено додекаедр. У 1525 р. у своєму трактаті «Керівництво до вимірювання» Дюрер приділив увагу п'яти правильним многогранникам, поверхні яких розглядав як гарні моделі перспективи. Ілюстрацією висновків Дюрера можна вважати знамениту картину **Сальвадора Далі** «Таємна вечеря», на якій бачимо перспективне зображення правильного додекаедра (рис. 6).

Рис. 5. А. Дюрер. Меланхолія

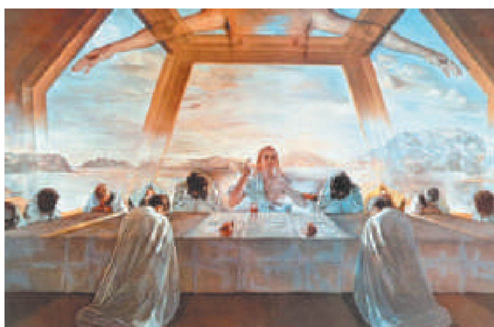


Рис. 6. С. Далі. Таємна вечеря

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 1

1. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють 3 см, 4 см, 12 см.

А 5 Б 12 В 13 Г 14 Д 15

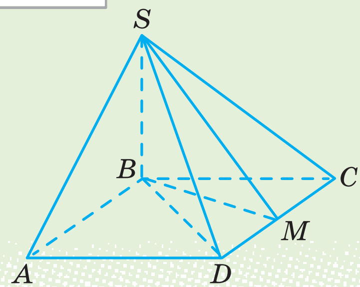
2. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 6 см і 14 см, якщо висота призми дорівнює 12 см.

А 144 см^2 Б 168 см^2 В 240 см^2 Г 336 см^2 Д 480 см^2

3. Основою піраміди $SABCD$, зображеної на рис. 1, є квадрат; бічне ребро SB піраміди перпендикулярне до площини її основи, точка M — середина відрізка CD. Укажіть лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі CD.

А $\angle SAB$ Г $\angle SMB$
Б $\angle SDB$ Д $\angle SCD$
В $\angle SCB$

Рис. 1



4. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і утворює кут φ з площиною основи призми. Знайдіть ребро основи призми.

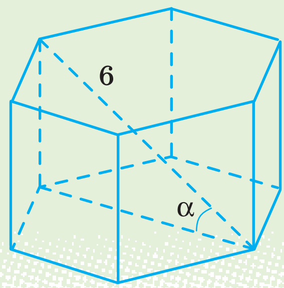
А $d\cos\varphi$ Б $d\sqrt{2}\sin\varphi$ В $\frac{d\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$ Г $d\sqrt{2}\cos\varphi$ Д $\frac{d\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$

5. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник із катетами 10 см і 24 см. Висота призми дорівнює 5 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

А 120 см^2 Б 240 см^2 В 350 см^2 Г 470 см^2 Д 540 см^2

6. Дано зображення правильної шестикутної призми (рис. 2). Більша діагональ призми дорівнює 6 і утворює кут α з площиною основи. Установіть відповідність між заданими величинами (1–3) та виразами для їх обчислення (А–Г).

Рис. 2



1 Висота призми	**А** $3\cos\alpha$
2 Сторона основи призми	**Б** $6\cos\alpha$
3 Площа найбільшого діагонального перерізу призми	**В** $6\sin\alpha$
	Г $18\sin 2\alpha$

7. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює 6 см, а сторона основи 16 см.

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Теми навчальних проектів

1. Многогранники в архітектурі України і світу.
2. Правильні й напівправильні многогранники.
3. Геометрія в кристалах.
4. Зірчасті многогранники.

Розділ 2

ТІЛА ОБЕРТАННЯ

§ 7. Циліндр

§ 8. Конус

§ 9. Куля і сфера

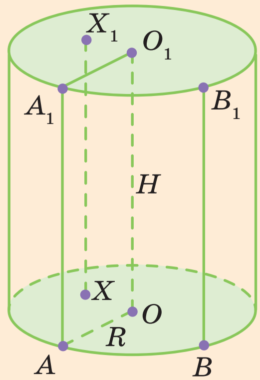
У цьому розділі ви:

- ознайомитеся з основними тілами обертання: циліндром, конусом, кулею та їхніми властивостями;
- навчитеся розв’язувати задачі, пов’язані з тілами обертання.

§ 7. ЦИЛІНДР

Таблиця 6

Циліндр



Циліндром (круговим циліндром) **називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині та суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів.**

Круги — *основи циліндра.*

Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів, — *твірні циліндра.*

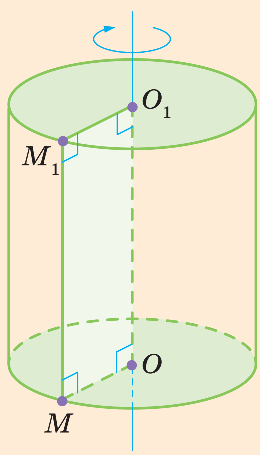
AA_1, BB_1 — *твірні циліндра.*

Циліндр називається *прямим*, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ.

У шкільних підручниках:

циліндр = прямий круговий циліндр

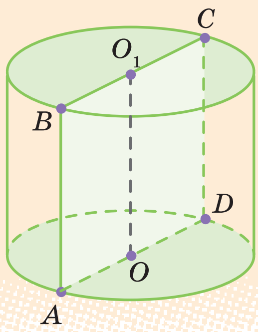
Властивості



1. *Основи циліндра рівні й паралельні.*
   $OA = O_1A_1 = R$ пл. $AOB \parallel$ пл. $A_1O_1B_1$
   O — *центр нижньої основи,*
   O_1 — *центр верхньої основи.*
2. *Твірні циліндра паралельні й рівні.*
   $AA_1 \parallel BB_1$ $AA_1 = BB_1$
3. *Висота циліндра (відстань між площинами основ) дорівнює довжині твірної.* Також висотою називають перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу.
   $H_{\text{цил}} = AA_1 = OO_1$ $OO_1 \perp$ пл.OAB
4. *У результаті обертання прямокутника навколо його сторони як осі утворюється циліндр.*
   OMM_1O_1 — *прямокутник;*
   OO_1 — *вісь утвореного циліндра* $(OO_1 \parallel MM_1)$.
   $R_{\text{цил}} = OM = O_1M_1$ $H_{\text{цил}} = MM_1 = OO_1$
5. $S_{\text{осн}} = \pi R^2$, $S_{\text{бічн}} = 2\pi RH$,
   $S_{\text{повн. цил}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi R(H + R)$

Перерізи циліндра площинами

Осьовий переріз циліндра



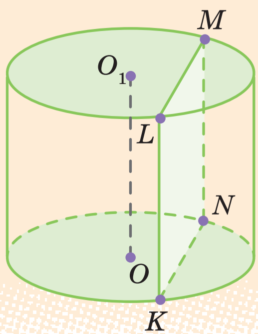
$ABCD$ — *осьовий переріз* (переріз, що проходить через вісь OO_1).

$ABCD$ — прямокутник;

$AD = d_{осн} = 2R$; $AB = H_{цил}$;

AB і CD — твірні циліндра

Переріз циліндра площиною, паралельною його осі



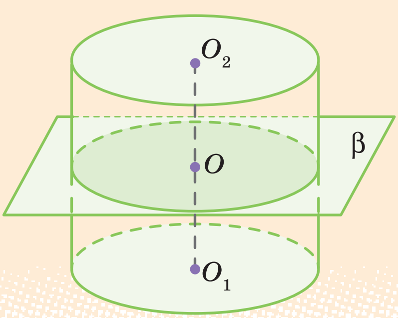
пл. $KLM \parallel OO_1$;

$KLMN$ — прямокутник;

KL *і* MN — твірні циліндра,

$KL = H_{цил}$

Переріз циліндра площиною, паралельною його основам



Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, що дорівнює колу основи.

$$R_{перерізу} = R_{цил}$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Циліндр

О Означення. ***Циліндром*** **(точніше, *круговим циліндром*) називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів** (рис. 7.1). **Круги називаються *основами циліндра*, а відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів, — *твірними циліндра*.**

Оскільки паралельне перенесення є рухом, то **основи циліндра рівні.** Оскільки в результаті паралельного перенесення площина переходить у паралельну площину (або в себе), то **основи циліндра лежать у паралельних площинах.** Оскільки в результаті паралельного перенесення точки зміщуються по паралельних прямих (або по прямих, які збігаються) на ту саму відстань, то **твірні циліндра паралельні й рівні.**

О Означення. **Циліндр називається *прямим*, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ:** $AA_1 \perp$ пл. ABO **(рис. 7.1, *б*).**

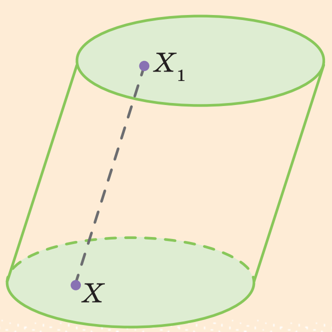
Далі розглядатимемо тільки прямий циліндр, який називатимемо просто циліндром.

Прямий циліндр наочно можна розглядати як тіло, утворене в результаті обертання прямокутника навколо сторони як осі (рис. 7.2).

О Означення. ***Радіусом циліндра*** **називається радіус його основи.**

Рис. 7.1

а



б

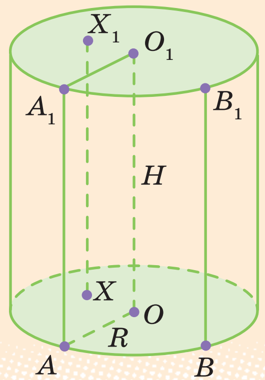


Рис. 7.2

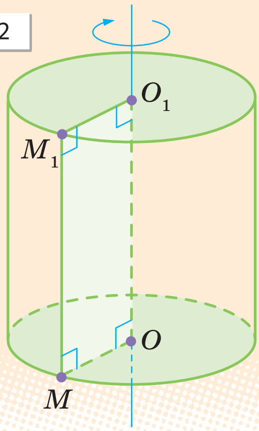
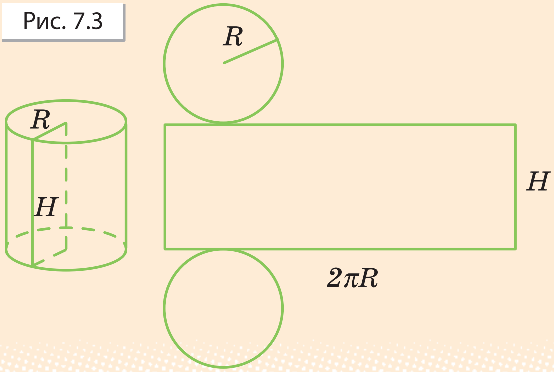


Рис. 7.3



Означення. ***Висотою циліндра*** **називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу.**

Також висотою називають довжину цього перпендикуляра, тобто відстань між площинами його основ. Зазначимо, що висота циліндра дорівнює його твірній.

Означення. ***Віссю циліндра*** **називається пряма, що проходить через центри його основ.**

Вісь паралельна твірним.

Поверхня циліндра складається з основ і бічної поверхні. *Бічну поверхню* циліндра утворюють твірні.

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і якій-небудь твірній, а потім розгорнути на площині, то одержимо розгортку циліндра (рис. 7.3). Вона складається з прямокутника — розгортки бічної поверхні циліндра — і двох рівних кругів. Якщо радіус циліндра дорівнює R, а висота — H, то його бічну поверхню розгортаємо в прямокутник зі сторонами $2\pi R$ і H. Площу цієї розгортки $2\pi RH$ приймають за *площу бічної поверхні циліндра**. Отже,

$$S_{\text{бічн}} = 2\pi RH,$$

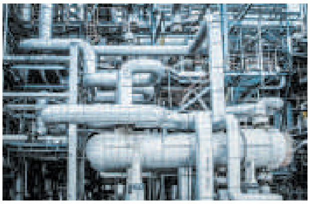
де R — радіус циліндра, H — його висота.

Тоді площа повної поверхні циліндра дорівнює:

$$S_{\text{повн. цил}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H+R).$$

* Більш строго цю формулу буде обґрунтовано в § 13.

Об'єкти циліндричної форми часто зустрічаються у побуті (наприклад, каструля), техніці (залізничні цистерни, труби) та архітектурі (колони, вежі, зокрема знаменита Пізанська вежа).




2. Переріз циліндра площинами

Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутником (рис. 7.4).

Дві його сторони — твірні циліндра, а дві інші — паралельні хорди основ.

Зокрема, прямокутником є *осьовий переріз* — переріз циліндра площиною, що проходить через його вісь (рис. 7.5).

Теорема 7.1. Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, що дорівнює колу основи.

Доведення. Нехай β — площина, паралельна площині основи циліндра (рис. 7.6). Паралельне перенесення вздовж напрямку осі циліндра, яке сумі-

Рис. 7.4

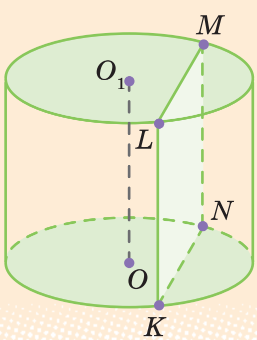


Рис. 7.5

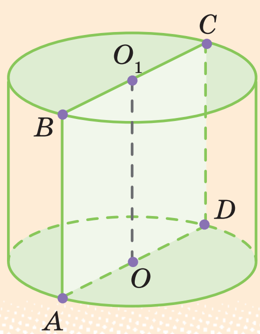
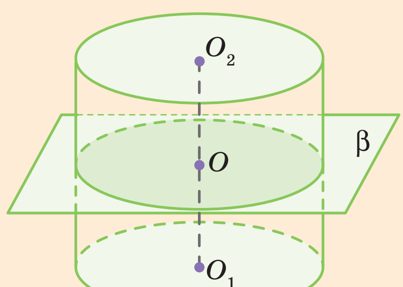
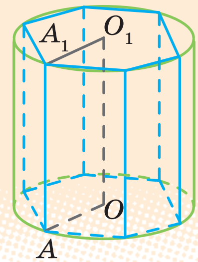


Рис. 7.6



щає площину β з площиною основи циліндра, також суміщає переріз бічної поверхні площиною β з колом основи. Отже, переріз є колом, що дорівнює колу основи. ■

Рис. 7.7



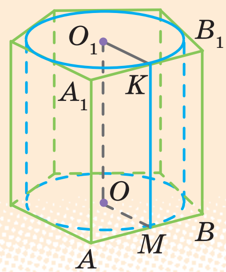
3. Вписана й описана призми

Означення. Призма називається *вписаною в циліндр* (а циліндр — *описаним навколо призми*), якщо основи призми вписані в кола основ циліндра.

Із означень призми й циліндра робимо висновок, що бічні ребра вписаної в циліндр призми є твірними циліндра (рис. 7.7).

Означення. Призма називається *описаною навколо циліндра* (а циліндр — *вписаним у призму*), якщо основи призми описані навколо основ циліндра (рис. 7.8).

Рис. 7.8



ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Розв'язання

Якщо сторона квадрата осьового перерізу (рис. 7.5) дорівнює x, то $x^2 = Q$. Висота циліндра дорівнює x, діаметр основи також дорівнює x (тобто $2R = x$). Отже, $S_{бічн} = 2\pi RH = \pi \cdot (2R) \cdot H = \pi \cdot x \cdot x = \pi x^2 = \pi Q$. ■

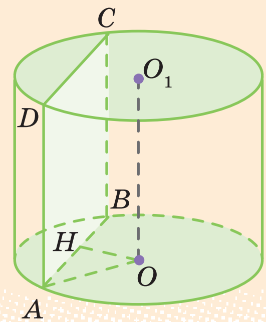
Коментар

Якщо осьовий переріз циліндра — квадрат зі стороною x, то площа перерізу дорівнює x^2. Маємо рівняння $x^2 = Q$, звідки $x = \sqrt{Q}$.

Зазначимо, що в задачі потрібно визначити площу бічної поверхні. У формулу значення x входитиме в квадраті, тому можна, не розв'язуючи рівняння, записати вимогу задачі через x, а в отриману формулу підставити значення x^2.

Задача 2*. Висота циліндра дорівнює 8 см, радіус основи 5 см (рис. 7.9). Циліндр перетнули площиною, паралельною осі, так, що в перерізі отримали квадрат. Знайдіть відстань від цього перерізу до осі.

Рис. 7.9



Коментар

Відстань від осі до паралельної їй площини можна знайти як відстань від будь-якої точки осі (наприклад, від точки O) до цієї площини. Щоб знайти відстань від точки O до січної площини, достатньо помітити, що площина основи перпендикулярна до площини перерізу. Тоді перпендикуляр OH до прямої AB перетину перпендикулярних площин є перпендикуляром до січної площини.

Розв'язання

Нехай переріз $ABCD$ (рис. 7.9) паралельний осі OO_1 циліндра ($AD = AB = 8$ см, $AO = 5$ см). Відстань між віссю й перерізом дорівнює відстані від точки O до перерізу. Ураховуючи, що твірна $AD \perp$ пл. ABO, маємо: пл. $ABCD \perp$ пл. ABO. Проведемо $OH \perp AB$, тоді $OH \perp$ пл. $ABCD$, тобто відрізок OH — відстань від перерізу до осі.

Якщо $OH \perp AB$, то точка H — середина відрізка AB і $AH = 4$ см. Тоді з прямокутного трикутника AOH знаходимо: $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

Задача 3*. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, вписаної в циліндр, радіус основи якого дорівнює 8, а висота 3.

Розв'язання

Якщо правильна призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в циліндр (рис. 7.10), то висота призми AA_1 дорівнює висоті циліндра, тобто $AA_1 = 3$.

Сторона основи призми дорівнює стороні правильного трикутника, вписаного в коло радіуса $R = 8$. Тоді $AB = R\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Отже, $S_{\text{бічн. пр}} = P_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = 3AB \cdot AA_1 =$
$= 3 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 3 = 72\sqrt{3}$ (кв. од.).

Коментар

Якщо призма вписана в циліндр, то їхні висоти рівні й основа призми вписана в основу циліндра. Слід також урахувати, що висота правильної призми дорівнює бічному ребру.

Сторона основи заданої правильної призми дорівнює стороні a правильного трикутника, вписаного в коло радіуса $R = 8$.

Рис. 7.10

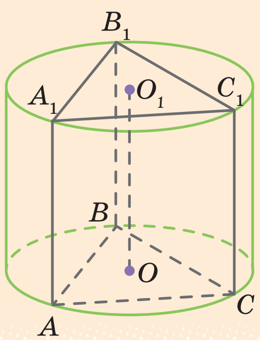
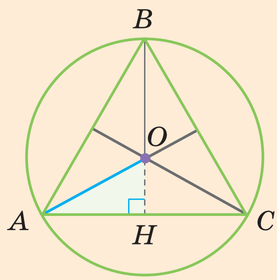


Рис. 7.11



Для її знаходження можна скористатися формулою $a = R\sqrt{3}$ або формулою $R = \dfrac{a}{2\sin A}$, тоді $a = 2R\sin A = 2R\sin 60^\circ =$ $= 2R \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Можна також урахувати, що центр O — точка перетину висот, медіан і бісектрис правильного трикутника ABC. Із прямокутного трикутника AOH (рис. 7.11) маємо: $AH = AO\cos 30^\circ$, тобто $\dfrac{a}{2} = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, тоді $a = R\sqrt{3}$.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке циліндр (прямий круговий циліндр). Що таке твірна циліндра? основи циліндра? бічна поверхня циліндра? висота й вісь циліндра?
2. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, паралельною його осі? осьовий переріз циліндра?
3. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, паралельною його основам? Відповідь обґрунтуйте.
4. Поясніть, що таке розгортка циліндра.
5. Запишіть формули для визначення площ бічної та повної поверхонь циліндра.

ВПРАВИ

7.1°. Чи має циліндр:
1) центр симетрії;
2) вісь симетрії;
3) площину симетрії?

Укажіть їх.

7.2°. Радіус основи циліндра дорівнює 2 м, висота — 3 м. Знайдіть:
1) діагональ осьового перерізу циліндра;
2) площу бічної поверхні циліндра;
3) площу повної поверхні циліндра.

7.3°. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 72π, а висота 8. Знайдіть діаметр основи.

7.4. Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого дорівнює S. Знайдіть площу основи циліндра.

7.5. Висота циліндра дорівнює 6 см, радіус основи 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 см від неї.

7.6. Радіус основи циліндра дорівнює 1, висота 20, площа перерізу, паралельного осі, дорівнює 20 кв. од. Знайдіть відстань від цього перерізу до осі циліндра.

7.7. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 48 см, а кут між цією діагоналлю й віссю циліндра становить $60°$. Знайдіть:
1) висоту циліндра;
2) радіус основи циліндра;
3) площу основи циліндра.

7.8*. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що відтинає від кола основи дугу $120°$. Довжина відрізка осі між центрами основ становить 10 см, відстань від осі до січної площини дорівнює 2 см. Знайдіть площу перерізу.

7.9*. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його осьового перерізу дорівнює S.

7.10. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник зі сторонами 8 і 3. Знайдіть твірну і радіус основи циліндра, якщо відомо, що цей радіус більший за 1.

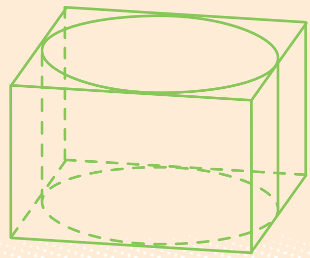
7.11. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 288π см^2. Знайдіть висоту й радіус основи циліндра, якщо відомо, що висота на 12 см більша за радіус.

7.12*. Кут між твірною циліндра і діагоналлю осьового перерізу дорівнює φ. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює Q.

7.13. Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює d і утворює кут φ з основою розгортки. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

7.14*. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, діагональ якого дорівнює $10\sqrt{2}$. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь правильної призми, вписаної в цей циліндр, якщо призма:
1) трикутна;
2) чотирикутна;
3) шестикутна.

Рис. 7.12



7.15. Прямокутний паралелепіпед описано навколо циліндра (рис. 7.12), радіус основи і висота якого дорівнюють 8. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

Виявіть свою компетентність

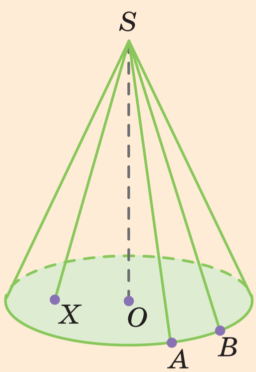
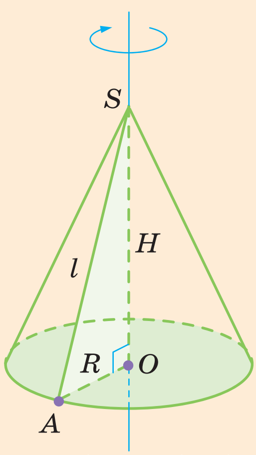
7.16. Скільки банок, кожна з яких містить 2,8 кг фарби, потрібно придбати для фарбування в два шари 10 закритих металевих циліндричних бочок із діаметром дна 60 см і висотою 85 см, якщо для фарбування 1 м² металевої поверхні в один шар витрачається 120 г фарби?

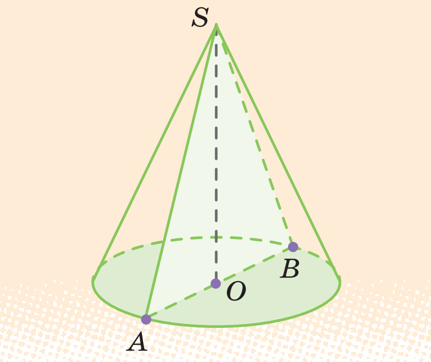
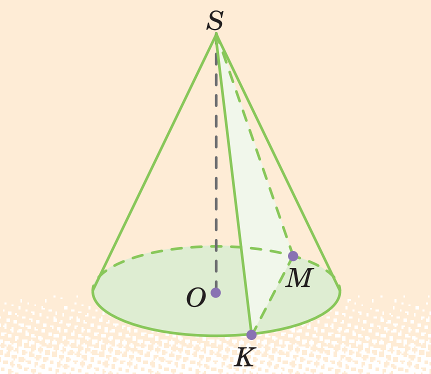
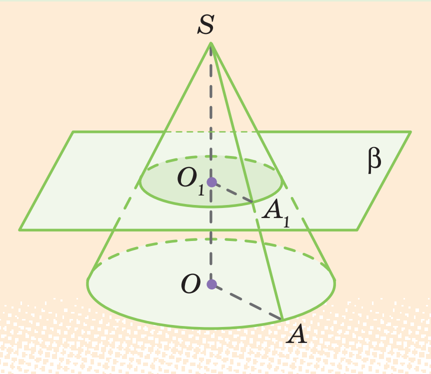
7.17. У майстерні виготовили два однакові пуфи у формі циліндра висотою 45 см і діаметром 45 см. Скільки тканини пішло на обивку обох пуфів (включаючи дно), якщо на шви й обрізання додатково було витрачено 10 % тканини? Відповідь подайте в квадратних метрах, округливши отримане значення до десятих. Вважайте, що $\pi = 3{,}14$.

7.18. Для зберігання бензину потрібно виготовити ємність, що має форму циліндра з діаметром основи 3 м і висотою 4,5 м. Скільки листів заліза площею 5 м² кожний потрібно закупити для виготовлення цієї ємності?

§ 8. КОНУС

Таблиця 7

Конус	
	***Конусом*** **(*круговим конусом*) називається тіло, що складається з круга, точки, що не лежить у площині цього круга, і всіх відрізків, які сполучають цю точку з точками круга.** Круг — *основа конуса.* Точка S — *вершина конуса.* Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, — *твірні конуса.* SA, SB — твірні конуса. **Конус називається *прямим*, якщо** $SO \perp \text{пл.}\ AOB$ (O — центр круга основи). *У шкільних підручниках:* *конус = прямий круговий конус*
	Властивості
	1. Твірні конуса рівні. $$SA = SB = \ \dots$$ 2. $H_{\text{кон}} = SO$ — висота конуса, $$SO \perp \text{пл.}\ AOB$$ 3. У результаті обертання прямокутного трикутника навколо його катета як осі утворюється конус. $\triangle AOS$ — прямокутний, $\angle AOS = 90°$. Пряма SO — вісь конуса $$R_{\text{кон}} = AO, \qquad H_{\text{кон}} = SO.$$ AS — твірна, $AS = l$ 4. $S_{\text{осн}} = \pi R^2$, $S_{\text{бічн}} = \pi Rl$, $S_{\text{повн. кон}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$

Перерізи конуса площинами	
Осьовий переріз конуса	
	$\triangle SAB$ — *осьовий переріз* (переріз, що проходить через вісь SO). $\triangle SAB$ — рівнобедрений $(SA = SB)$ (SA і SB — твірні)
Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину	
	$\triangle SMK$ — рівнобедрений, $SM = SK$ (SM і SK — твірні)
Переріз конуса площиною, паралельною його основі	
	*Площина, паралельна площині основи конуса,* перетинає конус по кругу, а бічну поверхню — по колу з центром на осі конуса. $\dfrac{R_{\text{перерізу}}}{R} = \dfrac{SO_1}{SO}$ Частину конуса, розташовану між основою конуса і січною площиною, називають *зрізаним конусом*. У результаті обертання прямокутної трапеції (OAA_1O_1) навколо осі, що проходить через бічну сторону, перпендикулярну до основ, утворюється зрізаний конус.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Конус

Означення. ***Конусом*** **(точніше, *круговим конусом*) називається тіло, що складається з круга — основи конуса, точки, яка не лежить у площині цього круга, — вершини конуса, і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи (рис. 8.1). Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називаються *твірними конуса*** (наприклад, на рис. 8.1 відрізки SA і SB — твірні конуса).

Означення. **Конус називається *прямим*, якщо пряма, що сполучає вершину конуса з центром основи, перпендикулярна до площини основи** (якщо на рис. 8.1, *б*, $SO \perp$ пл. AOB, то зображений конус — прямий).

Далі розглядатимемо тільки прямий конус, який називатимемо просто конусом.

Наочно *прямий круговий конус можна розглядати як тіло, утворене в результаті обертання прямокутного трикутника навколо його катета як осі* (рис. 8.2).

Означення. ***Радіусом конуса*** **називається радіус його основи.**

Означення. ***Висотою конуса*** **називається перпендикуляр, проведений із його вершини на площину основи.**

У прямого конуса основа висоти збігається з центром основи.

Рис. 8.1

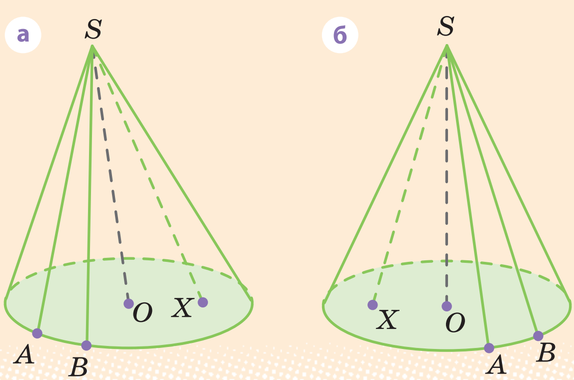
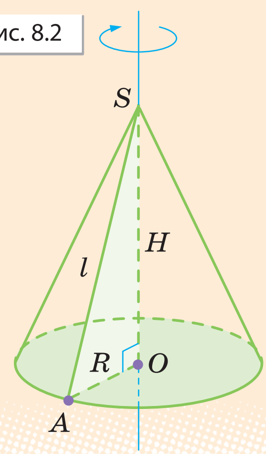
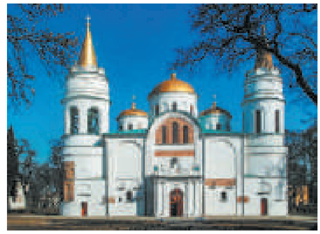


Рис. 8.2



Предмети конічної форми часто зустрічаються в побуті (наприклад, святковий ковпачок, ріжок для морозива), техніці (патрон для дриля) та архітектурі (шпилі Спасо-Преображенського собору (м. Чернігів)).



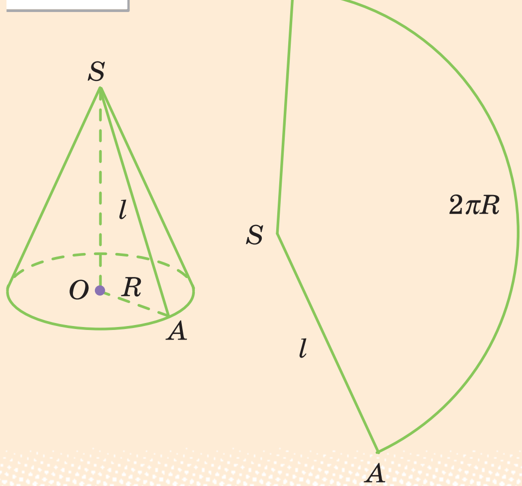
Означення. ***Віссю*** **прямого кругового конуса називається пряма, що містить його висоту.**

У прямого кругового конуса **всі твірні рівні** (як похилі, що мають рівні проекції — радіуси основи конуса).

Поверхня конуса складається з основи і бічної поверхні. *Бічну поверхню* конуса утворюють твірні.

Якщо бічну поверхню конуса розрізати за якою-небудь твірною і розгорнути на площині, то одержимо її розгортку. Розгортка бічної поверхні конуса радіуса R з твірною l є сектором радіуса l, довжина дуги якого дорівнює довжині кола основи, тобто $2\pi R$ (рис. 8.3). Площу цієї розгортки приймають за *площу бічної поверхні конуса**. Вона у стільки разів менша від площі круга радіуса l, у скільки разів довжина дуги сектора $2\pi R$ менша від довжини кола радіуса l, тобто $2\pi l$. Тому $\frac{S_{\text{бічн}}}{\pi l^2} = \frac{2\pi R}{2\pi l}$, звідки $S_{\text{бічн}} = \pi R l$.

Рис. 8.3



* Більш строго цю формулу буде обґрунтовано в § 13.

Щоб знайти площу повної поверхні конуса, треба до площі його бічної поверхні додати площу основи:

$$S_{\text{повн. кон}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$$

2. Переріз конуса площинами

Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину, є рівнобедреним трикутником, бічні сторони якого є твірними конуса (рис. 8.4). Зокрема, рівнобедреним трикутником є *осьовий переріз конуса*. Цей переріз проходить через вісь конуса (рис. 8.5).

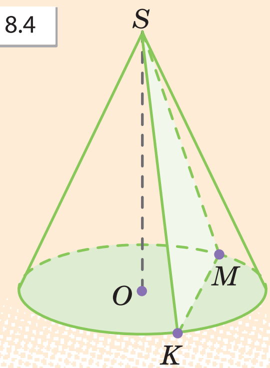


Рис. 8.4

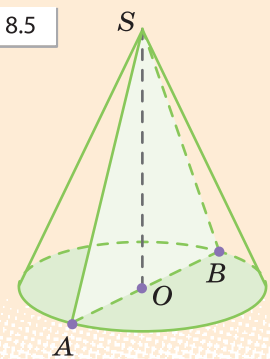


Рис. 8.5

Теорема 8.1. Площина, паралельна площині основи конуса, перетинає конус по кругу, а бічну поверхню — по колу з центром на осі конуса.

Доведення. Нехай площина β, паралельна площині основи конуса, перетинає конус (рис. 8.6). Точка O_1 — точка перетину площини β з висотою конуса SO. Площина SOB перетинає паралельні площини по паралельних прямих: $AO_1 \parallel BO$. Тоді трикутники SO_1A і SOB подібні, а їх сторони пропорційні, тобто $\frac{O_1A}{OB} = \frac{SO_1}{SO}$. Звідси $O_1A = \frac{SO_1}{SO} \cdot OB$ — постійна величина. Отже, довжина відрізка O_1A, який лежить у площині β, є постійною, а це й означає, що перерізом площини β з бічною поверхнею конуса є коло з центром на осі конуса, а перерізом площини β з конусом — круг. ■

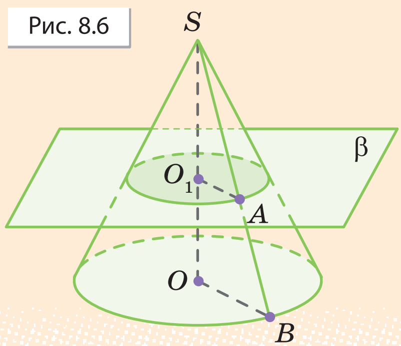


Рис. 8.6

Площина, паралельна основі конуса, яка перетинає конус, відтинає від нього менший конус (рис. 8.6). Частина, що залишилася, називається *зрізаним конусом* (рис. 8.7).

Зрізаний конус обмежено двома кругами — його *основами* (площини яких паралельні) і *бічною поверхнею*. *Висотою зрізаного конуса* називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу основу, наприклад, відрізок O_1O, що сполучає центри кругів основ. Довжина цього перпендикуляра дорівнює відстані між основами зрізаного конуса — її також називають *висотою зрізаного конуса*.

Відрізок AB, який сполучає найближчі точки кіл основ, — *твірна* (вона є частиною твірної SB повного конуса, з якого був одержаний зрізаний конус (див. рис. 8.6). Довжина цього відрізка AB також називається *твірною* зрізаного конуса.

Ураховуючи, що на рис. 8.6 площина SOB перетинає паралельні площини основ зрізаного конуса по паралельних прямих, одержуємо, що $O_1A \parallel OB$, тому *осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобічна трапеція* ($ABCD$ на рис. 8.8), і *зрізаний конус можна також розглядати як тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції* AO_1OB *навколо бічної сторони* O_1O, *перпендикулярної до основ трапеції*.

Рис. 8.7

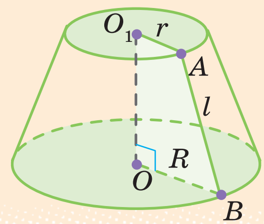
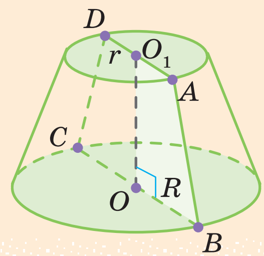


Рис. 8.8

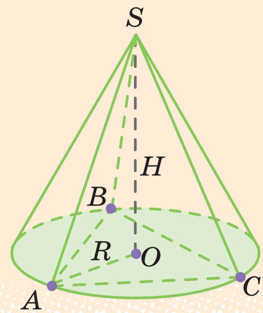


3. Вписана і описана піраміди

Означення. ***Піраміда* називається *вписаною в конус* (а конус — *описаним навколо піраміди*), якщо основа піраміди вписана в коло основи конуса, а вершиною піраміди є вершина конуса** (рис. 8.9).

Із цього означення одержуємо, що бічні ребра вписаної в конус піраміди є твірними конуса, висоти піраміди й конуса збігаються, а радіус конуса дорівнює радіусу кола, описаного навколо основи піраміди.

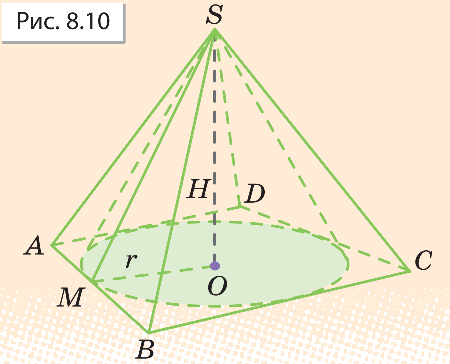
Рис. 8.9



Означення. **Піраміда називається *описаною навколо конуса* (а конус — *вписаним у піраміду*), якщо основа піраміди описана навколо кола основи конуса, а вершиною піраміди є вершина конуса** (рис. 8.10).

Із цього означення одержуємо, що висоти піраміди й конуса збігаються, а радіус конуса дорівнює радіусу кола, вписаного в основу піраміди.

Рис. 8.10



ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Конус перетнули площиною, паралельною основі, на відстані d від вершини. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює R, а висота H.

Коментар

За теоремою 8.1 в перерізі одержуємо круг (рис. 8.11).

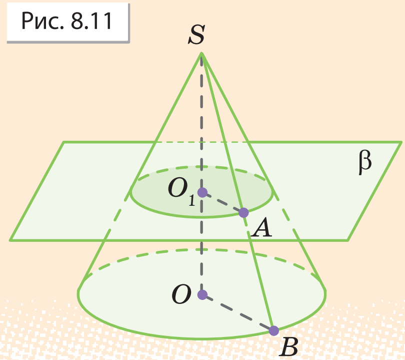
Площина SO_1A перетинає паралельні площини по паралельних прямих: $AO_1 \parallel BO$. Тоді трикутники SO_1A і SOB подібні, а їх сторони пропорційні. З одержаної пропорції визначаємо радіус перерізу, який потрібен для знаходження площі перерізу.

Розв'язання

Якщо β — площина, паралельна площині основи конуса, то вона перетинає конус по кругу з радіусом O_1A (рис. 8.11) і $SO = H$, $OB = R$, $SO_1 = d$. Площина SO_1A перетинає паралельні площини по паралельних прямих: $AO_1 \parallel BO$.

Тоді $\triangle SO_1A \sim \triangle SOB$ і $\dfrac{O_1A}{OB} = \dfrac{SO_1}{SO}$, тобто $\dfrac{O_1A}{R} = \dfrac{d}{H}$ і $O_1A = \dfrac{dR}{H}$. Отже, $S_{\text{перерізу}} = \pi \cdot O_1A^2 = \dfrac{\pi d^2 R^2}{H^2}$. ■

Рис. 8.11



Задача 2*. Знайдіть площу поверхні тіла, отриманого обертанням рівнобедреного трикутника з бічними сторонами по 8 см і кутом між ними 120° навколо прямої, яка містить бічну сторону трикутника.

Розв'язання

Нехай рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC = 8$ см, $\angle ACB = 120°$) обертається навколо осі, що містить сторону BC (рис. 8.12). Проведемо $OA \perp BC$.

У результаті обертання прямокутного трикутника AOB навколо осі BO утворюється конус, тому відрізок AB у результаті обертання навколо осі BO утворює бічну поверхню конуса з твірною AB і радіусом основи AO.

Аналогічно в результаті обертання прямокутного трикутника AOC навколо осі BO утворюється конус, тому відрізок AC у результаті обертання навколо осі BO утворює бічну поверхню конуса з твірною AC і радіусом основи AO.

Тоді площа поверхні отриманого тіла дорівнює сумі площ бічних поверхонь цих конусів.

Із прямокутного трикутника AOC $(\angle ACO = 60°)$ маємо:

$$OA = AC \cdot \sin 60° = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника AOB $(\angle ABC = 30°)$ одержуємо:

$$AB = \frac{AO}{\sin 30°} = 8\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

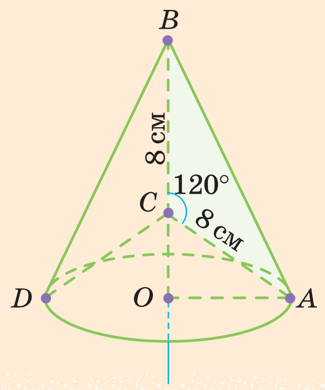
Тоді поверхня тіла обертання дорівнює

$$S = \pi \cdot AO \cdot AB + \pi \cdot AO \cdot AC =$$
$$= \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} + \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 =$$
$$= 96\pi + 32\sqrt{3}\pi = 32\left(3 + \sqrt{3}\right)\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Коментар

Під час розв'язування задач, пов'язаних із обертанням фігур навколо осі, слід ураховувати, що в результаті обертання прямокутного трикутника навколо катета як осі утворюється конус, а в результаті обертання прямокутної трапеції навколо бічної сторони, перпендикулярної до основи трапеції, — зрізаний конус. Тому доцільно з кожної вершини заданого многокутника, що не лежить на осі обертання, провести перпендикуляр на вісь і розглянути поверхню, яку описує кожний із відрізків, що не лежить на осі обертання.

Рис. 8.12

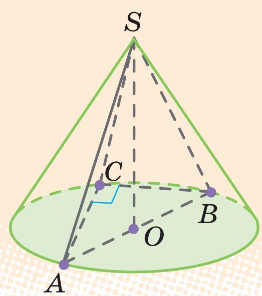


Задача 3. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо цієї піраміди.

Розв'язання

Нехай $SABC$ (рис. 8.13) — задана піраміда. Оскільки всі її бічні ребра нахилені під рівними кутами до площини основи, то основою її висоти SO є центр кола, описаного навколо основи піраміди, який у прямокутному трикутнику ABC лежить у середині гіпотенузи AB, тобто точка O — середина AB.

Рис. 8.13



Оскільки $SO \perp$ пл. ABC, то AO — проекція SA на площину ABC, тобто $\angle SAO$ — кут між бічним ребром і площиною ABC $(\angle SAO = 60°)$.

Якщо конус описаний навколо піраміди, то їхні вершини збігаються й коло основи конуса описане навколо основи піраміди, тобто радіус основи конуса дорівнює OA, а твірна конуса дорівнює бічному ребру SA піраміди.

Із прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ одержуємо: $AB = 10$ см. Тоді $AO = 5$ см. Із прямокутного трикутника AOS маємо: $SA = \dfrac{AO}{\cos 60°} = 10$ (см).

Тоді площа бічної поверхні конуса дорівнює: $S_{\text{бічн}} = \pi \cdot AO \cdot SA = \pi \cdot 5 \cdot 10 = 50\pi$ (см²). ■

Коментар

Корисно використовувати трохи уточнену (див. п. 4 нижче) загальну схему розв'язування задач, пов'язаних із многогранниками (див. § 1).

1) Обґрунтувати розташування висоти піраміди (якщо всі бічні ребра піраміди нахилені під рівними кутами до площини основи, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди, тобто середина гіпотенузи; це слід урахувати ще до побудови рисунка до задачі).
2) Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно (у нас задано кут між бічним ребром і площиною основи, тобто кут між цим ребром і його проекцією на площину основи).
3) Обґрунтувати вид і розташування заданого перерізу (у цій задачі перерізи не розглядаються).
4) Якщо розглядається комбінація многогранника й тіла обертання, то вказати взаємне розташування їх елементів (тільки те, що буде використано під час розв'язування).
5) На кожному етапі обчислень указуємо, елементи якого трикутника визначаємо. Якщо трикутник прямокутний, то пояснюємо чому.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке конус (прямий круговий конус). Що таке твірна конуса? основа конуса? бічна поверхня конуса? висота й вісь конуса?
2. Якою фігурою є переріз конуса, що проходить через його вершину? осьовий переріз конуса?
3. Якою фігурою є переріз конуса площиною, паралельною його основі? Відповідь обґрунтуйте.
4. Поясніть, що таке розгортка бічної поверхні конуса.
5. Запишіть формули для визначення площ бічної й повної поверхонь конуса.
6. Поясніть, яка піраміда називається вписаною в конус, а яка — описаною навколо конуса.

ВПРАВИ

8.1°. Радіус основи конуса дорівнює 3 м, висота 4 м. Знайдіть:
1) твірну конуса;
2) площу бічної поверхні конуса;
3) площу повної поверхні конуса.

8.2°. Твірна конуса дорівнює 10 і нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту конуса.

8.3°. Висота конуса дорівнює 8, а довжина твірної 10. Знайдіть діаметр основи конуса.

8.4°. Висота конуса дорівнює 15, а діаметр основи 16. Знайдіть:
1) твірну конуса;
2) площу бічної поверхні конуса;
3) площу повної поверхні конуса.

8.5. Радіус основи конуса дорівнює R. Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

8.6. У рівносторонньому конусі (в осьовому перерізі — правильний трикутник) радіус основи дорівнює R. Знайдіть площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює α.

8.7. Доведіть, що з усіх перерізів конуса площиною, яка проходить через його вершину, найбільший периметр має осьовий переріз.

8.8. Чи правильно, що з усіх перерізів конуса площиною, яка проходить через його вершину, найбільшу площу має осьовий переріз? Відповідь обґрунтуйте.

8.9°. У скільки разів збільшиться площа бічної поверхні конуса, якщо його твірну збільшити втричі (радіус основи залишається без зміни)? Відповідь обґрунтуйте.

8.10. Висота конуса дорівнює H. На якій відстані від вершини треба провести площину, паралельну основі, щоб площа перерізу дорівнювала половині площі основи?

8.11. Через середину висоти конуса проведено пряму, паралельну твірній. Знайдіть довжину відрізка прямої, який розташований усередині конуса, якщо довжина твірної дорівнює l.

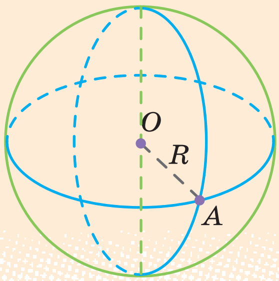
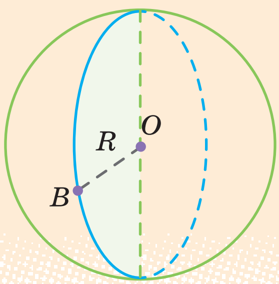
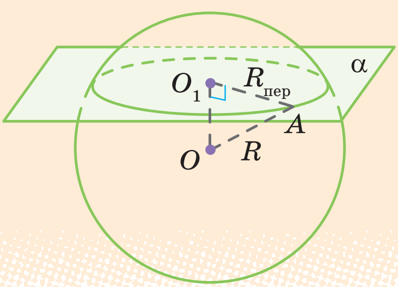
8.12*. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, а всі двогранні кути при основі дорівнюють 60°. Знайдіть площу повної поверхні конуса, вписаного в цю піраміду.

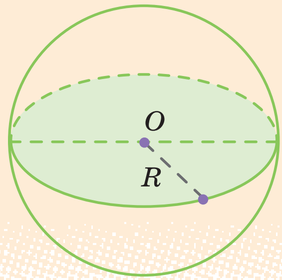
Виявіть свою компетентність

8.13. До стандартного набору пожежного щита, який повинен бути в кожному цеху на підприємстві, входить конічне відро з діаметром основи 30 см і висотою 35 см. Відповідальному за пожежну безпеку на підприємстві потрібно пофарбувати 50 таких відер (зовні і зсередини). У нього є дві банки червоної фарби, кожна містить 0,9 кг. Чи вистачить йому фарби, якщо для фарбування 1 м^2 металу витрачається 120 г фарби?

§ 9. КУЛЯ І СФЕРА

Таблиця 8

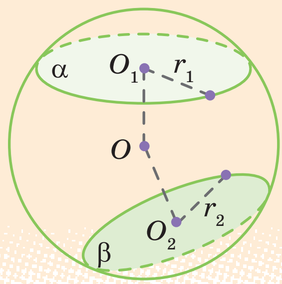
Сфера і куля	
	***Сферою*** **називається тіло, що складається з усіх точок простору, розташованих на заданій відстані (R) від заданої точки (O).** O — *центр сфери;* OA — *радіус сфери;* $OA = R$. У результаті обертання півкола навколо його діаметра одержуємо сферу.
	***Кулею*** **називається тіло, що складається з усіх точок простору, розташованих на відстані, не більшій за задану (R), від заданої точки (O).** O — *центр кулі;* OB — *радіус кулі;* $OB = R$. У результаті обертання півкруга навколо його діаметра одержуємо кулю.
Переріз кулі площиною	
	*Будь-який переріз кулі площиною є кругом.* Центр цього круга — основа перпендикуляра, проведеного з центра кулі на січну площину. O — центр кулі; O_1 — центр круга перерізу. $OO_1 \perp \alpha$. Із $\triangle OO_1A$: $R_{\text{перерізу}} = \sqrt{R^2_{\text{кулі}} - OO_1^2}$



Переріз, що проходить через центр кулі, називається *великим кругом*.

$$R_{\text{вел. кр}} = R_{\text{кулі}}$$

Переріз кулі двома площинами



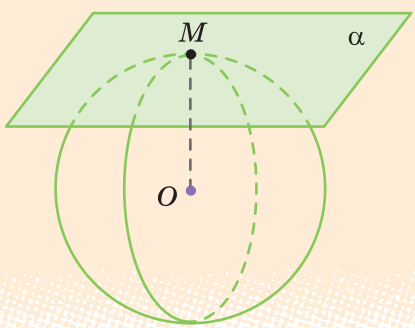
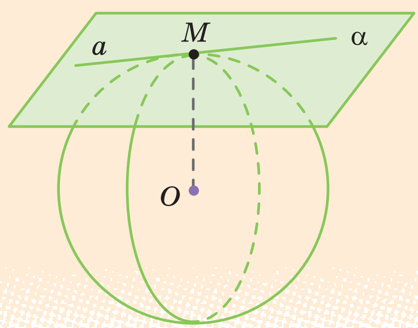
$OO_1 \perp \alpha$; $OO_2 \perp \beta$; r_1 і r_2 — радіуси кругів перерізів.

$$OO_1 = OO_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$$

$$OO_1 < OO_2 \Leftrightarrow r_1 > r_2$$

$$OO_1 > OO_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$$

Площина й пряма, дотичні до кулі (сфери)

Дотична площина	Дотична пряма
	
Площина, що має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається *дотичною площиною*.	**Пряма, яка належить дотичній площині кулі (сфери) і проходить через точку дотику, називається *дотичною до кулі* (*сфери*).**

Властивості

Дотична площина (пряма) перпендикулярна до радіуса кулі (сфери), проведеного в точку дотику.

І навпаки:

якщо площина (пряма) проходить через точку сфери й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до сфери.

α — дотична площина, M — точка дотику	$\Leftrightarrow$	$OM \perp \alpha$ (OM — радіус кулі)		a — дотична пряма, M — точка дотику	$\Leftrightarrow$	$OM \perp a$ (OM — радіус кулі)

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Куля й сфера

Нагадаємо основні означення.

Означення. ***Кулею*** **називається тіло, що складається з усіх точок простору, віддалених від заданої точки на відстань, не більшу за задану. Ця точка називається** ***центром кулі,*** **а задана відстань —** ***радіусом кулі.***

Означення. Границя кулі називається ***кульовою поверхнею,*** **або** ***сферою.*** **Отже, точками сфери є всі точки кулі, віддалені від центра на відстань, що дорівнює радіусу.**

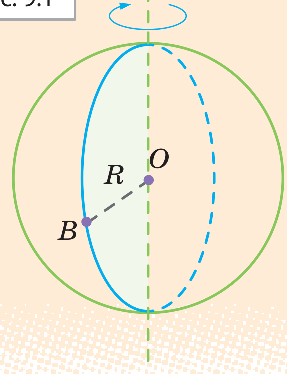
Будь-який відрізок, що сполучає центр кулі з точкою кульової поверхні, також називають *радіусом*.

Означення. Відрізок, який сполучає дві точки кульової поверхні й проходить через центр кулі, називається ***діаметром кулі.*** **Кінці будь-якого діаметра називаються** ***діаметрально протилежними точками кулі.***

Куля, так само як циліндр і конус, є тілом обертання.

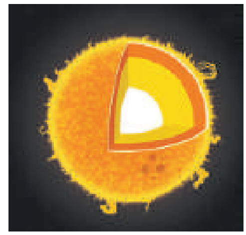
Вона утворюється в результаті обертання півкруга навколо його діаметра як осі (рис. 9.1). Сфера може бути отримана в результаті обертання півкола навколо його діаметра.

Рис. 9.1



Кулі й сфери та їхні частини ми часто спостерігаємо в природі (наприклад, Сонце, планети, фрукти) і побуті (глобус, мильні бульбашки), в техніці (кульковий підшипник) й архітектурі (музей Біосфера (Монреаль, Канада), куполи Домініканського собору та вежі Корнякта (Львів, Україна)).





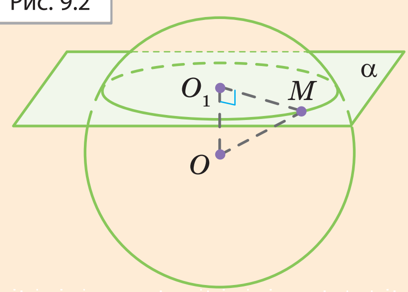


2. Переріз кулі площиною

Теорема 9.1. Будь-який переріз кулі площиною є кругом. Центр цього круга є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі на січну площину.

Доведення. Нехай α — січна площина й O — центр кулі (рис. 9.2). Проведемо перпендикуляр із центра кулі на площину α і позначимо через O_1 основу цього перпендикуляра. Нехай M — довільна точка кулі, що належить площині α. За теоремою Піфагора $OM^2 = OO_1^2 + O_1M^2$. Оскільки відстань OM не більша за радіус R кулі, то $O_1M \leqslant \sqrt{R^2 - OO_1^2}$. Маємо:

Рис. 9.2



довільна точка перерізу кулі площиною α розташована від точки O_1 на відстані, не більшій за $\sqrt{R^2 - OO_1^2}$, отже, вона належить кругу з центром O_1 і радіусом $\sqrt{R^2 - OO_1^2}$.

І навпаки: будь-яка точка M цього круга належить кулі. А це означає, що перерізом кулі площиною α є круг із центром у точці O_1. ■

Зазначимо, що коли розглянути переріз кулі двома площинами α і β, то одержимо в перерізі два круги радіусами r_1 і r_2 відповідно (рис. 9.3).

Нехай O_1 і O_2 — основи перпендикулярів, проведених із центра кулі O на площини α і β відповідно. Якщо радіус кулі дорівнює R, то $r_1 = \sqrt{R^2 - OO_1^2}$ і $r_2 = \sqrt{R^2 - OO_2^2}$. Порівняємо ці вирази. Одержимо, що $r_1 = r_2$ тоді й тільки тоді, коли $OO_1 = OO_2$, а $r_1 < r_2$ тоді й тільки тоді, коли $OO_1 > OO_2$. Отже, *рівні перерізи кулі розташовані на однакових відстанях від її центра (і навпаки), переріз більшого радіуса розташований на меншій відстані від центра кулі (і навпаки).*

Означення. Площина, яка проходить через центр кулі, називається діаметральною площиною. Переріз кулі *діаметральною площиною* називається *великим кругом* (рис. 9.4), **а переріз сфери — *великим колом*.**

Будь-яка діаметральна площина кулі є її площиною симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.

Рис. 9.3

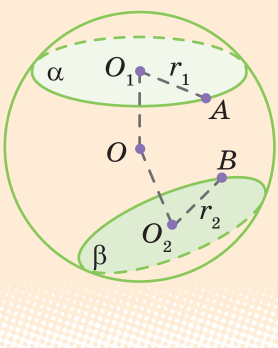
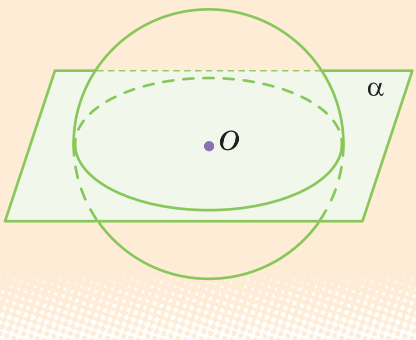


Рис. 9.4

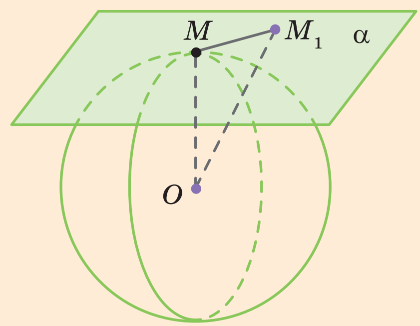


3. Дотична площина до кулі (сфери)

Означення. Площина, яка має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається *дотичною площиною до кулі (сфери)*. Спільна точка дотичної площини і кулі (сфери) називається *точкою дотику*.

Теорема 9.2. Дотична площина до кулі перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Рис. 9.5



Доведення. Нехай площина α в точці M дотикається до кулі з центром у точці O і радіуса R (рис. 9.5). Доведемо, що $OM \perp \alpha$.

Припустимо, що OM — похила до площини α. Проведемо перпендикуляр OM_1 до площини α. Оскільки перпендикуляр має довжину, меншу від довжини похилої, то $OM_1 < OM = R$. Але тоді точка M_1 належить одночасно і кулі, і площині α, а це суперечить умові, що площина α — дотична до кулі й у них тільки одна спільна точка M. Отже, радіус кулі OM не може бути похилою до дотичної площини α, тобто $OM \perp \alpha$. ■

Також справедливе й обернене твердження: *якщо площина проходить через точку M сфери й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до сфери*.

Обґрунтуйте це самостійно.

Означення. Пряма, яка належить дотичній площині кулі (сфери) і проходить через точку дотику, називається *дотичною до кулі* (*сфери*) в цій точці.

Наприклад, на рис. 9.5 пряма MM_1 — дотична до кулі (сфери).

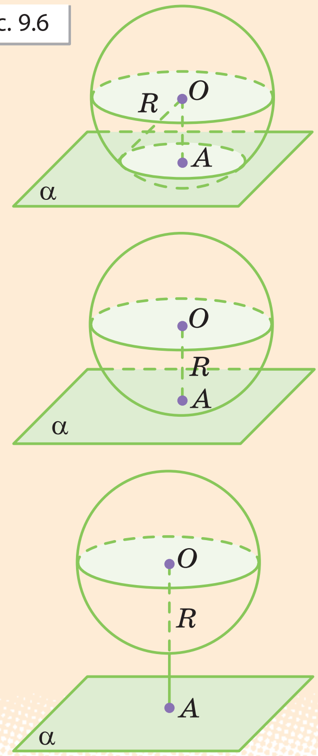
Оскільки дотична площина має з кулею тільки одну спільну точку, то *дотична пряма має з кулею тільки одну спільну точку — точку* *дотику*. Оскільки дотична пряма до кулі лежить у дотичній площині, що перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику, то *дотична пряма до кулі перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.*

Також має місце й обернене твердження: якщо пряма проходить через точку M сфери перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до сфери.

Обґрунтуйте це самостійно.

Зазначимо, що властивості, сформульовані в теоремах 9.1 і 9.2, дозволяють знайти зв'язок між взаємним розташування кулі й площини і відстанню $OA = d$ від центра кулі до площини та радіусом R кулі. Справді, якщо $d < R$, то площина перетинає кулю; якщо $d = R$, то площина дотикається до кулі; якщо $d > R$, то площина і куля не мають спільних точок (рис. 9.6).

Рис. 9.6



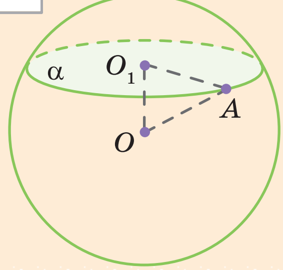
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. У кулі радіуса 26 см на відстані 10 см від центра проведено січну площину (рис. 9.7). Знайдіть площу перерізу.

Коментар

Згідно з теоремою 9.1 будь-який переріз кулі площиною є кругом. Центр цього круга є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі до січної площини. Тому для розв'язування

Рис. 9.7



потрібно з центра кулі провести перпендикуляр до січної площини α. Довжина цього перпендикуляра є відстанню від центра кулі до січної площини.

Корисно також урахувати, що для знаходження площі перерізу — круга — використовуватимемо формулу $S=\pi R^2$, тому достатньо знайти $R^2=O_1A^2$ (і не обов'язково знаходити довжину O_1A).

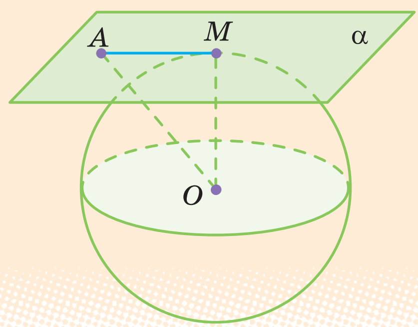
Розв'язання

Проведемо перпендикуляр із центра кулі O до січної площини α і позначимо через O_1 основу цього перпендикуляра — центр круга перерізу (рис. 9.7). Нехай O_1A — радіус перерізу, а OA — радіус кулі ($OA=26$ см). Оскільки $OO_1\perp\alpha$, то OO_1 — відстань від центра кулі до січної площини і $OO_1=10$ см. Тоді з прямокутного трикутника OO_1A маємо: $O_1A^2=OA^2-OO_1^2=26^2-10^2=576$.

Отже, площа перерізу дорівнює: $\pi\cdot O_1A^2=576\pi$ (см²).

Задача 2. Куля з центром у точці O дотикається до площини (рис. 9.8). Точка A лежить у цій площині. Знайдіть відстань від точки A до точки дотику, якщо відстань від неї до центра кулі дорівнює 25 см, а радіус кулі 15 см.

Рис. 9.8



Коментар

Згідно з теоремою 9.2 дотична площина до кулі перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику, але тоді й будь-яка пряма дотичної площини перпендикулярна до цього радіуса кулі.

Розв'язання

Нехай точка M — точка дотику кулі з площиною α і $A\in\alpha$ (рис. 9.8). За властивістю дотичної площини $OM\perp\alpha$, тоді $OM\perp AM$. За умовою $OM=15$ см, $OA=25$ см. Із прямокутного трикутника OAM маємо: $AM=\sqrt{OA^2-OM^2}=\sqrt{25^2-15^2}=\sqrt{400}=20$ (см).

З прикладами розв'язування більш складних задач, пов'язаних із кулею (зокрема, на комбінацію многогранників із кулею), можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке куля й сфера. Що таке центр кулі? радіус і діаметр кулі?

2. Якою фігурою є переріз кулі площиною? Що таке великий круг кулі? велике коло сфери?

3*. Сформулюйте й доведіть теорему про переріз кулі площиною.

4. Як пов’язані між собою радіуси кругів — перерізів кулі двома площинами і відстані від цих кругів до центра кулі?

5. Чи має куля центр симетрії й площини симетрії?

6. Яка площина називається дотичною площиною до кулі (сфери)?

7*. Сформулюйте і доведіть властивість дотичної площини до кулі.

8. Яка пряма називається дотичною до кулі (сфери)?

9. Як розташовані куля і площина залежно від відстані від центра кулі до площини?

ВПРАВИ

9.1°. Площина проходить через центр сфери й перетинає її по колу, довжина якого дорівнює 6π. Знайдіть діаметр сфери.

9.2°. Знайдіть довжину лінії перетину сфери радіуса 5 і площини, віддаленої від центра цієї сфери на 3.

9.3. Площина віддалена на відстань 3 від центра сфери радіуса 10. На яку найбільшу відстань віддалені від цієї площини точки сфери?

9.4°. Усі вершини квадрата зі стороною 8 дм належать сфері радіуса 9 дм. На якій відстані від центра сфери розташована площина квадрата?

9.5°. Вершини прямокутника лежать на сфері радіуса 10 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 16 см.

9.6. Усі вершини правильного трикутника зі стороною 6 дм належать сфері радіуса 8 дм. На якій відстані від центра сфери розташована площина трикутника?

9.7. Сфера проходить через усі вершини прямокутного трикутника з катетами 6 і 8, а центр сфери віддалений від площини цього трикутника на відстань 12. Знайдіть радіус сфери.

9.8*. Куля радіуса 3 дотикається до сторін рівностороннього трикутника в точках A, B і C. Визначте довжину найкоротшого шляху по поверхні кулі від точки A до точки B, якщо довжина сторони цього трикутника дорівнює 6.

9.9. Сфера радіуса 6 дотикається до площини трикутника ABC у центрі описаного навколо нього кола. Знайдіть відстань від центра сфери до вершин трикутника, якщо $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$.

9.10. Сфера радіуса 1,5 дотикається до площини трикутника ABC у центрі вписаного в нього кола. Знайдіть відстань від центра сфери до сторін трикутника, якщо $AB=6$, $AC=8$, $BC=10$.

9.11. Сфера дотикається до трьох сторін трикутника зі сторонами 5, 5, 8. Знайдіть радіус сфери, якщо її центр лежить у площині цього трикутника.

9.12. Кулю радіуса 41 дм перетнули площиною, розташованою на відстані 9 дм від центра. Знайдіть площу перерізу.

9.13. Через середину радіуса кулі проведено площину, перпендикулярну до нього. Як відноситься площа утвореного перерізу до площі великого круга?

9.14. Дві паралельні площини перетинають сферу радіуса 5 по колах радіусами 3 і 4. Знайдіть відстань між площинами.

9.15. Сфера дотикається до однієї з паралельних площин і перетинає іншу по колу радіуса 4. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 8.

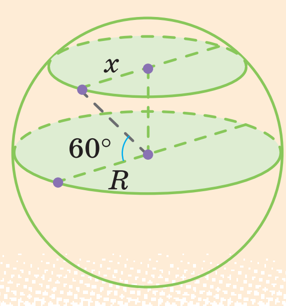
9.16. Радіус кулі дорівнює R. Через кінець радіуса проведено площину під кутом $60°$ до нього. Знайдіть площу перерізу.

Виявіть свою компетентність

9.17. Радіус земної кулі $R \approx 6000$ км. Чому дорівнює довжина паралелі, якщо її широта становить $60°$ (рис. 9.9)?

9.18. Місто N розташоване на $60°$ північної широти. Який шлях проходить цей пункт протягом 1 год унаслідок обертання Землі навколо своєї осі? Вважайте, що радіус Землі дорівнює 6000 км.

Рис. 9.9



ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 2

1. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 20 см. Знайдіть площу осьового перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює 6 см.

А 36 см^2 Б 96 см^2 В 120 см^2 Г 192 см^2 Д 200 см^2

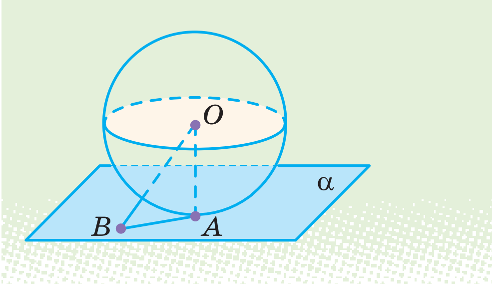
2. Твірна конуса дорівнює 30 см і нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту конуса.

А 15 см Б $15\sqrt{3}$ см В $15\sqrt{2}$ см Г $\frac{30\sqrt{3}}{3}$ см Д $30\sqrt{3}$ см

3. Куля з центром у точці O дотикається до площини α в точці A (рисунок), а точка B лежить у площині α, $AB = a$, $\angle AOB = \varphi$. Знайдіть радіус кулі.

А $a\sin\varphi$ В $a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ Д $\frac{a}{\sin\varphi}$

Б $a\cos\varphi$ Г $a\,\mathrm{ctg}\,\varphi$



4. Кулю радіуса 10 перетнули площиною на відстані 6 від центра. Знайдіть площу перерізу.

А 16π Б 20π В 36π Г 64π Д 100π

5. Циліндр, осьовим перерізом якого є квадрат із стороною 20, перетнули площиною, паралельною осі циліндра, на відстані 6 від центра. Установіть відповідність між величинами (1–3) та їхніми значеннями (А–Г).

1 Довжина твірної циліндра	А 10
2 Площа одержаного перерізу	Б 20
3 Довжина діагоналі одержаного перерізу	В 320
	Г $4\sqrt{41}$

6. Через вершину конуса з висотою 6 і радіусом основи 4 проведена січна площина, яка утворює кут 60° із площиною основи. Знайдіть площу перерізу.

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

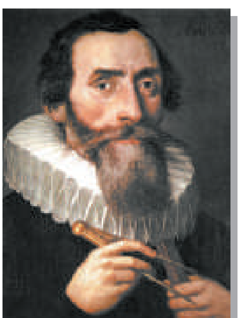
Теми навчальних проектів

1. Тіла обертання в архітектурі України і світу.
2. Тіла обертання в природі й техніці.
3. Елементи сферичної геометрії, її зв'язок із практикою.
4. Геометричні форми в покрівлях будівель.

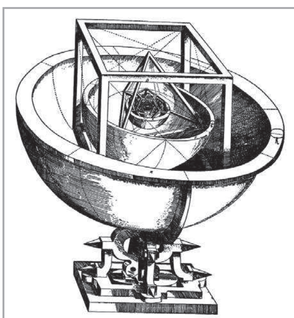
Відомості з історії

Поняття тіла обертання було відомо ще задовго до часів Стародавньої Греції. Означення циліндра, конуса і кулі як тіл обертання наведені в «Началах» **Евкліда** (близько 300 р. до н. е.). Значна заслуга в дослідженні цих тіл належить його сучасникам і послідовникам — **Євдоксу** (близько 408 р. до н. е. — близько 355 р. до н. е.), **Аполлонію** (близько 262 р. до н. е. — 190 р. до н. е.), **Архімеду** (близько 287 р. до н. е. — 212 р. до н. е.). Зокрема Аполлоній Перзький у своїй роботі «Конічні перерізи» встановив, що перетинами конічної поверхні можуть бути коло, еліпс, парабола або гіпербола.

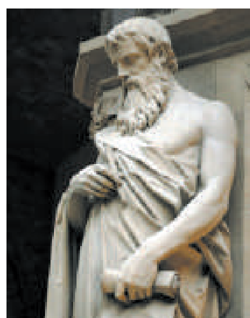
Досить цікаве застосування куль, вписаних і описаних навколо правильних многогранників, запропонував **І. Кеплер** (1571–1630) у своїй праці «Таємниця світобудови» в 1596 р. Він описав свій погляд на принцип, який зумовлює форми й розміри орбіт відомих на той час планет Сонячної системи. На думку Кеплера, геометрія Сонячної системи описувалася так: «Земля (звісно, орбіта Землі) є міра всіх орбіт. Навколо неї опишемо додекаедр. Описана навколо додекаедра сфера є сфера Марса. Навколо сфери Марса опишемо тетраедр. Описана навколо тетраедра сфера є сфера Юпітера. Навколо сфери Юпітера опишемо куб. Описана навколо куба сфера є сфера Сатурна. У сферу Землі впишемо ікосаедр. Вписана в нього сфера є сфера Венери. У сферу Венери впишемо октаедр. Вписана в нього сфера є сфера Меркурія». Така модель Сонячної системи отримала назву «Космічного кубка» Кеплера (див. рисунок). Подальші відкриття Кеплера привели до того, що ця робота втратила своє первинне значення, оскільки орбіти планет виявилися не круговими, а еліптичними. Проте до кінця життя Кеплер вірив у те, що існує прихована математична гармонія Всесвіту.



І. Кеплер (1571–1630)



«Космічний кубок» Кеплера



Евклід (близько 300 г. до н. э.)

Розділ 3

ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

У цьому розділі ви:

- ознайомитеся з поняттями об'єму тіла та його поверхні, а також із формулами об'ємів призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі, з формулою площі поверхні кулі;
- навчитеся розв'язувати задачі на знаходження об'ємів і площ поверхонь зазначених тіл.

§ 10. ПОНЯТТЯ ОБ’ЄМУ ТІЛ. ОБ’ЄМИ ПРИЗМИ Й ЦИЛІНДРА

Таблиця 9

Об’єми тіл

1. Поняття й основні властивості об’єму

Об’єм — величина, що ставить у відповідність тілам у просторі невід’ємні дійсні числа.

Властивості

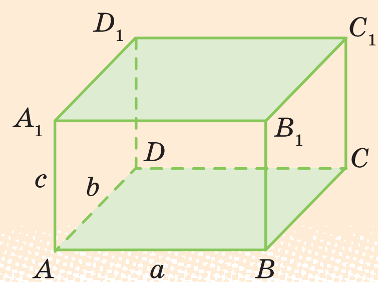
1. Об’єм тіла в просторі є невід’ємним числом.
2. Рівні тіла мають рівні об’єми.
3. Якщо тіло *F* поділене на частини, що не перетинаються, то об’єм тіла дорівнює сумі об’ємів його частин.
4. Об’єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

2. Деякі формули знаходження об’ємів

1. Об’єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів:

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

де a, b, c — ребра прямокутного паралелепіпеда.



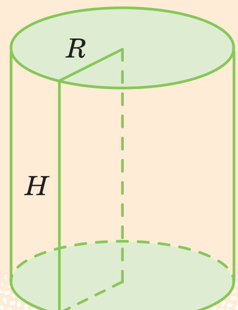
2. Об’єм прямої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту:

$$V = S \cdot H.$$

3. Об’єм прямого кругового циліндра

$$V = \pi R^2 \cdot H,$$

де R — радіус основи, H — висота циліндра.



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Проблема обчислення об’ємів просторових фігур із прадавніх часів привертала до себе увагу вчених. Обчисленням об’ємів найпростіших просторових фігур займалися Демокрит (близько 460 – 370 рр. до н. е.), Євдокс (близько 406 – 355 рр. до н. е.), Архімед (близько 287 – 212 рр. до н. е.). У середні віки обчисленням об’ємів просторових фігур займалися І. Кеплер (1571–1630), Б. Кавальєрі (1598–1647), П. Ферма (1601–1665) та ін. Інтегральне числення, появу якого наприкінці XVII ст. пов’язують із роботами І. Ньютона (1643–1727) і Г. Лейбніца (1646–1716), дало потужний метод обчислення об’ємів довільних просторових фігур. Із цим методом ви ознайомитеся в курсі алгебри і початків аналізу. У цьому розділі ми розглянемо поняття об’єму, його властивості, способи обчислення об’ємів многогранників і тіл обертання, розглянутих у попередніх розділах.

Можна вважати, що поняття об’єму в просторі певною мірою аналогічне поняттю площі на площині. *Об’єм* — величина, що ставить у відповідність тілам у просторі невід’ємні дійсні числа. За одиницю об’єму приймають куб, ребро якого дорівнює одиниці виміру довжини. Якщо за одиницю виміру довжини приймають 1 мм, 1 см або 1 м, то об’єм одержують у кубічних міліметрах ($мм^3$), кубічних сантиметрах ($см^3$) або кубічних метрах ($м^3$) відповідно.

Об’єм — число V, що показує, скільки разів одиниця виміру об’єму і її частини укладаються в заданому тілі.

Це число може бути натуральним, раціональним або навіть ірраціональним.

Для об’ємів просторових тіл мають місце властивості, аналогічні властивостям площ плоских фігур (див. табл. 10).

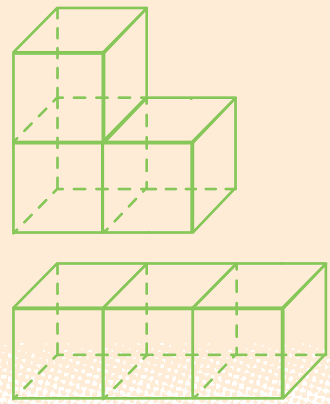
Таблиця 10

Властивості площ фігур	Властивості об’ємів тіл у просторі
1. Площа фігури на площині є невід’ємним числом	1. Об’єм тіла в просторі є невід’ємним числом
2. Рівні фігури мають рівні площі	2. Рівні тіла мають рівні об’єми
3. Якщо фігуру F поділено на частини, що не перетинаються, то площа всієї фігури дорівнює сумі площ її частин	3. Якщо тіло F поділено на частини, що не перетинаються, то об’єм тіла дорівнює сумі об’ємів його частин
4. Площа квадрата, сторона якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці	4. Об’єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці

Означення. Два тіла, що мають рівні об'єми, називаються *рівновеликими*.

Наприклад, рівновеликими є тіла, складені з однакового числа рівних кубиків (рис. 10.1).

Рис. 10.1



Для знаходження об'ємів тіл зручно об'єднувати певні тіла в класи. Із цією метою сформулюємо загальне означення циліндра.

Нехай α і β — дві паралельні площини, l — пряма, що перетинає ці площини; F — фігура на одній із цих площин, F' — її паралельна проекція на іншу площину в напрямку прямої l (рис. 10.2, *а*). Усі відрізки, що сполучають точки фігури F з їхніми проекціями, утворюють фігуру в просторі, яку назвемо *циліндром*. Фігури F і F' називають *основами циліндра*. Відстань між площинами основ називають *висотою циліндра*.

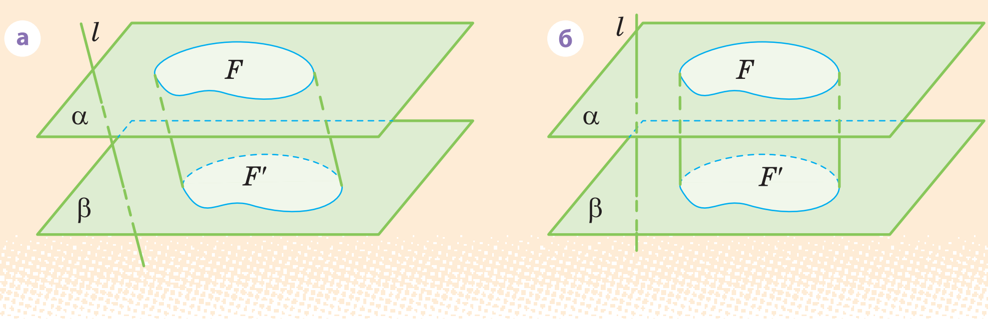
У випадку якщо в означенні циліндра замість паралельної проекції береться ортогональна, тобто пряма l перпендикулярна до площин α і β, то циліндр називають *прямим* (рис. 10.2, *б*). А якщо ні, то циліндр називають *похилим*.

Зазначимо, що з позиції загального означення циліндра окремим випадком такого циліндра є призма.

У випадку якщо основа F циліндра є кругом, то циліндр називають *круговим*. Раніше ми розглядали тільки прямі кругові циліндри і називали їх просто циліндрами (*у задачах цього розділу під словом «циліндр» ми також розумітимемо прямий круговий циліндр*).

Знайдемо формулу для обчислення об'єму прямого циліндра, основою якого є довільна обмежена замкнена плоска фігура.

Рис. 10.2



Теорема 10.1. Об'єм прямого циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.

Спочатку розглянемо випадок, коли в основі циліндра лежить квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці, а висота циліндра дорівнює H (рис. 10.3). Оскільки задана одиниця виміру довжини і її частини укладаються у висоті H разів, то й одиничний куб укладатиметься в цьому циліндрі H разів, отже, об'єм циліндра дорівнює H.

Тепер розглянемо прямий циліндр із площею основи S і висотою H. Виокремимо в ньому шар висотою 1, який є прямим циліндром із тією самою основою, що і заданий циліндр (рис. 10.4). Кожному одиничному квадрату, що лежить в основі циліндра, відповідатиме одиничний куб, що міститься в шарі. Те, що площа основи циліндра дорівнює S, означає, що одиничний квадрат і його частини укладаються в основі циліндра S разів. Тому одиничний куб і його частини укладатимуться в шарі, висота якого дорівнює 1, S разів, тобто об'єм виокремленого шару дорівнюватиме S.

Те, що висота циліндра дорівнює H, означає, що одиничний відрізок і його частини укладаються по висоті H разів. Отже, виділений одиничний шар і його частини укладатимуться в циліндрі H разів.

Маємо: одиничний куб укладається в шарі S разів і цей шар укладається в циліндрі H разів. Отже, одиничний куб укладатиметься в циліндрі $S \cdot H$ разів, тобто має місце формула

$$V = S \cdot H, \qquad (1)$$

де S — площа основи, H — висота циліндра. ■

Рис. 10.3

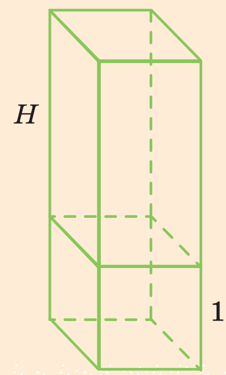
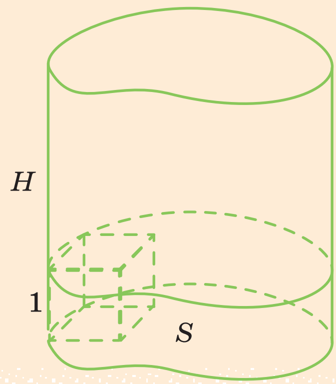


Рис. 10.4



Оскільки прямокутний паралелепіпед, пряма призма й прямий круговий циліндр є окремими випадками розглянутого прямого циліндра, то з формули (1) одержимо такі наслідки.

Рис. 10.5

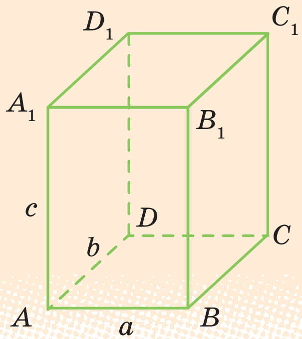


Рис. 10.6

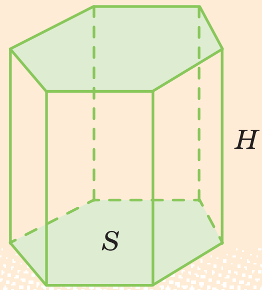
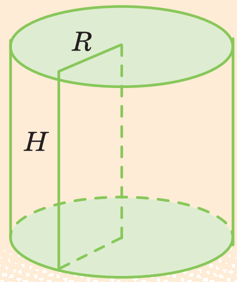


Рис. 10.7



Наслідок 1. Об'єм прямокутного паралелепіпеда (рис. 10.5) дорівнює добутку трьох його вимірів, тобто має місце формула $V = a \cdot b \cdot c$, де a, b, c — ребра прямокутного паралелепіпеда. (Справді, у цьому випадку $S = a \cdot b$ і $c = H$.) Об'єм куба $V = a^3$, де a — ребро куба.

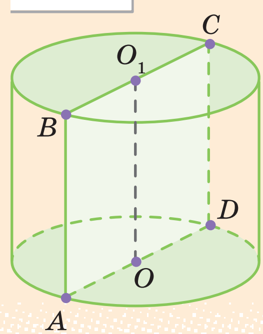
Наслідок 2. Об'єм прямої призми (рис. 10.6) дорівнює добутку площі її основи на висоту, тобто має місце формула $V = S \cdot H$, де S — площа основи, H — висота призми.

Наслідок 3. Об'єм прямого кругового циліндра (рис. 10.7), висота якого дорівнює H і радіус основи R, обчислюється за формулою $V = \pi R^2 \cdot H$. (Справді, у цьому випадку $S = \pi R^2$.)

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Осьовий переріз прямого кругового циліндра — квадрат зі стороною a (рис. 10.8). Знайдіть об'єм циліндра.

Рис. 10.8



Коментар

Якщо осьовий переріз циліндра — квадрат (рис. 10.8), то висота AB циліндра дорівнює a і діаметр основи AD теж дорівнює a. Якщо радіус основи дорівнює R, то $2R = a$, отже, $R = \frac{a}{2}$. Далі використовуємо формулу об'єму циліндра $V = \pi R^2 H$.

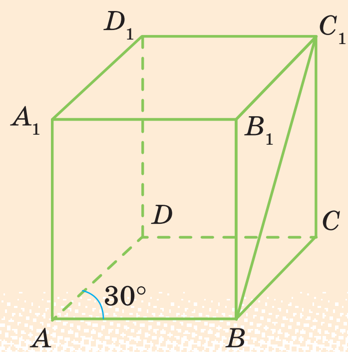
Розв’язання

Якщо сторона квадрата осьового перерізу (рис. 10.8) дорівнює a, то висота циліндра $H=a$, а радіус основи $R=\frac{a}{2}$. Тоді його об’єм дорівнює

$$V=\pi R^2 H=\frac{\pi a^3}{4}.$$

Задача 2. В основі прямого паралелепіпеда (рис. 10.9) лежить ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 30°. Знайдіть об’єм паралелепіпеда, якщо діагональ його бічної грані дорівнює 5 см.

Рис. 10.9



Коментар

Оскільки прямий паралелепіпед є прямою призмою, то для обчислення його об’єму можна скористатися формулою $V=S\cdot H$, де S — площа основи, H — висота призми, яка в прямій призмі дорівнює бічному ребру.

Для обчислення площі ромба, що лежить в основі, можна скористатися тим, що *площа паралелограма дорівнює добутку суміжних сторін на синус кута між ними.*

Розв’язання

Нехай у прямому паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 10.9) $BC_1=5$ см, $ABCD$ — ромб: $AB=BC=CD=AD=4$ см і $\angle BAD=30°$.
Із прямокутного трикутника BCC_1 (паралелепіпед прямий, тому $C_1C\perp$ пл. $ABCD$) маємо:

$$C_1C=\sqrt{BC_1^2-BC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3 \text{ (см)}.$$

$$S_{\text{осн}}=AB\cdot AD\cdot\sin 30°=4\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=8 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Тоді $V=S\cdot H=S_{\text{осн}}\cdot C_1C=8\cdot 3=24$ (см^3).

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке об’єм тіла в просторі. Сформулюйте основні властивості об’єму.
2. Сформулюйте загальне означення циліндра. Що таке основи, твірна і висота такого циліндра?

3. 1) Чому дорівнює об'єм прямого циліндра (для загального розуміння циліндра)?
2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.

4. Запишіть формулу для обчислення об'єму:
1) прямокутного паралелепіпеда;
2) прямої призми;
3) прямого кругового циліндра.
Поясніть справедливість цих формул.

ВПРАВИ

10.1. Чи може об'єм фігури в просторі бути:
1) від'ємним числом; 2) нулем?

10.2°. Чому дорівнює об'єм просторового хреста (рис. 10.10), якщо ребра кубів, що його утворюють, дорівнюють одиниці?

10.3°. Чому дорівнює об'єм многогранника, зображеного на рис. 10.11 (усі двогранні кути прямі)?

10.4°. Знайдіть об'єм многогранника, зображеного на рис. 10.12 (усі двогранні кути прямі).

10.5. Через два протилежні ребра куба проведено площину. У якому відношенні ця площина ділить об'єм куба? Поясніть відповідь.

10.6. Діагональ куба дорівнює 6 см. Знайдіть його об'єм.

Рис. 10.10

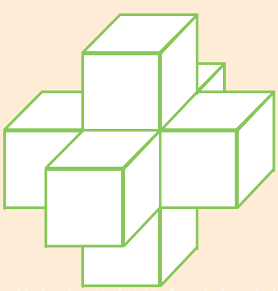


Рис. 10.11

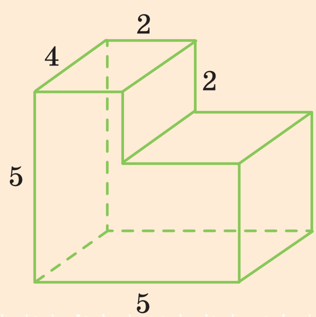


Рис. 10.12

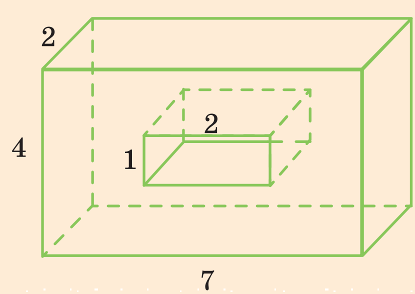


Рис. 10.13

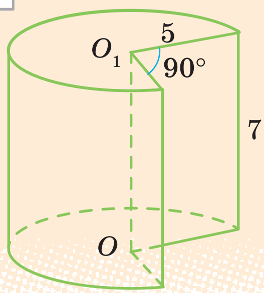
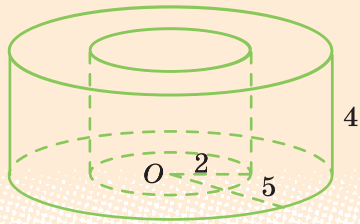


Рис. 10.14



10.7°. Знайдіть об'єм V частини циліндра, зображеної:
1) на рис. 10.13;   2) на рис. 10.14.

10.8. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, висота призми дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм цієї призми.

10.9. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює 6 см, а висота 5 см.

10.10. Як зміниться об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо:
1) один із його вимірів збільшити в 2 рази;
2) два його виміри збільшити, кожен у 2 рази;
3) усі три його виміри збільшити в 2 рази?

10.11. Знайдіть висоту правильної чотирикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює 20 см, а об'єм 4800 см^3.

10.12. Через середню лінію основи трикутної призми проведено площину, паралельну бічному ребру. У якому відношенні ця площина ділить об'єм призми?

10.13. Як відносяться об'єми двох кубів: заданого і його моделі, зменшеної в масштабі:
1) 1:2;   2) 1:3;   3) $1:n$?

10.14. Визначте об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого дорівнює d і утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані — кут β.

10.15. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 16 см і 10 см та утворюють кут 60°. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 30°. Визначте об'єм цього паралелепіпеда.

10.16. За стороною основи a і бічному ребру b знайдіть об'єм правильної призми:
1) трикутної;
2) чотирикутної;
3) шестикутної.

10.17. Знайдіть об'єм фігури, утвореної в результаті обертання квадрата навколо його сторони, що дорівнює a.

10.18. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює a і нахилена до площини основи під кутом φ. Знайдіть об'єм циліндра.

10.19. Два циліндри утворені обертанням того самого прямокутника навколо кожної з нерівних його сторін a і b. Як відносяться об'єми цих циліндрів?

10.20*. У скільки разів об'єм циліндра, описаного навколо правильної чотирикутної призми, більший за об'єм циліндра, вписаного в ту саму призму?

10.21*. Доведіть, що будь-яка площина, яка проходить через центр куба, ділить його на дві рівновеликі частини.

Виявіть свою компетентність

10.22. У циліндричну посудину діаметром 8 см із рідиною занурили деталь. При цьому рівень рідини в посудині піднявся на 10 см. Який об'єм деталі?

10.23. У циліндричній посудині рівень рідини досягає 20 см. На якій висоті стане рівень рідини, якщо перелити її в іншу посудину, діаметр якої в 2 рази більший за діаметр першої?

10.24. Перший кухоль удвічі вищий за другий, проте другий у два рази ширший, причому обидва мають циліндричну форму. Об'єм якого кухля більший?

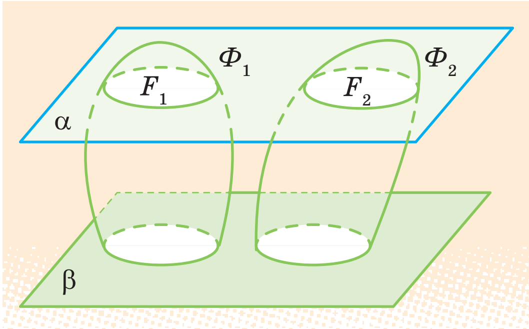
10.25. На полиці в магазині стоять дві банки абрикосового варення одного сорту. Одна банка у 2 рази вища за другу, проте її діаметр у 2 рази менший. Висока банка коштує 23 грн, а низька — 43 грн. Яку банку вигідніше купити?

§ 11. ОБ’ЄМ ПОХИЛОЇ ПРИЗМИ. ОБ’ЄМИ ПІРАМІДИ І КОНУСА

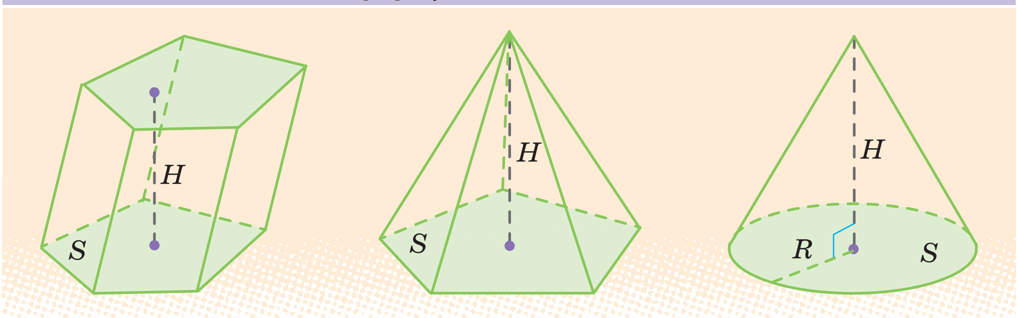
Таблиця 11

1. Принцип Кавальєрі

Якщо в результаті перетину двох просторових тіл Φ_1 і Φ_2 площинами, паралельними одній і тій самій площині, у перерізах одержуються фігури F_1 і F_2 однакової площі, то об’єми вихідних просторових тіл рівні.



2. Деякі формули знаходження об’ємів



1. ***Об’єм похилої призми*** дорівнює добутку площі її основи на висоту.

$$V = S \cdot H$$

2. ***Об’єм піраміди*** дорівнює одній третині добутку площі її основи на висоту.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H$$

3. ***Об’єм конуса*** дорівнює одній третині добутку площі його основи на висоту.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H,$$

де R — радіус основи, H — висота конуса.

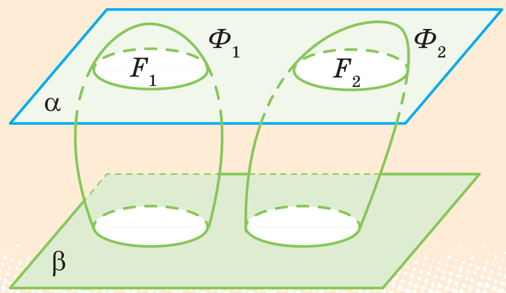
ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Принцип Кавальєрі. Об'єм похилої призми

Розглянемо метод обчислення об'ємів просторових фігур, запропонований італійським математиком Б. Кавальєрі (1598–1647) і названий згодом принципом Кавальєрі. Він полягає в такому.

О **Принцип Кавальєрі. Якщо в результаті перетину двох просторових тіл Φ_1 і Φ_2 площинами, паралельними одній і тій самій площині, у перерізах одержуються фігури F_1 і F_2 однакової площі** (рис. 11.1), **то об'єми вихідних просторових тіл рівні.**

Рис. 11.1

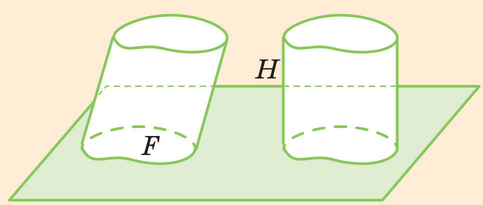


Строге обґрунтування принципу Кавальєрі проводиться в курсах математичного аналізу. Зазначимо ідею обґрунтування цього принципу. Уявимо, що тіла Φ_1 й Φ_2 складені з тонких шарів однакової товщини, які одержуються в результаті перетину тіл Φ_1 і Φ_2 площинами, паралельними деякій заданій площині (рис. 11.1). Тіла, одержані в кожному з цих тонких шарів, можна наближено вважати прямими циліндрами. Тоді з рівності площ їх основ і рівності висот одержуємо, що рівні й об'єми частин заданих просторових тіл у кожному шарі. Отже, рівні й об'єми тіл Φ_1 і Φ_2, складених із рівних частин у кожному шарі.

Т **Теорема 11.1. Об'єм похилого циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.**

▶ Для заданого похилого циліндра з основою F, площа якої дорівнює S, і висотою H розглянемо прямий циліндр із такою самою основою й висотою. Розташуємо ці два циліндри так, щоб їх основи лежали в одній площині (рис. 11.2).

Рис. 11.2



Тоді перерізи цих циліндрів площинами, паралельними цій площині, дадуть фігури, що дорівнюють фігурі F, отже, вони матимуть рівні площі. За принципом Кавальєрі маємо рівність об’ємів циліндрів, а отже, для обчислення об’єму похилого циліндра можна скористатися тією самою формулою, що й для обчислення об’єму прямого циліндра:

$$V = S \cdot H,$$

де S — площа основи, H — висота циліндра. ■

Оскільки похила призма є окремим випадком розглянутого в доведенні теореми 11.1 похилого циліндра, то з наведеної вище формули матимемо наслідок.

Наслідок. Об’єм похилої призми з площею основи S і висотою H обчислюється за формулою

$$V = S \cdot H,$$

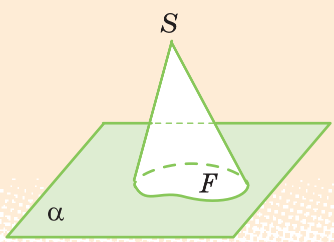
де S — площа основи, H — висота призми.

2. Об’єми піраміди й конуса

Сформулюємо загальне означення конуса, що дозволяє об’єднати в один клас розглянуті раніше конуси й піраміди.

Нехай F — фігура на площині α, S — точка поза цією площиною. Всі відрізки, що сполучають точки фігури F із точкою S, утворюють фігуру в просторі, яку називатимемо *конусом* (рис. 11.3).

Рис. 11.3



Фігура F називається *основою* конуса, точка S — *вершиною* конуса. Перпендикуляр, проведений із вершини конуса на площину основи, називається *висотою* конуса.

У випадку якщо фігура F є кругом, конус називається *круговим*. Якщо висота кругового конуса проходить через центр основи, то такий конус називається *прямим круговим*. Раніше ми розглядали прямі кругові конуси й називали їх просто *конусами**. Зазначимо, що окремим випадком конуса в новому розумінні є також піраміда.

---

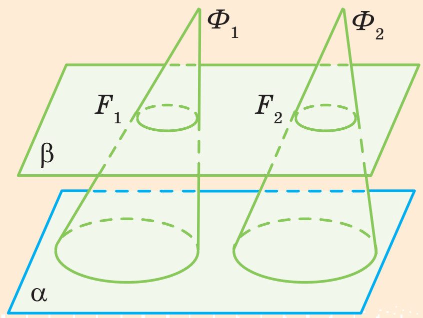
* У задачах до цього і решти розділів під терміном «конус» продовжуватимемо розуміти прямий круговий конус, а узагальнене поняття конуса нам потрібне тільки для спрощення доведення основних формул обчислення об’ємів.

Використовуючи принцип Кавальєрі, доведемо таку теорему.

Теорема 11.2. Якщо два конуси мають рівні висоти й основи рівної площі, то їхні об'єми рівні.

Нехай конуси Φ_1 і Φ_2 мають висоти, що дорівнюють H, а основи площею S розташовані в одній площині α (рис. 11.4). Проведемо площину β, паралельну площині α, на відстані x від неї $(0 < x < H)$. Тоді фігури F_1 і F_2, що утворюються в перерізах конусів площиною β, подібні відповідним основам, і коефіцієнт подібності k в обох випадках дорівнює відношенню висот відповідних конусів: $k = (H - x) : H$. Отже, площі S_1 і S_2 фігур F_1 і F_2 відповідно виражаються формулами $S_1 = k^2 \cdot S$, $S_2 = k^2 \cdot S$, тобто вони рівні. Згідно з принципом Кавальєрі маємо, що об'єми конусів рівні. ■

Рис. 11.4



Теорема 11.3. Об'єм піраміди дорівнює одній третині добутку площі її основи на висоту.

Розглянемо спочатку випадок трикутної піраміди (як частинний випадок загального конуса).

Нехай A_1ABC — трикутна піраміда (рис. 11.5). Добудуємо її до трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$.

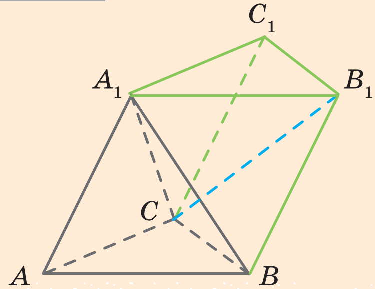
Площини A_1BC і A_1B_1C розбивають цю призму на три піраміди — A_1ABC, A_1BB_1C і $A_1CC_1B_1$ з вершинами в точці A_1.

Піраміди A_1BB_1C і $A_1CC_1B_1$ мають рівні основи BB_1C і CC_1B_1, оскільки діагональ CB_1 розбиває паралелограм CBB_1C_1 на два рівні трикутники.

Крім того, задані піраміди мають спільну вершину, а їхні основи лежать в одній площині. Отже, ці піраміди мають спільну висоту. За теоремою 11.2 ці піраміди мають рівні об'єми.

Розглянемо тепер піраміди A_1ABC і $CA_1B_1C_1$. Вони мають рівні основи ABC

Рис. 11.5



і $A_1B_1C_1$ та рівні висоти (дорівнюють висоті призми). Тоді вони мають рівні об'єми.

Отже, об'єми всіх трьох розглянутих пірамід рівні.

Ураховуючи, що об'єм призми дорівнює добутку площі основи на висоту, одержимо формулу об'єму трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H,$$

де S — площа основи, H — висота піраміди.

Якщо в основі піраміди лежить довільний многокутник, то розглянемо трикутну піраміду з такою самою висотою H і такою самою площею основи S. За теоремою 11.2 об'єми цих пірамід рівні, отже, має місце формула

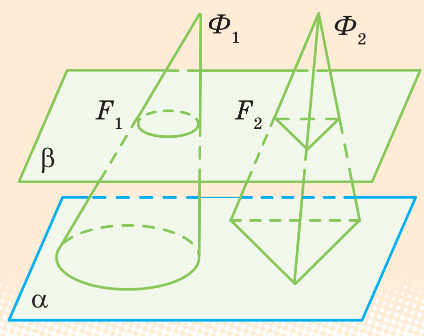
$$V = \frac{1}{3} S \cdot H,$$

де S — площа основи, H — висота піраміди. ■

Т **Теорема 11.4. Об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі його основи на висоту.**

▶ Для заданого конуса з основою, площа якої дорівнює S, і висотою H розглянемо яку-небудь піраміду з такими самими площею основи S і висотою H (рис. 11.6). Тоді за принципом Кавальєрі одержуємо, що об'єми цих піраміди і конуса рівні.

Рис. 11.6



Але для об'єму піраміди має місце формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H,$$

де S — площа основи, H — висота піраміди. Отже, вона має місце і для об'єму конуса (де H — висота конуса).

Зокрема, для прямого кругового конуса, в основі якого лежить круг радіуса R і висота якого дорівнює H (тоді $S = \pi R^2$), має місце формула

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H. \ ■$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Основа похилого паралелепіпеда — квадрат зі стороною 1 м. Одне з бічних ребер дорівнює 2 м і утворює з кожною із прилеглих сторін основи кут 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 11.7) — заданий похилий паралелепіпед ($ABCD$ — квадрат, $AB = 1$ м, $AA_1 = 2$ м, $\angle A_1AB = \angle AA_1D = 60^\circ$).

Проведемо висоту A_1O паралелепіпеда $A_1O \perp$ пл. $ABCD$. Оскільки в похилому паралелепіпеді бічне ребро AA_1 утворює рівні кути із суміжними сторонами основи, то це ребро проектується на бісектрису кута BAD, тобто на діагональ AC $(O \in AC)$ квадрата $ABCD$. Проведемо $OM \perp AB$, тоді $A_1M \perp AB$ за теоремою про три перпендикуляри. Із прямокутного трикутника AA_1M маємо:

$$AM = AA_1 \cdot \cos 60^\circ = 1 \text{ (м)}.$$

Із прямокутного трикутника AOM маємо: $AO = \dfrac{AM}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$ (м).

Із прямокутного трикутника AA_1O маємо:

$$A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} \text{ (м)}.$$

Тоді об'єм заданого паралелепіпеда дорівнює:

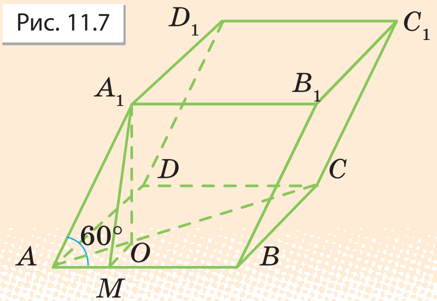
$$V = S_{ABCD} \cdot A_1O = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ (м}^3\text{)}.$$

Коментар

Якщо в похилій призмі (або в піраміді) бічне ребро утворює рівні кути із суміжними сторонами основи, то воно проектується на пряму, що містить бісектрису кута між цими сторонами основи (табл. 4). А оскільки задані рівні кути гострі, то бічне ребро AA_1 проектуватиметься на бісектрису кута BAD (рис. 11.7), яка в квадраті $ABCD$ є діагоналлю AC.

Для обчислень зручно з основи висоти паралелепіпеда (точки O) провести в площині основи $OM \perp AB$ і використовувати теорему про три перпендикуляри (одержимо $A_1M \perp AB$). Потім послідовно розглянути прямокутні трикутники: AA_1M (знаходимо AM), AOM (знаходимо AO), AA_1O (знаходимо A_1O). Далі можна скористатися формулою для обчислення об'єму похилої призми $V = S_{осн} \cdot H$.

Рис. 11.7



Задача 2. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами a і b. Кожне її бічне ребро нахилене до площини основи під кутом φ. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання

Нехай у піраміді $SABC$ (рис. 11.8) трикутник ABC прямокутний ($\angle C = 90°$, $BC = a$, $AC = b$). Проведемо висоту піраміди SO. Оскільки за умовою всі бічні ребра піраміди однаково нахилені до площини основи, то O — центр кола, описаного навколо основи, тобто точка O — середина гіпотенузи AB. Ураховуючи, що відрізок AO — проекція бічного ребра SA на площину ABC, одержуємо, що $\angle SAO$ — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи й $\angle SAO = \varphi$. Із прямокутного трикутника ABC одержуємо:

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

тоді $AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

Із прямокутного трикутника SAO маємо:

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Одержуємо:

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}BC \cdot AC \cdot SO =$$

$$= \frac{ab}{12}\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Коментар

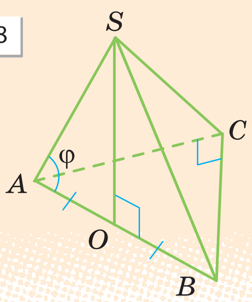
Спочатку визначимо розташування висоти піраміди: якщо всі бічні ребра піраміди однаково нахилені до площини основи, то основою висоти піраміди є центр описаного навколо основи кола (табл. 4).

Як відомо, центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить у середині гіпотенузи.

Потім визначимо кут між бічним ребром і площиною основи (кут між похилою і площиною — це кут між похилою та її проекцією на цю площину).

Для використання формули об'єму піраміди $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H$ знаходимо $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC$ і висоту піраміди SO (із прямокутного трикутника SAO).

Рис. 11.8



Задача 3. Знайдіть об'єм частини конуса, зображеної на рис. 11.9.

Коментар

Оскільки в основі тіла, зображеного на рисунку, лежить сектор із центральним кутом 90°, то його дуга становить чверть усього кола основи конуса (який містить 360°). Висота заданого тіла збігається з висотою конуса, тому задане тіло становить чверть конуса з радіусом основи 12 і висотою 16.

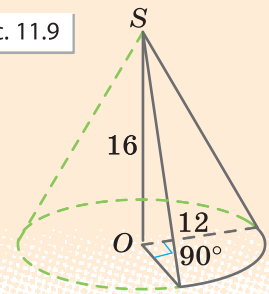
Розв'язання

На рис. 11.9 зображена чверть конуса з радіусом основи $R = 12$ і висотою $H = 16$.

Тоді $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = 768\pi$ (куб. од.).

Отже, $V_{\text{тіла}} = \frac{1}{4}V_{\text{кон}} = \frac{1}{4}\cdot 768\pi = 192\pi$ (куб. од.).

Рис. 11.9



ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте принцип Кавальєрі для порівняння об'ємів двох фігур у просторі.
2. 1) Чому дорівнює об'єм похилої призми?
   2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
3. Сформулюйте загальне означення конуса. Що таке основа і висота такого конуса?
4. 1) Чому дорівнює об'єм піраміди?
   2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
5. 1) Чому дорівнює об'єм конуса?
   2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.

ВПРАВИ

11.1°. В основі похилого паралелепіпеда лежить ромб із діагоналями 6 см і 8 см. Висота паралелепіпеда дорівнює 10. Знайдіть його об'єм.

11.2°. Знайдіть об'єм похилої призми, в основі якої лежить прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см, а бічне ребро дорівнює 8 см і нахилене до площини основи під кутом 30°.

11.3. Основа похилої призми — правильний трикутник зі стороною 2 м. Одне з бічних ребер дорівнює 4 м і утворює з кожною із прилеглих сторін основи кут 45°. Знайдіть об'єм призми.

11.4. В основах похилої призми — квадрати. Чи правильно, що будь-яка площина, що проходить через центри квадратів, ділить призму на дві рівновеликі частини?

11.5°. Вершинами піраміди є всі вершини однієї основи й одна вершина іншої основи призми. Яку частину об'єму призми становить об'єм піраміди?

11.6°. Знайдіть об'єм піраміди, висота якої дорівнює h, а в основі лежить прямокутник зі сторонами a і b.

11.7°. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює a, висота h.

11.8°. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює h, а діагональ основи d.

11.9. Визначите об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її діагональним перерізом є правильний трикутник зі стороною, що дорівнює 12.

11.10. Знайдіть об'єм правильного тетраедра з ребром, що дорівнює 1.

11.11. Об'єм правильної шестикутної піраміди дорівнює 6 см^3. Сторона основи дорівнює 1 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

11.12. Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні, кожне з них дорівнює b. Знайдіть об'єм піраміди.

11.13. Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо висота її буде збільшена в n разів, а сторона основи зменшена в стільки ж разів?

11.14. У куб із ребром, яке дорівнює 1, вписано правильний тетраедр так, що його вершини збігаються з чотирма вершинами куба. Визначте об'єм тетраедра.

11.15. Знайдіть об'єм октаедра з ребром, яке дорівнює 1.

11.16°. Висота конуса дорівнює 6, твірна — 10. Знайдіть об'єм конуса.

11.17°. У скільки разів збільшиться об'єм кругового конуса, якщо:
1) висоту збільшити в 3 рази;
2) радіус основи збільшити в 2 рази?

11.18. Чи зміниться об'єм кругового конуса, якщо радіус основи збільшити в 2 рази, а висоту зменшити в 2 рази?

11.19. Циліндр і конус мають спільну основу і висоту. Обчисліть об'єм циліндра, якщо об'єм конуса дорівнює 40π см^3.

11.20. Об'єм конуса дорівнює V. Паралельно основі конуса проведено переріз, що ділить висоту навпіл. Чому дорівнює відношення об'ємів отриманих частин конуса?

11.21. Діаметр основи конуса дорівнює 12 см, а кут при вершині осьового перерізу 90°. Обчисліть об'єм конуса.

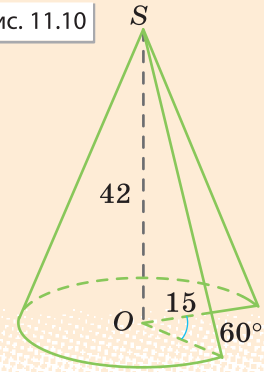
11.22. Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання рівнобедреного прямокутного трикутника навколо катета, який дорівнює 3 см.

11.23*. Рівносторонній трикутник обертається навколо своєї сторони a. Знайдіть об'єм тіла обертання.

11.24. Два конуси отримані обертанням нерівнобедреного прямокутного трикутника навколо кожного з катетів. Чи рівні об'єми цих конусів?

11.25. Знайдіть об'єм частини конуса, зображеної на рис. 11.10.

Рис. 11.10



11.26*. Конус вписано в правильну трикутну піраміду зі стороною основи a і висотою h. Знайдіть його об'єм.

11.27*. Конус описано навколо правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи a і висотою h. Знайдіть його об'єм.

Виявіть свою компетентність

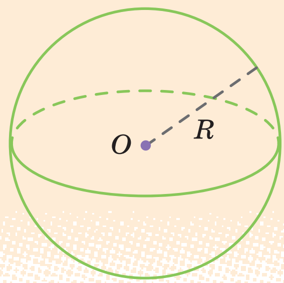
11.28. Пакетик для томатної пасти має форму піраміди, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник із рівними сторонами 12 см і кутом 30° між ними. Висота піраміди дорівнює 6 см. Обчисліть об'єм пакетика.

11.29. Знайдіть об'єм пожежного відра конічної форми, якщо його стандартні розміри такі: діаметр основи 30 см і твірна конуса 38 см. Відповідь дайте в літрах, округливши її до десятих частин літра.

11.30*. При насипанні сипучого матеріалу у вигляді купи, близької за формою до конуса, для кожного сипучого матеріалу кут природного укосу (кут нахилу твірної конуса до площини його основи) свій і для вологого піску він наближено дорівнює 45°. Для бетонування підлоги в їдальні школи привезли пісок, який висипали в купу, що має форму конуса, з твірною 1,2 м. Цей пісок необхідно перенести до приміщення. Скільки відер із піском, місткістю 10 л, доведеться перенести до приміщення?

§ 12. ОБ'ЄМ КУЛІ

Таблиця 12

Об'єм кулі	
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де R — радіус кулі.	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

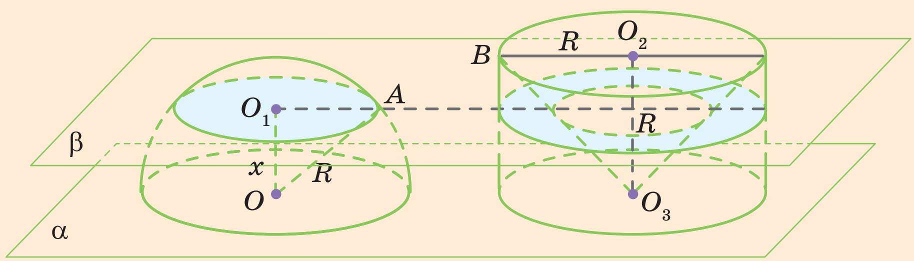
Розглянемо питання про знаходження об'єму кулі.

Теорема 12.1. **Об'єм кулі радіуса R виражається формулою**

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

▸ Нехай задано півкулю радіуса R, основа якої лежить у площині α. Розглянемо циліндр, основою якого є круг радіуса R, розташований у тій самій площині α, і з висотою, яка дорівнює R (рис. 12.1).

Рис. 12.1



У циліндр впишемо конус, основою якого є верхня основа циліндра, а вершиною — центр нижньої основи циліндра. Доведемо, що тіло, утворене з точок циліндра, що не потрапили всередину конуса, і задана півкуля мають рівні об'єми.

Проведемо площину β, паралельну площині α, на відстані x від неї, $0 \leqslant x \leqslant R$.

У перерізі півкулі цією площиною одержимо круг радіуса $O_1A = \sqrt{R^2 - x^2}$ з площею $S_1 = \pi \cdot O_1A^2 = \pi\left(R^2 - x^2\right)$.

У перерізі другого тіла одержимо кільце, радіус зовнішнього круга якого дорівнює R, а радіус внутрішнього круга — x (оскільки трикутник BO_3O_2 рівнобедрений і прямокутний, то $\angle BO_3O_2 = 45°$). Площа цього кільця дорівнює $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi\left(R^2 - x^2\right)$ і, отже, дорівнює площі перерізу півкулі. За принципом Кавальєрі одержуємо, що півкуля і побудоване тіло мають рівні об'єми. Обчислимо цей об'єм. Він дорівнює різниці об'ємів циліндра й конуса:

$$V = V_{\text{цил}} - V_{\text{кон}} = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Об'єм кулі вдвічі більший за об'єм півкулі, отже, виражається формулою:

$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad ■$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо куба зі стороною a.

Розв'язання

▶ Діагональ куба є діаметром описаної навколо нього кулі.

Тоді $d_{\text{кулі}} = a\sqrt{3}$, а $R_{\text{кулі}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Отже, $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. ■

Коментар

Центр кулі, описаної навколо куба, лежить на середині діагоналі куба (тоді всі вершини куба будуть лежати на поверхні кулі), тому діагональ куба є діаметром описаної кулі.

Далі пригадуємо, що *діагональ куба зі стороною a дорівнює* $a\sqrt{3}$, і використовуємо формулу об'єму кулі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де R — радіус кулі.

Задача 2*. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в конус, твірна якого дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 60°.

Розв'язання

Розглянемо осьовий переріз заданої комбінації тіл. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник SAB, у якому сторона SB дорівнює твірній конуса ($SB = 12$ см), а висота SO є висотою конуса (рис. 12.2). Тоді кут SBO — кут нахилу твірної SB до площини основи і $\angle SBO = 60°$.

Перерізом кулі є круг, радіус OO_1 якого дорівнюватиме радіусу кулі. Оскільки куля вписана в конус, то круг буде вписано в трикутник. Тоді відрізок BO_1 — бісектриса кута SBO і $\angle OBO_1 = 30°$.

Із прямокутного трикутника SBO маємо: $BO = SB \cdot \cos 60° = 6$ (см).

Із прямокутного трикутника OBO_1 одержуємо:

$$OO_1 = OB \cdot \operatorname{tg} 30° = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Тоді об'єм кулі дорівнює

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot OO_1^3 = 32\sqrt{3}\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

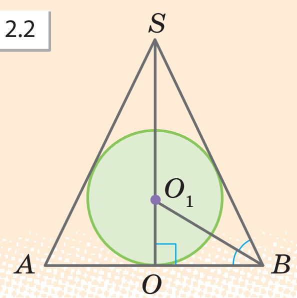
Коментар

Під час розв'язування задач на комбінацію тіл обертання зручно розглядати осьовий переріз цієї комбінації.

Одержавши в перерізі круг, вписаний у трикутник, слід урахувати, що *центр круга, вписаного в трикутник, є точкою перетину бісектрис кутів трикутника.* У рівнобедреному трикутнику SAB однією з таких бісектрис є висота, медіана й бісектриса SO. Для обґрунтування кута між твірною і площиною основи враховуємо, що *кут між похилою і площиною — це кут між похилою SB та її проекцією OB на цю площину.*

Для обчислення об'єму кулі радіуса R використовуємо формулу $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Рис. 12.2



ЗАПИТАННЯ

1. 1) Чому дорівнює об'єм кулі радіуса R?
   2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.

ВПРАВИ

12.1°. Діаметр кулі дорівнює 10 см. Знайдіть її об'єм.

12.2°. Задано дві кулі. Радіус першої кулі у два рази більший за радіус другої. У скільки разів об'єм першої кулі більший за об'єм другої?

12.3°. У скільки разів збільшиться об'єм кулі, якщо її радіус збільшити: 1) у три рази; 2) у п'ять разів?

12.4°. Об'єм однієї кулі в 64 рази більший за об'єм іншої. У скільки разів радіус першої кулі більший за радіус іншої кулі?

12.5. Переріз кулі площиною, віддаленою від центра кулі на відстань 8 см, має радіус 6 см. Знайдіть об'єм кулі.

12.6. Циліндр описаний навколо кулі. Знайдіть об'єм кулі, якщо об'єм циліндра дорівнює 6 куб. од.

12.7. Із дерев'яного циліндра, висота якого дорівнює діаметру основи (рівносторонній циліндр), виточили найбільшу кулю. Визначте, скільки відсотків матеріалу сточили.

12.8. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо правильного тетраедра з ребром a.

12.9. Конус вписано в кулю. Радіус основи конуса дорівнює радіусу кулі, об'єм конуса дорівнює 6 куб. од. Знайдіть об'єм кулі.

Виявіть свою компетентність

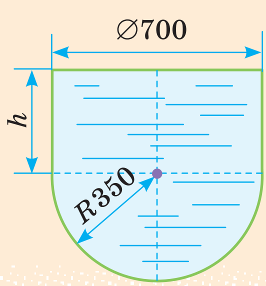
12.10. Мідний куб, ребро якого дорівнює 10 см, переплавили в кулю. Знайдіть радіус кулі. (Втратами металу під час переплавлення знехтуйте.)

12.11. Потрібно переплавити в одну кулю дві чавунні кулі діаметрами 10 см і 20 см. Знайдіть діаметр нової кулі. (Втратами металу під час переплавлення знехтуйте.)

12.12*. Є шматок свинцю масою 1 кг. Скільки кульок діаметром 1 см можна відлити з цього шматка? (Густина свинцю становить 11,4 г/см^3, втратами металу під час переплавлення знехтуйте.)

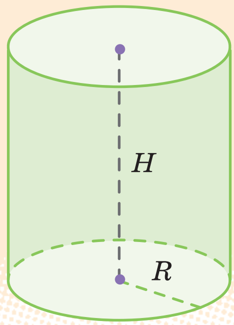
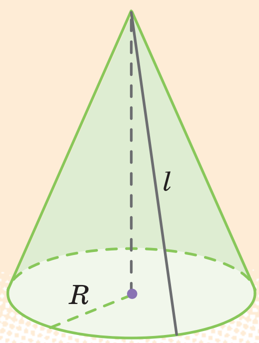
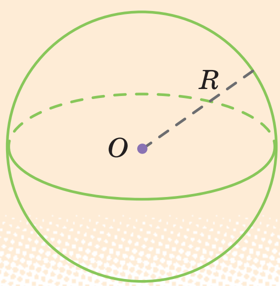
12.13*. Резервуар для води складається з півкулі радіуса R і циліндра з таким самим радіусом основи (рис. 12.3). Якої висоти h повинна бути його циліндрична частина, щоб об'єм усього резервуара дорівнював 200 м^3? (Розміри на рисунку наведено в сантиметрах.)

Рис. 12.3



§ 13. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ

Таблиця 13

Площі поверхонь тіл обертання	
Площа поверхні циліндра	
$S_{\text{бічн}} = 2\pi RH$, $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} =$ $= 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R)$, де R — радіус циліндра, H — його висота.	
Площа поверхні конуса	
$S_{\text{бічн}} = \pi Rl$, $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}} =$ $= \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$, де R — радіус конуса, l — його твірна.	
Площа поверхні кулі	
$S = 4\pi R^2$, де R — радіус кулі.	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Площею поверхні многогранника, за означенням, вважають суму площ граней многогранника, що утворюють цю поверхню.

Наприклад, площа поверхні призми складається з площі бічної поверхні й площ основ, а площа поверхні піраміди складається з площі бічної поверхні й площі основи.

У попередніх параграфах, спираючись на розгортки циліндра й конуса, були одержані формули для знаходження площ бічних і повних поверхонь циліндра (§ 7) і конуса (§ 8). Нагадаємо їх.

Для циліндра:

$$S_{\text{бічн}} = 2\pi RH,$$

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R),$$

де R — радіус циліндра, H — його висота.

Для конуса:

$$S_{\text{бічн}} = \pi Rl,$$

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R),$$

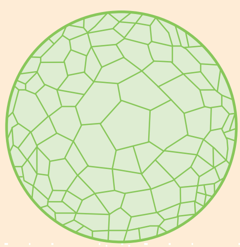
де R — радіус конуса, l — його твірна.

Однак для знаходження площі поверхні кулі розгортку використовувати неможливо, оскільки поверхню кулі не можна розгорнути на площину. Тому скористаємося іншим методом визначення площі поверхні кулі. Під площею поверхні тіла розумітимемо границю площ описаних навколо нього многогранників. При цьому має виконуватися умова, згідно з якою всі точки поверхонь цих многогранників стають як завгодно близькими до поверхні заданого тіла.

Площа поверхні кулі

Для одержання формули площі поверхні кулі радіуса R опишемо навколо неї який-небудь опуклий многогранник (рис. 13.1), який має n малих граней (уважатимемо, що лінійні розміри граней, тобто відстань між будь-якими двома точками будь-якої грані менша від величини ε). Нехай S_n — площа поверхні многогранника, тобто сума площ усіх його граней. Уявимо, що отриманий многогранник складений із пірамід, у яких вершини збігаються з центром кулі, а основами є грані многогранника (рис. 13.2).

Рис. 13.1



Зрозуміло, що висоти цих пірамід дорівнюють радіусу кулі, а об'єм V_n многогранника дорівнює сумі об'ємів усіх пірамід і обчислюється за формулою

$$V_n = \frac{1}{3} S_n R. \qquad (1)$$

Звідси одержуємо

$$S_n = \frac{3V_n}{R}. \qquad (2)$$

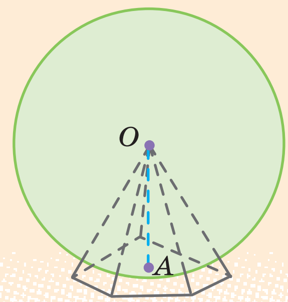


Рис. 13.2

Тепер необмежено збільшуватимемо число n граней описаного многогранника так, щоб найбільший розмір ε кожної грані прямував до нуля. При цьому об'єм V_n описаного многогранника прямуватиме до об'єму кулі. Дійсно, описаний многогранник розташований у кулі з центром у точці O і радіусом $R + \varepsilon$ та містить задану кулю радіуса R.

Тоді $\frac{4}{3}\pi R^3 < V_n < \frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3$. Оскільки $\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3 \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\varepsilon \to 0$, то і $V_n \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\varepsilon \to 0$. Ураховуючи формулу (2), одержуємо, що площа S_n поверхні описаного многогранника за необмеженого зменшення розмірів його граней (тобто при $\varepsilon \to 0$) прямує до виразу $\frac{3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{R} = 4\pi R^2$. Тому величину $4\pi R^2$ приймають за площу поверхні кулі. Отже, *площа поверхні кулі радіуса* R *обчислюється за формулою*

$$S = 4\pi R^2. \; \blacksquare$$

Якщо многогранник описано навколо кулі радіуса R, то куля буде *вписаною* в цей многогранник, тоді з формули **(1)** одержуємо, що радіус кулі, вписаної в многогранник, можна обчислювати за формулою $R = \frac{3V}{S_{повн}}$, де V — об'єм многогранника, $S_{повн}$ — площа повної поверхні многогранника.

Зазначимо, що метод, розглянутий під час знаходження площі поверхні кулі, дозволяє також визначити *площі бічних поверхонь циліндра* і *конуса*. Для цього можна розглянути правильні n-кутні призми і піраміди, описані відповідно навколо циліндра (рис. 13.3) і конуса (рис. 13.4).

Площа бічної поверхні правильної призми дорівнює: $S_{\text{бічн. пр}} = P_{\text{осн}} \cdot H$ (де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи; H — висота призми), а площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює $S_{\text{бічн. пір}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$ (де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи; l — апофема піраміди). За необмеженого збільшення n площа кожної грані описаного многогранника прямуватиме до нуля і площа бічної поверхні циліндра буде границею площ бічних поверхонь описаних призм, а площа бічної поверхні конуса буде границею площ бічних поверхонь описаних пірамід.

Ураховуючи, що за необмеженого збільшення n периметри n-кутників, описаних навколо кіл радіусів R, наближатимуться до довжини кола, тобто до $2\pi R$, одержуємо *для площі бічної поверхні циліндра* формулу

$$S_{\text{бічн. цил}} = 2\pi RH,$$

а *для площі бічної поверхні конуса* формулу

$$S_{\text{бічн. кон}} = \pi Rl.$$

Ці самі формули ми одержали, визначаючи площі бічних поверхонь циліндра і конуса через їхні розгортки.

Рис. 13.3

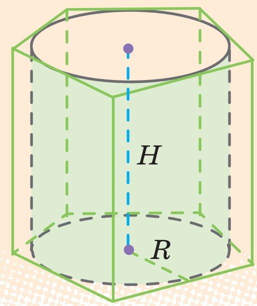
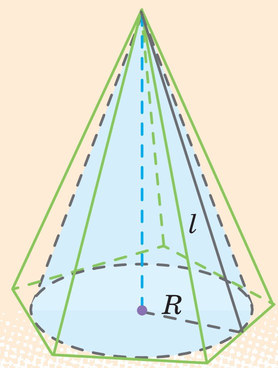


Рис. 13.4



ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної в куб зі стороною a.

Розв'язання

▶ Радіус кулі, вписаної в куб, дорівнює половині сторони куба: $R_{\text{кулі}} = \frac{a}{2}$.

Отже, $S_{\text{кулі}} = 4\pi R^2 = \pi a^2$. ■

Коментар

Якщо куля вписана в куб, то її діаметр дорівнює стороні куба (тоді кожна грань куба буде дотичною до кулі).

Далі знаходимо радіус кулі й використовуємо формулу для обчислення площі поверхні кулі $S = 4\pi R^2$, де R — радіус кулі.

Задача 2*. Навколо кулі описано циліндр, площа поверхні якого дорівнює 18. Знайдіть площу поверхні кулі.

Розв'язання

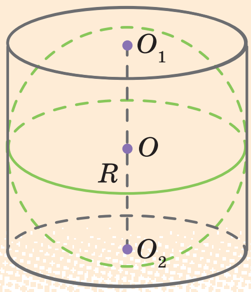
Нехай радіус кулі дорівнює R (рис. 13.5), тоді радіус основи описаного циліндра дорівнює R, а висота H циліндра дорівнює $2R$.
Площа поверхні циліндра дорівнює:

$$S_{\text{повн. цил}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 =$$
$$= 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2.$$

За умовою $6\pi R^2 = 18$. Тоді $\pi R^2 = 3$.
Площа поверхні кулі дорівнює:

$$S_{\text{кулі}} = 4\pi R^2 = 12.$$

Рис. 13.5



Коментар

Якщо циліндр описано навколо кулі, то радіус основи циліндра дорівнює радіусу кулі, а діаметр кулі дорівнює висоті циліндра. Оскільки в умові цієї задачі на обчислення не задано жодного відрізка, то для розв'язування такої задачі зручно ввести невідомий відрізок, наприклад радіус кулі.

Зазначимо, що з одержаного рівняння $(6\pi R^2 = 18)$ немає необхідності знаходити невідомий радіус R — достатньо записати відповідь через R: $S_{\text{кулі}} = 4\pi R^2$ і врахувати, що відповідь виражається через πR^2.

ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, як можна визначити площу поверхні кулі.
2. Чому дорівнює площа поверхні кулі радіуса R?
3. Поясніть, як можна визначити площу поверхні циліндра і конуса, не використовуючи поняття розгортки їхньої бічної поверхні.

ВПРАВИ

13.1°. Площа великого круга кулі дорівнює 9 см². Знайдіть площу поверхні кулі.

13.2°. Як зміниться площа поверхні кулі, якщо збільшити радіус кулі: 1) у 2 рази; 2) у 3 рази; 3) у n разів?

13.3. Визначте, у скільки разів площа поверхні Землі більша за площу поверхні Місяця. (Вважайте, що діаметр Землі приблизно дорівнює 13 тис. км, діаметр Місяця 3,5 тис. км.)

13.4. Переріз кулі площиною, віддаленою від центра кулі на відстань 8 см, має радіус 6 см. Знайдіть площу поверхні кулі.

13.5. Об'єм кулі дорівнює 288π $м^3$. Знайдіть площу поверхні кулі.

13.6. Площі поверхонь двох куль відносяться як $4:9$. Знайдіть відношення їхніх діаметрів.

13.7. Площі поверхонь двох куль відносяться як $m:n$. Як відносяться їхні об'єми?

13.8. Об'єми двох куль відносяться як $m:n$. Як відносяться площі їхніх поверхонь?

13.9. У скільки разів площа поверхні кулі, описаної навколо куба, більша за площу поверхні кулі, вписаної в цей самий куб?

13.10. Доведіть, що площа поверхні тіла, утвореного обертанням квадрата навколо сторони, дорівнює площі поверхні кулі, що має радіусом сторону квадрата.

13.11*. Навколо кулі описано циліндр. Знайдіть відношення площі поверхні кулі до площі повної поверхні циліндра і відношення об'єма кулі до об'єма циліндра.

13.12. У кулі по один бік від центра проведено два паралельні перерізи площами $272{,}25\pi$ $дм^2$ і $992{,}25\pi$ $дм^2$, відстань між перерізами дорівнює 20 дм. Знайдіть площу поверхні кулі.

13.13*. У сферу вписано конус, твірна якого дорівнює l, а кут при вершині осьового перерізу становить $60°$. Знайдіть площу сфери.

Виявіть свою компетентність

13.14. Скільки кілограмів фарби потрібно для фарбування напівсферичного куполу Озерянського храму (м. Харків, Україна), якщо діаметр основи купола 10 м і на фарбування 1 $м^2$ поверхні витрачається 120 г фарби (відповідь округліть до десятих). Скільки банок фарби потрібно закупити, якщо кожна банка містить 2,8 кг?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 3

1. Об'єм куба дорівнює 125 см^3. Знайдіть площу поверхні куба.

А 25 см^2 Б 50 см^2 В 100 см^2 Г 150 см^2 Д 300 см^2

2. Обчисліть об'єм піраміди, якщо висота піраміди дорівнює 5 см, а основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см.

А 30 см^3 Б 40 см^3 В 48 см^3 Г 80 см^3 Д 240 см^3

3. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює 10 см, а висота конуса 8 см.

А 12π см^2 Б 36π см^2 В 60π см^2 Г 64π см^2 Д 80π см^2

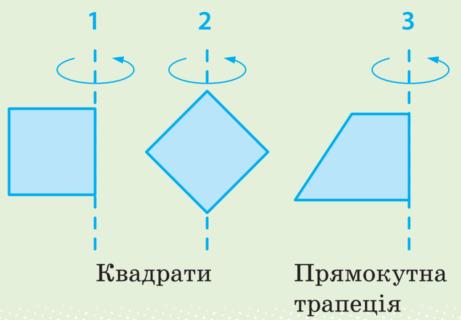
4. Установіть відповідність між умовою твердження (1–3) та його висновком (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

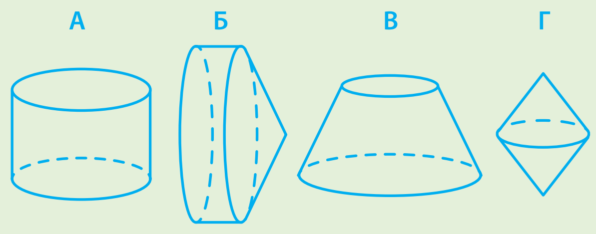
1 Якщо кожне ребро куба зменшити вдвічі, то об'єм куба	А не зміниться
2 Якщо кожне ребро основи призми зменшити вдвічі (не змінюючи її висоту), то об'єм призми	Б зменшиться вдвічі
3 Якщо кожне ребро основи піраміди зменшити вдвічі, а висоту піраміди збільшити вдвічі, то об'єм піраміди	В зменшиться в чотири рази
	Г зменшиться у вісім разів

5. Знайдіть об'єм тіла обертання, утвореного обертанням прямокутника зі сторонами 4 см і 5 см навколо меншої сторони.

А 20π см^3 Б 40π см^3 В 60π см^3 Г 80π см^3 Д 100π см^3

6. Установіть відповідність між зафарбованою фігурою (1–3) та тілом обертання (А–Г), утвореним обертанням цієї фігури навколо прямої, зображеної штриховою лінією.





7. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

А 144 см^3 **Б** $36\sqrt{3}$ см^3 **В** $72\sqrt{3}$ см^3 **Г** $144\sqrt{3}$ см^3 **Д** $432\sqrt{3}$ см^3

Пройдіть онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua.

Теми навчальних проектів

1. Комбінації многогранників і тіл обертання в геометрії і навколишньому житті.
2. Обчислення об'ємів і площ поверхонь многогранників та тіл обертання за допомогою інтегралів.
3. Побудова перерізів геометричних тіл за допомогою комп'ютерних програм.
4. Задачі практичного змісту, пов'язані зі знаходженням об'ємів і площ поверхонь многогранників і тіл обертання.

Видатні постаті в математиці

Об'єми деяких многогранників уміли знаходити ще в Стародавньому Єгипті. Вже **Архімед** обчислював об'єми не тільки многогранників, а й конуса, циліндра та кулі і навіть параболоїда, гіперболоїда й еліпсоїда обертання, а також площі поверхонь циліндра, конуса і кулі.
Нові методи визначення об'ємів геометричних тіл розробив італійський математик **Б. Кавальєрі** (1598–1647). Його міркування були не зовсім строгими, оскільки він посилався на деякі ще не доведені твердження, які вважав очевидними. Тільки згодом їх було доведено методами математичного аналізу. На сучасному етапі принцип Кавальєрі є строго обґрунтованим математичним твердженням і тому доведення теорем про об'єми в нашому підручнику, які спираються на принцип Кавальєрі, є цілком коректними.
Строгу сучасну теорію об'ємів і площ розробив відомий французький математик **А.-Л. Лебег** (1875–1941).
Для розвитку шкільної геометрії багато зробив видатний український математик **М. В. Остроградський** (1801–1862). Він ще у 1855–1860 рр. видав підручник з геометрії у трьох частинах.
Значні досягнення у розвитку геометрії належать відомому українському математику **Г. Ф. Вороному** (1868–1908) — творцю геометричної теорії чисел. Зокрема він досліджував різні заповнення простору рівними многогранниками.
Вагомий внесок у розвиток геометричної науки зробили українські математики **М. Є. Ващенко-Захарченко** (1825–1912), **С. Й. Шатуновський** (1859–1929), **О. С. Смогоржевський (1896–1969), М. І. Кованцов (1924–1988), О. В. Погорєлов** (1919–2002) та багато інших.
Пригадаємо також імена українських жінок, які займалися математичною наукою, популяризацією математики, збереженням пам'яті українських математиків, навчали математики молодь. Розкажемо про них докладніше.

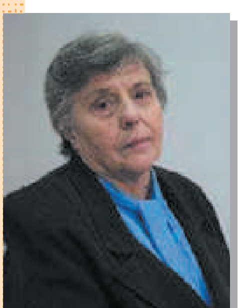

Б. Кавальєрі (1598–1647)


А. Л. Лебег (1875–1941)


Г. Ф. Вороний (1868–1908)

К. Я. Латишева
(1897–1956)

Клавдія Яківна Латишева (1897–1956) народилася 14 березня 1897 р. в Києві. Середню освіту вона здобула в Другій жіночій гімназії (1916 р.), у 1921 р. закінчила жіночі вищі педагогічні курси (фізико-математичний відділ), стала першою в Україні жінкою, яка захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук (за темою «Наближене розв'язування за допомогою способу моментів лінійних диференціальних рівнянь, що мають особливості в коефіцієнтах» (1936 р.)), а потім — докторську дисертацію (за темою «Нормальні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами» (1952 р.)). Серед важливого наукового доробку Латишевої — дослідження в галузі аналітичної теорії диференціальних рівнянь, теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, зокрема метод Фробеніуса — Латишевої для розв'язування систем диференціальних рівнянь із частинними похідними. У 1936 р. в Інституті математики відбулася спільна доповідь К. Я. Латишевої та М. Кравчука. Багато уваги Клавдія Яківна приділяла методиці викладання математики. Була вона й у числі організаторів Першої всеукраїнської математичної олімпіади, яка пройшла в Київському університеті в 1936 р.



Г. П. Матвієвська
(нар. 1930)

Галина Павлівна Матвієвська народилася 13 липня 1930 р. в м. Дніпропетровськ (тепер Дніпро), дитинство провела в Харкові, а в 1948 р. закінчила школу з золотою медаллю, у 1954 р. — Ленінградський (тепер Санкт-Петербург) університет, в 1958 р. захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук за результатами вивчення неопублікованих архівних рукописів Леонарда Ейлера з теорії чисел. У 1959 р. Г. П. Матвієвська переїхала до Узбекистану, на батьківщину чоловіка, і зайнялася історією східної математики, опанувавши для цього арабську мову. У 1968 р. в Ташкенті дослідниця захистила докторську дисертацію за темою «Вчення про число в середні віки». Згодом вона стала членом-кореспондентом Академії наук Узбекистану, заслуженим діячем науки, лауреатом державної премії ім. Беруні. Основні напрямки її досліджень — історія математики і математичної астрономії в країнах середньовічного Сходу, історія теорії чисел, рукописи Л. Ейлера.

Ольга Арсенівна Олійник (1925–2001) народилася 2 липня 1925 р. в селі Матусів, а шкільні роки провела в містечку Сміла (тепер Черкаська обл.). У роки війни родина Олійник евакуювалася до м. Перм (Росія), де дівчина закінчила школу і вступила на фізико-математичний факультет Пермського державного університету. Водночас вона відвідувала семінар професора Московського університету Софії Яновської, яка й порадила Ользі продовжити навчання в Московському державному університеті ім. Ломоносова. Ольга Арсенівна в 1947 р. з відзнакою закінчила механіко-математичний факультет університету, в 1950 р. захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук за темою «Про топологію дійсних алгебраїчних кривих на алгебраїчній поверхні», а в 1954 р. — докторську дисертацію за темою «Крайові задачі для рівнянь із частинними похідними з малим параметром при старших похідних і задача Коші для нелінійних рівнянь у цілому», невдовзі стала професором і академіком. Праця українки, яка першою у світі (на той час) стала доктором фізико-математичних наук у 29 років, була гідно оцінена. О. А. Олійник отримала премію ім. М. Г. Чеботарьова (1952 р.), премію ім. М. В. Ломоносова за наукові роботи (I ступінь, 1964 р.), іменну медаль Колеж де Франс (Франція), медаль I ступеня Карлова університету Праги (Чехія); була обрана іноземним членом Італійської Академії наук у Палермо (1967 р.), почесним членом Единбурзького королівського товариства Великої Британії (1984 р.).


О. А. Олійник
(1925–2001)

Галина Миколаївна Сита народилася 29 січня 1940 р. в м. Харків. Після закінчення в 1962 р. механіко-математичного факультету Київського університету вона успішно займалася в Інституті математики Академії наук України граничними теоремами теорії випадкових процесів та асимптотичними оцінками мір у функціональних просторах; стала кандидатом фізико-математичних наук (1965 р.), опублікувала низку відомих математичних праць. Та більш відома її робота зі збереження пам'яті про українських математиків та повернення Україні імен власних математиків світового рівня, зокрема Георгія Вороного, Михайла Остроградського, Михайла Кравчука, Миколи Чайковського, Віктора Буняковського. Справа почалася із впорядкування могил Г. Вороного і М. Остроградського. Далі Г. М. Сита працювала над організацією музеїв, спорудженням пам'ятників, створенням фільмів, випуском іменних грошових і поштових знаків, організацією міжнародних наукових конференцій, виданням книжок. До речі, вона була не тільки співредактором цих книжок, а й автором архівних досліджень. Вона — автор понад півсотні праць з історії математики. У 2001 р. саме Галину Ситу Кабінет Міністрів України затвердив секретарем Організаційного комітету з відзначення 200-ліття Михайла Остроградського.


Г. М. Сита
(нар. 1940)

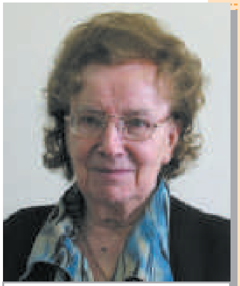

З. І. Слєпкань
(1931–2008)

Зінаїда Іванівна Слєпкань (1931–2008) народилася 16 квітня 1931 р. в с. Печенжиці на Вологодщині (Росія), куди в 1930 р. із Запорізької області було вислано її родину. В 1949 р. дівчина разом із батьками повернулася до України — до міста Мелітополь, де в 1953 р. з відзнакою закінчила фізико-математичний факультет Мелітопольського педагогічного інституту. В 1962 р. Зінаїда Іванівна захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата педагогічних наук із методики викладання математики. У 1987 р. першою серед жінок колишнього СРСР стала доктором педагогічних наук із методики навчання математики. З. І. Слєпкань — професор, одна із засновниць української наукової школи з теорії та методики навчання математики в середніх і вищих закладах освіти, автор багатьох програм і підручників для вищої і середньої школи. Всі українські школи протягом десяти років працювали за підручником «Алгебра і початки аналізу 10–11», написаним З. І. Слєпкань у співавторстві з М. І. Шкілем та О. С. Дубинчук.


К. Л. Ющенко
(1919–2001)

Катерина Логвинівна Ющенко (Рвачова) народилася в учительській родині (молодший брат також став академіком) 8 грудня 1919 р. в містечку Чигирин (тепер Черкаська обл.). Закінчила в 1942 р. Середньоазійський університет. У 1966 р. вона захистила докторську дисертацію за темою «Деякі питання теорії алгоритмічних мов і автоматизація програмування», стала доктором фізико-математичних наук, професором Київського університету (1969 р.), членом-кореспондентом Академії наук України (1976 р.), членом міжнародної Академії комп'ютерних наук і систем (1993 р.). Катерина Логвинівна Ющенко — автор першої у світі мови програмування високого рівня («Адресної мови програмування»), вчений-кібернетик, заслужений діяч науки, дійсний член Міжнародної академії комп'ютерних наук, лауреат премії імені В. М. Глушкова, нагороджена орденом княгині Ольги.

Ніна Опанасівна Вірченко (нар. 1930) — українська вчена, математик, доктор фізико-математичних наук, професор, академік-секретар відділення математики Академії наук вищої школи України (АН ВШУ), віце-президент АН ВШУ, член Українського, Американського, Австралійського, Бельгійського, Единбурзького, Лондонського математичних товариств, голова Науково-методичної ради Всеукраїнського товариства політв'язнів та репресованих.


Н. О. Вірченко
(нар. 1930)

Н. О. Вірченко вивчала теорію узагальнених аналітичних функцій, теорію змішаних крайових задач, сингулярні диференціальні рівняння з частинними похідними, інтегральні рівняння, спеціальні функції, інтегральні перетворення, історію та методику математики тощо. Але головною справою життя Ніни Вірченко, якою вона займається понад 45 років, стало дослідження життя і математичної спадщини Михайла Кравчука.

Н. О. Вірченко — Заслужений працівник освіти України, авторка понад 500 наукових і науково-методичних праць, зокрема 20 книжок, виданих українською, російською, англійською та японською мовами.

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

Алгебра і початки аналізу

Розділ 1

§ 1. **1.4.** 1) $(1;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)$; 3) $(-2;+\infty)$. **1.10.** 1) «–»; 2) «–»; 3) «+»; 4) «+».

§ 2. **2.1.1.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 2; 3) 0; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $2\pm\sqrt{6}$; 7) –3; 2; 8) 0; 9) 2; 10) 4; 11) коренів немає; 12) 5; 13) коренів немає; 14) 0; 15) 1; 16) 2; 17) 1; 18) 2; 3; 19) 1; 20) 2; 21) 2. **2.1.2.** 1) 1; 2) 1; 3) 3. **2.1.3.** 1) –4; 2; 2) –2; 3; 3) –2; 4; 4) –1; 3; 5) $\pm\sqrt{3}$. **2.1.4.** 1) 1; 2) 1; 3) 3; 4) –1; 5) 2; 6) 0; 7) –2; 8) 2. **2.2.1.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1. **2.2.2.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 2; 4) 0; 2; 5) 3; 6) 0,5; 7) ±1; 8) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **2.2.3.** 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 0; 6) 1,5. **2.2.4.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 1; 5) 0; 1. **2.2.7.** 1) $(3;-1)$; 2) $(-2;-3)$; 3) $(1;2)$; $(2;1)$; 4) $(3;1)$. **2.3.1.** 1) $(0;+\infty)$; 2) $(-1;+\infty)$; 3) R; 4) розв'язків немає; 5) $(-\infty;-2]$; 6) $(-\infty;5]$; 7) $[2{,}5;+\infty)$; 8) $(0;+\infty)$; 9) $[1;3)\cup[6;+\infty)$; 10) $[1;4)\cup[8;+\infty)$. **2.3.2.** 1) $(-\infty;0)$; 2) $(-\infty;1)$; 3) $[-1;+\infty)$; 4) $(-\infty;1]$; 5) $(2;+\infty)$; 6) $[1;2]$. **2.3.3.** 1) $(-\infty;0)$; 2) $(-\infty;1]$; 3) $(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$; 4) $[0;1]$. **2.3.4.** 1) –2; $[3;+\infty)$; 2) $(-\infty;-2]$, 4; 3) $(0;1)$; 4) $(0;1)$.

§ 3. **3.2.** 1) 2; 2) 3; 3) –2; 4) 0,5; 5) –1,5; 6) 0; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $\frac{1}{4}$; 9) –1; 10) –1. **3.3.** 1) $\log_4 9$; 6) $\ln 3$. **3.4.** 5) 14; 6) 54. **3.5.** 2) $2\lg a+5\lg b-7\lg c-1$; 5) $2+7\log_3 a+\frac{1}{3}\log_3 b$. **3.6.** 1) $3\lg|a|+5\lg|b|+8\lg|c|$; 2) $\frac{1}{3}\lg|a|+\frac{1}{3}\lg|b|-2\lg|c|$; 3) $4\lg|c|-\frac{2}{5}\lg|a|-\frac{2}{5}\lg|b|$; 4) $2+\frac{1}{5}\lg|a|+\frac{1}{5}\lg|b|+\frac{2}{5}\lg|c|$. **3.7.** 1) $b+1$; 2) $2a+b$; 3) $a+b+1$; 4) $3a+2b$. **3.8.** 1) $\frac{40}{9}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{5a}\cdot c^5}{b^2}$; 3) $\frac{m^3\cdot\sqrt[7]{n^2}}{\sqrt[5]{p}}$; 4) $\frac{1}{1600}$. **3.9.** 1) $-\log_3 a$; 2) $0{,}5\log_3 a$; 3) $-0{,}5\log_3 a$; 4) $2\log_3 a$; 5) $\frac{\log_3 a}{\log_3 2}$. **3.10.** 1) 24; 2) 10; 3) 2,5; 4) 1,5; 5) 19; 6) 12. **3.11.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{2+a}{2(2-a)}$; 3) $\frac{b(3-2a)}{ab+2}$; 4) $\frac{b(a+4)}{3(1+ab)}$.

§ 4. **4.1.1.** 1) $(-3;+\infty)$; 2) $(3;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; 4) $(0;3)$; 5) R; 6) R; 7) $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$; 8) $(2;3)\cup(3;+\infty)$; 9) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; 10) $(0;1)\cup(1;2)$; 11) $(1{,}5;2)\cup(2;5)$. **4.2.1.** 1) $3e^x$; 2) $e^x-\frac{1}{x}$; 3) $-e^{-x}+5x^4$; 4) $\frac{2}{2x-1}$. **4.2.2.** 1) $e^{5x}(5\cos x-\sin x)$; 2) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 3) $\frac{\lg x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln 10}$; 4) $x^2\left(3\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)$. **4.2.3.** 1) $(0{,}5\ln 0{,}5;+\infty)$; 2) $(-\infty;0)\cup(0{,}5;+\infty)$; 3) $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$; 4) $(1{,}5;+\infty)$. **4.2.4.** 1) а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$; в) $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; 2) а) 1; б) $(1;+\infty)$; в) $(0;1)$; 3) а) e; б) $(0;e)$; в) $(e;+\infty)$; 4) а) e^{-2}; б) $(e^{-2};+\infty)$; в) $(0;e^{-2})$. **4.2.5.** 1) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$; 2) $y=4x+1-\frac{\pi}{2}$; 3) $y=2$; 4) $y=-1$. **4.2.6.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$; 2) 1; 3) 0. **4.2.7.** $y=5x+2$. **4.2.8.** $y=3x-1$. **4.2.9.** 2) $f_{\max}=\ln 2+5$, $f_{\min}=\ln 4-2$.

§ 5. **5.1.1.** 1) 16; 2) 5; 3) 2; 4) 100. **5.1.2.** 1) 5; 2) 6; 3) –3; 1; 4) 2,9. **5.1.3.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4; 4) 5. **5.1.4.** 1) 3; 27; 2) 10; 3) $\frac{1}{81}$; 9; 4) 0,1; 1; 10. **5.1.5.** 1) 1; 2) 2; 4; 3) 0; 4) $\log_3 4$. **5.2.1.** 1) $(9;+\infty)$; 2) $(0;5)$; 3) $(0{,}5;+\infty)$; 4) $(0;100)$. **5.2.2.** 1) $(2;+\infty)$; 2) $(0{,}2;2)$; 3) $\left(\frac{2}{3};9\right)$; 4) $(-0{,}5;1{,}5)$. **5.2.3.** 1) $(3;+\infty)$; 2) $\left(-\frac{1}{3};1\right)$; 3) $(2;3)$; 4) $(0{,}5;4]$. **5.2.4.** 1) $(0;3)\cup(9;+\infty)$; 2) $(0{,}1;10)\cup(10;1000)$; 3) $\left[\frac{1}{9};9\right]$; 4) $(0;0{,}5]\cup[4;+\infty)$. **5.2.5.** 1) $(10;+\infty)$; 2) $[6;+\infty)$; 3) $(-4;-3)\cup(4;5)$; 4) $[1;+\infty)$. **5.2.6.** 1) $(0;0{,}25]$; 2) $(1;4)$; 3) $(0;1)\cup[\sqrt{2};4]$; 4) $(-2;0{,}5)$.

Тест 1. **1.** В. **2.** В. **3.** Д. **4.** Б. **5.** 1–Г, 2–Б, 3–А. **6.** 2. **7.** 6. **8.** $(-1;0)$.

Розділ 2

§ 6. **6.4.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **6.5.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так. **6.6.** 1) $2x-\frac{x^5}{5}+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\sin x+C$; 3) $2x^2+C$; 4) $-8x+C$; 5) $\frac{x^7}{7}+C$; 6) $-\frac{1}{2x^2}-2x+C$; 7) $x+\frac{1}{3x^3}+C$; 8) $\frac{x^4}{4}+C$. **6.7.** 1) $2x-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+C$;

2) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^4}+\sin x+C$; 3) $-\frac{1}{x}+\cos x+C$; 4) $\frac{5}{3}x^3-x+C$; 5) $\frac{1}{12}(2x-8)^6+C$; 6) $-\frac{3}{2}\cos 2x+C$; 7) $-\frac{1}{40}(4-5x)^8+C$; 8) $-\frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$; 9) $\frac{1}{15(x-15x)^3}+C$. **6.8.** 1) $-\frac{1}{x}-10$; 2) $\operatorname{tg} x-1$; 3) $\frac{x^4}{4}+1\frac{3}{4}$; 4) $-\cos x-2$. **6.9.** 1) x^2+x; 2) x^3-x^2+4; 3) $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4\frac{1}{3}$. **6.10.** 1) $2\sin x+3$; 2) $x-\frac{x^3}{3}+3$; 3) $-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$; 4) $-\frac{1}{3x^3}+5\frac{2}{3}$. **6.11.** $\frac{t^3}{3}+t^2-t$. **6.12.** t^4+2t^2+2t+7.

§ 7. **7.1.** 1) 6,6; 2) 1; 3) 20; 4) 1; 5) $\frac{1}{15}$; 6) 6; 7) 0,9; 8) 0,5. **7.3.** 1) 3; 2) 2; 3) $9\sqrt{3}$; 4) 4; 5) $\frac{2\pi}{3}+1$; 6) 78; 7) $\frac{\pi+3}{12}$; 8) 9,5. **7.4.** 1) 0,4; 2) 1,6; 3) $9\frac{1}{3}$; 4) $10\frac{2}{3}$. **7.5.** 1) 0,75; 2) 2; 3) $7\frac{1}{3}$; 4) $5\frac{1}{3}$. **7.6.** 1) 4,25; 2) $2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. **7.9.** 4 банки. **7.10.** 0,1 Дж.

Тест 2. **1.** Д. **2** Д. **3.** В. **4.** 1–Г, 2–В, 3–Б. **5.** 0,75.

Розділ 3

§ 8. **8.1.1.** 12. **8.1.2.** 1) 16; 2) 60. **8.1.3.** 2052; яблуко. **8.1.4.** 1680. *Вказівка*. Доцільно за місця вибрати екзамени і розміщувати по них задані дні. **8.1.5.** 24. **8.1.6.** 870. **8.1.7.** 336. **8.1.8.** 210. **8.1.9.** $26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22$. **8.1.10.** 120. **8.1.11.** 96. **8.1.12.** 544 320. **8.1.13.** 1) 24; 2) 12. **8.2.1.** 24. **8.2.2.** 5040. **8.2.3.** 120. **8.2.4.** 6. **8.2.5.** 1) 720; 2) 600. **8.2.6.** 1) 6; 2) 6. **8.2.7.** 384. **8.2.8.** 240. **8.2.9.** $5!\cdot 8!$. **8.3.1.** 21. **8.3.2.** 56. **8.3.3.** 210. **8.3.4.** 1) 55; 2) 165. **8.3.5.** 400 400.

§ 9. **9.1.** 1) Випадкова; 2) неможлива; 3) випадкова; 4) неможлива; 5) випадкова; 6) неможлива; 7) випадкова; 8) неможлива; 9) вірогідна; 10) випадкова; 11) випадкова. **9.3.** 0,03. **9.4.** 0,002. **9.5.** 0,998. **9.6.** 0. **9.7.** 1. **9.8.** 1; 0. **9.9.** $\frac{1}{24}$. **9.10.** $\frac{1}{1250}$. **9.11.** 0,04. **9.12.** 0,75. **9.13.** $\frac{1}{12}$. **9.14.** 0,95. **9.15.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) $\frac{2}{3}$. **9.16.** Виграші рівноможливі.

9.17. Ні. **9.18.** 1) Червоне; 2) а) 1; б) 0; в) 0,4; г) 0,52. **9.19.** Будь-яку. **9.20.** 1 червона, 5 жовтих. **9.21.** Зелена, $p=\frac{1}{6}$. **9.22.** 1) а) $\frac{4}{15}$; б) 0; в) $\frac{1}{3}$; 2) 11. **9.23.** $(2;1)$. **9.24.** $\frac{2}{3}$. **9.25.** $\frac{1}{120}$. **9.26.** 400. **9.27.** 60. **9.28.** 10.

§ 10. **10.1.1.** 240.

10.1.2.

Колір	чорний	червоний	синій	сірий	білий	жовтий	зелений
Кількість бейсболок	9600	6000	4800	4200	3300	1500	600

10.1.3.

Жирність	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Кількість літрів	400	240	160	200	480	280	240

10.2.4. 1) $R=4$; $Mo=2$; $Me=2$; $\bar{X}=2\frac{2}{3}$ 2) $R=8$; $Mo=2$; $Me=1$; $\bar{X}=0{,}6$.

10.2.5. 1) $R=3$; $Mo=3$; $Me=3$; $\bar{X}=3\frac{4}{11}$; 2) $R=8$; $Mo_1=4$; $Mo_2=5$; $Me=4$; $\bar{X}=3\frac{4}{7}$. **10.2.6.** $Mo_1=135$; $Mo_2=140$; $Me=135$; $\bar{X}=129\frac{6}{11}$.

Тест 3. **1.** А. **2.** Д. **3.** В. **4.** 1–А, 2–Г, 3–Б. **5.** $\frac{5}{6}$.

Геометрія

Розділ 1

§ 1. **1.2.** Трикутна піраміда. 4; 6. **1.3.** 1) 10; 2) 6. **1.4.** $n(n-3)$. **1.6.** 7,5 см. **1.7.** 45°. **1.8.** 4,5 см. **1.9.** $2a$; $a\sqrt{5}$; $a^2\sqrt{3}$; $2a^2$. **1.10.** 22 см. **1.11.** 4 м. **1.12.** $Q\sqrt{2}$. **1.13.** 1) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$; 2) $a^2\sqrt{2}$. **1.14.** 2 м. **1.15.** 4 м. **1.16.** 1) $150(2\sqrt{2}+7)$ кв. од.; 2) $75\sqrt{53}$ кв. од.; 3) 45, 135°. **1.17.** 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. **1.18.** 1) 45°; 2) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{a^2}{2}$.

§ 2. **2.2.** 200 дм². **2.3.** 1) 3; 2) 15; 3) 11. **2.4.** 1) 160 см²; 2) 208 см²; 3) 460 см². **2.5.** 12 м². **2.6.** $5\sqrt{3}$ см. **2.7.** 188 м². **2.8.** $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. **2.9.** 16 см². **2.11.** 288 см². **2.12.** 1) $4ab\sin\beta$; 2) $2ab\sin\frac{\alpha}{2}$; 3) $a\sqrt{\sin^2\beta-\cos^2\beta\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. **2.13.** 13 м, 9 м. **2.14.** 2. **2.15.** 8 см, 10 см. **2.17.** 1) $4\sqrt{3}$ кв. од.; 2) $5\sqrt{3}$ кв. од. **2.18.** 432 см². **2.19.** $a\sqrt{2}$, $2a$. **2.20.** 5 см, 7 см. **2.21.** 960 см². **2.22.** 30°. **2.23.** $\mathrm{arctg}\frac{37}{20}$.

§ 3. **3.3.** $8\sqrt{21}$ см². **3.4.** 144 кв. од. **3.5.** $Q\sqrt{2}$. **3.6.** 1) 240 см²; 2) $160\sqrt{3}$ см². **3.7.** 3 см. **3.8.** 1) $200\sqrt{2}$ см²; 2) $100\sqrt{5}$ см²; 3) $100\sqrt{2}$ см². **3.9.** $16\sqrt{7}$ см². **3.10.** 580 см². **3.11.** $6\sqrt{Q^2-S^2}$. **3.12.** 1) $a^2\sqrt{6}$; 2) $3a^2$. **3.13.** $2\sqrt{3}$ см². **3.14.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$, 60°. **3.15.** Можна відкласти на ребрах DD_1 і BB_1 відповідно відрізки $DX=BY=22$ см і з'єднати послідовно точки на кожній грані — одержимо лінію розпилу.

§ 4. **4.1.** 60. **5.2.** 9 см. **4.3.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **4.4.** 1) $\sqrt{H^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{H^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\sqrt{H^2+\frac{3a^2}{4}}$. **4.5.** 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3a}{2}\sqrt{H^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $a^2+2a\sqrt{H^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}+3a\sqrt{H^2+\frac{3a^2}{4}}$. **4.6.** $2r\left(\sqrt{3}r+\sqrt{3a^2-r^2}\right)$.

4.7. 1,8 м, 4 м. **4.8.** 288 см². **4.9.** $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$. **4.10.** $288\sqrt{3}$ см². **4.11.** $a^2\sqrt{7}$. **4.12.** 60°. **4.13.** $\arccos\frac{Q}{S}$. **4.14.** $\sqrt{2}$ см. **4.15.** $\frac{3a^2}{2}$.

§ 5. **5.1.** 12 см. **5.2.** 12. **5.3.** $\frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta$. **5.4.** $\frac{a\operatorname{ctg}\varphi}{2\sin\alpha}$. **5.5.** $\frac{Q}{\cos\varphi}$. **5.6.** 448 см². **5.8.** $\frac{35\sqrt{2}}{12}$. **5.9.** $\operatorname{arcctg}\left(\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **5.10.** 1) 2,4; 2) $\frac{12\sqrt{2}}{5}$. **5.11.** 3. **5.12.** $2\sqrt{3}$ см. **5.13.** 540 см². **5.14.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **5.15.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **5.16.** 40 м².

§ 6. **6.1.** 1) Ні; 2) ні. **6.2.** 1) Так; 2) так. **6.3.** Ні. **6.5.** 1) 9; 2) 15; 3) 15. **6.6.** 10 см. **6.7.** Так.

Тест 1. **1.** В. **2.** Д **3.** В. **4.** Д. **5.** Д. **6.** 1–В, 2–А, 3–Г. **7.** 320.

Розділ 2

§ 7. **7.1.** 1) Так; 2) так; 3) так. **7.2.** 1) 5 м; 2) 12π м²; 3) 20π м². **7.3.** 9. **7.4.** $\frac{\pi S}{4}$. **7.5.** 36 см². **7.6.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.7.** 1) 24 см; 2) $12\sqrt{3}$ см; 3) 432π см². **7.8.** $40\sqrt{3}$ см². **7.9.** πS. **7.10.** 3, $\frac{4}{\pi}$. **7.11.** 18 см, 6 см. **7.12.** $4Q\operatorname{ctg}\varphi$. **7.13.** $\frac{d^2\cos^2\varphi}{2\pi}+d^2\sin\varphi\cos\varphi$. **7.14.** 1) $150\sqrt{3}$ кв. од., $187{,}5\sqrt{3}$ кв. од.; 2) $200\sqrt{2}$ кв. од., $100(1+2\sqrt{2})$ кв. од.; 3) 300 кв. од., $75(\sqrt{3}+4)$ кв. од. **7.15.** 1024 кв. од. **7.16.** 2 банки. **7.17.** 2,1 м². **7.18.** 12 листів.

§ 8. **8.1.** 1) 5 м; 2) 15π м²; 3) 24π м². **8.2.** 5. **8.3.** 12. **8.4.** 1) 17; 2) 136π кв. од.; 3) 200π кв. од. **8.5.** $\pi R^2\sqrt{2}$. **8.6.** $2R^2\sin\alpha$. **8.8.** Так. **8.9.** 3. **8.10.** $\frac{H\sqrt{2}}{2}$. **8.11.** $0{,}75l$. **8.12.** 12π см². **8.13.** Вистачить.

§ 9. **9.1.** 6. **9.2.** 8π. **9.3.** 13. **9.4.** 7 дм. **9.5.** 6 см. **9.6.** $2\sqrt{13}$ дм. **9.7.** 13. **9.8.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. **9.9.** 6,5. **9.10.** 2,5. **9.11.** $1\frac{1}{3}$. **9.12.** 1600π дм².

9.13. $3:4$. **9.14.** 1 або 7. **9.15.** 5. **9.16.** $0{,}25\pi R^2$. **9.17.** 6000π км. **9.18.** 250π км.

Тест 2. **1.** Г. **2.** Б. **3.** Г. **4.** Г. **5.** 1–Б, 2–В, 3–Г. **6.** $8\sqrt{3}$.

Розділ 3

§ 10. **10.2.** 7 куб. од. **10.3.** 76 куб. од. **10.4.** 52 куб. од. **10.5.** $1:1$. **10.6.** $24\sqrt{3}$ см³. **10.7.** 1) $131{,}25\pi$ куб. од.; 2) 84π куб. од. **10.8.** 240 см³. **10.9.** 180 см³. **10.10.** 1) Збільшиться в 2 рази; 2) збільшиться в 4 рази; 3) збільшиться у 8 разів. **10.11.** 12 см. **10.12.** $1:3$. **10.13.** 1) $8:1$; 2) $27:1$; 3) $n^3:1$. **10.14.** $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. **10.15.** 1120 см³. **10.16.** 1) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$; 2) a^2b; 3) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{2}$. **10.17.** πa^3. **10.18.** $\frac{1}{4}\pi a^3\cos^2\varphi\sin\varphi$. **10.19.** $\frac{b}{a}$. **10.20.** 2. **10.22.** 160π см³. **10.23.** 5 см. **10.24.** Друга.

§ 11. **11.1.** 240 см³. **11.2.** 80 см³. **11.3.** 4 м³. **11.4.** Так. **11.5.** $\frac{1}{3}$. **11.6.** $\frac{1}{3}abh$. **11.7.** $\frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$. **11.8.** $\frac{d^2h}{6}$. **11.9.** $144\sqrt{3}$ куб. од. **11.10.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$ куб. од. **11.11.** 7 см. **11.12.** $\frac{b^3}{6}$. **11.13.** Зменшиться у n разів. **11.14.** $\frac{1}{3}$ куб. од. **11.15.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ куб. од. **11.16.** 128π куб. од. **11.17.** 1) Збільшиться в 3 рази; 2) збільшиться в 4 рази. **11.18.** Збільшиться в 2 рази. **11.19.** 120π см³. **11.20.** $1:7$. **11.21.** 72π см³. **11.22.** 9π см³. **11.23.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **11.24.** Ні. **11.25.** 2625π куб. од. **11.26.** $\frac{\pi a^2h}{36}$. **11.27.** $\frac{\pi a^2h}{6}$. **11.28.** 72 см³. **11.29.** 8,2 л. **11. 30.** ≈ 640 відер.

§ 12. **12.1.** $\frac{500\pi}{3}$ см³. **12.2.** 8. **12.3.** 1) 27; 2) 125. **12.4.** 4. **12.5.** $10\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ см. **12.6.** $10\sqrt[3]{9}$ см. **12.7.** 167. **12.8.** $\frac{4000\pi}{3}$ см³. **12.9.** 4 куб. од. **12.10.** $33\frac{1}{3}\%$. **12.11.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. **12.12.** 24 куб. од. **12.13.** $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$. **12.14.** $\frac{2400-343\pi}{147\pi}$ м.

12.15. $\frac{7}{250}$. **12.16.** 288π см³, $\frac{3136\pi}{3}$ см³. **12.17.** $\frac{2}{3}\pi R^3\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$. **12.18.** 112 500 см³. **12.19.** $\frac{38\pi}{3}$ см³ або $\frac{434\pi}{3}$ см³. **12.20.** $\frac{\pi a^3\left(15-8\sqrt{2}\right)}{12}$.

§ 13. **13.1.** 36 см². **13.2.** Збільшиться: 1) у 4 рази; 2) у 9 разів; 3) у n^2 разів. **13.3.** Приблизно в 13,8 разу. **13.4.** 400π см². **13.5.** 144π м². **13.6.** $2:3$. **13.7.** $m\sqrt{m}:n\sqrt{n}$. **13.8.** $\sqrt[3]{m^2}:\sqrt[3]{n^2}$. **13.9.** У 3 рази. **13.11.** Відношення площ $2:3$, відношення об'ємів $2:3$. **13.12.** 4225π дм². **13.13.** $\frac{4}{3}\pi l^2$. **13.14.** $\approx 37{,}7$ кг, 14 банок.

Тест 3. **1.** Г. **2.** Г. **3.** В. **4.** 1–Г, 2–В, 3–Б. **5.** Д. **6.** 1–А, 2–Г, 3–В. **7.** $144\sqrt{3}$ см³.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

РОЗДІЛ 1. Показникова та логарифмічна функції

РОЗДІЛ 2. Інтеграл та його застосування

РОЗДІЛ 3. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики

ГЕОМЕТРІЯ

РОЗДІЛ 1. Многогранники

РОЗДІЛ 2. Тіла обертання

РОЗДІЛ 3. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня / учениці	Навчаль-ний рік	Стан підручника	
			на початку року	в кінці року
1				
2				
3				
4				
5				

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович, ДОЛГОВА Оксана Євгенівна

«МАТЕМАТИКА
(алгебра і початки аналізу та геометрія,
рівень стандарту)»
підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *А. В. Пліско*. Художнє оформлення *В. І. Труфена*.
Комп'ютерна верстка *О. М. Правдюк*. Коректор *Н. В. Красна*.

Окремі зображення, що використані в оформленні підручника,
розміщені в мережі Інтернет для вільного використання

Підписано до друку 28.05.2019. Формат 70×90/16.
Папір офсетний. Гарнітура Шкільна. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 22,23. Обл.-вид. арк. 29,3. Тираж 33 806 прим. Зам. № 12305-2019.

ТОВ Видавництво «Ранок»,
вул. Кібальчича, 27, к. 135, Харків, 61071.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5215 від 22.09.2016.
Адреса редакції: вул. Космічна, 21а, Харків, 61145.
E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 719-48-65, факс (057) 719-58-67.

Підручник надруковано на папері українського виробництва

Надруковано у друкарні ТОВ «ТРІАДА-ПАК»,
пров. Сімферопольський, 6, Харків, 61052.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5340 від 15.05.2017.
Тел. +38 (057) 712-20-00. E-mail: sale@triada.kharkov.ua