Державний комітет зв’язку та інформатизації України
Львівський технікум Державного університету
інформаційно-комунікаційних технологій

Литвин І.І., Конопчук О.М., Желізняк Г.О.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Київ – 2004

ББК32.973.2я73
Б12
УДК681.3(75)

Рецензенти:

П.І.Каленюк, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри обчислювальної математики та програмування Національного університету «Львівська політехніка».

Г.Т.Сулим, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри механіки Львівського національного університету ім. І.Франка.

Б12 ***Литвин І.І., Конопчук О.М., Желізняк Г.О.***
Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с.

ISBN

Посібник містить виклад матеріалу курсу «Вища математика» в обсязі діючої програми для вищих закладів освіти першого та другого рівня акредитації, затвердженої управлінням кадрів та навчальних закладів Міністерства зв'язку України в 1998 році.

Посібник призначається для студентів різних форм навчання та викладачів технікумів, ліцеїв, коледжів та гуманітарних інститутів. Достатньо широка система вправ дозволяє використовувати посібник як задачник.

УДК 681.3(075)
ББК 32.973.2я73

ISBN

ЗМІСТ

П Е Р Е Д М О В А

Курс «Вища математика», в тому чи іншому об'ємі, вивчається майже в усіх вищих навчальних закладах першого і другого рівнів акредитації. Проте забезпечення предмету навчально-методичною літературою, особливо україномовною, недостатнє. Більшість існуючих підручників та посібників з вищої математики видані до 1990 року, російськомовні, і не враховують змін, які внесені як в шкільні програми з математики, так і в програми вищих навчальних закладів.

Запропонований Вашій увазі посібник містить виклад матеріалу курсу «Вища математика» в обсязі діючої програми для вищих закладів освіти першого та другого рівня акредитації, затвердженої управлінням кадрів та навчальних закладів Міністерства зв'язку України в 1998 р.

Навчальний посібник складається з 11 розділів, в кожний з яких входить теоретич-ний матеріал, приклади розв'язку типових задач, система вправ для закріплення вивченого теоретичного та практичного матеріалу, опорний конспект, в якому зібрано в компактному вигляді всі основні поняття розділу. Останній розділ містить самостійні роботи різних типів та рівнів складності.

Опорні конспекти, як підсумковий та довідковий матеріал, зручно використовувати для актуалізації опорних знань студентів, закріплення вивченого матеріалу, при виконанні тренувальних самостійних робіт, домашніх завдань та підготовці до рубіжного контролю по темі та курсу в цілому.

Метою авторів було подати матеріал в доступній для випускників середніх шкіл формі та заохотити їх до самостійного осмислення вивченого.

Для більшої доступності та зрозумілості матеріалу широко використовується геометрична та фізична інтерпретація; розв'язки типових задач наводяться з коротким поясненням теоретичних положень; надто складні чи громіздки доведення, а також доведення, що грунтуються на поняттях які не входять в рамки програми, не приводяться; спеціальна математична символіка використовується обмежено.

Розвитку самостійного математичного мислення студентів сприяють: формулювання окремих теорем як висновків з проведених міркувань; пропозиція самостійного продовження доведення теореми там, де це доведення можна провести по аналогії; формулювання означень в тексті, що змушує більш уважно вивчити весь матеріал розділу та зробити самостійні висновки.

Посібник призначається для студентів різних форм навчання та викладачів технікумів, ліцеїв, коледжів та гуманітарних інститутів. Достатньо широка система вправ дозволяє використовувати посібник як задачник.

Автори висловлюють щиру подяку професорам Львівських вузів доктору фіз.-мат. наук Сулиму Г.Т. (ЛНУ ім. І. Франка), доктору фіз.-мат. наук Каленюку П.І. (ЛНУ «Львівська політехніка»).

РОЗДІЛ 1. СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

1.1. Непозиційні системи числення.

Непозиційними називаються такі системи числення, в яких кожна цифра зберігає своє стале значення незалежно від того місця, яке вона займає у записі числа.

Прикладом непозиційної системи числення, яка дійшла до наших часів та іноді застосовується, є римська система числення. У цій системі для запису цілих чисел використовуються такі цифри: I, V, X, C, D, M і т.д., які означають числа один, п’ять, десять, п’ятдесят, сто, тисяча і т.д.. Запис будь-яких інших чисел проводиться на основі певних правил: кілька однакових цифр, що стоять поруч, зображають число, що дорівнює сумі чисел, які відповідають цим цифрам, наприклад III – три, XX – двадцять, пара цифр в якій молодша цифра (яка позначає менше число) стоїть зліва від старшої (яка позначає більше число), зображає різницю відповідних чисел, наприклад IV – чотири, XL – сорок, пара цифр, в якій молодша цифра стоїть справа від старшої, зображає суму відповідних чисел, наприклад XI – одинадцять, VI – шість, тощо.

1.2. Позиційні системи числення.

Позиційними називаються такі системи числення, в яких значення кожної цифри визначається не лише самою цифрою, а й тим місцем (позицією), яке вона займає в записі числа.

Основою позиційної системи числення називається число p, яке показує, скільки потрібно одиниць будь-якого розряду для одержання одиниці старшого розряду. Систему числення з основою p будемо позначати через P. Очевидно, що основою системи числення визначається кількість цифр, які використовуються для запису чисел у даній системі числення. Основою десяткової системи числення є число десять, для запису будь-яких чисел використовується тільки десять різних цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

В позиційній системі числення з основою p використовуються p різних цілих чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$, які називаються **базою системи** числення. Розрізняються позиційні системи числення з позиційною невід’ємною і симетричною базою. У позиційних системах числення з невід’ємною базою цифри означають послідовні цілі числа починаючи з нуля; в позиційних системах числення з симетричною базою цифри означають послідовні цілі числа, симетрично розміщені відносно нуля і нуль. Як правило, цифри 0, 1 в позиційних системах числення означають число нуль і одиницю.

Числа в позиційній системі числення з основою р записують як послідовність цифр системи P, розділених комою на цілу і дробову частини. Якщо букви a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0, a_{-1}, ... a_{-m} означають цифри системи, то послідовність цифр $a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$ означає число $a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0 + a_{-1} \cdot p^{-1} + \dots + a_{-m} \cdot p^{-m}$.

Арифметичні дії над числами в будь-якій позиційній системі числення виконуються за тими ж правилами, що і в десятковій системі. Однак при виконанні дій над числами системи треба користуватися таблицями додавання і множення цієї системи.

Щоб розрізняти в якій системі числення записане те чи інше число, домовимось позначити через x_p число x, записане в системі числення P.

Розглянемо найбільш вживані в ЕОМ системи числення.

1.3. Двійкова система числення.

Ця система числення використовує дві цифри 0, 1, які означають числа нуль і одиницю відповідно. Основою цієї системи є число два.

Нижче дано зображення деяких чисел у двійковій системі числення:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
1_{10} &=& 1_2 & 7_{10} &=& 111_2 \\
2_{10} &=& 10_2 & 8_{10} &=& 1000_2 \\
3_{10} &=& 11_2 & 9_{10} &=& 1001_2 \\
4_{10} &=& 100_2 & 10_{10} &=& 1010_2 \\
5_{10} &=& 101_2 & 0{,}5_{10} &=& 0{,}1_2 \\
6_{10} &=& 110_2 & 0{,}25_{10} &=& 0{,}01_2\,.
\end{array}
$$

При додаванні двох чисел, записаних у двійковій системі числення, слід користуватися такою таблицею додавання:

$$
\begin{aligned}
0+0 &= 0 \\
0+1 &= 1 \\
1+0 &= 1 \\
1+1 &= 10\,.
\end{aligned}
$$

Таблиця множення в двійковій системі числення також дуже проста:

$$
\begin{aligned}
0\times 0 &= 0 \\
0\times 1 &= 0 \\
1\times 0 &= 0 \\
1\times 1 &= 1.
\end{aligned}
$$

<u>Приклади</u>

а) додавання:
$$
\begin{array}{r}
11011101{,}01 \\
+\ \ 1110010{,}11 \\
\hline
101010000{,}00\,;
\end{array}
$$

б) віднімання:
$$
\begin{array}{r}
-\ 111001{,}11 \\
1011{,}11 \\
\hline
101110{,}00\,;
\end{array}
$$

в) множення:
$$
\begin{array}{r}
10110{,}1 \\
\times\qquad 10{,}1 \\
\hline
101101 \\
+\ 101101 \\
\hline
111000{,}01;
\end{array}
$$

г) ділення:
$$
\begin{array}{rl}
-\ 1110011 & \big|\ 10111 \\
10111 & \big|\ 101 \\
\hline
-\ 10111 & \\
10111 & \\
\hline
0\ . &
\end{array}
$$

1.4. Вісімкова система числення.

Ця система числення використовує цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 для позначення послідовних цілих чисел від нуля до семи включно. Основою цієї системи є число 8. Запис довільного числа в цій системі ґрунтується на його розкладі за степенями числа вісім із вказаними вище коефіцієнтами.

Запишемо деякі числа у вісімковій системі числення:

$7_{10} = 7_8$	$11_{10} = 13_8$	$15_{10} = 17_8$	$0{,}5_{10} = 0{,}4_8$
$8_{10} = 10_8$	$12_{10} = 14_8$	$16_{10} = 20_8$	$0{,}25_{10} = 0{,}2_8$
$9_{10} = 11_8$	$13_{10} = 15_8$	$24_{10} = 30_8$	$0{,}125_{10} = 0{,}1_8$
$10_{10} = 12_8$	$14_{10} = 16_8$	$32_{10} = 40_8$	$0{,}625_{10} = 0{,}04_8$.

Вісімкові таблиці додавання і множення мають вигляд:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	10
1	1	2	3	4	5	6	7	10	11
2	2	3	4	5	6	7	10	11	12
3	3	4	5	6	7	10	11	12	13
4	4	5	6	7	10	11	12	13	14
5	5	6	7	10	11	12	13	14	15
6	6	7	10	11	12	13	14	15	16
7	7	10	11	12	13	14	15	16	17
10	10	11	12	13	14	15	16	17	20

x	0	1	2	3	4	5	6	7	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	10
2	0	2	4	6	10	12	14	16	20
3	0	3	6	11	14	17	22	25	30
4	0	4	10	14	20	24	30	34	40
5	0	5	12	17	24	31	36	43	50
6	0	6	14	22	30	36	44	52	60
7	0	7	16	25	34	43	52	61	70
10	0	10	20	30	40	50	60	70	100

Приклади

а) додавання:

$$\begin{array}{r} _{+}6342{,}31 \\ 4651{,}22 \\ \hline 13213{,}53; \end{array}$$

б) віднімання:

$$\begin{array}{r} \_\,14273{,}42 \\ 6045{,}03 \\ \hline 6226{,}37; \end{array}$$

в) множення:

$$\begin{array}{r} 342{,}1 \\ \times\quad 5{,}4 \\ \hline _{+}16104 \\ 21525 \\ \hline 2333{,}54\ ; \end{array}$$

г) ділення:

$$\begin{array}{r|l} \_214346 & 726 \\ \cline{2-2} 1654 & 231 \\ \cline{1-1} \_2674 & \\ 2602 & \\ \cline{1-1} \_726 & \\ 726 & \\ \cline{1-1} 0\ \ . & \end{array}$$

1.5. Шістнадцяткова система числення.

Ця система числення використовує шістнадцять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A, B, C, D, E, F*, які означають послідовно цілі числа, починаючи з нуля закінчуючи числом «п’ятнадцять». Основою цієї системи є число шіснадцять.

Запишемо деякі числа в шіснадцятковій системі числення:

$$\begin{array}{lll} 17_{10}=11_{16} & 26_{10}=1A_{16} & 32_{10}=20_{16} \\ 18_{10}=12_{16} & 27_{10}=1B_{16} & 33_{10}=21_{16} \\ 19_{10}=13_{16} & 28_{10}=1C_{16} & 34_{10}=22_{16} \\ 20_{10}=14_{16} & 29_{10}=1D_{16} & 35_{10}=23_{16} \\ 21_{10}=15_{16} & 30_{10}=1E_{16} & 36_{10}=24_{16} \\ 22_{10}=16_{16} & 31_{10}=1F_{16} & 37_{10}=25_{16}. \end{array}$$

Приклади

а) додавання:

$$\begin{array}{r} 1A146{,}8 \\ ^{+}F32B{,}2 \\ \hline 29471{,}A\ ; \end{array}$$

б) віднімання:

$$\begin{array}{r} \_34F87{,}C \\ 4894{,}1 \\ \hline 306F3{,}B\ ; \end{array}$$

в) множення:

$$\begin{array}{r} 408C{,}1 \\ \times\quad A3{,}4 \\ \hline 102304 \\ _{+}C1A43 \\ 28578A \\ \hline 292951{,}34\ ; \end{array}$$

г) ділення:

$$\begin{array}{r|l} \_ABD{,}2499C & AB{,}CDE \\ \cline{2-2} AB1\ 102 & F{,}12 \\ \cline{1-1} \_C\ 1\ 47\ 9 & \\ ABCDE & \\ \cline{1-1} \_1\ 579BC & \\ 1\ 579BC & \\ \cline{1-1} 0\ \ . & \end{array}$$

1.6. Переведення чисел із однієї системи в іншу.

При розв'язуванні задач на ЕОМ початкові дані, як правило, задаються в десятковій системі числення, у тій же системі треба одержати результат. Однак майже всі машини працюють не в десятковій системі, а в якій-небуть іншій, наприклад у двійковій. Тому виникає необхідність переведення чисел із однієї системи в іншу. При розгляді правил переведення чисел із однієї системи числення в іншу обмежимось лише системами числення з невід'ємною базою. Оскільки переведення від'ємних чисел зводиться до переводу абсолютних величин і приписування їм знаку мінус, то досить розглянути перевід додатніх чисел.

Переведення чисел системи *P* в систему *Q* з допомогою арифметики системи *Q*.

Символічно такий перевід будемо позначати $P \to Q(Q)$.

Для того щоб число N, записане в системі P:

$$N = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, \dots, a_{-m})_P$$

перевести в систему Q, користуючись арифметикою системи Q, потрібно:

а) записати число N у вигляді:

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + \dots + a_{-m} \cdot 10^{-m};$$

б) замінити основу 10 і всі цифри $a_i (i=n,\ n\text{-}1,\ \dots,\ -m)$ системи P їхніми зображеннями в системі Q;

в) зробити обчислення, користуючись арифметикою системи Q.

Приклади:

а) Перевести число 10110,11 з двійкової системи числення у десяткову $(2 \to 10(10))$.

Оскільки

$$10110{,}11_{(2)} = 1 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2},$$

то замінивши основу системи числення – числом два, отримаємо:

$$1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}.$$

Провівши обчислення, користуючись арифметикою десяткової системи числення, дістаємо число $22{,}75_{10}$.

Отже, $$10110{,}11_2 = 22{,}75_{10}.$$

б) Перевести число $27{,}5_{10}$ з десяткової системи числення у двійкову $(10 \to 2(2))$.

Оскільки

$$27{,}5_{10} = 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1},$$

то, замінивши основу 10 і цифри 2, 7, 5 їхніми зображеннями у двійковій системі числення, отримаємо:

$$10 \cdot 1010^1 + 111 \cdot 1010^0 + 101 \cdot 1010^{-1}.$$

Зробивши обчислення, користуючись арифметикою двійкової системи числення, одержимо число $11011{,}1_2$.

Отже, $27{,}5_{10} = 11011{,}1_2$.

в) Перевести число $634{,}52_8$ з вісімкової системи числення у десяткову ($8 \to 10(10)$).

Подавши це число у вигляді

$$6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2},$$

і замінивши основу 10 – числом 8 (цифри 6, 3, 4, 5, 2 мають те саме зображення в десятковій системі числення) отримаємо:

$$6 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 5 \cdot 8^{-1} + 2 \cdot 8^{-2}.$$

Зробивши обчислення, користуючись арифметикою десяткової системи числення, одержуємо число $412{,}93750_{10}$.

Отже, $634{,}52_8 = 412{,}93750_{10}$.

г) Перевести число $98{,}6_{10}$ з десяткової системи числення у вісімкову ($10 \to 8(8)$). Зобразивши це число у вигляді

$$9 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1},$$

і замінивши основу число 10 і цифри 9, 8, 6 їхніми зображеннями у вісімковій системі числення, одержимо:

$$11 \cdot 12^1 + 10 \cdot 12^0 + 6 \cdot 12^{-1}.$$

Зробивши обчислення, керуючись арифметикою вісімкової системи числення дістанемо число $142{,}4_8$. Отже, $98{,}6_{10} = 142{,}4_8$.

Переведення чисел системи *P* в систему *Q* за допомогою арифметики системи *P*.

Символічно таке переведення будемо позначати $P \to Q(P)$. Оскільки для переведення будь-якого числа досить вміти переводити його дробову та цілу частини, то можна розглянути обидва ці випадки окремо.

Перевід цілих чисел. Нехай ціле число N, записане в системі P, треба перевести в систему Q. Оскільки N – ціле число, то його зображення в системі Q буде мати вигляд:

$$N = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_q,$$

тобто

$$N = b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + b_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + b_1 \cdot 10^1 + b_0 \cdot 10^0,$$

де $b_i (i = 0,1, \ldots, k)$ – цифри системи Q, які потрібно визначити, а 10 – основа системи Q.

Замінимо цифри $b_0, b_1, \ldots, b_k$ і основу 10 системи Q їхнім зображенням в системі P. Нехай a_i є зображенням цифри $b_i (i = 0,1, \ldots, k)$, а q – зображенням основи системи Q в системі P.

Тоді

$$N = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \ldots + a_1 q + a_0.$$

Поділивши обидві частини одержаної рівності на q, одержимо остачу a_0 і частку

$$N_1 = a_k q^{k-1} + a_{k-1} q^{k-2} + \ldots + a_1.$$

Якщо тепер частку N_1 розділити на q, то одержимо остачу a_1 і частку

$$N_2 = a_k q^{k-2} + a_{k-1} q^{k-3} + \ldots + a_2.$$

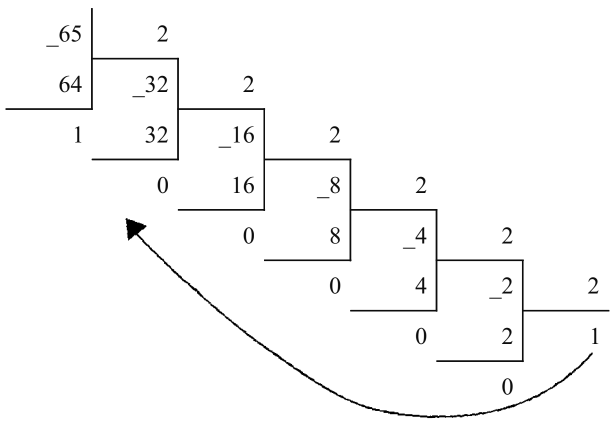
Повторюючи цей процес k разів, ми послідовно знайдемо всі числа $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$, причому остання частка $N_k = x_k$. Ділення виконуємо, користуючись арифметикою системи P.

Таким чином, при послідовному діленні числа і часток, які одержуються при діленні, на основу системи, записану в системі, тобто на q, одержимо у вигляді остач від ділення цифри, потрібні для зображення числа N в системі Q, записані в системі P. Послідовне ділення проводиться до того часу, поки не одержиться частка, менша за q. Ця остання частка дасть нам цифру числа N, записану в системі. При діленні користуються арифметикою системи P.

<u>Приклади</u>

а) Перевести число 65_{10} з десяткової системи числення у двійкову ($10 \rightarrow 2(10)$).

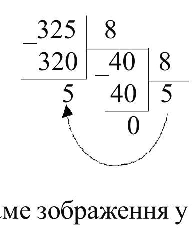
Оскільки:



і десяткові цифри 0, 1 мають те саме зображення в двійковій системі числення, то $65_{10} = 1000001_2$.

б) Перевести число 325_{10} з десяткової системи числення у вісімкову ($10 \rightarrow 8(10)$).

Оскільки:



і десяткові цифри 5, 0 мають те саме зображення у вісімковій системі числення, то $325_{10} = 505_8$.

в) Перевести число 3060_{10} з десяткової системи у шістнадцяткову ($10 \rightarrow 16$ (10)).

Оскільки:

$$
\begin{array}{r|r|l}
-3060 & 16 & \\
\underline{16} & -191 & 16 \\
-146 & \underline{16} & 11 \\
\underline{144} & -31 & \\
-20 & \underline{16} & \\
\underline{16} & 15 & \\
4 & &
\end{array}
$$

а десяткові цифри 15, 11 зображаються в шістнадцятковій системі числення як F і B, $3060_{10} = BF4_{16}$.

г) Перевести число 111011_2 з двійкової системи числення у десяткову ($2 \rightarrow 10(2)$).

Користуючись арифметикою двійкової системи числення, одержимо:

$$
\begin{array}{r|l}
-111011 & 1010 \\
\underline{1010} & 101 \\
-10011 & \\
\underline{1010} & \\
1001 &
\end{array}
.
$$

Двійкові числа 101 та 1001 в десятковій системі числення мають зображення 5 і 9 відповідно, $111011_2 = 59_{10}$.

<u>**Переведення правильних дробів.**</u> Нехай D – правильний дріб, записаний в системі P. Припустимо, що треба перевести дріб в систему Q. Нехай зображення D в системі Q знайдено і воно має вигляд $D = 0, b_{-1}\, b_{-2}\, b_{-3} \dots$,

тобто

$$D = b_{-1} \cdot 10^{-1} + b_{-2} \cdot 10^{-2} + b_{-3} \cdot 10^{-3} + \dots ,$$

де $b_{-1}, b_{-2}, b_{-3}, \dots$ – цифри, а 10 основа системи Q.

Замінивши цифри $b_{-1}, b_{-2}, b_{-3}, \dots$ і основу 10 їхніми зображеннями $a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$, і q системи P, одержимо:

$$D = a_{-1} \cdot q^{-1} + a_{-2} \cdot q^{-2} + a_{-3} \cdot q^{-3} + \dots .$$

Помножимо дві частини одержаної рівності на q. Одержимо число, ціла частина якого a_1 і дробова частина $D_1 = a_{-2} \cdot q^{-1} + a_{-3} \cdot q^{-2} + \dots$.

Помноживши D_1 на q, одержимо число, ціла частина якого a_{-2} і дробова

$$D_2 = a_{-3} \cdot q^{-1} + \dots .$$

Повторюючи множення потрібну нам кількість разів, ми знайдемо одну за одною цифри, потрібні нам для зображення числа D в системі Q. При множенні користуємося арифметикою системи P.

Таким чином, при послідовному множенні числа D і дробових частин добутків, які одержуються при множенні на основу Q, записану в системі P, тобто на q, одержимо у вигляді цілих частин добутків цифри, потрібні для зображення числа D в системі Q. Множення виконуємо, користуючись арифметикою системи P.

<u>Приклади:</u>

а) Перевести число $0{,}5625_{10}$ з десяткової системи числення у вісімкову ($10 \rightarrow 8(10)$).

Оскільки:

0,	5625
	x
	8
4	5000
	x
	8
4	0000

,

і десяткова цифра 4 має те саме зображення у вісімковій системі числення, то $0{,}5625_{10} = 0{,}44_8$.

б) Перевести число $0{,}375_{10}$ з десяткової системи числення у двійкову ($10 \rightarrow 2(10)$).

Оскільки:

0,	375
	x
	2
0	750
	x
	2
0	500
	x
	2
1	0

.

і десяткові цифри 0, 1 мають те саме зображення в двійковій системі числення, то $0{,}375_{10} = 0{,}001_2$.

в) Перевести число $0{,}5B4_{16}$ з шістнадцяткової системи числення у десяткову ($16 \rightarrow 10(16)$).

Оскільки:

0,	5B4
	x
	A
3	968
	x
	A
5	810
	x
	A
6	EA
	x
	A
9	04
	x
	A
0	28
	x
	A
1	9
	x
	A
5	A
	x
	A
6	4
	x
	A
2	8
	x
	A
5	0 .

і шістнадцяткові цифри 5, 5, 5, 6, 0, 1, 2 мають таке ж саме зображення і в десятковій системі числення, то $0{,}5B4_{16} = 0{,}3569015625_{10}$.

Зауваження: Найзручніше при переводі чисел з системи числення P в систему Q користуватися арифметикою системи P, якщо $p > q$.

Перевід чисел системи P в систему Q і навпаки, якщо $p = q^k$.

Нехай $p = q^k$, де – p і q цілі додатні числа. У цьому випадку загальні правила переводу значно спрощуються.

Для того, щоб перевести число системи P в систему Q при $p = q^k$, досить кожну цифру цього числа замінити відповідним k-розрядним числом в системі Q.

Для того, щоб перевести число системи Q в систему P при $p = q^k$, досить, рухаючись від коми вліво і вправо, розбити всі цифри числа на групи по k цифр у кожній (крайні групи доповнюються нулями, якщо це потрібно) і кожну групу замінити відповідною цифрою системи P.

Приклади:

а) Нехай $p = 8, q = 2, k = 3$

$435{,}641_8 = 100\ 011\ 101,\ 110\ 100\ 001_2 \quad (8 \to 2)$;

$751{,}237_8 = 111\ 101\ 001,\ 010\ 011\ 111_2 \quad (8 \to 2)$;

$1\ 001\ 111\ 001\ 010, 110\ 111\ 000\ 11_2 = 001\ 001\ 111\ 001\ 010, 110\ 111\ 000\ 110_2 = 11712{,}6706_8$ $(2 \to 8)$.

Трирозрядне двійкове число, яке відповідає певній вісімковій цифрі, називається тріадою. Відповідність між вісімковими цифрами і тріадами така:

$0 = 000$	$2 = 010$	$4 = 100$	$6 = 110$
$1 = 001$	$3 = 011$	$5 = 101$	$7 = 111$.

б) Нехай $p = 16, q = 2, k = 4$.

$A356{,}9E11_{16} = 1010\ 0011\ 0101\ 0110, 1001\ 1110\ 0001\ 0001_2 \quad (16 \to 2)$;

$48AB{,}C94E_{16} = 0100\ 1000\ 1010\ 1011, 1100\ 1001\ 0100\ 1110_2\ (16 \to 2)$;

$1\ 110\ 001\ 101\ 001\ 010{,}100\ 000\ 1110101_2 = 1110\ 0011\ 0100\ 1010, 1000\ 0011\ 1010\ 10000_2 =$ $= E34A{,}83A8_{16} \quad (2 \to 16)$.

Відповідність між цифрами в різних системах числення вказана в таблиці:

10	2	8	16
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7

10	2	8	16
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

1.7. Вправи.

1. Як поділяються системи числення?
2. Що називається двійковою системою числення?
3. Що називається вісімковою (шістнадцятковою) системою числення?
4. Як здійснити перехід із десяткової у всі інші системи числення?
5. Як здійснити перехід у десяткову систему числення?
6. Як виконуються дії у двійковій системі числення?
7. Здійснити перехід у двійкову систему числення 73,59; 134,17; 153,903 .
8. Перейти у десяткову систему числення $101110{,}11_{(2)}$; $11101{,}001_{(2)}$; $11000111{,}1_{(2)}$; $32{,}71_{(8)}$; $106{,}75_{(8)}$; $550{,}31_{(8)}$; $10A{,}B_{(16)}$; $49{,}0C_{(16)}$; $39D{,}F_{(16)}$.
9. Представити числа у всіх системах числення $3459{,}61_{(10)}$; $10111001{,}1_{(2)}$; $357{,}044_{(8)}$; $39F{,}A9_{(16)}$.
10. Виконати всі арифметичні дії з двійковими числами 101101; 11110; 11001; 10111; 10001; 110 .

Переведіть в десяткову систему числення:

№п/п	а	б	в
11.	11011,1001(2)	345,67(8)	A1,3C(16)
12.	10011,0011(2)	675,43(8)	D1,34(16)
13.	10001,0101(2)	394,27(8)	C2,3A(16)
14.	10111,011(2)	724,31(8)	1A2,3C(16)
15.	11011,1101(2)	372,16(8)	12A,C(16)
16.	11010,1011(2)	567,17(8)	17,191(16)
17.	1111,1101(2)	315,271(8)	7D,123(16)
18.	10101,1011(2)	654,32(8)	CA,12(16)
19.	11011,101(2)	321,21(8)	B11,1C(16)
20.	100001,1011(2)	567,21(8)	BA,23(16)
21.	1101,10001(2)	723,44(8)	A3 ,C1(16)
22.	10111,1011(2)	127,73(8)	131,AC(16)
23.	11011,10101(2)	235,72(8)	243,BA(16)
24.	11101,1001(2)	543,27(8)	35A,72(16)
25.	11111,10111(2)	654,32(8)	432,АД(16)
26.	110111,1111(2)	737,27(8)	543,A1(16)
27.	11111101,1011(2)	673,24(8)	654,A3(16)
28.	1011101,1101(2)	543,12(8)	CД,18(16)
29.	11011111,1011(2)	421,31(8)	FE,13(16)
30.	101101,10111(2)	347,52(8)	FA,2C(16)

№п/п	а	б	в
31.	1101111,111111(2)	724,13(8)	E1,C2(16)
32.	101101,1000001(2)	743,21(8)	A2,D3(16)
33.	1000001,111011(2)	673,32(8)	AC,D12(16)
34.	1100001,11101(2)	734,71(8)	A23,D1(16)
35.	11111011,111101(2)	473,57(8)	AC,D21(16)

Переведіть в двійкову систему числення.

№п/п	а	б	в
36.	437,12(8)	934,15(10)	CD,13(16)
37.	231,14(8)	842,27(10)	A11,12(16)
38.	343,17(8)	987,31(10)	134,57(16)
39.	241,03(8)	341,58(10)	3F,13(16)
40.	562,14(8)	253,63(10)	2A,43(16)
41	574,26(8)	148,75(10)	C3,A2(16)
42	632,43(8)	531,02(10)	C5,24(16)
43	745,21(8)	475,53(10)	A2,54(16)
44	703,64(8)	357,43(10)	5A,61(16)
45	743,57(8)	543,61(10)	35,CD(16)
46	761,27(8)	647,38(10)	6A,2A(16)
47	724,53(8)	673,41(10)	3B,45(16)
48	675,46(8)	345,07(10)	2C,64(16)
49	463,25(8)	271,83(10)	4D,35(16)
50	127,46(8)	347,17(10)	E3,42(16)
51	174,34(8)	285,29(10)	E6,57(16)
52	724,45(8)	248,92(10)	E8,C2(16)
53	347,52(8)	824,45(10)	A9,3C(16)
54	146,63(8)	896,54(10)	29,F3(16)
55	144,52(8)	873,64(10)	30,CA(16)
56	265,17(8)	762,91(10)	B11,12(16)
57	625,37(8)	672,58(10)	4C,23(16)
58	136,62(8)	725,68(10)	4F,36(16)
59	154,43(8)	273,91(10)	4B,A2(16)
60	651,32(8)	438,98(10)	5A,73(16)

Системи числення.

10	2	8	16
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	*A*
11	1011	13	*B*
12	1100	14	*C*
13	1101	15	*D*
14	1110	16	*E*
15	1111	17	*F*
16	10000	20	10

1+1=10
1+0=1
0+0=0

$1 \cdot 1 = 1$
$1 \cdot 0 = 0$

Позиційний запис: …3 2 1 0, -1 -2 -3… (порядки порядки) Приклад: 3 4 5 6, 2 0 7 1 (3 2 1 0 -1 -2 -3 -4)

Переходи	Правила переходів з однієї системи числення в іншу.
2, 8, 16→10	Розписати по порядках початкові системи. **Приклад:** $271{,}35_{(8)}=2\cdot8^2+7\cdot8^1+1\cdot8^0+3\cdot8^{-1}+5\cdot8^{-2}$
8→2	Кожну цифру з (8) записати в (2), виділяючи для неї 3 позиції **Приклад:** $36{,}52_{(8)}=\frac{011}{3}\,\frac{110}{6},\frac{101}{5}\,\frac{010}{2}\,(2)=11110{,}10101_{(2)}$
16→2	Кожну цифру з (16) записати в (2), виділяючи для неї 4 позиції. **Приклад:** $E2{,}OA3_{(16)}=\frac{1110}{E}\,\frac{0010}{2},\frac{0000}{0}\,\frac{1010}{A}\,\frac{0011}{3}\,(2)=11100010{,}000010100011_{(2)}$
2→8	Число в (2) розбити на групи по 3 знаки (←,→) і в кожній групі перейти в (8). **Приклад:** $101110{,}110_{(2)}=\underset{\leftarrow}{\overline{101}\;\overline{110}},\underset{\rightarrow}{\overline{110}\;\overline{100}}=56{,}64_{(8)}$
2→16	Число в (2) розбити на групи по 4 знаки (←,→) і в кожній групі перейти в (16) **Приклад:** $101110{,}110_{(2)}=\underset{\leftarrow}{\overline{0010}\;\overline{1110}},\underset{\rightarrow}{\overline{1100}}=2E,C_{(16)}$
10→2, 8, 16	**Приклад:** $27{,}45_{(10)}\rightarrow(2)$ а) ціла частина – ділення б) дробова частина – множення. а) $\begin{array}{r\|r\|r\|r\|r} 27 & 2 & & & \\ 26 & 13 & 2 & & \\ 1 & 12 & 6 & 2 & \\ & 1 & 6 & 3 & 2 \\ & & 0 & 3 & 1 \\ & & & 1 & \end{array}$ $27_{(10)}=11011_{(2)}$ б) $\begin{array}{r\|l} & 0{,}45 \\ & \times 2 \\ 0 & 90 \\ & \times 2 \\ 1 & 80 \\ & \times 2 \\ 1 & 60 \\ \ldots & \ldots\ldots \end{array}$ $0{,}45_{(10)}=0{,}011\ldots_{(2)}$ в) Висновок $27{,}45_{(10)}=11011{,}011\ldots_{(2)}$

<u>РОЗДІЛ 2. НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ</u>

<u>2.1. Абсолютна і відносна похибки. Межа похибки.</u>

При розв'язанні практичних задач часто доводиться мати справу з наближеними значеннями різних числових величин. До них відносяться: результати вимірювань різних величин з допомогою приладів; значення отримані при зчитуванні на графіках, діаграмах, номограмах; проектні дані; результати заокруглення чисел; результати дій над наближеними числами; табличні значення деяких величин; результати обчислень значень функцій. Наближені значення (наближення, наближені числа) можуть значно відрізнятись від точних, або бути близькими до них.

Для оцінки відхилення наближених чисел від точних використовують такі поняття як абсолютна та відносна похибки.

<u>Абсолютною похибкою</u> наближення називається модуль різниці між точним значенням величини a і її наближеним значенням x, тобто

$$|a - x| = \Delta .$$

<u>Приклад.</u>

Абсолютна похибка наближення числа $\frac{4}{9}$ числом 0,44 складає

$$\Delta = \left|\frac{4}{9} - 0{,}44\right| = \left|\frac{4}{9} - \frac{11}{25}\right| = \frac{100-99}{225} = \frac{1}{225}.$$

Якщо точне число невідоме, то знайти абсолютну похибку Δ неможливо. На практиці вводять оцінку допустимої при даних вимірюваннях чи обчисленнях абсолютної похибки, яку називають **<u>межею абсолютної похибки</u>** і позначають буквою h. Вважають, що $h \geq \Delta$. Як правило, межу абсолютної похибки встановлюють з практичних міркувань, наприклад, при вимірюваннях за межу абсолютної похибки приймають найменшу поділку приладу.

При записі наближених чисел часто використовують поняття вірної та сумнівної цифри.

Цифра β називається **<u>вірною</u>**, якщо межа абсолютної похибки даного наближення не перевищує одиниці того розряду, в якому записана ця цифра. В іншому випадку цифра називається **<u>сумнівною.</u>**

<u>Наприклад:</u> в числі a=9,746±0,04 дві цифри вірні, бо похибка 0,04 не перевищує одиниці розряду десятих. Цифри 9 і 7 вірні, оскільки h=0,04<0,1, а цифри 4 і 6 є сумнівні, бо h=0,04>0,01.

В кінцевому записі наближеного числа зберігають тільки вірні цифри. Так, число a=9,746±0,04 можна записати у вигляді a=9,7; число a=9,746±0,001 – у вигляді

a=9,746. Якщо в десятковому дробі останні вірні цифри – нулі, то їх залишають в записі числа.

Наприклад: якщо a=0,26±0,001, то правильний запис числа є 0,260.

Якщо в цілому числі останні нулі є сумнівними цифрами, їх виключають із запису числа.

Саме тому при роботі з наближеними числами широко використовують стандартну форму запису числа.

Наприклад: в числі a=25000±25 вірними є три перші цифри, а два останні нулі – сумнівні цифри. Запис числа можливий лише у вигляді:

$$25000 \pm 100 \text{ або } 250 \cdot 10^2 = 2{,}50 \cdot 10^4.$$

Отже, в десятковому записі наближеного числа остання цифра вказує на точність наближення, тобто межа абсолютної похибки не перевищує одиниці останнього розряду.

Наприклад:

1. Запис $a \approx 3{,}29$ означає, що a=3,29±0,01, тобто межа абсолютної похибки h=0,01.
2. Запис $a \approx 0{,}023$; h=0,001.
3. Якщо $a \approx 326$, то h=1.

В десятковому записі числа **значущими** цифрами називають всі його вірні цифри починаючи з першої зліва, відмінної від нуля.

Наприклад: в числі 1,13 – три значущі цифри; в числі 0,017 – дві; в числі 0,303 – три; в числі 5,200 – чотири; в числі $25 \cdot 10^3$ – дві значущі цифри.

При такому підході до запису наближеного числа потрібно вміти заокруглювати числа.

Правила заокруглення чисел:

– Якщо перша цифра, яку відкидаємо є меншою за п'ять, то в останньому розряді, що зберігається цифра не змінюється. Наприклад: $879{,}673 \approx 879{,}67$.

– Якщо перша цифра, яку відкидаємо більша п'яти, то в останньому розряді, що зберігається цифра збільшується на одиницю. Наприклад: $456{,}87 \approx 456{,}9$.

– Якщо перша цифра, яка відкидається п'ять і за нею є ще цифри відмінні від нуля, то в останньому розряді, що зберігається цифра збільшується на одиницю. Наприклад: $1246{,}5002 \approx 1247$.

– Якщо перша цифра, яка відкидається – п'ять і за нею немає більше ніяких цифр, відмінних від нуля, то останню цифру, що зберігаємо залишаємо без зміни, якщо вона парна і збільшуємо на одиницю, якщо не парна. Наприклад: $0{,}275 \approx 0{,}28$; $1{,}865 \approx 1{,}86$.

Абсолютна похибка не повністю характеризує точність наближення. Наприклад, Δ=1 см буде грубою помилкою при вимірюванні жука, і незначною при вимірюванні кита. Те ж саме можна сказати і про межу абсолютної похибки. Якість (точність) наближення краще характеризується відносною похибкою.

Відносною похибкою ω (омега) наближення x величини a називається відношення абсолютної похибки Δ цього наближення до модуля наближеного значення x, тобто

$$\omega = \frac{\Delta}{|x|}.$$

Оскільки абсолютна похибка Δ звичайно буває невідома, то на практиці оцінюють модуль відносної похибки деяким числом, яке не менше від цього модуля:

$$|\omega| \le E.$$

Число E називається **межею відносної похибки**.

Межу відносної похибки можна обчислити за формулою: $E = \frac{h}{|x|}$.

Звичайно відносна похибка виражається у відсотках.

За допомогою відносної похибки легко встановити точність наближення.

Приклад 1. Знайти відносну похибку числа $a = 3{,}25 \pm 0{,}03$.

Розв'язання: Маємо $x = 3{,}25$; $\Delta = 0{,}03$.

Отже
$$\omega = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0{,}03}{3{,}25} = \frac{3}{325} \approx 0{,}0092 = 0{,}92\%.$$

Приклад 2. Порівняти точність вимірювання товщини книги d (см) і висоти стола H (см), якщо відомо, що $d = 2 \pm 0{,}5$; $H = 100 \pm 0{,}5$.

Розв'язання:

$$\omega_d = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25 = 25\%$$

$$\omega_H = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}005 = 0{,}5\%.$$

Як бачимо, точність вимірювання висоти стола значно вища.

2.2. Виконання дій над наближеними числами.

Результат арифметичних дій над наближеними числами є також наближене число.

Необхідно вміти встановити похибки результатів обчислень. Їх знаходять з точним та без точного врахування похибок вихідних даних. Правила знаходження похибок результатів дій з **точним врахуванням похибки** наведено в таблиці (позначення a, b – вихідні дані; h_a, h_b – межі абсолютних похибок відповідно чисел a, b; E_a, E_b – межі відносних похибок).

Дія	Межа абсолютної похибки	Межа відносной похибки
$a+b$	$h_{a+b}=h_a+h_b$	$E_{a+b}=\dfrac{h_a+h_b}{a+b}$
$a-b$	$h_{a-b}=h_a+h_b$	$E_{a-b}=\dfrac{h_a+h_b}{a-b}$
$a\cdot b$	$h_{ab}=h_a\|b\|+h_b\|a\|\approx abE_{ab}$	$E_{ab}=\dfrac{h_a}{a}+\dfrac{h_b}{b}=E_a+E_b$
$\dfrac{a}{b}$	$h_{\frac{a}{b}}=\dfrac{h_a\|b\|+h_b\|a\|}{b^2}\approx\dfrac{a}{b}E_{\frac{a}{b}}$	$E_{\frac{a}{b}}=\dfrac{h_a}{a}+\dfrac{h_b}{b}=E_a+E_b$
a^n	$h_{a^n}=na^{n-1}h_a\approx a^nE_{a^n}$	$E_{a^n}=\dfrac{n\cdot h_a}{a}=n\cdot E_a$
$\sqrt[n]{a}$	$h_{\sqrt[n]{a}}=\dfrac{h_a}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}\approx\sqrt[n]{a}E_{\sqrt[n]{a}}$	$E_{\sqrt[n]{a}}=\dfrac{h_a}{n\cdot a}=\dfrac{E_a}{n}$

<u>Приклад 3.</u> Обчислити наближене значення виразу $x=\dfrac{5{,}34\cdot 5{,}62^2}{\sqrt{18{,}50}}$ і знайти межу похибок результату.

<u>Розв'язання:</u> знаходимо значення квадрата числа 5,62 і квадратного кореня із числа 18,50. Маємо $5{,}62^2=31{,}58$; $\sqrt{18{,}50}=4{,}301$. Тоді

$$x=\frac{5{,}34\cdot 31{,}58}{4{,}301}=39{,}208\approx 39{,}2\ .$$

Знайдемо границю відносної похибки результату:

$$E=\frac{0{,}01}{5{,}34}+2\frac{0{,}01}{5{,}62}+\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}01}{18{,}50}=0{,}0019+0{,}0036+0{,}00028\approx 0{,}0058.\ .$$

Границя абсолютної похибки результату:

$$h=39{,}2\cdot 0{,}0058\approx\ 0{,}23\approx 0{,}3\ .$$

<u>Відповідь:</u> $x=39{,}2\pm 0{,}3.$

Приклад 4. Обчислити наближене значення виразу $x = \dfrac{3{,}15 \cdot \sqrt{6{,}24}}{\cos 38^0 24'}$ і знайти границю похибки результату.

Розв'язання: знаходимо значення квадратного кореня із числа 6,24 і $\cos 38^{\circ}24'$, маємо: $\sqrt{6{,}24} = 2{,}49800, \cos 38^0 24' = 0{,}7837.$

$$x = \frac{3{,}15 \cdot 2{,}49800}{0{,}7837} \approx 10{,}04\,.$$

Границя відносної похибки результату:

$$E = \frac{0{,}01}{3{,}15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}01}{6{,}24} + \frac{0{,}0001}{0{,}7837} =$$

$$=0{,}0032+0{,}00081+0{,}00013 \approx 0{,}0042 \approx 0{,}005=0{,}5\%\,.$$

Границя абсолютної похибки результату h=10,04·0,005=0,05 .

Відповідь: x=10,04±0,05 .

Виконання дій без точного врахування похибки. Точне врахування похибки ускладнює обчислення. Тому, якщо не потрібно враховувати похибки проміжних результатів, можна використовувати більш прості правила.

Додавання і **віднімання** наближених обчислень рекомендується виконувати так:

а) виділити доданок з найменшим числом вірних десяткових знаків;

б) заокруглити інші доданки так, щоб кожне із них містило на один десятковий знак більше ніж виділене;

в) виконати дії, враховуючи всі збережені десяткові знаки;

г) результати заокруглити і зберігти стільки десяткових знаків, скільки їх є в наближеному числі із найменшим числом десяткових знаків.

Множення і ділення наближених обчислень рекомендується виконувати так:

а) виділити серед даних чисел, число з найменшого кількістю вірних значущих цифр;

б) заокруглити решту даних так, щоб кожне із них містило на одну значущу цифру більше, ніж у виділеному;

в) виконати дії – зберігти всі значущі цифри;

г) зберігати в результаті стільки значущих цифр, скільки їх має виділене число з найменшою кількістю вірних значущих цифр.

При **піднесенні до степеня** наближеного числа в результаті зберігають стільки значущих цифр, скільки вірних значущих цифр має основа степеня.

При **добуванні кореня** з наближеного числа в результаті зберігають стільки вірних цифр, скільки має підкореневе число.

2.3. Вправи.

1. Назвати джерела отримання наближених чисел.
2. Дати означення абсолютної похибки наближення.
3. Яке число можна взяти за межу абсолютної похибки?
4. Сформулювати правило заокруглення чисел.
5. Дати означення відносної похибки наближення.
6. Яке число можна взяти за межу відносної похибки?
7. Які цифри числа називаються значущими?
8. Як визначають вірні цифри наближеного числа?
9. Сформулювати правила дій над наближеними числами.

10. Знайти абсолютну похибку наближення $\frac{11}{40} \approx 0{,}27$.

11. Заокруглити число до одиниць і знайти абсолютну і відносну похибки округлення:

а) 10,59 ; б) 0,892 .

12. Заокруглити число 73,1729 до тисячних, сотих, десятих, одиниць, десятків, сотень і знайти абсолютну та відносну похибки результатів.

13. Знайти відносну похибку наближення: а) числа $\frac{1}{3}$ числом 0,33; б) числа $\frac{1}{7}$ числом 0,14.

14. Скільки вірних цифр має число:

а) $5{,}74 \pm 0{,}01$; б) $1{,}174 \pm 0{,}025$; в) $0{,}874 \pm 0{,}05$;
г) $0{,}56 \pm 0{,}01$; д) $4{,}675 \pm 0{,}04$; е) $9{,}456 \pm 0{,}456$.

15. Заокруглити наближене значення числа x до першої вірної цифри:

а) $x=0{,}2391 \pm 0{,}05$; б) $x=1{,}0738 \pm 0{,}0025$; в) $x=2354 \pm 50$;
г) $x=0{,}6709 \pm 0{,}03$; д) $x=16{,}38 \pm 0{,}5$; е) $x=23{,}54 \pm 1$.

16. Наближене значення маси Землі $M=(5{,}98 \pm 0{,}01)\cdot 10^{24}$кг. Маса кулі рушниці $m=(9 \pm 1)$. Яке вимірювання є точнішим?

17. Обчислити наближене значення виразу і границі похибок результату:

$$\frac{437{,}5}{0{,}32 \cdot 84{,}8} \; ; \; \frac{4{,}11 \cdot (2{,}37)^3}{\sin 15^0 12'} \; ; \; \frac{2.93 \cdot \mathrm{tg}\, 48^0 30'}{\sqrt{5.91}} \; .$$

18. Знайти абсолютну та відносну похибки наближених чисел, якщо всі цифри вірні:

7,47; 12,7; 56,29; 0,47; 5,78; 573; 0,00247;
$2{,}45\cdot 10^3$; $2{,}14\cdot 10^{-3}$; $4{,}2\cdot 10^2$; $1{,}73\cdot 10^{-1}$; 0,0751; 1,345.

19. Виконати дії з точним та без точного врахування похибки:

$a = 1{,}73$; $b = 4{,}531$; $c = 0{,}294$;

$$\frac{a^2 b}{c}; \quad \frac{a+b}{c}; \quad \frac{a\sqrt{b}}{c}; \quad \frac{ab}{c^2}.$$

20. Обчислити $X = (a+b)/c$, якщо a=82,6, b=93,8 і c=61,9. Вказати границю абсолютної та відносної похибок.

21. Обчислити площу прямокутника, якщо a= 78,6 і h = 48,7. Вкажіть вірні цифри відповіді.

22. Обчислити абсолютні та відносні похибки результатів, якщо всі цифри вірні:

$$\sqrt{38{,}9}; \quad \sqrt[3]{68{,}4}; \quad \sqrt[5]{35{,}92}; \quad \sqrt[4]{16{,}96}; \quad (4{,}36)^5; \quad (7{,}28)^3; \quad (3{,}91)^2; \quad (4{,}27)^2.$$

23. Обчислити наближене значення результату, користуючись:

а) правилами дій над наближеними числами;

б) формулами для оцінки границь похибок.

Дано: $a = 4{,}53$; $b = 0{,}391$.

Знайти: a-b; a:b; $\sqrt[3]{a}$; b^5.

24. Обчислити наближене значення результату, користуючись формулами для оцінки границь похибок результатів дій. Результат записати через вірні цифри.

Дано: $a = 3{,}01$; $b = 2{,}6$.

Знайти: $a+b$; $a \cdot b$; $\sqrt{a}, \sqrt{b}$; a^3.

25. Обчислити наближене значення виразу і границі похибок результату

$$\frac{a^2 \cdot b^3}{\sqrt{c}}; \; a = 1{,}54; \; b = 0{,}8343; \; c = 2{,}495.$$

Наближені числа

a-точне число	> або <	x-наближене число
Знають не завжди		Знають з практики

Характеристика наближеного числа: ПОХИБКА.

Абсолютна похибка

$\Delta = |x - a|$;

$x - \Delta \le a \le x + \Delta$

Відносна похибка

$\delta = \frac{\Delta}{x}$ %($*100\%$)

Границя похибок: якщо a – невідоме + практика.

Границя абсолютної похибки

$h \ge \Delta$

Границя відносної похибки

$E \ge \delta,\ E = h / x$

Вірна цифра: Якщо Δ не перевищує одиниці розряду, в якому стоїть цифра.

$a_0,a_1\underline{\underline{a_2}} = a_0,a_1 a_2 \pm 0{,}01$ вірна

Запис наближеного числа $a \pm \Delta$; $a_0,a_1\underline{\underline{a_2}}$ *вірна*

Приклад: 2,47±0,212,47⇒2,47±0,01;41,5⇒41,5±0,1

Значуща цифра: Всі вірні цифри, крім нулів, що розміщені лівіше першої відмінної від нуля цифри.

Правила дій з наближеними числами.

Без точного врахування похибки.

1. При "+" і "-" наближених чисел молодший збережений десятковий розряд результату повинен бути найбільшим серед десяткових розрядів, що виражаються останніми вірними значущими цифрами вихідних даних.
2. При "x" і ":" наближених чисел в результаті треба зберігати стільки значущих цифр, скільки їх має те з наближених вихідних даних, в якому найменше число вірних значущих цифр.
3. В проміжкових результатах рекомендується зберігати на одну-дві цифри більше, ніж вказано в правилах 1 і 2. В кінцевому результаті останні цифри треба округлити.

З точним врахуванням похибки.

Дії	Границя абсолютної похибки	Границя відносної похибки
$a+b$	$h_{a+b} = h_a + h_b$	$E_{a+b} = \frac{h_a + h_b}{a+b}$
$a-b$	$h_{a-b} = h_a + h_b$	$E_{a-b} = \frac{h_a + h_b}{a-b}$
ab	$h_{ab} = h_a\lvert b\rvert + h_b\lvert a\rvert \approx abE_{ab}$	$E_{ab} = \frac{h_a}{a} + \frac{h_b}{b} = E_a + E_b$
$\frac{a}{b}$	$h_{a/b} = \frac{h_a\lvert b\rvert + h_b\lvert a\rvert}{b^2} \approx \frac{a}{b}E_{a/b}$	$E_{a/b} = \frac{h_a}{a} + \frac{h_b}{b} = E_a + E_b$
a^n	$h_{a^n} = na^{n-1}h_a \approx a^n E_{a^n}$	$E_{a^n} = n\frac{h_a}{a} = nE_a$
$\sqrt[n]{a}$	$h_{\sqrt[n]{a}} = \frac{h_a}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}} \approx \sqrt[n]{a}E_{\sqrt[n]{a}}$	$E_{\sqrt[n]{a}} = \frac{h_a}{na} = \frac{E_a}{n}$

РОЗДІЛ 3. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

3.1. Алгебраїчна форма комплексного числа.

На множині дійсних чисел ряд алгебраїчних задач, зокрема знаходження коренів квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом, немає розв'язку. Введемо деяке нове число, яке вважатимемо розв'язком рівняння $x^2+1=0$. Корінь рівняння $x^2+1=0$ або $x^2=-1$ називається уявною одиницею та позначається буквою i. Таким чином $i^2=-1$.

В деяких технічних дисциплінах уявну одиницю позначають буквою j. В подальшому використовуватимемо обидва позначення.

Уявна одиниця дозволяє ввести числа нового виду, які називають комплексними.

Комплексним числом називають вираз виду $a+ib$, де a, b – дійсні числа, i – уявна одиниця.

Число a називають **дійсною**, а число ib – **уявною** частинами комплексного числа. Комплексне число, як правило, позначають буквою z. Два комплексні числа a_1+ib_1 а a_2+ib_2 називаються **рівними** тоді і тільки тоді, коли $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, тобто коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти при уявній частині.

Поняття «більше» і «менше» для комплексних чисел не визначено. Комплексне число $z=0+i0$ називається нулем і позначається 0; комплексне число $z=a+i0$ ототожнюється з дійсним числом a; комплексне число $z=0+ib$ називають чисто уявним і позначають ib. Число 0 є єдиним числом, яке одночасно є і дійсне, і чисто уявне.

Комплексні числа $a+ib$ та $a-ib$ називаються **спряженими** і позначаються z та $\bar{z}$. Наприклад, в числі $z=1+2i$ $a=1$, $b=2$, спряженим до нього буде число $\bar{z}=1-2i$, а для числа $z=1-3i$ спряженим буде число $\bar{z}=1+3i$.

Множину комплексних чисел прийнято позначати буквою C. Запис комплексного числа у вигляді $z=a+ib$ називається **алгебраїчною формою** комплексного числа.

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

Додавання, віднімання, множення комплексних чисел в алгебраїчній формі виконують за правилами відповідних дій над многочленами.

Приклад 1. Знайти суму та добуток комплексних чисел $z_1=2+7i$; $z_2=3+5i$.

Розв'язання: Суму знаходимо формальним додаванням двочленів $2-7i$, $3+5i$; $z_1+z_2=(2-7i)+(3+5i)=2-7i+3+5i=5-2i$.

Добуток знаходимо перемноживши двочлени $2-7i$ та $3+5i$ з подальшою заміною i^2 на -1.

$$z_1 \cdot z_2=(2-7i)\cdot(3+5i)=6-21i+10i-35i^2=6-11i+35=41-11i.$$

Відповідь: $z_1+z_2=5-2i$; $z_1 \cdot z_2=41-11i$.

Легко побачити, що добуток двох спряжених чисел є дійсним числом:

$$z\cdot \bar{z} = (a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - bai + abi - (bi)^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2.$$

Отже, $\boxed{z\cdot\bar{z} = a^2 + b^2}$.

Скористаємось цією властивістю для введення дії ділення двох комплексних чисел.

При діленні комплексних чисел $\dfrac{z_2}{z_1}$, де $z_1 = a_1+ib_1$, $z_2 = a_{-2}+ib_2$ достатньо домножити чисельник та знаменник дробу $\dfrac{a_2+ib_2}{a_1+ib_1}$ на число спряжене до знаменника, тобто на $a_1 - ib_1$.

<u>Приклад 2.</u> Дано комплексні числа $z_1 = 3 - 4i$ та $z_2 = 10 + 5i$. Знайти різницю $z_2 - z_1$ і частку $z_2 : z_1$.

<u>Розв'язання:</u> Знаходимо різницю відніманням двочленів $3-4i$ та $10+5i$.

$z_2 - z_1 = (10+5i)-(3-4i) = 10+5i-3+4i = 7+9i.$

Щоб знайти частку $z_2 : z_1$ домножимо чисельник та знаменник на число, спряжене до знаменника:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{10+5i}{3-4i} = \frac{(10+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{30+15i+40i+20i^2}{3^2+4^2} = \frac{10+55i}{25} = 0{,}4+2{,}2i\ .$$

<u>Відповідь</u>: $z_2 - z_1 = 7+9i$; $z_2 : z_1 = 0{,}4+2{,}2i$.

Дії над комплексними числами мають наступні цікаві властивості:

$$\boxed{\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}\ ;\quad \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\ ;\quad \overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2}\quad (\overline{z_2}\neq 0).}$$

Доведення випливає з означення спряжених чисел. Дійсно,

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)} = \overline{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)} =$$
$$= (a_1+a_2) - i(b_1+b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ .$$

Аналогічно доводяться й інші наведені властивості.

Піднесення комплексного числа до степеня здійснюється згідно з формулами піднесення двочлена до степеня. При цьому слід враховувати, що

$$\boxed{\begin{array}{l} i^0=1\ ,\quad i^1=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=-i\ ,\quad i^4=1\ , \\ \qquad i^n = i^{4m+k} = (i^4)^m\cdot i^k = i^k,\quad \text{де } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \end{array}}$$

Наприклад:

$i^{24} = i^{4\cdot 6} = 1,\qquad i^{59} = i^{4\cdot 14+3} = i^3 = -i;\qquad i^{42} = i^{4\cdot 10+2} = i^2 = -1.$

Приклад 3. Знайти комплексне число $z = \dfrac{12+5i}{(2+3i)^2}$.

Розв'язання: Виконавши в знаменнику піднесення до степеня, отримаємо:

$$z = \frac{12+5i}{4+12i+9i^2} = \frac{12+5i}{4+12i-9} = \frac{12+5i}{-5+12i}.$$

Домноживши чисельник та знаменник на число, спряжене до знаменника, тобто на -5-12*i,* отримаємо:

$$z = \frac{(12+5i)(-5-12i)}{(-5+12i)(-5-12i)} = \frac{-60-25i-144i-60i^2}{5^2+12^2} = \frac{-60-169i+60}{25+144} = \frac{-169i}{169} = -i.$$

Відповідь: $z=-i$.

3.2. Геометрична інтерпретація комплексних чисел.

Кожному комплексному числу $z = a+ib$ можна поставити у відповідність впорядковану пару дійсних чисел $(a; b)$ і навпаки. Така впорядкована пара дійсних чисел визначає точку або вектор на площині.

Отже, комплексне число виду $z = a+ib$ зображається на координатній площині точкою $M(a, b)$ або вектором, початок якого співпадає з початком координат, а кінець з т. M.

Сама координатна площина називається при цьому комплексною площиною, вісь абсцис – дійсною віссю, вісь ординат – уявною віссю.

Наприклад, зобразимо числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -3 + i$, $z_3 = -4 - 4i$, $z_4 = 3i$, $z_5 = 3 - 2i$, $z_6 = 6$ (рис. 1).

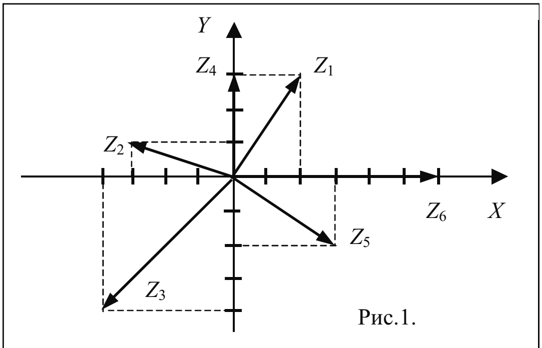


Рис.1.

Представлення комплексного числа як вектора на площині дозволяє ввести поняття модуля та аргументу комплексного числа.

<u>Модулем</u> комплексного числа називають довжину вектора, що відповідає даному числу (позначають r або ρ).

<u>Аргументом</u> комплексного числа ($z \neq 0$) називають величину кута φ між додатнім напрямком дійсної осі і вектором, що відповідає даному комплексному числу.

Розглянемо рисунок:

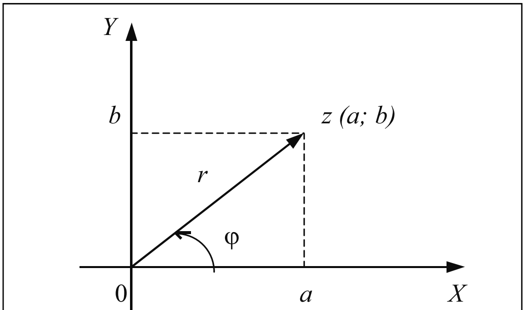


рис. 2

На основі теореми Піфагора отримуємо $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Наприклад, комплексне число $z = 8 - 6i$ має модуль рівний 10, бо

$$r = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 .$$

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$, на відміну від модуля, визначається неоднозначно. Так аргументами числа 5 є наступні кути $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 2\pi$; $\varphi_3 = -2\pi$, … $\varphi_k = 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$). Серед нескінченої множини значень аргументу лише одне належить проміжку ($-\pi$; π) або (0; 2π). Ці значення аргументу ми і будемо визначати.

Аргумент легко визначити, якщо комплексне число розміщене в I чверті. Дійсно, згідно з тригонометричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику (рис. 2) матимемо:

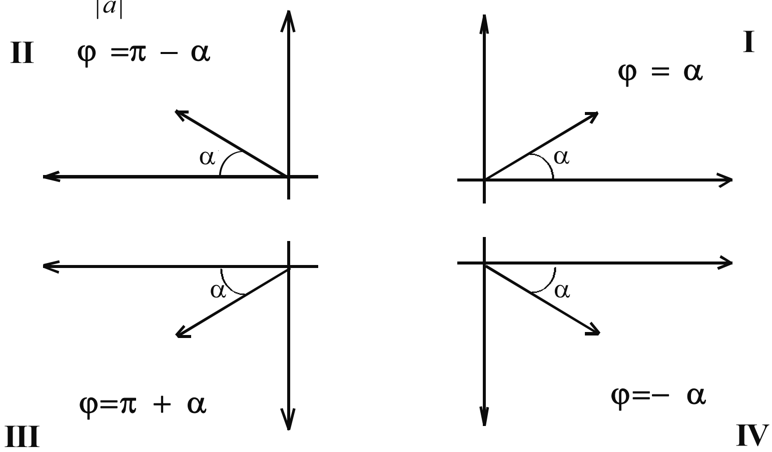
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} .$$

Якщо комплексні числа розміщені в інших четвертях, то необхідно провести додаткові міркування. Розглянемо рис. 3. Бачимо, що для

II чверті $\varphi = p - \mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$; для III чверті $\varphi = p + \mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$;

для IV чверті $\varphi = -\mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$, або $\varphi = 2p - \mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$,

якщо за $\mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$ приймати значення гострого кута α.



Таким чином, алгоритм знаходження аргументу комплексного числа наступний:

1. Визначити коефіцієнти *a, b* заданого комплексного числа.

2. Знайти $\alpha = \mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$.

3. Встановити, в якій чверті розташоване комплексне число.

4. Обчислити аргумент φ згідно приведеним формулам.

Можливі й інші способи знаходження аргументу комплексного числа, наприклад:

$$\varphi = \begin{cases} \mathrm{acrtg}\dfrac{b}{a}, & \textit{якщо точка } (a;b) \textit{ належить I або IV чверті}; \\ \pi - \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}, & \textit{якщо точка } (a;b) \textit{ належить II або III чверті}; \end{cases}$$

або аргумент j визначають з системи: $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}; \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}. \end{cases}$

Приклад 4. Знайти аргумент комплексного числа $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Розв'язання:

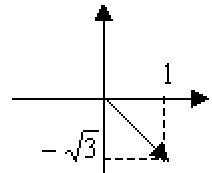


рис.4

1. Визначимо коефіцієнти a=1, $b = -\sqrt{3}$.

2. Знайдемо гострий кут $\alpha = \operatorname{arctg}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = 60^0$.

3. Встановимо, в якій чверті розташоване дане число (рис. 4).
4. Аргумент, що відповідає даному комплексному числу належить IV чверті, тобто $\varphi = -\alpha = -60^0$.

Відповідь: $\varphi = -60^o = -\frac{\pi}{3}$.

3.3. Тригонометрична форма комплексного числа.

Розглянемо рис. 2. Згідно з тригонометричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику числа a, b можна виразити через r і φ таким чином:

$$a = r\cos\varphi \; ; \; b = r\sin\varphi \; .$$

Тоді комплексне число запишеться у вигляді:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Запис комплексного числа в такому вигляді називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

Отже, для того, щоб перейти від алгебраїчної форми запису комплексного числа $z = a + ib$ до тригонометричної, достатньо знайти його модуль і аргумент.

Приклад 5. Записати число $z = -\sqrt{3} - i$ в тригонометричній формі.

Розв'язання:

Знайдемо модуль $r = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$

Знайдемо гострий кут $\alpha = \operatorname{arctg}\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Вектор, що відповідає даному комплексному числу належить третій чверті, тому аргумент дорівнює $\varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, отже $z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

Відповідь: $z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

Для того, щоб перейти від тригонометричної форми запису комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ до алгебраїчної, достатньо знайти дійсні числа a, b з формул $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$.

Приклад 6: Записати число $z = 2(\cos 330^0 + i\sin 330^0)$ в алгебраїчній формі.

Розв'язання:

Знайдемо $\sin 330^0$ та $\cos 330^0$

$$\cos 330^0 = \cos(360^0 - 30^0) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin 330^0 = \sin(360^0 - 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2};$$

$$\text{тоді} \quad a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}; \quad b = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Отже, $$z = 2\left(\cos 330^0 + i\sin 330^0\right) = \sqrt{3} - i.$$

Відповідь: $z = \sqrt{3} - i$.

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.

В тригонометричній формі запису комплексних чисел виконують дії множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня n-ого степеня. Виведення формул, за якими виконуються дії, відносно прості і ґрунтуються на основних формулах тригонометрії.

Нехай $$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ та } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

Тоді: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отже, при множенні комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі, їх модулі перемножують, а аргументи додають; при діленні – модулі ділять, а аргументи віднімають.

Правило множення комплексних чисел автоматично розповсюджується на довільне число множників. Якщо взяти рівні множники $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отриману формулу називають **формулою Муавра.**

Для добування кореня n-го степеня з комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ використовують формулу:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де $\sqrt[n]{r}$ арифметичний корінь, $k = 0, 1,..., n-1$.

Приклад 7. Дано комплексні числа $z_1=12(\cos225^0+i\sin225^0)$ та $z_2=\dfrac{3}{2}(\cos75^0+i\sin75^0)$. Знайти добуток $z_1 \cdot z_2$ та частку $\dfrac{z_1}{z_2}$. Результат записати в алгебраїчній формі.

Розв'язання: Застосовуючи правила множення та ділення комплексних чисел в тригонометричній формі, отримаємо:

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot \frac{3}{2}(\cos(225^0 + 75^0) + i\sin(225^0 + 75^0)) =$$

$$= 18(\cos 300^0 + i\sin 300^0) = 18\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9 - 9i\sqrt{3} \;\;;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 12 : \frac{3}{2}(\cos(225^0 - 75^0) + i\sin(225^0 - 75^0)) =$$

$$= 8(\cos150^0 + i\sin150^0) = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{3} + 4i.$$

Відповідь: $z_1 \cdot z_2 = 9 - i9\sqrt{3}$; $\dfrac{z_1}{z_2} = -4\sqrt{3} + 4i$.

Приклад 8. Обчислити $z = (2(\cos24^0+i\sin24^0))^5$. Відповідь записати в алгебраїчній формі.

Розв'язання: Знаходимо:

$$z = 2^5(\cos(5 \cdot 24^0) + i\sin(5 \cdot 24^0)) = 32(\cos120^0 + i\sin120^0) =$$

$$= 32\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -16 + 16i\sqrt{3}.$$

Відповідь: $z = -16 + i16\sqrt{3}$.

Приклад 9. Обчислити $\left(\sqrt{3} - i\right)^{10}$.

Розв'язання: Запишемо число $\sqrt{3} - i$ в тригонометричній формі:

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2; \quad \alpha = arctg\left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{\pi}{6}; \quad \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} = 330^0.$$

Тоді:

$$\sqrt{3}-i=2(\cos330^0+i\sin330^0)\,,$$

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}=(2(\cos330^0+i\sin330^0))^{10}=$$

$$=2^{10}\cdot(\cos10\cdot330^0+i\sin10\cdot330^0)=2^{10}\cdot(\cos(60^0+9\cdot360^0)+i\sin(60^0+9\cdot360^0))=$$

$$=2^{10}\cdot(\cos60^0+i\sin60^0)=1024\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=512+512i\sqrt{3}\;.$$

<u>Відповідь</u>: $\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}=512+\mathrm{i}\cdot512\sqrt{3}$.

<u>Приклад 10.</u> Обчислити $\sqrt[4]{-81}$. Відповідь записати в алгебраїчній та тригонометричній формах.

<u>Розв'язання:</u> Запишемо число -81 в тригонометричній формі:

$$-81=81(\cos\pi+i\sin\pi)\,.$$

Тоді:

$$\sqrt[4]{-81}=\sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),\ \text{де } k=0,1,2,3\,.$$

При $k=0$:

$$z_0=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\cdot0}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\cdot0}{2}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}\;.$$

При $k=1$:

$$z_1=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}\;.$$

При $k=2$:

$$z_2=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right)=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2}\;.$$

При $k=3$:

$$z_3=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}\ .$$

3.4. Показникова форма комплексного числа.

Розглядаючи функцію $y = e^x$ для комплексного змінного, відомий математик Л.Ейлер встановив співвідношення $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

З даної формули слідує, що кожне комплексне число $z\neq 0$ можна записати у вигляді, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}$, який називають **показниковою формою запису.**

Над комплексними числами в показниковій формі виконують такі ж дії як і в тригонометричній формі. Виведення формул, за якими виконують дії ґрунтується на основних властивостях степеня.

Нехай $z_1=r_1e^{i\varphi_1},\quad z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, тоді:

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\ ;$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$z^n=\left(re^{i\varphi}\right)^n=r^ne^{in\varphi};$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\varphi}}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\quad k=0,\ 1,\ ...,\ n-1.$$

Приклад 11. Представити число $4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ в алгебраїчній формі.

Розв'язання: Згідно умови задачі $r=4;\quad \varphi=\frac{5\pi}{6}$, тому

$$a=4\cos\frac{5\pi}{6}=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3};$$

$$b=4\sin\frac{5\pi}{6}=4\cdot\frac{1}{2}=2,$$

значить $$4e^{i\frac{5\pi}{6}}=-2\sqrt{3}+2i\,.$$

Відповідь: $-2\sqrt{3}+2i\,.$

Приклад 12. Виконати дії; результат записати в тригонометричній та показниковій формах: $z = 10\left(\frac{i+1}{2-i} + \frac{i-1}{4+2i}\right)$.

Розв'язання: Спочатку виконаємо дії:

1. $\frac{i+1}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+2i+i+i^2}{2^2+1^2} = \frac{2+3i-1}{4+1} = \frac{1+3i}{5}$;

2. $\frac{1-i}{4+2i} = \frac{(1-i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{4-4i-2i+2i^2}{4^2+2^2} = \frac{4-6i-2}{16+4} = \frac{2-6i}{20}$;

3. $\frac{1+3i}{5} + \frac{2-6i}{20} = \frac{4+12i+2-6i}{20} = \frac{6+6i}{20} = \frac{3+3i}{10}$;

4. $10 \cdot \frac{3+3i}{10} = 3+3i.$

Тепер отримане число запишемо в тригонометричній та показниковій формах. Для цього знайдемо модуль та аргумент:

$$r = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2},$$

$$\varphi = \alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \quad .$$

Тоді

$$z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right); \quad z = 3\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} .$$

Відповідь: $z = 3+3i$; $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $z = 3\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3.5. Вправи.

1. Дати означення комплексного числа.
2. Сформулювати означення уявної одиниці.
3. Як знайти степінь уявної одиниці?
4. Які комплексні числа називаються рівними, спряженими?
5. Як зображаються комплексні числа? Геометричний зміст комплексного числа.

6. Записати формулу для знаходження довільного степеня уявної одиниці.

7. Обчислити: i^{35}; i^{42}; i^{144}; $i^3+i^9+i^{10}+i^{15}$, $i^{10}+i^{11}-3i^{111}+5i^{47}$.

8. Наведіть приклади чисто уявних чисел.

9. Серед наведених прикладів виберіть:

а) чисто уявні комплексні числа;

б) чисто дійсні комплексні числа;

в) спряжені комплексні числа;

г) рівні комплексні числа :

$z_1 = 2-3i$; $z_2 = -2-3i$; $z_3 = -2$; $z_4 = 5i$;

$z_5 = 2+3i$; $z_6 = 2-3i$; $z_7 = -2+3i$; $z_8 = -5i$.

10. Знайти значення x та y: а) $5x+3iy = 17-12i$; б) $7x-2i = 9+5iy$.

11. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2-10x+34 = 0$; б) $x^2+4x+53 = 0$; в) $x^2-12x+45 = 0$;

г) $2x^2-x+3 = 0$; д) $x^2+6x+18 = 0$; е) $3x^2+2x+27 = 0$.

12. Розкласти на множники:

а) a^2+9b^2; б) $0{,}64+0{,}49x^2$; в) $a+25$; г) $b^2+\frac{16}{25}$.

13. Дано:

$z_1 = 3-4i$; $z_2 = -2+6i$; $z_3 = 6+5i$; $z_4 = 2-3i$.

Знайти: а) z_1+z_2; б) z_3-z_4; в) $z_2 \cdot z_1$; г) $\frac{z_3}{z_4}$; д) $z_1-2z_3\frac{z_1+z_2}{z_4}-z_3$.

14. Зобразіть дані комплексні числа на координатній площині:

$z_1 = -2+3i$; $z_2 = 1-i$; $z_3 = -4-3i$; $z_4 = 4i$; $z_5 = -2i$; $z_6 = 2$;

$z_7 = -3$; $z_8 = 4+5i$; $z_9 = (z_1+z_2)\cdot z_3$; $z_{10} = \frac{z_2-z_3}{z_4\cdot z_8}$.

15. Дати означення модуля та аргументу комплексного числа.

16. Запишіть формулу для знаходження модуля комплексного числа.

17. Запишіть один з відомих вам алгоритмів знаходження аргументу комплексного числа.

18. Знайти аргумент та модуль комплексних чисел (з використанням мікрокалькулятора):

а) $1-i\sqrt{3}$; б) $2+2i$; в) $-\sqrt{3}+i$; г) $-4-i4\sqrt{3}$;

д) $2+5i$; е) $-12-3i$; є) $2-2i$; ж) $-3-4i$; з) $-2+7i$.

19. Записати загальний вигляд комплексного числа в тригонометричній формі.

20. Записати дані комплексні числа в тригонометричній формі:

а) $z_1 = 5-5i$; б) $z_2 = -3-3i$;

в) $z_3 = -1{,}5+1{,}5i$; г) $z_4 = 12+6i$.

21. Перевести дані комплексні числа в алгебраїчну форму запису:

а) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $z_3 = 40\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $z_4 = 2\left(\cos 0^0 + i\sin 0^0\right)$;

д) $z_5 = 5\sqrt{2}\left(\cos 315^0 + i\sin 315^0\right)$; е) $z_6 = 7(\cos\pi + i\sin\pi)$.

22. Скільки значень має корінь *n*-ої степені з комплексного числа? Як знайти всі значення кореня *n*-ої степені?

23. Запишіть загальний вигляд комплексного числа в показниковій формі.

24. Перевести дані комплексні числа в показникову форму запису.

а) z_1= 6-6i; б) z_2= 3i; в) z_3= -4i; г) z_4= -5;

д) z_5= 2(cos(-60⁰)+$i$sin(-60⁰)); е) $z_6 = 4\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$; є) z_7=–3+i3 $\sqrt{3}$.

25. Запишіть дані комплексні числа в алгебраїчній та тригонометричній формах:

а) $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$; б) $z_2 = 4e^{i120^0}$; в) $z_3 = 6e^{i\pi}$.

Виконайте дії в алгебраїчній формі. Результат записати в тригонометричній формі:

26. $\frac{1+i}{1-2i} - (\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i)$.

27. $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i} - (1+i\sqrt{3})$.

28. $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i\sqrt{3}}$.

29. $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)}$.

30. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2$.

31. $\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5}$.

32. $\frac{(1-2i)(1+2i)}{2+i} - i^{32}$.

33. $\frac{(1-3i)(1+3i)}{-3-i}$.

Виконайте дії в тригонометричній формі. Результати записати в алгебраїчній та показниковій формах:

34. $\left(4(\cos 220^\circ + i\sin 220^\circ)\right)\cdot\left(1{,}5(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)\right)$;

35. $\left(3(\cos 280^\circ + i\sin 280^\circ)\right) : \left(\frac{3}{4}(\cos 70^\circ + i\sin 70^\circ)\right)$;

36. $(2(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ))^6$;

37. $5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$;

38. $(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24})^6$;

39. $\left(10(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ)\right) : \left(5(\cos 150^\circ + \sin 150^\circ)\right)$;

40. $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^4 \cdot (\sqrt{2}(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ))^6$;

41. $(\sqrt{2}(\cos(-50^\circ) + i\sin(-50^\circ))^{12}$.

Виконайте дії в показниковій формі. Результат записати в алгебраїчній та тригонометричній формі:

42. $2e^{\frac{7\pi}{4}i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$;

43. $2e^{\frac{4\pi}{3}i} : 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$;

44. $6e^{2\pi i} \cdot 3e^{\frac{\pi}{3}i}$;

45. $4e^{\frac{11\pi}{6}i} : 2e^{\frac{7}{6}i}$.

Використовуючи тригонометричну форму запису, виконайте дії. Результат записати в показниковій та алгеброїчній формах:

46. $(4 + 4i)(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$;

47. $(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})(-3 + \sqrt{3}i)$;

48. $(1 - \sqrt{3}i) : (\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$;

49. $(-2 - 2i) : 2e^{i\frac{\pi}{3}}$;

50. $(-4 + 4i) \cdot 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Комплексні числа

N – натуральні числа $\subset$ Z – цілі числа $\subset$ Q раціональні числа

$\{1, 2, 3\ldots\}$ +; x; a^n — $\{\ldots -1, 0, 1 \ldots\}$ +; -; x; a^n — $\frac{m}{n}, m \in z, n \in N$ $\pm; \times; \div; a^z$

J – ірраціональні числа $\Rightarrow$ $QUJ=R$ – дійсні числа

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; π; e $\pm; \times; \div; a^z$ — нема $\sqrt{-|a|}$

$j = \sqrt{-1}$

$j^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$

$j^3 = -1 \cdot j = -j$

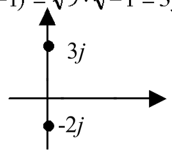
$j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1$

$j^m = j^{4k+n} = j^{4k} \cdot j^n =$

$= (j^4)^k \cdot j^n = j^n$

Уявна одиниця.

$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3j$



Комплексне число (алгебраїчна форма)

$z = \boxed{a} + \boxed{jb}$

дійсна частина — уявна частина

Спряжені комплексні числа

Якщо $z = a + jb$, то $\bar{z} = a - jb$

Перехід.

Алгебраїчна форма $a + jb$ $(a;b)$ — Тригонометрична форма $\rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \rho e^{j\varphi}$ $(\rho;\varphi)$

$a = \rho\cos\varphi; b = \rho\sin\varphi$

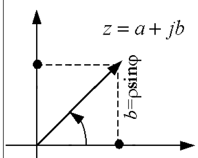
$$\rho = \sqrt{a^2+b^2};\ \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, a>0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, a<0 \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація комплексного числа

$a+bj$ $\Leftrightarrow$ (a,b)

комплексне число — координати вектора на площині

довжину (модуль ρ) — напрям (аргумент φ)



$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} (z \in I, IV)\ a>0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a} (z \in II, III)\ a<0 \end{cases}$$

$z_1 = a+bj \quad z_2 = c+dj$	$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$	$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$
$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + j(b \pm d)$ $z_1 \cdot z_2 = (a+bj)(c+dj)$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+jb}{c+jd} = \frac{a+jb}{c+jb} \cdot \frac{c-jd}{c-jd}$ $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$	$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + j\sin(\varphi_1-\varphi_2))$ $z_1^n = \rho_1^n(\cos(n\varphi_1) + j\sin(n\varphi_1))$ $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1}(\cos\frac{\varphi_1+2\pi k}{n} + j\sin\frac{\varphi_1+2\pi k}{n})$	$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$; $z_1^n = \rho_1^n e^{jn\varphi_1}$ $\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$ $(k = 0,1\ldots(n-1))$

4. ФУНКЦІЇ. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

4.1. Функція. Властивості функції.

Вивчаючи різні явища ми маємо справу з величинами, наприклад: силою, швидкістю, ростом волосся, зношуванням шин і т.д. Сукупність значень кожної величини утворюють множину її значень. Більшість величин пов'язані між собою.

Якщо кожному значенню x з множини значень X можна поставити у відповідність одне і лише одне значення y іншої множини Y, то таку відповідність називається **функцією.**

Множина значень $x_1, x_2, ..., x_n$ з множини X, для якої визначена функція називається **областю визначення функції** і позначають ***D,*** а самі значення $x_1, x_2, ..., x_n$ називають **аргументами функції.**

Сукупність всіх значень функції називають **множиною значень функції** і позначають ***E***.

Наприклад, якщо аргументом є $x \in [0, \infty)$, а функція дія добування квадратного кореня, то значення функції в математичних позначеннях матиме вигляд $y = \sqrt{x}$. В загальному випадку запис матиме вигляд $y=f(x)$.

Функцію можна задати наступними способами:

- словесно (кожному учневі поставлять у відповідність дату його народження;
- таблично (розклад руху поїздів, температурний календар);
- аналітично ($y = x^2$, $y = \sin(2x+3)$);
- графічно (графіком функції називається сукупність точок площини з координатами $(x; f(x))$, де $x \in D$).

Якщо область визначення функції є множина натуральних чисел N, то функцію називають **послідовністю.**

Нагадаємо основні властивості функції:

1. Функція називається **зростаючою,** якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (рис.1)

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2); \ x_1; x_2 \in D.$$

2. Функція називається **спадною,** якщо меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції (рис.2)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2); \ x_1; x_2 \in D.$$

3. Функція називається **монотонною,** якщо вона лише зростаюча або лише спадна в своїй області визначення.

4. Функція називається **парною,** якщо зміна знаку аргументу не викликає зміни знаку функції

$$f(-x) = f(x),\ x; -x \in D.$$

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (рис.3) .

5. Функція називається **непарною,** якщо зміна знаку аргументу викликає лише зміни знаку функції

$$f(-x) = -f(x),\ x; -x \in D.$$

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (рис. 4)

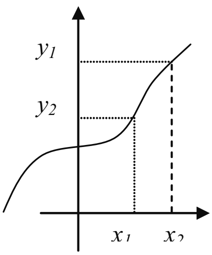


Рис. 1.

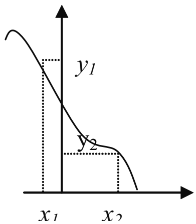


Рис. 2.

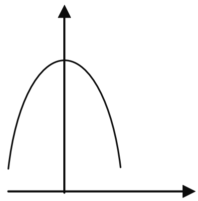


Рис. 3.

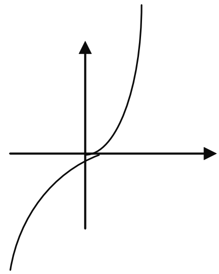


Рис. 4.

6. Функція називається **обмеженою зверху**, якщо для неї існує таке число *M,* що виконується умова

$$f(x) \le M,\ \ x \in D.$$

7. Функція називається **обмеженою знизу**, якщо для неї існує таке число *m,* що виконується умова

$$f(x) \ge m,\ \ x \in D.$$

8. Функція називається **обмеженою**, якщо вона обмежена знизу і зверху

$$m \le f(x) \le M,\ \ x \in D.$$

9. Функція називається **періодичною**, якщо існує таке число T($T \ne 0;\ T \in R$), для якого виконується умова

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T),\ x \in D.$$

10.Функція $f^{-1}(x)$ називається оберненою для функції *f(x)*, якщо

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x,\ \ x \in D.$$

Графіки взаємообернених функцій симетричні відносно бісектриси першої і третьої чвертей системи координат (пряма $y = x$).

Приклад1. Знайти область визначення функції $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Розв'язання: Функція визначена для всіх значень аргументу x, крім тих, при яких знаменник перетворюється в нуль. Розв'язавши рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$, знайдемо корені $x_1 = 2,\ x_2 = 3$. Отже, $D(y) = (-\infty;2) \cup (2;3) \cup (3;\infty)$.

Відповідь: $D(y) = (-\infty;2) \cup (2;3) \cup (3;\infty)$.

Приклад2. Дослідити функцію $f(x) = x + x^2$ на парність(непарність).

Розв'язання: Дослідимо, поводить себе функція при значенні аргументу $-x$:

$f(-x) = (-x) + (-x)^2 = -x + x^2$. Як бачимо умови парності і непарності не виконуються . Отже, дана функція є ні парною, ні непарною.

4.2. Границя функції в точці.

Вище перелічені властивості функції встановлено у всій області її визначення. Розглянемо поведінку функції в окремо взятій точці.

Наприклад, дослідимо, поведінку функцій $y_1 = x^2, y_2 = |x - 4|$ при наближені до т. 2 справа і зліва. Результати обчислень запишемо в таблиці.

			$\rightarrow$		$\leftarrow$		
x	1,9	1,96	1,99	**2**	2,01	2,04	2,1
y_1	3,61	3,8416	3,9601	**4**	4,04041	4,1616	4,41
y_2	2,1	2,04	2,01	**2**	1,99	2,04	1,9
			$\rightarrow$		$\leftarrow$		

Бачимо, що чим ближче x наближається до числа 2, тим ближче y_1 підходить до числа 4, а y_2 – до числа 2.

Розглянемо поведінку функції $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ при $x \to 3$.

			$\rightarrow$		$\leftarrow$		
x	2,9	2,99	2,999	**3**	3,0001	3,001	3,01
y	5,9	5,99	5,999	**не існує**	6,0001	6,001	6,01
			$\leftarrow$		$\rightarrow$		

Як видно з таблички функція в точці 3 не визначена, хоча при наближенні як завгодно близько до числа 3 функція як завгодно близько підходить до 3.

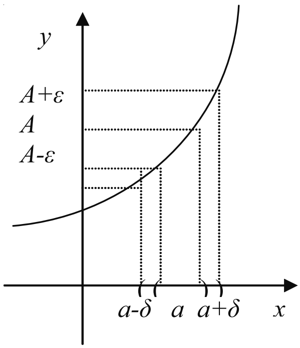


Рис. 5.

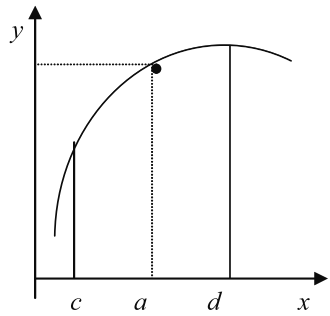


Рис. 6.

Розглянемо поведінку поведінку функції $y = \dfrac{1}{x-2}$ при $x \to 2$.

			$\rightarrow$	$\leftarrow$			
x	1,9	1,99	1,999	**2**	2,0001	2,001	2,01
y	-10	-100	-1000	**не існує**	10000	1000	100
			$\leftarrow$	$\rightarrow$			

Бачимо, що при $x \to 2$ немає числа до якого наближалася би функція.

Отже, якщо при необмеженому наближені аргументу до числа *a*, значення функції наближається до деякого числа *A*, то це число називаємо **границею функції** в точці *a,* або більш строго:

число *A* називається **границею функції** *f(x)* при $x \to a$, якщо яке б мале додатнє число ε ми не взяли завжди існуватиме окіл (a-δ, a+δ) точки *a*, такий, що для всіх *x* з цього околу виконується нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ (рис. 5).

Границю функції в точці позначають $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A.$

Як видно з наведених вище прикладів границя функції в точці існує не завжди.

Приклад 3. Довести, що $\lim\limits_{x \to 2}(7x - 3) = 11$.

Доведення: Вважаємо, що задано будь-яке ε>0. Знайдемо δ>0 таке, що для всіх *x*, що задовольняють умову $0 < \left| x - 2 \right| < \delta$, виконується нерівність $\left| f(x) - 11 \right| < \varepsilon$.

Нехай нерівність виконується. Тоді

$$\left| f(x) - 11 \right| = \left| 7x - 3 - 11 \right| = \left| 7x - 14 \right| < \varepsilon,$$

або

$$|7(x-2)| < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{7}.$$

Звідси $$\delta = \frac{\varepsilon}{7}.$$

Тепер покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ при $x \in (2-\delta; 2+\delta)$ виконується, $\lim\limits_{x\to 2}(7x-3) = 11$:

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{7} \Rightarrow |7x-14| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$|(7x-3)-11| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-11| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 11 \cdot$$

Запишемо **основні властивості границь.**

1. Функція має єдину границю в даній точці.

Доведення: Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай в точці *x=a* функція *f(x)* має дві різні границі A і B. Згідно означення границі для будь-якого ε, існуватимуть такі $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$, що для всіх x з δ_1-околу виконується умова $|f(x) - A| < \varepsilon$, а для всіх x з δ_2-околу виконується умова $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Тоді вибравши $\delta = \min(\delta_1; \delta_2)$, отримаємо для д-околу точки a

$$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < f(x) - B < \varepsilon,$$

і віднявши отримаємо:

$$0 < -A + B < 0,$$

тобто $-A+B=0$, $A=B$, а це суперечить умові $A \neq B$. Отже, функція має єдину границю в даній точці.

2. Границя константи дорівнює самій константі:

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

3. Границя суми (різниці) функцій дорівнює сумі(різниці) цих функцій:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

4. Границя добутку функцій дорівнює добутку границь цих функцій:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

<u>Наслідки:</u>

а) Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x).$$

b) Якщо n – натуральне число, то

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n; \ \lim_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

5. Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню границь цих функцій, якщо тільки границя дільника не дорівнює нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad \left(\lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right).$$

Відмітимо, безпосереднє застосування властивостей при знаходженні границі функції може привести до виразів типу $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty-\infty; \ 1^{\infty}; \ 0\cdot\infty; \ 0^0; \ \infty^0$, які називають невизначеностями.

<u>4.3. Неперервність функції.</u>

Поняття границі тісно пов'язано з поняттям неперервності функції.

<u>Означення:</u> Функція *f(x)* називається **неперервною в точці** *a*, якщо

1) існує значення функції в цій точці $f(a) = f$;

2) існує границя функції в цій точці $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$;

3) значення функції в точці *a* співпадає з значенням границі в цій точці *A=f.*

Якщо функція *f(x)* неперервна в кожній точці даного проміжку, то кажуть, що вона **неперервна на** цьому **проміжку**. Графік неперервної функції на проміжку [*c, d*] матиме вигляд (див. рис. 6)**.**

Для неперервних функцій справедливі твердження:

1) всі елементарні функції неперервні в області свого визначення;

2) сума, різниця та добуток неперервних функцій є неперервною функцією;

3) якщо *f(x), g(x)* – неперервні в області визначення, $g(x) \neq 0$ в області визначення, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ неперервна в області визначення.

Виходячи з наведених тверджень для неперервної функції можна зробити наступні висновки:

1. Якщо функція *f(x)* – неперервна в точці *x=a*, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2. Границя многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ при $x \to a$ дорівнює значенню цього многочлена при *x=a*, тобто $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.

3. Границя дробово-раціональної функції *R(x)* при при $x \to a$ дорівнює значенню цієї функції при $x=a$, якщо a належить до області визначення функції,

тобто 1. $\lim\limits_{x\to a} R(x) = \lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + ... + b_{n-1}x + b_n} = R(a)$.

Приклад 4. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^3 - 6x^2 + x - 5\right)$.

Розв'язання: Оскільки функція $f(x) = \left(5x^3 - 6x^2 + x - 5\right)$ неперервна в точці $x=2$, то

$$\lim_{x\to 2}\left(5x^3 - 6x^2 + x - 5\right) = 5\cdot 2^3 - 6\cdot 2^2 + 2 - 5 = 13.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^3 - 6x^2 + x - 5\right) = 13$.

Приклад 5. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2 - x + 1}{x - 3}$.

Розв'язання: Оскільки при $x=2$ функція є неперервною, то

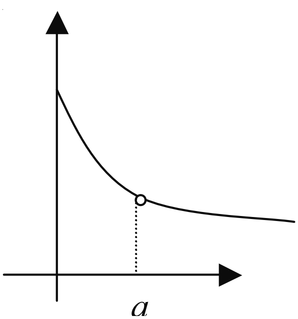
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - x + 1}{x - 3} = \frac{2^2 - 2 + 1}{2 - 3} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2 - x + 1}{x - 3} = -3$.

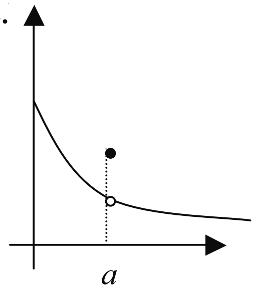
Якщо в точці $x = a$ одна з умов неперервності функції порушується, то кажуть, що функція в цій точці терпить розрив, а точку a називають **точкою розриву функції.**

Розглянемо можливі випадки:

1.



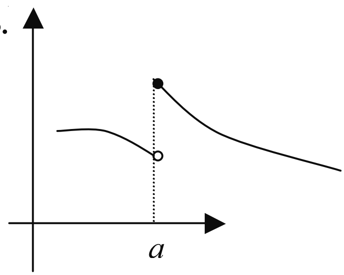
1. Не існує значення функції в цій точці (точка $x=a$ не входить в область визначення функції).

2. 

1. Існує значення функції в цій точці $f(a)=f$.

2. Існує границя функції в цій точці $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

3. Значення функції не співпадає із значенням границі в цій точці $f \neq A$.

3. 

1. Існує, або не існує значення функції в цій точці $f(a)=f$.
2. Не існує границя функції в цій точці.

Знаходження границі в точках є достатньо складною процедурою.

Розглянемо один із способів знаходження границі функції в точках розриву. Алгебраїчними перетвореннями функцію *f(x)* стараються перетворити до функції $g(x)$, яка є неперервною в точці $x=a$ і співпадає з функцією *f(x)* всюди, крім точки $x=a$ (розрив „заклеюють”). Пояснимо на прикладах.

<u>Приклад 6.</u> Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$.

<u>Розв’язання:</u> Функція терпить розрив в точці $x=0$, оскільки точка $x=0$ не входить в область визначення функції. При знаходженні границі отримаємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$.

Перетворимо цю функцію

$$\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\frac{x\cdot(3x-2)}{x\cdot(2x-5)}=\frac{3x-2}{2x-5}.$$

Отримаємо функцію $g(x)=\dfrac{3x-2}{2x-5}$, яка є неперервною в точці $x=0$ і співпадає з функцією $f(x)=\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$ всюди окрім точки $x=0$.

Отже: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot(3x-2)}{x\cdot(2x-5)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-2}{2x-5}=\dfrac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5}=\dfrac{-2}{-5}=\dfrac{2}{5}.$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\dfrac{2}{5}.$

Приклад 7. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}.$

Розв'язання: Функція терпить розрив в точці $x=3$, оскільки точка $x=3$ не входить в область визначення функції. При знаходженні границі отримаємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Перетворимо цю функцію, розклавши чисельник та знаменник на множники

$$\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)}=\frac{x-2}{3x}.$$

Отримаємо функцію $g(x)=\dfrac{x-2}{3x}$, яка є неперервною в точці $x=3$ і співпадає з функцією $f(x)=\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$ всюди окрім точки $x=3$.

Отже $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{9}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\dfrac{1}{9}.$

Приклад 8. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}.$

Розв'язання:

Функція терпить розрив в точці $x=0$, оскільки точка $x=0$ не входить в область визначення функції. При знаходженні границі отримаємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$.

Помножимо чисельник та знаменник на вираз спряжений до знаменника $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}$ і після спрощення отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2x}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2}=\frac{(\sqrt{5-0}+\sqrt{5+0})}{-2}=\frac{2\sqrt{5}}{-2}=\sqrt{5}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\sqrt{5}.$

4.4. Нескінченно малі і нескінченно великі функції.

Функція $f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Функція $f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \text{ або} \lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad \text{або} \lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Розглянемо властивості нескінченно малих і нескінченно великих функції.

1. Якщо функції *f(x)* і *g(x)* – нескінченно малі при $x \to a$, то їх сума *f(x)* + *g(x)* при $x \to a$ також є нескінченно малою функцією.

2. Якщо функції *f(x)*– нескінченно мала при $x \to a$,а *F(x)* – обмежена функція, то їх добуток *f(x)·F(x))* при $x \to a$ також є нескінченно малою функцією.

Наслідок: Добуток скінченого числа нескінченно малих функцій є величина нескінченно мала.

3. Якщо при $x \to a$ функція *f(x)* має скінчену границю $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, а функція *g(x)* – нескінченно велика, то

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \infty, \ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

4. Якщо функції *f(x)* – нескінченно мала при $x \to a$, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно велика, причому припускається, що в околі точки *a* функція не перетворюється в нуль. Навпаки, якщо функції *f(x)* – нескінченно велика при $x \to a$, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала.

Приклад 9. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5}{4x-8}$.

Розв'язання: Границя дільника дорівнює нулю: $\lim\limits_{x\to 2}(4x-8) = 4\cdot 2 - 8 = 0$.

Отже, знаходити границю за властивістю частки не можна.

Оскільки, $\lim\limits_{x\to 2}(4x-8) = 0$, то $4x-8$ при $x \to 2$ є величина нескінченно мала, а обернена їй величина $\dfrac{1}{4x-8}$ – нескінченно велика, тобто $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5}{4x-8} = \infty$.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5}{4x-8} = \infty$.

<u>4.5. Границя функції при</u> $x \to \infty$.

Розглянемо ще один випадок – існування границі функції при $x \to \infty$.

<u>Означення 1.</u> Нехай функція *f(x)* визначена на всій числовій осі. Число B_1 називається границею функції *f(x)* при $x \to +\infty$, якщо для кожного довільно малого значення $\varepsilon>0$ існує таке число $M>0$, що для всіх значень *x,* які задовольняють умову $x > M$, справедлива нерівність

$$\left| f(x) - B_1 \right| < \varepsilon .$$

Записують це так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = B_1 .$$

Геометричний зміст цього визначення такий: число B_1 є границею функції *f(x)* в плюс нескінченності, якщо для довільного ε-околу точки B_1 можна підібрати таке число $M>0$, що для всіх значень *x* більших за *M*, відповідні значення функції попадають в ε-окіл точки B_1 (рис. 7б).

<u>Означення 2.</u> Нехай функція *f(x)* визначена на всій числовій осі. Число B_2 називається границею функції *f(x)* при $x \to -\infty$, якщо для кожного довільно малого значення $\varepsilon>0$ існує таке число $N>0$, що для всіх значень *x,* які задовольняють умову $x < -N$, справедлива нерівність

$$\left| f(x) - B_2 \right| < \varepsilon .$$

Записують це так:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = B_2 .$$

Геометричний зміст цього визначення такий: число B_2 є границею функції *f(x)* в мінус нескінченності, якщо для довільного ε-околу точки B_2 можна підібрати таке число $N>0$, що для всіх значень *x* менших за *-N*, відповідні значення функції попадають в ε-окіл точки B_2 (рис. 7а).

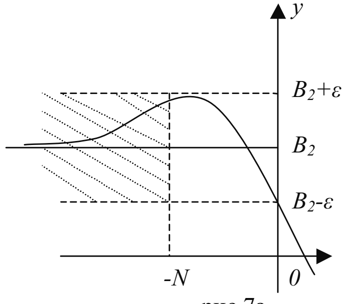


рис.7а

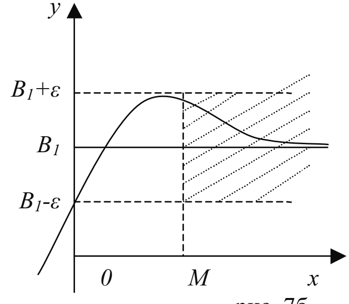


рис. 7б

Якщо існує границя $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B_1$ та існує границя $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B_2$ і B_1=B_2=B, то кажуть, що існує границя $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B$.

<u>Приклад 10.</u> Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

<u>Доведення:</u>

Нехай задано довільне ε>0. Покажемо, що існує таке число M>0, що для всіх значень x, які задовольняють нерівність $|x| > M$, справедлива нерівність

$$\left|\frac{2x+3}{3x} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon .$$

Виконаємо перетворення ($x \neq 0$):

$$\left|\frac{2x+3}{3x} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2}{3} + \frac{1}{x} - \frac{2}{3}\right| \equiv \left|\frac{1}{x}\right| \equiv \frac{1}{|x|}.$$

Звідси бачимо, що досить взяти $M = x$, тоді при $|x| > M$ матимемо $\dfrac{1}{|x|} < \dfrac{1}{M} = \varepsilon$ або $\left|\dfrac{2x+3}{3x} - \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon$.

Отже
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x} = \frac{2}{3}.$$

<u>Приклад 11.</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4 - 2x^2 + 3}{3x^3 - 5}$.

<u>Розв'язання:</u> Поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь аргументу в знаменнику, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4 - 2x^2 + 3}{3x^3 - 5} = \lim_{x\to\infty}\frac{x - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{5}{x^3}}.$$

При $x \to \infty$ маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{5}{x^2}\right) = 3$.

Оскільки знаменник є величина обмежена, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4 - 2x^2 + 3}{3x^3 - 5} = \infty$.

<u>Відповідь:</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4 - 2x^2 + 3}{3x^3 - 5} = \infty$.

Приклад 12. Обчислити границю.

Розв'язання: Поділимо чисельник і знаменник на x^3, тоді:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{14}{x^3}-\frac{1}{x}-1}=\frac{3}{-1}=-3.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}=-3$.

Приклад 13. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

Розв'язання: При $x\to\infty$ дана функція є різницею двох нескінченно великих величин $(\infty-\infty)$. Помноживши і поділивши функцію на спряжений вираз $x+\sqrt{x^2-4x}$, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}\right)}=\frac{4}{2}=2.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=2$.

4.6. Чудові границі.

Ряд прикладів пов'язаних із знаходженням границі легко розв'язати, якщо відомо формули так званих „чудових границь":

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\cos\ x=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln\ x;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Доведемо, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Нехай x прямує до нуля, залишаючись при цьому додатним. Тоді можна вважати, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, і, як відомо із шкільного курсу математики, $sinx<x<tgx$, причому всі вирази, що входять у цю нерівність додатні.

Розглянемо три дроби:

$$\frac{\sin x}{\sin x};\ \frac{\sin x}{x};\ \frac{\sin x}{tgx}\ .$$

При однакових чисельниках менший той дріб, знаменник якого більший. Тому

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{tgx},$$

або

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x\,.$$

Помножимо цю нерівність почленно на –1. Знаки нерівності при цьому зміняться на протилежні:

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x\,.$$

Додавши до кожної частини цієї нерівності 1, отримаємо:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x\,.$$

Але $1 - \cos x < x$, тому

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x\,.$$

Оскільки $x > 0$ та $\sin x > 0$, то

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < |x|,$$

що можна записати у вигляді:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|.$$

Остання нерівність записана з припущенням, що $x > 0$. Проте вона справедлива і при $x < 0$, оскільки функція $\frac{\sin x}{x}$ парна.

Якщо x прямує до нуля, то як видно з останньої нерівності, $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right|$, буде меншим за $|x|$, і прямуватиме до нуля.

Яким би малим не було число ε, завжди можна добитися, щоб справджувалася нерівність

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Для цього x треба вибрати в інтервалі (-е, е). Але це й означає, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Ряд інших „чудових границь” буде доведено в розділі „Похідна та її застосування”.

Приклад 13. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання: Помножимо чисельник і знаменник цього дробу на 3, отримаємо:

$$\frac{\sin 3x}{x}=\frac{3\sin 3x}{3x}.$$

Позначимо $3x$ через y. З умови $x\to 0$, очевидно, випливає, що й $y\to 0$. Тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{3\sin y}{y}=3\cdot 1=3.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3$.

Приклад 14. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}$ $(n\neq 0)$.

Розв'язання: Помножимо чисельник та знаменник цього дробу на m і вводячи нову змінну $y = mx$, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{m\sin mx}{(mx)\cdot n}=\lim_{y\to 0}\frac{m\sin y}{ny}=\frac{m}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{m}{n}\cdot 1=\frac{m}{n}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n}$.

Приклад 15. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Розв'язання: Оскільки $\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, то $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$, тому, ввівши нову змінну отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2 y}{(2y)^2}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y^2}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Приклад 16. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$.

Розв'язання: Виконуючи перетворення і використовуючи формулу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ і ввівши нову змінну $y=\frac{x}{3}$, отримаємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{3}=\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{3}=e^{3}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=e^{3}$.

4.7. Вправи.

1. Дати означення функції.
2. Що називають областю визначення функції?
3. Що називають множиною значень функції?
4. Перелічіть основні властивості функції.
5. Яка функція називається зростаючою? спадною?
6. Яка функція називається парною? непарною?
7. Яка властивість графіку парної функції? непарної функції?
8. Яка функція називається обмехеною знизу? обмеженою зверху?
9. Яка функція називається обмеженою?
10. Яка функція називається оберненою даній?
11. Яка властивість графіків взаємообернених функцій?
12. Дати означення границі функції в точці.
13. Перелічіть основні властивості границь та наслідки з нмх.
14. Яка функця називається неперервною в точці? на проміжку?
15. Перелічіть основня властивості неперервних функцій.
16. Які точки називають точками розриву функції?
17. Дати графічне тлумачення точок розриву функції.
18. Дати означення нескінчено великих функцій.
19. Дати означення нескінчено малих функцій.
20. Дати означення границі функції при $x\to\infty$.
21. Які з "чудових " границь ви знаєте?
22. Знайти область визначення функцій:

а) $y=\sqrt{x^2-3x-4}$; б) $y=\frac{3x-2}{x+5}$; в) $y=\lg\left(4-x^2\right)$;

г) $y = \dfrac{1}{\sqrt{-3x^2 + 5x + 2}}$; д) $y = \sqrt{3 - 2x}$; е) $y = \dfrac{1}{2x - 1} + \ln(x - 2)$.

23. Встановити парність чи непарність функцій:

а) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin 2x}$; б) $y(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{x}$; в) $f(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$;

г) $y(x) = 2x^4 + \cos x$; д) $f(x) = \sqrt{3 - 2\sin^2 x}$; е) $y = \dfrac{e^{2x}}{2x^2 - 1}$.

24. Знайти границі :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3 - x}{x^3 - 27}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 2x - 1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 5}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2 - 17x + 10}{3x^2 - 16x + 5}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 - 7x - 12}{2x^2 - 5x - 8}$;

7) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x + 1}{x + \sqrt{x + 2}}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 2x^3 - 1}{100x^3 + 2x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^x$;

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin \frac{x}{2}}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{3}{2x}\right)^x$;

14) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$;

16) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3 - x}{x^3 - 27}$;

17) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 2x - 1}$;

18) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 5}$;

19) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$;

20) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^2-7x-12}{2x^2-5x-8}$;

21) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$;

22) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4+2x^3-1}{100x^3+2x^2}$;

23) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$;

24) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$;

25) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin\frac{x}{2}}$;

27) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^x$;

28) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

29) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$;

30) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$;

31) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^x$;

32) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+smx)^{\frac{1}{x}}$;

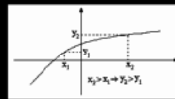
33) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$;

33) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

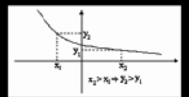
Функції. Границя функції

Властивості функції

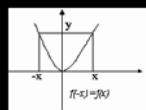
1.Функція **зростаюча**, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$



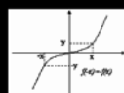
2.Функція **спадна,** якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$



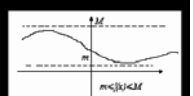
3.Функція **парна**, якщо знаку аргументу не викликає зміни функції.
$f(-x) = f(x)$
Графік симетричний відносно **осі OY.**



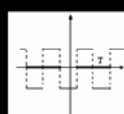
4. Функція **непарна**, якщо зміна знаку аргументу викликає лише зміну знаку функції. $f(-x) = -f(x)$
Графік симетричний відносно **початку координат.**



5.Функція $f(x)$ **обмежена**, якщо існують числа M, m, такі, що для всіх $x \in D(f)$,
$m \le f(x) \le M$

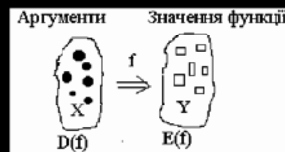


6.Функція називається **періодичною**, якщо існує таке число T $(T \neq 0, T \in R)$, що
$f(x-T) = f(x) = f(x+T), x \in D$



Функцією називається відповідність, встановлена між значеннями x множини **X** та елементами y множини **Y** так, що кожному значенню множини X відповідає одне і лише одне значення множини **Y**.
Областю визначення функції називають множину **X**, якщо для кожного значення цієї множини x існує значення функції y.
Областю значень функції називають множину всіх значень y, які відповідають хоча б одному зі значень [redacted]

Функції і границі



Неперервність функції
Функція $f(x)$ називається **неперервною в точці x_0**, якщо:
існує значення функції в цій точці $f(x)=f(x_0)$;
існує границя функції в точці x_0
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$
значення функції та значення границі в точці x_0 співпадають:
$$f(x_0) = A$$
Функція називається **неперервною на проміжку**, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Границя функції
1.Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо яке б мале число $\varepsilon > 0$ ми не взяли завжди існуватиме окіл точки a, $(\varepsilon-\delta; \varepsilon+\delta)$ такий, що для всіх з цього околу виконується нерівність:
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$
2.Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо яке б мале число $\varepsilon > 0$ ми не взяли завжди існує таке число $N > 0$, що для всіх x, таких, що при $|x| > N$ виконується
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$
[redacted]$x)$ – нескін. мала при $x \to a$, якщо
$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$
[redacted]$x)$ – нескін. велика при $x \to a$, якщо
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$
[redacted]що $f(x)$ – нескін. велика, то $\frac{1}{f(x)}$ – нескін.
[redacted]а

[redacted]**стивості границь**

[redacted]$f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

[redacted]$f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

$\lim_{x \to a} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \to a} f(x)$, $C = const$

Чудові границі: 1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 2. $\lim_{x \to 0} \frac{arc\sin x}{x} = 1$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$ 4, $\lim_{x \to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$ 5. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

6. $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 7. $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

8. $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ 9. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $e = 2.718281...$

РОЗДІЛ 5. ПОХІДНА. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

5.1. Задачі, які приводять до поняття похідної. Означення похідної.

Центральне поняття диференціального числення – похідна, виникло при розв'язуванні великої кількості задач природознавства та математики. Найважливіші серед них – фізичні задачі знаходження миттєвої швидкості і геометрична задача побудови дотичної до кривої.

Розглянемо задачі знаходження миттєвої швидкості.

1. Нехай тіло рухається згідно закону $S = f(t)$. Тоді пройдений тілом за час Δt шлях ΔS обчислиться за формулою:

$$\Delta S = f(t_0+\Delta t) - f(t_0),$$

а середня швидкість руху тіла визначиться за формулою:

$$V_{сер.} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Очевидно, що чим менший проміжок часу Δt, тим більш точно встановлюється швидкість тіла саме в момент часу t_0. При $\Delta t \to 0$ середня швидкість $V_{сер}$ наближається до дійсної швидкості руху тіла в момент часу t_0 (миттєвої швидкості тіла $V_м$ в заданий момент часу).

Отже,

$$V_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

2. Нехай по провіднику за час t через поперечний переріз проходить кількість електрики q згідно закону $q = q(t)$. Необхідно знайти силу струму, що проходить по провіднику в момент часу t_0. Розв'яжемо задачу аналогічно попередній.

– надамо часу t_0 приріст $\Delta t > 0$;

– знайдемо приріст кількості електрики $\Delta q = q(t_0+\Delta t) - q(t_0)$;

– знайдемо середню швидкість зміни кількості електрики (середня сила струму за проміжок часу Δt) $I_{сер.} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$;

– знайдемо миттєву швидкість зміни кількості електрики в момент часу t_0

$$V_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Узагальнюючи, можна сказати, що знайдено математичний вираз для обчислення миттєвої швидкості зміни будь-якої величини.

В математичному аналізі вже для довільної функції $y = f(x)$ вираз

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

називають **<u>похідною</u>** і позначають y'.

Таким чином, похідна відображає **<u>швидкість зміни</u>** залежної змінної y по відношенню до незалежної змінної x, яка не обов’язково має фізичний зміст часу.

Сформулюємо означення похідної:

<u>Похідною функції</u> $y = f(x)$ називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо останній прямує до нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

Операція знаходження похідної функції називається **<u>диференціюванням.</u>**

Оскільки похідна – це границя відношення, то для існування цієї границі необхідно, щоб $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ (в іншому випадку одержимо ділення на нуль).

Дана умова існування похілної є одночасно умовою неперервності функції в даній точці. Звідси випливає теорема:

<u>Теорема.</u> Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці $x = x_0$, то ця функція неперервна в даній точці.

З теореми випливає, що в точці розриву функція не може мати похіджної, бо в такій точці приріст Δy є скінченою величиною при $\Delta x \to 0$.

Обернене до теореми твердження невірне, що буде показано в пункті 4.2.

<u>5.2. Геометричний зміст похідної.</u>

Відомо, що швидкість руху точки спрямована по дотичній до її траєкторії в сторону додатного відліку відстані. Тому, наприклад, визначення швидкості польоту кулі (снаряда) за її траєкторією, швидкість руху будь-якої планети по її орбіті вимагає визначення напрямку дотичної до кривої. Напрямком дотичної вважають кут між дотичною і додатнім напрямком осі абсцис.

Введемо поняття дотичної до кривої.

<u>Дотичною до кривої</u> в т. A називають граничне положення січної AB при переміщенні т. B в т. A (див. рис. 1).

Проведемо дотичну T до графіка функції $y = f(x)$ в т. $A(x_0, y_0)$ і січну AB, (т. $B(x_1, y_1)$) з кутовим коефіцієнтом $k_1 = \text{tg}\varphi_1$ (рис. 2). З трикутника ABP знайдемо:

$$k_1 = \text{tg}\,\varphi_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

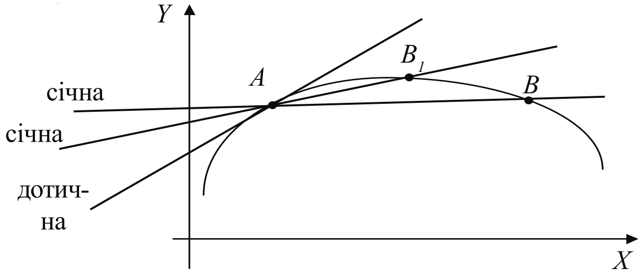


Рис. 1.

Вважаємо, що т. A є фіксованою, а т. B необмежено наближається до точки A. Тоді:

– січна AB наближається до дотичної T;
– $x_1 \to x_0$, отже $\Delta x \to 0$;
– кут $\varphi_1 \to \varphi$, де φ – кут нахилу дотичної T до осі OX.

Тому, що $\operatorname{tg}\varphi_1$ – неперервна функція (випадок $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ не розглядаємо), матимемо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\varphi_1 \to \varphi} \operatorname{tg}\varphi_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Отже, **<u>геометричним змістом похідної</u>** є тангенс кута нахилу (кутовий коефіцієнт) дотичної до графіка функції в заданій точці.

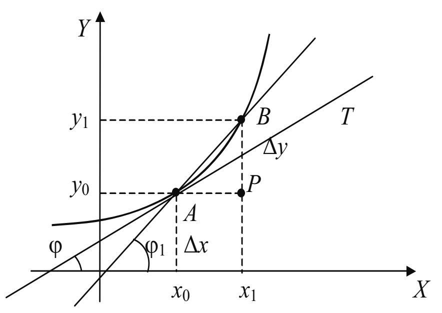


рис. 2.

З геометричного змісту похідної видно, що не в кожній точці неперервної функції можна провести дотичну (рис. 2а), тобто не в кожній точці існуватиме похідна. Це підтверджує, що обернена теорема до приведеної в п. 4.1 невірна.

Геометричний зміст дозволяє також встановити значення похідної в будь-якій точці графіку функції (рис. 2а).

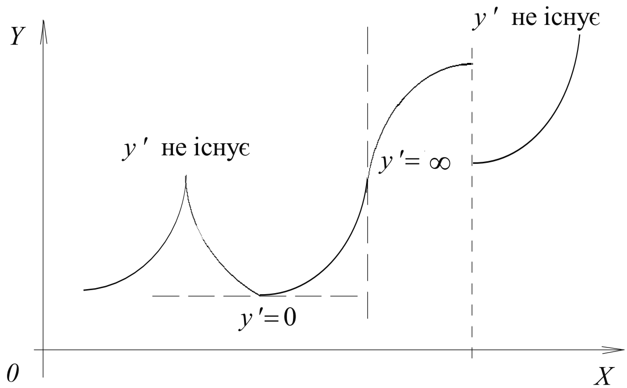


Рис. 2а.

Як відомо, будь-яка не вертикальна пряма, що проходить через т. $A(x_0, y_0)$ визначається рівнянням:

$$y = y_0 + k(x - x_0),$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої T. Таким чином, **рівняння дотичної** до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці $A(x_0, y_0)$ матиме вигляд:

$$y = f(y_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

а **рівняння нормалі** в заданій точці $A(x_0, y_0)$

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Наприклад, рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 2x - 1$ в точці $x = 1$ матиме вигляд

$$y = 4(x - 1) + 2 = 4x - 2,$$

а рівняння нормалі в цій точці

$$y = 2 - 1/4(x - 1) = 2{,}25 - 0{,}25x,$$

оскільки $f'(x) = 2x + 2$, $f'(1) = 4$, $f(1) = 2$.

5.3. Правила диференціювання.

Визначення похідної не лише дозволяє встановити її фізичний та геометричний зміст, а й дає спосіб обчислення похідної функції. Для цього необхідно виконати наступні чотири кроки:

– задати приріст аргументу Δx;

– знайти приріст функції $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$;

– скласти відношення приросту функції до приросту аргументу;

– обчислити границю складеного відношення.

Наприклад: Знайдемо похідну функції $y = x^2$.

Зробимо послідовно вказані чотири кроки:

– нехай приріст аргументу буде Δx;

– знайдемо $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x+\Delta x)$.

– складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$;

– обчислимо границю відношення $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$.

Отже, $y' = (x^2)' = 2x$.

По наведеній схемі можна встановити також похідні суми, добутку, частки елементарних функцій. Як приклад, введемо правило знаходження похідної суми двох функцій.

Нехай функцію $y = f(x)$ можна представити у вигляді алгебраїчної суми функцій u та v, диференційованих в т. x, тобто $y = u+v$.

Знайдемо y', використовуючи схему:

– нехай приріст аргументу Δx;

– знайдемо $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)) - (u(x) + v(x)) = (u(x+\Delta x) - v(x)) + (v(x+\Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v$;

– складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$;

– обчислимо границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v' .$$

Отже, похідна алгебраїчної суми двох функцій рівна алгебраїчній сумі похідних доданків:

$$(u+v)' = u' + v'.$$

Аналогічно знайдемо правила диференціювання добутку та частки:

$$(uv)' = u'v + uv'; \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Наслідками з правил диференціювання є наступні співвідношення:

$$(Cu)' = C(u)'; \qquad \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}; \quad C' = 0.$$

Встановимо правило диференціювання **складеної функції**. Складеною називатимемо функцію, аргумент якої теж функція, тобто $f(v(x))$. Наприклад,

$$y=\sqrt{\sin x}, \quad y=e^{1+x^2}, \quad y=\ln\left(1+\sqrt{x}\right).$$

Позначивши аргумент як $u = u(x)$, одержимо $y=\sqrt{u}$, де $u = \sin x$; $y = e^u$, де $u=1+x^2$; $y = \ln u$, де $u=1+\sqrt{x}$. Функцію $u(x)$ часто називають проміжним аргументом (внутрішньою функцією).

Теорема. Якщо функція $y = f(u(x))$ диференційована по u, а $u(x)$ – диференційована по x, то похідна функції y по незалежній змінній $\boldsymbol{x}$ рівна:

$$y' = y'(u)\cdot u'(x) .$$

Доведення. Згідно означення похідної

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

Домножимо чисельник і знаменник на Δu, тоді:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y\cdot\Delta u}{\Delta u\cdot\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'(u)\cdot u'(x) .$$

Отже, похідна складеної функції рівна добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу u на похідну проміжного аргументу:

$$(y(u(x)))' = y'(u)\cdot u'(x).$$

5.4. Похідні елементарних функцій.

5.4.1. Похідна логарифмічної функції.

а) $y = \ln x$.

– нехай приріст аргументу буде Δx;

– знайдемо $\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln\dfrac{x+\Delta x}{x} = \ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$;

– складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$; праву частину рівності домножимо і поділимо на x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}};$$

Позначимо $\dfrac{x}{\Delta x} = n$, звідси

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n};$$

обчислимо границю відношення

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}.$$

Тут враховано, що при $\Delta x \to 0$, $n = \dfrac{x}{\Delta x} \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$, властивості логарифмів і границь.

Використовуючи формулу диференціювання складеної функції знайдемо похідну функції: $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Отже,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \quad ; \quad \boxed{(\ln u)' = \frac{1}{u}u'} \quad .$$

б) $y = \log_a x$.

Використаємо формулу переходу логарифмів до нової основи:

$$\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a} \ ;$$

Тоді, $$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a} \, .$$

Отже,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}} \ ; \quad \boxed{(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}} \, .$$

5.4.2. Похідна степеневої функції $y = x^n$.

Прологарифмуємо ліву і праву частину рівності за основою e.

$$\ln y = n \cdot \ln x \, .$$

Диференціюючи обидві частини рівності, одержимо:

$$(\ln y)' = (n \cdot \ln x)' \, .$$

Враховуючи, що y є функцією x і використавши правило диференціювання складеної функції матимемо:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{x} \ ,$$

або

$$y' = n \cdot \frac{1}{x} \cdot y = n \cdot \frac{1}{x} \cdot x^n = n x^{n-1} \ .$$

Отже,

$$\boxed{(x^n)' = n x^{n-1}} \ ; \quad \boxed{(u^n)' = n u^{n-1} \cdot u'} \, .$$

5.4.3. Похідна показникової функції.

а) $y = a^x$.

Прологарифмуємо ліву і праву частину рівності.

$$\ln y = \ln a^x = x\ln a.$$

Знайдемо похідну:

$$(\ln y)' = (x\ln a)';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln a;$$

Звідси

$$y' = y\ln a = a^x\ln a.$$

Тому:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a};$$

$$\boxed{(a^u)' = a^u \ln a\cdot u'}.$$

б) $y = e^x$.

Очевидно, що

$$(e^x)' = e^x\cdot\ln e = e^x\cdot 1 = e^x,$$

Отже,

$$\boxed{(e^x)' = e^x};$$

$$\boxed{(e^u)' = e^u\cdot u'}.$$

5.4.4. Похідні тригонометричних функцій.

а) $y = \sin x$.

Використовуючи вищезгадану схему знаходження похідної, одержимо:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}.$$

Враховуючи, що

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

і

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

отримаємо:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Отже,

$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$; $\boxed{(\sin u)' = \cos u\cdot u'}$.

б) $y = \cos x$.

Відомо, що $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, отже,

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x\ .$$

Тому,

$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$;

$\boxed{(\cos u)' = -\sin u\cdot u'}$.

в) $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\quad y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Використаємо правило знаходження похідної частки:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\ .$$

Аналогічно,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\ .$$

Отже,

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}} \qquad \boxed{(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'}$$

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.} \qquad \boxed{(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'}.$$

5.4.5. Похідні обернених тригонометричних функцій.

Щоб вивести похідні функцій $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ використаємо їх означення. Так, $y = \arcsin x$ можна записати як $x = \sin y$, де $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності:

$$x' = (\sin y)' = \cos y \cdot y';$$

$$y' \cdot \cos y = 1\ .$$

Звідси,

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогічно виводяться похідні решти обернених тригонометричних функцій.

Запишемо формули похідних:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \boxed{(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'}$$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \boxed{(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'}$$

$$\boxed{(\operatorname{arctgx})' = \frac{1}{1+x^2}} \qquad \boxed{(\operatorname{arcctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'}$$

$$\boxed{(\operatorname{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}} \qquad \boxed{(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'}$$

Виведені формули записують в так звану таблицю похідних.

Таблиця похідних			
1	$(u+v)' = u' + v'$	2	$(u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'$
3	$(Cu)' = Cu'$	4	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5	$C' = 0$	6	$x' = 1$
7	$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$	7а	$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
8	$\left(\frac{C}{x}\right)' = -\frac{C}{x^2}$	8а	$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$
9	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	9а	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
10	$(\sin x)' = \cos x$	10а	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
11	$(\cos x)' = -\sin x$	11а	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
12	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	12а	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
13	$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	13а	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
14	$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$	14а	$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
15	$\left(e^x\right)' = e^x$	15а	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
16	$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$	16а	$(\ln\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$
17	$(\log_a\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x \ln a}$	17а	$(\log_a\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u \ln a}$
18	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	18а	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
19	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	19а	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
20	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	20а	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
21	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	21а	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

5.5. Похідні вищих порядків.

Похідну від даної функції називають першою похідною цієї функції (похідною першого порядку).

Очевидно, що похідна теж є функцією, і якщо вона диференційована, то і від неї можна взяти похідну. Таку похідну називають другою похідною, або похідною другого порядку і позначають y'', $f''(x)$.

Отже,

$$y'' = (f'(x))'.$$

Аналогічно,

$$y''' = (f''(x))' \text{ і т. д.}$$

Таким чином, **похідною *n*-ого порядку від функції $y = f(x)$** називають похідну від похідної $(n-1)$-ого порядку, при умові її існування, і позначають:

$$y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Фізичний зміст другої похідної – це прискорення зміни функції по відношенню до аргументу.

Розглянемо приклали знаходження похідних.

Приклад 1.

Знайти похідну функції $y = 5x^3 - 2x + \dfrac{3}{x}$.

Розв'язання: Дана функція є алгебраїчна сума функцій.

Продиференціюємо її:

$$y' = (5x^3)' - (2x)' + \left(\frac{3}{x}\right)' = 5\left(x^3\right)' - 2x' - \frac{3}{x^2} =$$

$$= 5\cdot 3x^2 - 2 - \frac{3}{x^2} = 15x^2 - 2 - \frac{3}{x^2}.$$

Відповідь: $y' = 15x^2 - 2 - \dfrac{3}{x^2}$.

Приклад 2. Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Розв'язання: Застосовуючи формулу похідної частки отримаємо:

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)\left(x^2\right)'-\left(x^2+1\right)'x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x\left(x^2+1-x^2\right)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Відповідь: $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y=\sin^3\varphi$ і вирахувати її значення при $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання: Це складена функція з проміжним аргументом $\sin\varphi$. Використовуючи формули 7а і 10, отримаємо:

$$f'(\varphi)=3\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi.$$

Вирахуємо значення похідної при $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sin^2\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{8}.$$

Відповідь: $f'(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{9}{8}$.

Приклад 4. Знайти похідну функції $y=\dfrac{1}{2}\cos^2 x-\ln\cos x$.

Розв'язання: Це складена функція з проміжним аргументом $\cos x$. Одержимо:

$$y'=\left(\frac{1}{2}\cos^2 x\right)'-\left(\ln\cos x\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2\cos x\left(\cos x\right)'-\frac{\left(\cos x\right)'}{\cos x}=\cos x\left(-\sin x\right)-\frac{-\sin x}{\cos x}=$$

$$=\frac{\sin x-\sin x\cdot\cos^2 x}{\cos x}=\frac{\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos x}=\frac{\sin x(\sin^2 x)}{\cos x}=\mathrm{tg}\,x\cdot\sin^2 x\quad.$$

Відповідь: $y'=\mathrm{tg}\,x\cdot\sin^2 x$.

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x}$.

Розв'язання: Продиференціюємо дану функцію

$$y' = \frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1)' - (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x \dfrac{1}{\cos^2 x} - (\operatorname{tg} x - 1)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + 1)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} : \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \quad .$$

Відповідь: $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Приклад 6. Знайти похідну функції $S = \ln \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ і обчислити її значення при $t = 2$.

Розв'язання: Спочатку перетворимо функцію, використовуючи властивості логарифмів: $S = \ln t - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$. Тепер продиференціюємо:

$$S' = (\ln t)' - \left(\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right)' = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1+t^2\right)'}{1+t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{1+t^2-t^2}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{t\left(1+t^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{1+t^2-t^2}{t\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{t\left(1+t^2\right)}.$$

Обчислимо значення похідної при $t = 2$

$$S'(2) = 0{,}1 .$$

Відповідь: $S'(2) = 0{,}1$.

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = \dfrac{5^{2x}}{2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}}$ і обчислити її значення при $x = 0$.

Розв'язання:

$$y' = \frac{(2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}) \cdot (5^{2x})' - \left(2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}\right)' \cdot 5^{2x}}{\left(2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}\right)^2} \cdot \left(\left(2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}\right) \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5 (2x)' - \frac{\left(4 + 5^{2x}\right)'}{2 \cdot \sqrt{4 + 5^{2x}}} \cdot 5^{2x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}\right)^2} \cdot \left(\left(2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}\right) \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot 2 - \frac{5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{4 + 5^{2x}}} \cdot 5^{2x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}\right)^2} \cdot \frac{5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot \left(4\sqrt{4 + 5^{2x}} + 2\left(4 + 5^{2x}\right) - 5^{2x}\right)}{\sqrt{4 + 5^{2x}}} =$$

$$= \frac{1}{4 + 4\sqrt{4 + 5^{2x}} + 4 + 5^{2x}} \cdot \frac{5^{2x} \cdot \ln 5\left(8 + 4\sqrt{4 + 5^{2x}} + 5^{2x}\right)}{\sqrt{4 + 5^{2x}}} = \frac{5^{2x} \cdot \ln 5}{\sqrt{4 + 5^{2x}}}.$$

Обчислимо значення похідної при $x = 0$:

$$y'(0) = \frac{5^0 \cdot \ln 5}{\sqrt{4 + 5^0}} = \frac{\ln 5}{\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{5^{2x} \cdot \ln 5}{\sqrt{4 + 5^{2x}}}$; $\quad y'(0) = \dfrac{\ln 5}{\sqrt{5}}$.

Приклад 8. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y=\frac{2}{3}x^3-x^2-2x+3$ в точці $A(3; 6)$.

Розв'язання: Для знаходження кутового коефіцієнта дотичної спочатку знайдемо похідну даної функції:

$$y'=\frac{2}{3}3x^2-2x-2=2x^2-2x-2 .$$

Кутовий коефіцієнт дотичної рівний значенню похідної функції при $x=3$:

$$k=y'(3)=2\cdot 3^2-2\cdot 3-2=18-6-2=10 .$$

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y-6=10(x-3), \text{ або } y-6=10\cdot x-30, \text{ тобто } 10x-y-24=0.$$

Відповідь: Рівняння дотичної має вигляд $10x-y-24=0$.

Приклад 9. Скласти рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y=\frac{3x-4}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x=2$.

Розв'язання: Спочатку знайдемо ординату точки дотику $A(2; y)$. Тому, що точка A лежить на кривій, то її координати задовольняють рівняння кривої, тобто

$$y=\frac{3\cdot 2-4}{2\cdot 2-3}=\frac{6-4}{4-3}=2 ;\ A(2; 2) .$$

Рівняння дотичної, проведеної до кривої в точці $A(2; 2)$, має вигляд $y-2=k(x-2)$. Для знаходження кутового коефіцієнта дотичної знайдемо похідну:

$$y'=\frac{(2x-3)(3x-4)'-(2x-3)'(3x-4)}{(2x-3)^2}=\frac{3(2x-3)-2(3x-4)}{(2x-3)^2}=$$

$$=\frac{6x-9-6x+8}{(2x-3)^2}=-\frac{1}{(2x-3)^2}$$

Кутовий коефіцієнт дотичної рівний значенню похідної функції при $x=2$:

$$k=y'(2)=-\frac{1}{(2^2-3)^2}=-\frac{1}{1}=-1 ,$$

Рівняння дотичної запишеться:

$$y-2=-(x-2), y-2=2-x, \text{ тобто } x+y-4=0 .$$

Відповідь: Рівняння дотичної $x+y-4=0$.

Приклад 10. Закон руху точки по прямій заданий формулою $S = 5t^3 - 3t^2 + 4$ (S – в метрах, t – в секундах). Знайти швидкість руху точки в кінці першої секунди.

Розв'язання: Швидкість руху точки в даний момент часу рівна похідній шляху S по часу t:

$$V(t) = S' = 15t^2 - 6t,\ V(1) = 15 - 6 = 9.$$

Відповідь: Швидкість руху точки в кінці першої секунди рівна 9 м/с.

Приклад 11. Тіло, кинуте вертикально вверх, рухається згідно закону $S = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, де V_0 – початкова швидкість, g – прискорення вільного падіння тіла. Знайти швидкість цього руху для будь-якого моменту часу t. Скільки часу буде підніматися тіло і на яку висоту воно підніметься, якщо V_0= 40м/с.

Розв'язання: Швидкість руху тіла в даний момент часу t рівна похідній шляху S по часу t:

$$V(t) = S' = V_0 - \frac{1}{2} g 2t = V_0 - gt\ .$$

У найвищій точці піднімання швидкість тіла рівна нулю:

$$V_0 - gt = 0,\ \ gt = V_0,\ \ \ t = \frac{V_0}{g}; t = \frac{40}{g} \approx 4{,}1;\ t = 4{,}1\text{с}.$$

За ($\frac{40}{g}$) секунд тіло піднімається на висоту:

$$S = 40\frac{40}{g} - \frac{1}{2} g \frac{1600}{g^2} = \frac{1600}{g} - \frac{800}{g} = \frac{800}{g} = 81{,}6(\text{м}).$$

Відповідь: S=81,6м.

Приклад 12. Знайти другу похідну функції $f(x) = e^{\sin x}$

Розв'язання: Спочатку знайдемо першу похідну

$$f'(x) = e^{\sin x}(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x.$$

Якщо продиференціювати ще раз, знайдемо другу похідну:

$f''(x) = e^{\sin x}(\cos x)' + (e^{\sin x})'\cos x = e^{\sin x}(-\sin x) + e^{\sin x}\cos x \cdot \cos x = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$.

Відповідь: $f''(x) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$.

Приклад 13. Знайти другу похідну функції $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ і обчислити її значення при $x = 2$.

Розв'язання: Спочатку знайдемо першу похідну:

$$y' = \frac{(x-1)(x^2+1)' - (x-1)'(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \quad .$$

Продиференціювавши ще раз знайдемо другу похідну:

$$y'' = \frac{(x-1)^2 (x^2 - 2x - 1)' - ((x-1)^2)' (x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)^2 (2x-2) - 2(x-1)(x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)2(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x - 1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x + 1)}{(x-1)^3} = \frac{2 \cdot 2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3} \quad .$$

Обчислимо значення другої похідної при $x = 2$; маємо $y''(2) = \dfrac{4}{(2-1)^3} = 4.$

Відповідь: $y''(2) = 4.$

Приклад 14. Точка рухається по прямій за законом $S = t$ - $\sin t$. Знайти швидкість і прискорення руху при $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання: Швидкість руху тіла в даний момент часу рівна похідній шляху S по часу t, а прискорення - другій похідній шляху S по часу t. Знаходимо:

$$V(t) = S' = 1 - \cos t,$$

$$a(\mathrm{t}) = S''(t) = -(-\sin t) = \sin t,$$

тоді:

$$V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1(\text{м/с});$$

$$a\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1(\text{м/с}^2).$$

Відповідь: $V\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1(\text{м/с})$; $a\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1(\text{м/с}^2).$

5.6. Проміжки монотонності.

З допомогою похідної можна дослідити функцію, побудувати її графік, знайти найбільше і найменше значення на проміжку і т.д.

При дослідженні функції важливу роль відіграє поняття монотонності.

Функція називається **монотонною**, якщо вона зростає (не спадає) або спадає (не зростає) в області свого визначення. Більшість функцій є **кусково-монотонними**, тобто зростають (не спадають) чи спадають (не зростають) на певних проміжках. Такі проміжки називають проміжками (інтервалами) монотонності.

Нагадаємо, що функція називається **зростаючою**, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, і **спадною** – якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Тобто, якщо для $x_1>x_2$, де x_1, x_2 належать $(a;\ b)$ виконується умова $f(x_1)>f(x_2)$, то функція $f(x)$ зростає на $(a;\ b)$; якщо ж виконується умова $f(x_1)<f(x_2)$, то функція $f(x)$ спадає на $(a;\ b)$.

Для встановлення проміжків монотонності функції використовують наступну теорему:

Теорема. (Необхідна та достатня умова монотонності функції на проміжку.)

Якщо диференційована функція $y = f(x)$, $x \in (a;\ b)$, зростає (спадає) на $(a;\ b)$, то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для будь-якого x з цього проміжку. Справедливе і обернене твердження: якщо $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) то функція зростає (спадає) на цьому проміжку.

Доведення. Якщо $f(x)$ зростає на $(a;\ b)$, то дотична до неї в будь-якій точці утворює гострий кут з додатнім напрямком осі OX. Тому, що тангенс гострого кута є додатня величина, то з геометричного змісту похідної $\mathrm{tg}\,a = f'(x)$ випливає, що $f'(x) \geq 0$ на $(a;\ b)$. Це легко проілюструвати графічно (див. рис. 3).

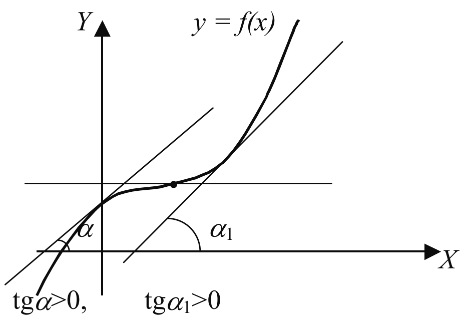


рис. 3

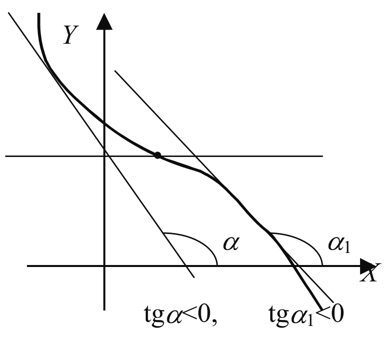


рис. 4

Аналогічно, функція $f(x)$ спадає на $(a; b)$, то $f'(x)<0$ на $(a; b)$ (див. рис. 4).

Доведемо достатню умову. Нехай $f'(x)\geq 0$ на $(a; b)$. Це означає, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0$ для всіх x з даного проміжку. Границя додатня, якщо $\Delta f>0$ і $\Delta x>0$, або $\Delta f<0$ і $\Delta x<0$. Згадаємо означення приростів функції та аргументу і розпишемо співвідношення:

$$\Delta x = x_2 - x_1 > 0,\ \text{звідси}\ x_2 > x_1;$$
$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1) > 0,\ \text{звідси}\ f(x_2) > f(x_1);$$
$$(\text{аналогічно, при}\ \Delta x<0,\ \Delta f<0).$$

Бачимо, що більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, отже дана функція зростає на $(a; b)$.

Аналогічно доводиться достатня умова спадання функції.

Наприклад, знайдемо проміжки монотонності функції $f(x) = x^2 - 8x + 12$. Похідна $f'(x) = 2x - 8$ буде додатньою, якщо $2x - 8>0$, тобто $x > 4$. Отже, функція спадає на проміжку $(-\infty ; 4)$ і зростає на проміжку $(4 ; +\infty)$.

5.7. Екстремум функції. Дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної.

Розглянемо графік деякої функції $y = f(x)$ (див. рис. 5).

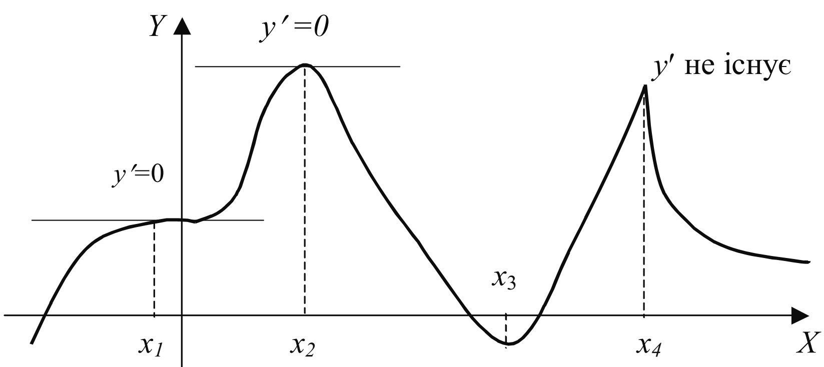


Рис. 5

Бачимо, що на проміжках $(-\infty ; x_2) \cup (x_3; x_4)$ функція зростає, а на проміжках $(x_2 ; x_3) \cup (x_4; \infty)$ функція спадає. Як видно, в точках x_2, x_3, x_4 функція змінює характер монотонності. Такі точки називають **точками екстремуму** функції.

Означення: Точка $x = a$ називається точкою екстремуму для функції $f(x)$, якщо в околі цієї точки виконуються одна з умов:

1. $f(a)>f(x)$, для всіх x з даного околу;

2. $f(a)<f(x)$, для всіх x з даного околу.

Якщо для точки $x = a$ виконується перша умова, то її називають **точкою максимуму**, якщо друга – **точкою мінімуму**.

Необхідна умова існування екстремуму диференційованої функції – **теорема Ферма**: якщо $f(x)$ в т. $x=a$ має екстремум, то її похідна в цій точці рівна нулю, або не існує.

Геометрично це означає, що в точці екстремуму дотична до графіка функції паралельна осі OX або її неможливо провести (див. рис. 5 т. x_2, x_4). Обернене твердження невірне (див. рис. 5 т. x_1).

Достатньою умовою існування екстремуму в точці $x=a$ є зміна знаку похідної при переході через дану точку.

Якщо при переході через точку $x=a$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, то точка $x=a$ є точкою мінімуму, якщо з плюса на мінус – точкою максимуму.

З вищезгаданого випливає, що точки в яких похідна рівна нулю або не існує є лише підозрілими на екстремум, або критичними точками І роду.

При дослідженні функції на екстремум слід знайти всі її критичні точки І роду і встановити знак похідної зліва і справа від них.

Схема дослідження функції на екстремум за допомогою першої похідної.

Неважко виділити основні моменти дослідження функції на екстремум:

1. Встановити область визначення заданої функції $f(x)$;

2. Визначити критичні точки функції.

а) знайти похідну функції $f'(x)$;

б) встановити, при яких значеннях аргументу $y'=0$ або y' не існує.

3. Встановити проміжки монотонності:

а) розбити область визначення функції критичними точками на проміжки;

б) встановити знак похідної на кожному проміжку;

в) зробити висновок про характер монотонності функції на кожному з проміжків.

4. Визначити екстремальні точки.

Для зручності, результати дослідження оформляють у вигляді таблиці.

Наприклад, дослідимо функцію $f(x) = x^3 - 3x^2$ на екстремум. Працюємо за схемою.

1. $D(f(x)) = (-\infty ; +\infty)$.

2. Визначимо критичні точки:

а) $f'(x) = 3x^2-6x$;

б) $f'(x) = 0$ при $3x^2 - 6x = 0$; $3x(x-2) = 0$; $x = 0$; $x = 2$.

3. Встановимо проміжки монотонності.

x	(-∞ ; 0)	0	(0 ; 2)	2	(2 ; +∞)
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	- 4	↗
		max		min	

4. Зробимо висновки:

а) точка (0 ; 0) є точкою максимуму даної функції;

б) точка (2 ; –4) є точкою мінімуму даної функції.

5.8. Дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної.

Часто буває доцільним досліджувати функцію на екстремум за допомогою другої похідної. Розглянемо суть цього методу.

Знак першої похідної характеризує зростання і спадання функції. Знак другої похідної пов'язаний зі зростанням та спаданням першої похідної.

Якщо y' на $(a; b)$ диференційована і зростає, то $y''>0$ на цьому ж інтервалі; якщо ж y' спадає на $(a; b)$, то $y''<0$ в кожній точці цього проміжку. Перша похідна при переході через точку максимуму переходить від додатніх значень до від'ємних, тобто спадає. Отже, її похідна повинна бути від'ємною.

Таким чином, в точці максимуму функції перша похідна рівна нулю, а друга похідна від'ємна.

Аналогічно можна довести, що в точці мінімуму функції друга похідна додатня. Звідси випливає достатня умова існування екстремуму функції.

Якщо в точці $x = x_0$ перша похідна функції дорівнює нулю ($f'(x_0) =0$), а друга похідна відмінна від нуля, то $x = x_0$ – точка екстремуму.

При цьому, якщо друга похідна в цій точці додатня ($f''(x_0)>0$), то $x = x_0$ – точка мінімуму, якщо друга похідна в цій точці від'ємна ($f''(x_0)<0$), то $x = x_0$ – точка максимуму.

Схема дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної.

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти першу похідну функції і точки, в яких вона перетворюється в нуль.
3. Знайти другу похідну функції і дослідити її знак в кожній з критичних точок.
4. Визначити точки екстремуму і обчислити (якщо потрібно) значення функції.

Приклад 1. Знайти екстремум функції $f(x) = x^3–3x^2+1$.

Розв'язання:

1. Область визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $D(f)=R$.

2. Функція має похідну на всій числовій прямій, тому критичні точки визначаємо з умови $f'(x)=0$:

а) $f'(x) = 3x^2 - 6x$;

б) $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x-2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

3. Знаходимо другу похідну функції

а) $f''(x) = 6x - 6$;

б) досліджуємо знак другої похідної в кожній критичній точці:

$$f''(0) = -6 < 0, \quad f''(2) = 6 > 0.$$

4. Отже, $x = 0$ – точка максимуму, $y_{max} = y(0) = 1$; $x = 2$ – точка мінімуму,

$$y_{min} = y(2) = 2^3 - 3 = 5.$$

<u>5.9. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.</u>

Найбільшим значенням функції на проміжку називається більше з усіх її значень, які вона приймає на цьому проміжку, а найменшим значенням – менше із всіх її значень.

Неперервна на проміжку (a; b) функція може мати тільки одне найбільше і тільки одне найменше значення на цьому проміжку, або не мати їх зовсім.

Знаходження найбільшого і найменшого значення неперервних функцій ґрунтується на наступних властивостях цих функцій:

1. якщо в деякому відкритому проміжку $a<x<b$ функція $f(x)$ неперервна і має тільки один екстремум і якщо це максимум, то він і є найбільшим значенням функції, а якщо мінімум – найменшим значенням функції в цьому проміжку;

2.якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $a \le x \le b$, то вона обов'язково має на цьому відрізку найбільше і найменше значення. Ці значення досягаються нею в точках екстремуму, які лежать всередині відрізка, або на кінцях цього відрізка.

<u>**Схема знаходження найбільшого і найменшого** значення функції на відрізку.</u>

1. Знайти екстремуми функції на даному відрізку $[a; b]$.
2. Знайти значення функції на кінцях відрізка $f(a)$ і $f(b)$.
3. Із усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

<u>**Приклад:**</u> Знайти найбільше і найменше значення функції:

$y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2$ на відрізку $-2 \le x \le 4$.

<u>**Розв'язання:**</u> Знайдемо екстремуми функції. Для цього знайдемо похідну функції і критичні точки першого роду з умови $y'=0$;

$$y' = \frac{1}{4}4x^3 - \frac{2}{3}3x^2 - \frac{3}{2}2x = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3);$$

$$y'=0 \text{ при } x_1 = 0;\ x_2 = -1;\ x_3 = 3.$$

Відмітимо критичні точки першого роду $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$ на числовій прямій.

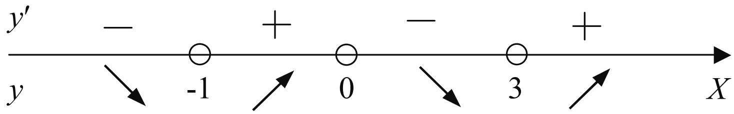


рис. 6.

Досліджуємо знак похідної в кожному з одержаних інтервалів:

$$y'(-2)<0\ ;\ y'(-0{,}5)>0\ ;\ y'(1)<0;\ y'(4)>0.$$

Таким чином (рис. 6):

$$y_{\min} = y(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{17}{12};$$

$$y_{\max} = y(0) = 2\,;$$

$$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{4}81 - \frac{2}{3}27 - \frac{3}{2}9 + 2 = \frac{81}{4} - 18 - \frac{27}{2} + 2 = 9\frac{1}{4}\,.$$

2. Знайдемо значення функції на кінцях відрізку:

$$y(-2) = \frac{1}{4}16 + \frac{2}{3}8 - \frac{3}{2}4 + 2 = 4 + 5\frac{1}{3} - 6 + 2 = 5\frac{1}{3};$$

$$y(4) = \frac{1}{4}256 - \frac{2}{3}64 - \frac{3}{2}16 + 2 = 64 - \frac{128}{3} - 24 + 2 = \frac{192 - 128 - 72 + 6}{3} = -\frac{2}{3}\,.$$

3. Отже, найбільше значення функції $y = y(-2) = 5\frac{1}{3}$, а найменше значення функції $y = y(3) = -9\frac{1}{4}$.

Відповідь: $y(-2) = 5\frac{1}{3}$, $y(3) = -9\frac{1}{4}$.

Приклад 2:

Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об’ємом 250 см^3. Якими повинні бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

Розв’язання:

Тут потрібно визначити радіус основи R і висоту H циліндра так, щоб при заданому об’ємі площа його повної поверхні була найменшою. Площа повної поверхні циліндра обчислюється по формулі:

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

Найменше значення цієї функції і потрібно обчислити.

Тому, що S є функцією двох незалежних змінних, то одну із них потрібно виключити. Відомо, що об'єм циліндра $V = \pi R^2 H = 250\pi$. Виразимо H через V:

$$H = \frac{250\pi}{\pi R^2} = \frac{250}{R^2} \text{ тоді } S = 2\pi R \frac{250}{R^2} + 2\pi R^2 = \frac{500\pi}{R} + 2\pi R^2.$$

1. Областю визначення функції S є додатні значення радіуса, тобто $R>0$.

2. Знаходимо похідну: $S' = -\dfrac{500\pi}{R^2} + 4\pi R.$

3. Знайдемо критичні точки:

$$-\frac{500\pi}{R^2} + 4\pi R = 0, \quad 4\pi R^3 = 500\pi, \quad R^3 = 125, \quad R = 5.$$

4. Знаходимо другу похідну:

$$S'' = \frac{500\pi\left(R^2\right)'}{R^4} + 4\pi = \frac{500\pi \cdot 2R}{R^4} + 4\pi = \frac{1000\pi}{R^3} + 4\pi.$$

5. Тому, що $S''(5)>0$, то при $R = 5$ функція досягає мінімуму, який і є найменшим значенням функції S. Тоді $H = \dfrac{250}{R^2}$, або $H = \dfrac{250}{25} = 10$.

Отже, на виготовлення циліндричного бака витрачається найменша кількість матеріалу, якщо довжина радіуса основи циліндра дорівнює 5 см, а висота циліндра – 10 см.

<u>Приклад 3.</u> Потрібно виготовити ящик з кришкою, сторони основ якого відносяться як один до двох, а площа повної поверхні 108 см^2. Якими повинні бути його розміри, щоб його об'єм був найбільшим?

<u>Розв'язання:</u> Тут потрібно визначити сторони основ a і b та висоту H прямокутного паралелепіпеда, щоб при заданій площі повної поверхні його об'єм був найбільшим.

За умовою: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}$, звідки $a = x$, $b = 2x$. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює $V = a \cdot b \cdot H$, або $V = 2x^2 \cdot H$. Потрібно виключити змінну H. Відомо, що

$$S = 108 \text{ см}^2 \text{ і } S = 2S_{осн.} + S_{біч}; \; S_{біч.} = P_{осн.} \cdot H.$$

Отримаємо:

$$S = 2x \cdot 2x + (x+2x)2H = 4x^2 + 6x \cdot H;$$

$$4x^2 + 6x \cdot H = 108; \; 6x \cdot H = 108 - 4x^2;$$

$$H=\frac{108-4x^2}{6x}=\frac{106}{6x}-\frac{4x^2}{6x}=\frac{18}{x}-\frac{2}{3}x\ ,$$

тоді

$$V=2x^2\left(\frac{18}{x}-\frac{2}{3}x\right)=36x-\frac{4}{3}x^3\ .$$

Дослідимо дану функцію за допомогою похідної:

1. Областю визначення функції V є додатні значення x, тобто $x>0$.

2. Знаходимо похідну: $V'=36-\frac{4}{3}3x^2=36-4x^2$; при $V'=0$; $4x^2=36$; $x^2=9$; $x=3$.

3. Знаходимо другу похідну: $V''=-8x$; $V''(3)<0$, тобто при $x=3$ функція має максимум, який і буде найбільшим значенням функції. Тоді:

$$H=\frac{18}{3}-\frac{2}{3}3=6-2=4.$$

<u>Відповідь:</u> Об'єм ящика є найбільшим, якщо сторони його мають довжини 3 і 6 см, а висота рівна 4 см.

<u>Приклад 4.</u> Число 10 розбити на два додатніх доданки так, щоб сума їх кубів була найменшою.

<u>Розв'язання:</u> Нехай один із доданків дорівнює x, тоді другий доданок буде $10-x$. Сума кубів цих доданків дорівнює:

$$S=x^3+(10-x)^3=x^3+1000-300x+30x^2-x^3;$$
$$S=30x^2-300x+1000.$$

Найменше значення цієї функції і потрібно визначити.

1. Областю визначення цієї функції є додатні значення x, тобто $x>0$.

2. Знаходимо похідну: $S'=30\cdot2x-300=60x-300$, при $S'=0$, $60x=300$, $x=5$.

3. Знайдемо другу похідну: $S''=60$, $S''(5)>0$, тобто при $x=5$ функція S має мінімум, який і є найменшим значенням функції.

<u>Відповідь:</u> Число 10 потрібно розкласти на два рівних доданки: 5 і 5.

<u>Приклад 5.</u> Закон прямолінійного руху тіла заданий рівнянням:

$$S=-t^3+9t^2-24t-8\ .$$

S – в метрах, t – в секундах. Знайти максимальну швидкість руху тіла.

<u>Розв'язання:</u> Швидкість руху тіла в даний момент часу дорівнює похідній шляху S.

$$V(t)=S'=-3t+18t-24.$$

Досліджуємо цю функцію на екстремум за допомогою другої похідної:

$$V'(t)=-6t+18,\ V'(t)=0;\ t=3с;\ V''(t)=-6\ .$$

Друга похідна від'ємна; звідси слідує що швидкість є найбільшою при $t=3$с.

Максимальна швидкість руху дорівнює:

$$V(3) = -3\cdot 3^2+18\cdot 3-24 = -27+54-24 = 3.$$

Відповідь: $V_{max} = 3$м/с.

5.10. Опуклість і точки перегину кривої.

На проміжку $a<x<b$ графік функції є **опуклий вгору**, якщо він лежить нижче дотичної, яка проведена в будь-який його точці.

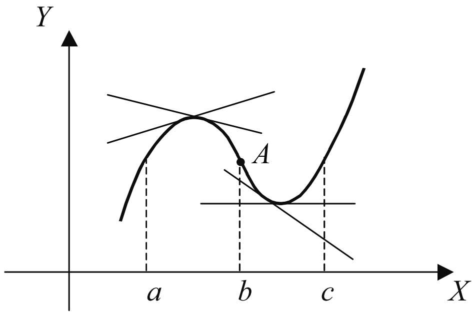


Рис. 7

На проміжку $b<x<c$ графік функції є **опуклий вниз**, якщо він лежить вище дотичної, яка проведена в будь-який його точці.

Легко побачити, що на проміжку опуклості графіка функції $f(x)$ вгору похідна $f'(x)$ спадає (кути нахилу дотичних до графіка функції на цьому проміжку послідовно зменшуються); а на проміжку опуклості вниз похідна $f'(x)$ зростає (кути нахилу дотичних до графіка функції на цьому проміжку послідовно збільшуються).

Достатня умова опуклості кривої.

Графік двічі диференційованої функції $y=f(x)$ є опуклим вгору на проміжку $a<x<b$, якщо друга похідна функції від'ємна в кожній точці цього проміжку:

$$f''(x)<0 \text{ для } a<x<b.$$

Графік двічі диференційованої функції $y = f(x)$ є опуклим вниз на проміжку $b<x<c$, якщо друга похідна функції додатня в кожній точці цього проміжку:

$$f''(x)>0 \text{ для } b<x<c.$$

Доведення. Нехай $f''(x)<0$ для всіх $a<x<b$. Тому, що $f''(x)$ є першою похідною для функції $f'(x)$, то $f'(x)$ спадає на цьому проміжку (п. 4.6). Спадання похідної на проміжку (a; b) вказує, що графік функції $f(x)$ на цьому проміжку опуклий вверх. Аналогічно доводиться для випадку $f''(x)>0$ на (a; b).

<u>Точкою перегину</u> неперервної функції називається точка A, при переході через яку графік функції змінює свою опуклість.

<u>Необхідна умова існування точки перегину.</u> Якщо функція $y=f(x)$ має неперервну похідну до другого порядку включно на інтервалі $(a; b)$ і точка $(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіку функцій $y=f(x)$, то $f''(x)=0$.

<u>Доведення.</u> Оскільки точка $(x_0; f(x_0))$, є точкою перегину, то справа і зліва від x_0 друга похідна $f''(x)$ має різні знаки. Внаслідок неперервності другої похідної отримаємо $f''(x)=0$.

<u>Достатня умова існування точки перегину.</u> Нехай функція $y=f(x)$ двічі диференційована на $(a; b)$ і при переході через точку $x_0 \in (a; b)$ її друга похідна змінює знак. Тоді точка кривої з абсцисою $x=x_0$ є точкою перегину.

<u>Доведення.</u> Нехай $f''(x)<0$, при $x<x_0$ і $f''(x)>0$ при $x>x_0$. Тоді при $x<x_0$ графік функції повернений опуклістю вверх, а при $x>x_0$ – опуклістю вниз. Таким чином, точка $(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y=f(x)$ згідно з означенням.

Аналогічно доводимо, якщо $f''(x)>0$ при $x<x_0$, і $f''(x)<0$ при $x>x_0$.

Точками підозрілими на перегин є точки, в яких друга похідна дорівнює нулю, або не існує. Такі точки називаються **<u>критичними точками II роду</u>**.

Якщо при переході через критичну точку II роду $x = x_0$ друга похідна функції змінює знак, то x_0 – абсциса точки перегину. Ордината точки перегину дорівнює значенню функції в точці x_0. Точка $(x_0, f(x_0))$ – точка перегину графіка функції $y = f(x)$.

Щоб знайти напрямки опуклості і критичні точки другого роду потрібно:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти другу похідну функції і критичні точки другого роду.
3. Відмітити границі області визначення і критичні точки другого роду на числовій прямій.
4. Дослідити знак другої похідної в кожному із одержаних інтервалів.
5. Встановити проміжки опуклості.
6. Визначити абсцису точки перегину і обчислити її ординату.

<u>Приклад:</u> Визначити напрямки опуклості і точки перегину функції

$$y = x^4+2x^3-12x^2-5x+2.$$

<u>Розв'язання:</u>

1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $x \in R$.
2. Знайдемо другу похідну функції і критичні точки другого роду:

$y'=4x^3+6x^2-24x-5$; $y''= 12x^2+12x-24$; $y''= 12\cdot(x^2+x-2)$; $y''=0$ при $x^2+x-2=0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}; \ x_1 = -2, \ x_2 = 1.$$

3. Відмітимо критичні точки другого роду $x = -2$ і $x = 1$ на числовій прямій, дані занесемо у таблицю.

x	(-∞;-2)	-2	(-2; 1)	1	(1;+∞)
y''	+	0	-	0	+
y	∪	-36	∩	-12	∪

4. Досліджуємо знак другої похідної в кожному з інтегралів:

$$y''(-3)>0, y''(0)<0, y''(2)>0 .$$

5. Крива опукла вниз при $x<-2$ і $x>1$, крива опукла вверх при $-2<x<1$.

6. Знайдемо координати точок перегину (т. п.)

$x_{т.п.}=-2, y_{т.п.}=y(-2)=16-28-12\cdot 4+5\cdot 2+2=-36; x_{т.п.}=1, y_{т.п.}=y(1)=1+2-12-5+2=-12.$

.

Відповідь: Точки перегину (–2; –36); (1; –12).

5.11. Загальна схема дослідження функції і побудова їх графіків.

Для побудови графіку функції зручно користуватись схемою, в якій узагальнено матеріал даного розділу.

1. Знайти область визначення функції.
2. Визначити чи функція є парна, непарна та періодичність функції.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Знайти проміжки монотонності і екстремуми функції.
5. Знайти напрямки опуклості і точки перегину графіка функції.
6. Побудувати графік функції, використовуючи всі одержані результати досліджень. Якщо їх виявилось недостатньо, то потрібно знайти ще декілька точок графіка функції, виходячи з її рівняння.

Приклад: Побудувати графік функції $y=\frac{4x^3-x^4}{5}$.

Розв'язання:

1. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, тобто $x\in R$. Далі знаходимо $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$.

2. Визначимо чи функція є парною чи непарною: $f(-x)=\frac{-4x^3-x^4}{5}$;

$f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$. Отже, функція є ні парною ні непарною.

3. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

$$OX:\begin{cases} y=0, \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ x=4, \end{cases} \quad OY:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

4. Знаходимо проміжки монотонності і екстремуми функції:

$$y' = \left(\frac{4}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^4\right)' = \frac{4}{5}3x^2 - \frac{1}{5}4x^3 = \frac{4}{5}x^2(3-x), \; y'=0, \text{ при } x_1=0 \text{ і } x_2=3.$$

Відмітимо критичні точки першого роду $x = 0$ і $x = 3$ на числовій прямій і досліджуємо знак похідної в кожному із одержаних проміжків: $y'(-1)>0$, $y'(1)>0$, $y'(4)<0$. Функція зростає при $x<3$ і спадає при $x>3$; $x = 3$ – точка максимуму.

$y_{\max} = y(3) = \dfrac{4\cdot 27 - 81}{5} = \dfrac{27}{5} = 5{,}4$. Дані запишемо в таблицю (табл. 1).

x	(-∞;0)	0	(0;3)	3	(3;∞)
y'	+	0	+	0	-
y	↗	0	↗	5,4	↘
				max	

5. Знаходимо напрямки опуклості і точки перегину графіка функції.

$$y'' = \left(\frac{12}{5}x^2 - \frac{4}{3}x^3\right) = \frac{12}{5}2x - \frac{4}{5}3x^2 = \frac{12}{5}x(2-x).$$

Отже, $y''=0$, при $x_1=0$, $x_2=2$. Відмітимо критичні точки другого роду $x=0$ і $x=2$ на числовій прямій і досліджуємо знак другої похідної в кожному із одержаних інтервалів: $y''=(-9)<0$, $y''(1)>0$, $y''(3)<0$.

Графік функції повернутий опуклістю вниз при $0<x<2$; і вгору при $x<0$ і $x>2$

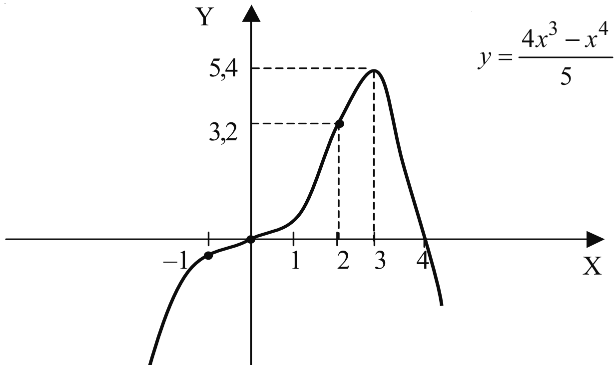
$$x_{\text{т.п.}}=0,\; y_{\text{т.п.}}=y(0)=0,$$

$$x_{\text{т.п.}}=2,\; y_{\text{т.п.}}=y(2)=\frac{4\cdot 8-16}{5}=\frac{16}{5}=3{,}2$$

Точки перегину графіка функції (0; 0) і (2; 3,2). Дані запишемо в таблицю (табл. 2).

x	(-∞, 0)	0	(0, 2)	2	(2,+∞)
f''	–	0	+	0	–
f	∩	0	∪	3,2	∩

Відмітимо всі одержані точки в системі координат і з’єднаємо їх плавною кривою. Для уточнення графіка знайдемо додаткову точку $y(-1) = -1$.



<u>5.12. Правило Лопіталя.</u>

При дослідженні функції може виникнути потреба обчислити її границю в деякій точці $x = a$ або при $x \to \infty$. В розділі були розглянуті елементарні способи знаходження границі функції, які, проте, не завжди приводять до бажаного результату. Одним з більш ефективних засобів для знаходження границі функції є **правило Лопіталя**, яке приводимо без доведення.

<u>**Правило Лопіталя**</u>: $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і неперервні в деякому околі точки $x = a$ і

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
- існують похідні функцій $f'(x)$ і $g'(x)$ в околі · точки $x = a$;
- існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$;

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило дійсне і у випадку $a = \infty$.

У тих випадках, коли при обчисленні границь отримуються невизначеності типу $0 \cdot \infty,\ \infty - \infty$ їх зводять до випадків $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$ шляхом перетворення функції в дріб; випадки 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} зводяться до випадку $0 \cdot \infty$.

Правило Лопіталя можна застосовувати і до функцій $f'(x),\ g'(x)$, якщо вони задовольняють вищевказані умови, тобто повторювати знову і знову, якщо це потрібно для одержання результату:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots .$$

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$.

<u>Розв'язання:</u> Як бачимо,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(x^4 - 16)}{\lim\limits_{x \to 2}(x^3 + 5x^2 - 6x - 16)} = \frac{0}{0}.$$

Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^4 - 16)'}{(x^3 + 5x^2 - 6x - 16)'} = \lim_{x \to 2} \frac{4x^3}{3x^2 + 10x - 6} = \frac{32}{26} = \frac{16}{13}.$$

<u>Відповідь:</u> $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16} = \frac{16}{13}$.

<u>Приклад:</u> Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$.

<u>Розв'язання:</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} = \frac{\lim\limits_{x \to 0}(e^{2x} - 1)}{\lim\limits_{x \to 0} \sin x} = \left[\frac{0}{0}\right],$$

отже можна застосувати правило Лопіталя.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}=2.$

Приклад: Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cosax}{1-\cos bx}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosax}{1-\cos bx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cosax)'}{(1-\cos bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{b\sin bx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{a^2cos\,ax}{b^2cos\,bx}=\frac{a^2}{b^2}.$$

В даному прикладі правило Лопіталя застосовано двічі.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cosax}{1-\cos bx}=\dfrac{a^2}{b^2}.$

Приклад: Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}xctg2x.$

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}xctg2x=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}ctg2x=[0\cdot\infty].$$

Перетворимо функцію , записавши її у вигляді дробу

$$\lim_{x\to 0}xctg2x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x'}{(tg2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}xctg2x=\dfrac{1}{2}.$

Приклад: Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

Розв'язання: Легко встановити, що маємо випадок $[1^{\infty}]$. Прологарифмуємо функцію і шукатимемо границю її логарифму:

$$a=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x},$$

$$\ln a=\ln\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\ln(tgx)^{tg2x})=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tg2x\ln tgx)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{ctg2x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Застосуємо правило Лопіталя:

$$\ln a = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\ln tgx)'}{(ctg2x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\dfrac{1}{tgx\cdot\cos^2 x}}{-\dfrac{2}{\sin^2 2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin^2 2x}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\sin 2x) = -1.$$

Звідси $a = e^{-1}$.

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x} = e^{-1}$.

Приклад: Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = [\infty - \infty].$$

Перетворимо функцію, привівши до спільного знаменника:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x + x\cos x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right) = 0.$

За допомогою правила Лопіталя легко довести більшість "чудових" границь. Наприклад,

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1;$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ позначимо a, і будемо шукати логарифм границі:

$$\ln a = \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = [0\cdot\infty] == \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln'\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1;$$

$\ln a = 1,$ отже $a = e.$

5.13. Вправи.

1. Дайте означення похідної функції.
2. В чому полягає геометричний зміст похідної?
3. В чому полягає фізичний зміст похідної?
4. Дайте означення другої похідної функції.
5. В чому полягає фізичний зміст другої похідної?
6. Напишіть правила диференціювання.
7. Виведіть формулу знаходження похідної добутку трьох функцій.
8. Сформулюйте умови зростання і спадання функції.
9. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функції.
10. Сформулюйте достатні умови існування екстремуму функції.
11. Як знайти точку екстремуму функції?
12. Як знайти найменше і найбільше значення функції на відрізку?
13. Сформулюйте достатню умову опуклості кривої.
14. Як знайти напрямки опуклості і точки перегину кривої?
15. Знайти похідні функції: а) $y = (2-x^2)^4$; б) $y = \ln\sin^2 x$; в) $f(x) = \cos^3\cdot(\cos^3 x)$.
16. Знайдіть другу похідну функції: а) $S = \sqrt{t}$; б) $y = \ln\sin x$; в) $y = \cos^2 x$.
17. Складіть рівняння дотичної до кривої $y = \mathrm{tg}2x$ в початку координат.
18. При якому значенні змінної x дотичні до кривих $y = x^2$ і $y = x^3$ паралельні.
19. Тіло рухається прямолінійно по закону $S = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 5$ (S – в метрах, t – в секундах). Знайдіть швидкість руху в той момент часу, коли прискорення дорівнює нулю.
20. Знайдіть екстремуми функції $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

21. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на відрізку $-4 \le x \le 4$.

22. Кусок дроту довжиною 84 см потрібно зігнути у вигляді прямокутника так, щоб площа цього прямокутника була найбільшою.

23. Число 16 розкладіть на два таких додатніх множника, щоб сума їх квадратів була найменшою.

24. Визначить напрямки опуклості і точки перегину кривої $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

25. Знайти похідні функцій:

1. $y = x^3 + x^5$.
2. $y = 2x^4 + x^{1/3}$.
3. $y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$.
4. $y = 3\sin x + 2^x + 2e^x$.
5. $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{4} + \ln x$.
6. $y = 2\sin x$.
7. $y = e^x(1 + x^2)$.
8. $y = 2\operatorname{tg}x \cdot \arcsin x$.
9. $y = 2^x \cdot \cos x$.
10. $y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.
11. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.
12. $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

Знайдіть похідну функції та обчисліть значення в заданій точці.

26. $y = \sqrt{x} + x^3 - 3x$, $x = 4$.

27. $y = \sin x \cdot \operatorname{tg}x$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

28. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$, $x = 1$.

29. $y = \ln x - 5x^2 + 3^x$, $x = 1$.

30. $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$, $x = 4$.

31. $y = e^x + \sin x$, $x = 0$.

32. $y=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{4}{x^4}$, $x=2$.

33. $y=\left(x^2-3x\right)\left(x+x^3\right)$, $x=2$.

34. $f(x)=\ln\cos x$, $x=-\dfrac{\pi}{3}$.

35. $f(x)=\sin x-\cos^2 x$, $x=0$.

36. $f(x)=e^{\sin x}$, $x=0$.

37. $f(x)=\ln\operatorname{ctg} x$, $x=-\dfrac{\pi}{4}$.

38. $f(x)=e^{\cos 2x}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$.

39. $f(x)=\ln\sin 4x$, $x=\dfrac{\pi}{16}$.

40. $f(x)=\cos^2 x^2$, $x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

41. $f(x)=e^{\sin 2x}-3\cos 2x$, $x=0$.

42. $f(x)=\operatorname{tg}^2 3x$, $x=0$.

43. $f(z)=\dfrac{\sqrt{z^2+1}}{z}$, $z=\sqrt{3}$.

44. $f(x)=3\sqrt{e^{4x+3}}$, $x=0$.

45. $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x^2+1}$, $x=2$.

46. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $x=\sqrt{5}$.

47. $f(x) = \dfrac{9x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = 2\sqrt{2}$.

48. $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $x = 2$.

49. $f(x) = \dfrac{e^{-3x} - e^{3x}}{3}$, $x = 0$.

50. $f(x) = \ln\dfrac{x^2+4}{x^2-1}$, $x = 2$.

51. $f(x) = 3\sqrt{e^{2x}+1}$, $x = 0$.

52. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$, $x = 4$.

53. $f(x) = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2+4}{x^2-4}}$, $x = 2$.

54. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $x = 1$.

55. $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - x)$, $x = 1$.

56. $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$, $x = e$.

57. $f(x) = \ln^2\sqrt{x^2+1}$, $x = 1$.

58. $f(x) = x\cos\sqrt{1-x}$, $x = 1$.

Знайдіть другу похідну і обчисліть її значення в даній точці.

59. $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2}$, $x = 1$.

60. $y=\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{6}{x^4}$, $x=2$.

61. $y=3x-\dfrac{6}{x^2}$, $x=1$.

62. $y=\dfrac{6x^4-7x^3}{2x^2}$, $x=2$.

63. $y=x^{\frac{1}{4}}-8x^{\frac{3}{4}}$, $x=1$.

64. $y=4x^{\frac{7}{2}}-9x^{\frac{5}{2}}$, $x=9$.

65. $y=-6\sqrt{x}+\dfrac{3}{x}$, $x=1$.

66. $y=6\sqrt{x}+3x\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$, $x=1$.

67. $y=-\sqrt[3]{x^2}+6x^2\sqrt[7]{x}+2$, $x=1$.

68. $y=2\sqrt[4]{x}+9x^2\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{7}{x^2}$ $x=1$.

69. $y=(3x-2)(7x+4)$, $x=2$.

70. $y=(2x-5)(-3x^2+4x+4)$, $x=\dfrac{1}{2}$.

71. $y=(4x^3-5x)(x^2+5)$, $x=1$.

72. $y=(9-2x)(2x^3-9x^2)$, $x=\dfrac{3}{4}$.

73. $y=(\dfrac{2}{x}+3x)(\sqrt{x}-1)$, $x=1$.

74. $y=3x^2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$, $x=1$.

75. $y=\frac{x-1}{5x-2}$, $x=2$.

76. $y=\frac{2x+3}{3x+7}$, $x=1$.

77. $y=\frac{5x}{x-3}$, $x=1$.

78. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $x=4$.

79. $y=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$, $x=9$.

80. $y=\sqrt[3]{x^2}-3x+\frac{1}{x^2}$, $x=9$.

81. $y=\frac{x}{x+1}$, $x=2$.

82. $y=\frac{5x^2}{x-3}$, $x=1$.

83. $y=\frac{x-1}{7x-4}$, $x=1$.

Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:

84. $y=x^2-6x+13$, $x\epsilon[0;6]$.

85. $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$, $x\epsilon[1;3]$.

86 $y=6x^2-x^3$, $x\epsilon[-1;6]$.

87. $y=x^3-3x^2-9x+35$, $x\epsilon[-4;4]$.

88. $y=-x^3-9x^2-24x+10$, $x\epsilon[0;3]$.

89. $y=2x^3-3x^2$, $x\epsilon[-1;4]$.

90. $y=2x^3-6x^2-18x$, $x\epsilon[0;4]$.

91. $y=x^4-18x^2-5$, $x\epsilon[-2;2]$.

Дослідити функцію з допомогою похідної та побудувати її графік:

92. $y=\frac{1}{3}x^3-x$.

93. $y=x^3-6x^2-9$.

94. $y=x^4-5x^2-4$.

95. $y=2x^3-3x^2$.

96. $y=x^3-3x^2+2$.

97. $y=x^3-3x.$

98. $y=x^3-3x^2-3x+2$.

99. $y=x^3-2x^2-x$.

100. $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+1$.

101. $y=x^4-4x+4$.

102. $y=x^3-5x^2-8$.

103. $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x$.

104. Точка рухається прямолінійно за законом $S=\sin^2 t$. Знайдіть момент часу t, коли прискорення точки дорівнює 1.

105. Знайдіть швидкість і прискорення точки, яка рухається прямолінійно за законом $S=\sin 2t$ в момент часу (S – в метрах, t – у секундах).

106. Точка рухається прямолінійно за законом $S=\frac{1}{3}t^3+2t^2-3$ (м). Знайдіть швидкість та прискорення точки в момент часу $t = 3$ с.

107. Точка рухається прямолінійно за законом $S=\frac{1}{3}t^3+2t^2-45.$ Обчислити її швидкість та прискорення в момент часу $t = 5$ с.

108. Дві точки рухаються прямолінійно по законах $S_1=\frac{2}{3}t^3+t^2+t+14$ та

$S_2 = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 11t - 8$. В який момент часу їх швидкості будуть рівні?

109. Точка рухається прямолінійно за законом $S = \sin^2 t$. Знайти момент часу, коли її прискорення рівне нулю.

110. Температура тіла T змінюється з часом t за законом $T = 0{,}2t^2$. Яка швидкість нагріву тіла в момент часу $t = 10$ с.

111. Сила струму I змінюється в залежності від часу t по закону I=0,4t^2 (S – в амперах, t – в секундах). Знайти швидкість зміни сили струму в кінці восьмої секунди.

112. Точка рухається прямолінійно по закону $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Знайти момент часу, коли прискорення рівне 1.

113. Точка рухається прямолінійно по закону $S = 2t^3 + t^2 + 4$. Знайти прискорення точки в момент часу $t = 3$с.

114. Точка рухається прямолінійно по закону $S = 2t^3 - 4t^2 + 5t$. Знайти швидкість і прискорення точки в момент часу $t = 2$ с.

115. Дві точки рухаються по законах $S_1 = 2t^3 - 4t^2 + 5t$ та $S_2 = 2t^3 - 1{,}5t^2$. Знайти момент часу, коли їх швидкості рівні.

116. Точка рухається прямолінійно з швидкістю яка змінюється по закону $V = 6t^2 - 2t + 11$. Знайти момент часу, коли прискорення точки рівне 2.

117. Сила струму I змінюється в залежності від часу t по закону I=0,4t^2 (t – в секундах, I – в амперах). Знайти швидкість зміни сили струму в момент часу $t = 8$с.

118. Знайти швидкість та прискорення точки в момент часу t=3с, якщо вона рухається прямолінійно по закону $S = t^3 + 5t^2 + 4$.

119. Тіло рухається по закону $S = S(t)$. Що можна сказати про рух тіла, якщо $S'(t) = 1$?

120. Тіло рухається по закону $S = S(t)$. Що можна сказати про рух тіла, якщо $S''(t) < 0$?

121. Тіло рухається прямолінійно по закону $S(t) = at^2 + bt + c$. При яких значеннях a, b, c рух тіла буде рівномірним?

122. Тіло рухається прямолінійно по закону $S(t) = at^2 + bt + c$. При яких значеннях a, b, c рух тіла буде рівноприскореним?

123. Знайти закон зміни прискорення руху тіла при гармонічному коливанні $S(t) = A\sin(wt + \varphi)$.

124. Тіло рухається прямолінійно по закону $S(t) = a_0 t + \frac{at^2}{2}$ (a_0, a – постійні). При яких співвідношеннях між a_0, і a тіло зупиниться?

125. Тіло рухається прямолінійно по закону $S(t) = 3t^2 + 2t + 3$. В який момент часу тіло зупиниться?

126. Точка рухається прямолінійно по закону $S(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{2} - 3t^2 + 4$. В який момент часу прискорення рівне нулю?

127. Записати рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = 2x^2 + 1$ в точках з абсцисами $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1.$

128. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до параболи $y = x^2$:

а) в початку координат;

б) в точці (3; 9);

в) в точці (–2; 4);

г) в точці перетину її з прямою $y = 3x - 2$.

129. В якій точці кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ дорівнює 3?

130. В якій точці дотична до кубічної параболи :

а) паралельна осі ;

б) утворює з віссю кут ?

131. Під якими кутами перетинаються парабола і пряма ?

132. В яких точках дотична до параболи :

а) паралельна прямій

б) перпендикулярна до прямої

в) утворює з прямою кут ?

133. По прямій лінії рухаються дві точки, закони руху яких: $S(t) = t^4 + 2t^2 + 5t + 1$, $S(t) = 12t^2$ відповідно в які моменти часу точки мають однакові прискорення.

134. Знайти границі, застосовуючи правило Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x - 16}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(1+x)}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tg5x}{tg3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$.

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^{2}-1}}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 5x}$.

10. $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\ln x$.

11. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(tg\varphi-\dfrac{1}{\cos\varphi})$.

12. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$.

13. $\lim\limits_{t\to0}\left(\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\operatorname{tg}5x$.

15. $\lim\limits_{x\to0}x^{2}e^{\sqrt{x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{5}{x^{5}-1}-\dfrac{7}{x^{7}-1}\right)$.

17. $\lim\limits_{\varphi\to0}\left(\operatorname{ctg}\varphi-\dfrac{1}{\varphi}\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to0}\left(ctg\,\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{3}}\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{ctg}x\cdot\ln\left(x+e^{x}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x$.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^{x}$.

23. $\lim\limits_{x\to1+0}\left(x-1\right)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}$.

24. $\lim\limits_{x\to+0}\left(2-x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Похідна

Фізичний зміст: y' – швидкість зміни функції при заданому значенні аргументу.

y'' – прискорення;

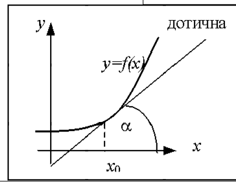
S – шлях; $S'=V$ – швидкість

Геометричний зміст: тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці.

$y'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

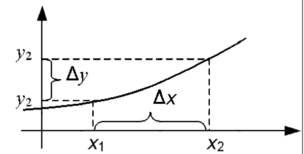
$$y'' = (y')'$$



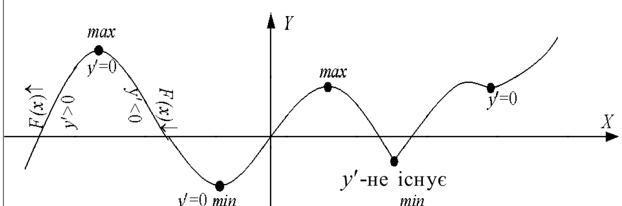
$\Delta x = x_2 - x_1$ – приріст аргументу

$\Delta y = y_2 - y_1 = y(x_2) - (x_1) =$

$= y(x_1 + \Delta x) - y(x_1)$ – приріст функції



Застосування похідної до дослідження функції.



$y'>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$

$y'<0 \Rightarrow f(x)\downarrow$

$\left.\begin{array}{l} y'=0 \\ y'\text{-не існує} \end{array}\right\}$ критична точка

Схема дослідження функції.

1. Знайти $D(y)$.
2. Знайти критичні точки I роду
а) знайти y'; в) розв'язати рівняння $y'=0$, або y'– не існує.
3. Встановити інтервали монотонності і точки екстремуму функції.
4. Знайти значення функції в екстремальних точках.
5. Знайти допоміжні точки.
6. Побудувати графік.

Таблиця похідних.

1. $C' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $(x^n)' = nx^{n-1}$
5. $(a^x)' = a^x \ln a$
6. $(e^x)' = e^x$
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
8. $(\sin x)' = \cos x$
9. $(\cos x)' = -\sin x$
10. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
11. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(Cu)' = Cu'$

Складена функція $y = f(u(x)) \Rightarrow y' = f'(u) \cdot u'(x)$

Приклад : $y = \ln \cos\sqrt{x}$

$$a)\ y' = \left(\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\right)^{\ln'} \cdot \left(-\sin\sqrt{x}\right)^{\cos'} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}'}$$

$$b)\ (e^{x^2})' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x^2}(x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x$$

РОЗДІЛ 6. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

6.1. Поняття диференціалу функції.

З поняттям похідної тісно пов’язане важливе поняття математики – поняття диференціалу.

Нехай дана функція *y =f(x),* диференційована в точці *x*. Це означає, що існує

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'.$$

Отже, справедливе співвідношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha,\quad \text{де } \alpha\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0.$$

Звідси: $\Delta y=y'\Delta x+\alpha\cdot\Delta x.$

Як видно, приріст функції складається з двох доданків. Другий доданок $\alpha\cdot\Delta x$, як добуток нескінчено малих величин, є нескінчено мала більш високого порядку, ніж Δx. Значить, при малих Δx другий доданок менш важливий, ніж перший, і саме перший доданок складатиме основну частину приросту функції (головну частину).

<u>Диференціалом функції</u> $y = f(x)$ в точці x називають головну частину приросту функції Δy і позначають символом dy. За означенням $dy = f'(x)\Delta x$.

При $f(x) = x$, отримаємо $dx = 1\cdot\Delta x$, або $dx = \Delta x$, тобто диференціал аргументу рівний його приросту. Тоді

$$dy=y'\Delta x=y'dx,$$

тобто диференціал функції $y =f(x)$ в точці x дорівнює добутку похідної в цій точці на диференціал аргументу.

Звідси, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ і вираз, який ми раніше позначали одним символом, тепер можна розглядати як дріб, рівний відношенню диференціалу функції до диференціалу аргументу.

6.2. Геометричний зміст диференціалу.

Розглянемо графік неперервної функції $y =f(x)$ (рис.1).

Похідна функції при $x=x_0$ рівна тангенсу кута нахилу дотичної до графіку функції в точці з абсцисою x_0, тобто:

$$y'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

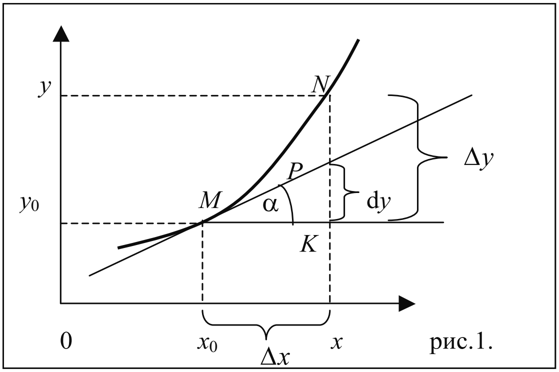


рис.1.

З рис. 1 видно, що дотична розбиває приріст функції KN на два відрізки: KP, який відповідає доданку $y' \cdot \Delta x$ та PN, який рівний доданку $\alpha \cdot \Delta x$. Якщо приріст аргументу прямує до нуля, то відрізок NP зменшується значно швидше, ніж відрізок PK. Отже, приріст ординати дотичної KP є головною частиною приросту функції $y = f(x)$. З трикутника MPK знаходимо:

$$PK = MK \cdot \mathrm{tg}\varphi.$$

Тому, що $MN = \Delta x$; $\mathrm{tg}\alpha = y'$, отримаємо $PK = y' \cdot \Delta x = dy$.

Отже, диференціал функції $y = f(x)$ геометрично зображається приростом ординати дотичної, проведеної в точці $M(x_0, y_0)$ при заданих значеннях x_0 і Δx.

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y = (2x^3 - 4)^5$.

Розв'язання: Знаходимо похідну даної функції:

$$y' = 5(2x^3 - 4)^4 (2x^3 - 4)' = 5(2x^3 - 4)^4 6x^2 = 30x^2 (2x^3 - 4)^4 .$$

Помножимо похідну на диференціал аргументу, отримаємо диференціал функції:

$$dy = 30x^2 (2x^3 - 4)^4 dx.$$

Відповідь: $dy = 30x^2 (2x^3 - 4)^4 dx.$

Приклад 2. Знайти диференціал функції $S = \dfrac{1}{\ln^2 t}$.

Розв'язання: Спочатку знайдемо похідну даної функції

$$S' = \frac{(\ln^2 t)'}{(\ln^2 t)^2} = -\frac{2\ln t (\ln t)'}{\ln^4 t} = -\frac{2 \cdot \frac{1}{t}}{\ln^3 t} = \frac{-2}{t \ln^3 t}.$$

Помножимо похідну на диференціал аргументу, отримаємо диференціал функції:

$$dS = \frac{-2dt}{t\ln^3 t}\cdot dx.$$

Відповідь: $dS = \dfrac{-2dt}{t\ln^3 t}\cdot dx$.

Приклад 3. Обчислити значення диференціалу функції $v=\cos^3 3\varphi$ при $\varphi=\pi/18$, $\Delta\varphi=0{,}01$.

Розв'язання: Диференціал функції обчислимо згідно формули $dv=v'(\varphi)d\varphi$.

Перш ніж застосувати цю формулу, знайдемо похідну функції і її значення при $\varphi=\pi/18$:

$$v' = 3\cos^2 3\varphi(\cos 3\varphi)' = 3\cos^2 3\varphi(-\sin 3\varphi)(3\varphi)' =$$

$$= -3\cos^2 3\varphi\sin 3\varphi\cdot 3 = -9\cos^2 3\varphi\sin 3\varphi;$$

$$v'\left(\frac{\pi}{18}\right) = -9\cos^2\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6} = -9\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = -9\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{27}{8} = -3{,}375;$$

$$d\varphi = 0{,}01$$

Звідси, $dv=-3{,}375\cdot 0{,}01=-0{,}03375$.

Відповідь: $dv=-0{,}03375$.

6.3. Застосування диференціалу до наближених обчислень. Приріст функції і диференціал функції відрізняються один від одного на малу величину $a\cdot\Delta x$. Якщо знехтувати цією малою величиною, то отримаємо наближену рівність

$$\Delta y \approx dy,$$

тобто при малих приростах аргументу Δx приріст функції можна замінити її диференціалом.

Враховуючи, що $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$, отримаємо $f(x+\Delta x)-f(x)\approx dy$, звідки

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy.$$

Ці наближені рівності застосовуються для наближених обчислень, бо обчислення диференціалу функції значно простіше, ніж обчислення її приросту.

Приклад 4. Обчислити наближене значення приросту функції $y=x^2+2x+5$ при зміні аргументу від $x=2$ до $x=2{,}001$.

Розв'язання: Знаходимо диференціал аргументу $dx=\Delta x=2{,}001-2=0{,}001$. Приріст аргументу малий, тому приріст функції Δy наближено дорівнює його диференціалу dy.

Диференціал функції обчислюємо за формулою: $dy=y'(x)dx$. Спочатку знайдемо похідну функції і її значення при $x=2$.

$$y' = 2x+2,$$

$$y'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6.$$

Тоді:

$$dy = 6 \cdot 0{,}001 = 0{,}006;$$

$$\Delta y \approx 0{,}006.$$

Точне значення приросту функції знайдемо за формулою:

$$\Delta y = f(2{,}001) - f(2),$$

де

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 5 = 13, \ \ f(2{,}001) = (2{,}001)^2 + 2 \cdot 2{,}001 + 5 = 13{,}006001.$$

Тоді

$$\Delta y = 13{,}006001 - 13 = 0{,}006001.$$

Порівнюючи отриманий результат з диференціалом dy, бачимо, що абсолютна похибка дорівнює 0,000 001. Проте абсолютна похибка не дає достатньо повної характеристики точності підрахунку, тому обчислимо і відносну похибку:

$$\omega = \frac{0{,}000001}{0{,}006001} < 0{,}02\% \ .$$

Така точність майже завжди достатня для прикладних розрахунків, тому замість приросту функції знаходять її диференціал.

Відповідь: $\Delta y \approx 0{,}006$.

Приклад 5. Обчислити наближене значення функції $y = x^3 + x^2 - 2x$ при $x = 2{,}01$.

Розв'язання: Знайдемо диференціал аргументу $dx = \Delta x = 2{,}01 - 2 = 0{,}01$. Приріст аргументу малий, тому для обчислення наближеного значення функції використаємо формулу:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy, \text{ або } f(2{,}01) \approx f(2) + dy.$$

Спочатку знайдемо значення функції при $x = 2$: $f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$.

Диференціал знаходимо за формулою: $dy = y'(x)dx$, для цього знайдемо похідну функції і її значення при $x = 2$:

$$y' = 3x^2 + 2x - 2, \ \ y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 = 12 + 4 - 2 = 14;$$

Тоді $\qquad dy = 14 \cdot 0{,}01 = 0{,}14;$

Звідси: $\qquad f(2{,}01) \approx 8 + 0{,}14 = 8{,}014.$

Відповідь: $f(2{,}01) \approx 8{,}014$.

Приклад 6: Знайти наближене значення $\sqrt{16{,}06}$.

Розв'язання: Нам потрібно знайти наближене значення функції $y = \sqrt{x}$ при $x = 16{,}06$.

Знайдемо диференціал аргументу: $dx = \Delta x = 16{,}06 - 16 = 0{,}06$.

Приріст аргументу малий, тому

$$f(16{,}06) \approx f(16) + dy, \ f(16) = \sqrt{16} = 4 \, .$$

Диференціал знаходимо за формулою: $dy = y'(x)dx$, для цього спочатку знайдемо похідну функції і її значення при $x = 16$.

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8} = 0{,}0125 \ .$$

Тоді $\quad dy = 0{,}125 \cdot 0{,}06 = 0{,}0075.$

Звідси, $\quad \sqrt{16{,}06} \approx 4 + 0{,}0075 = 4{,}0075.$

Точне значення $\quad \sqrt{16{,}06} = 4{,}0074929.$

Відповідь: $\sqrt{16{,}06} = 4{,}0075.$

Приклад 7. Знайти наближене значення $\sqrt[3]{0{,}988}$.

Розв'язання: Як і в попередньому прикладі, маємо $f(0{,}988) \approx f(1) + dy$,

$$y = \sqrt[3]{x}; \ dx = \Delta x = 0{,}988 - 1 = -0{,}012;$$

$$y' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \qquad y'(1) = \frac{1}{3};$$

$$dy = \frac{1}{3}(-0.012) = -0{,}004; \qquad f(1) = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Тоді: $\quad \sqrt[3]{0{,}988} \approx 1 - 0{,}004 = 0{,}996.$

Відповідь: $\sqrt[3]{0{,}988} \approx 0{,}996$.

Приклад 8. Об'єм куба, ребро якого дорівнює 4 см, при нагріванні збільшується на 0,96 см^3. Як при цьому збільшується ребро куба?

Розв'язання: Об'єм куба з ребром x обчислюється за формулою: $V = x^3$. Оскільки $\Delta V \approx dV$, то $dV \approx 0{,}96$.

Диференціал функції обчислюється за формулою $dV = V'(x)dx$, звідси $dx = \dfrac{dV}{V'(x)}$. Перш ніж скористатися цією формулою знайдемо похідну функції V і її значення при $x = 4$: $V' = 3x^2$, $V'(4) = 3 \cdot 4^2 = 48$.

Тепер знаходимо $dx \approx 0{,}96/48 = 0{,}02$, $\Delta x \approx 0{,}02$.

Відповідь: Ребро куба збільшилось приблизно на 0,02 см.

6.4. Вправи.

1. Дайте означення диференціалу функції.
2. Чому дорівнює диференціал незалежної змінної (аргументу)?
3. За яким правилом знаходять диференціал функції?
4. В чому полягає геометричний зміст диференціалу функції?
5. Як застосовують диференціал функції в наближених обчисленнях?
6. Знайдіть диференціал функції а) $y = (2x^2-1)(3-5x^2)$; б) $V = \ln\sin^3 2t$.
7. Обчисліть значення диференціалу функції $S=\sqrt{t^2+9}$ при зміні t від 4 до 4,025.
8. Обчисліть наближене значення приросту функції $y=(1+x-x^2)^2$ при зміні аргументу від 3 до 2,998.
9. Знайдіть наближене значення виразу а) $\sqrt{1{,}005}$; б) $\sqrt[3]{0{,}9843}$.
10. Об'єм куба, ребро якого дорівнює 40 см при нагріванні збільшується на 0,05 свого початкового значення. Знайдіть видовження ребра куба.
11. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 12см, а висота 30см. Наскільки (наближено) зменшується її об'єм, якщо не змінюючи висоти, сторону основи зменшити на 0,01см.

Обчислити наближене значення приросту функції $y = f(x)$ при зміні аргументу від x_1 до x_2.

12. $f(x)=x^3-x+5,$ $\quad x_1=2,\quad x_2=2{,}01.$
13. $f(x)=x^3-4x^2+5x+3,$ $\quad x_1=1,\quad x_2=1{,}03.$
14. $f(x)=x^3-x^2+x,$ $\quad x_1=2,\quad x_2=2{,}01.$
15. $f(x)=2x^3-3x-1,$ $\quad x_1=2,\quad x_2=2{,}001.$
16. $f(x)=x^3-2x^2+x+4,$ $\quad x_1=2,\quad x_2=2{,}04.$
17. $f(x)=5x^3-x^2+5x+4,$ $\quad x_1=1,\quad x_2=1{,}06.$
18. $f(x)=x^3-3x+2,$ $\quad x_1=4,\quad x_2=4{,}003.$
19. $f(x)=x^3-6x^2+6x-2,$ $\quad x_1=1,\quad x_2=1{,}005.$

Обчислити наближене значення функції $y=f(x)$ в заданій точці

20. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-2x,$ $\quad x=1{,}01.$

21. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+2x,$ $x=4{,}02$.

22. $f(x)=2x^3-4x^2+5x-2,$ $x=2{,}04$.

23. $f(x)=2x^3+4x^2-5x+2,$ $x=1{,}04$.

24. $f(x)=x^3-x+1,$ $x=2{,}04$.

25. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-4$ $x=1{,}02$.

26. $f(x)=x^3-6x^2+6x-2,$ $x=3{,}01$.

27. $f(x)=x^3-2x^2-3x-1,$ $x=2{,}02$.

28. $f(x)=x^3-x^2+5x+1,$ $x=2{,}03$.

29. $f(x)=2x^3-x^2-3x+4,$ $x=1{,}02$.

Обчислити наближене значення виразу

30. $\sqrt{4{,}08}$.

31. $(1{,}01)^7$.

32. $\sqrt[3]{1{,}04}$.

33. $\sqrt[3]{26{,}98}$.

34. $(2{,}03)^6$.

35. $\sin 31^\circ$.

36. $\cos 32^\circ$.

37. $\mathrm{tg}47^\circ$.

Диференціал функції

Диференціал – головна частина приросту функції.

Алгебраїчний зміст

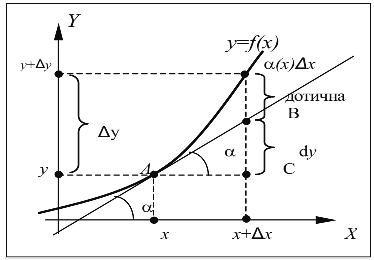
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \quad або$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \quad де\ \alpha \to 0$$

$$\Downarrow \qquad при\ \Delta x \to 0$$

$$\Delta y = \underbrace{y'\Delta x}_{\text{головна частина}} + \underbrace{\alpha(x)\Delta x}_{\text{мале}}$$

Геометричний зміст



$$tg\alpha = y'(x)$$

З $\Delta ABC \Rightarrow BC = AC\text{tg}\alpha = \Delta x\text{tg}\alpha = y'\Delta x$

$$\boxed{\begin{aligned} dy &= y'dx \\ y' &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}}$$

$$\boxed{dy = y'dx}$$

$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$

Застосування до наближених обчислень

$$\Delta y \approx dy$$

$$y(x+\Delta x) - y(x) \approx y'dx$$

$$\boxed{y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x}$$

Приклад:

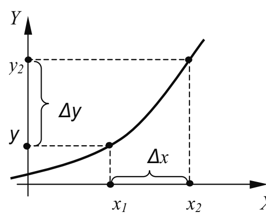
1. Знайти диференціал функції $y = e^{x^2}$

$$dy = y'dx = (e^{x^2})'dx = 2xe^{x^2}dx.$$

2. Знайти наближене значення функції $y = \cos x$ в точці $x = 45^0 30'$

$$\cos(45^\circ 30') = \cos(45^\circ + 0{,}5^\circ) \approx \cos 45^\circ + (\cos x)' \Big/_{x=45^\circ} \cdot 0{,}0087 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + (-\sin x) \Big/_{x=45^\circ} \cdot 0{,}0087 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}0087 \approx 0{,}69.$$



Δx – приріст аргументу

Δy – приріст функції

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

<u>РОЗДІЛ 7. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ</u>

<u>7.1. Поняття невизначеного інтегралу.</u>

Диференціювання – це дія, з допомогою якої за даною функцією знаходять похідну чи диференціал даної функції.

Знаходження похідної має велике практичне значення. Так, за відомим законом руху тіла $S=S(t)$ ми диференціюванням знаходимо швидкість $v(t)=S'(t)$, а пізніше і прискорення $a(t)=S''(t)$; якщо задано рівняння прямої $y = f(x)$, то легко визначити кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до даної кривої: $k = f'(x)$.

Важливими є і обернені задачі, наприклад:

а) відома швидкість руху тіла, встановити закон його руху.

б) дано кутовий коефіцієнт дотичної до кривої, знайти рівняння цієї кривої .

Інакше кажучи, за даною похідною треба знайти функцію, від якої знайдена ця похідна, тобто виконати дію обернену диференціюванню. Цю дію називають <u>**інтегруванням.**</u> З допомогою інтегрування за даною похідною або диференціалом функції знаходять саму функцію, яку називають первісною.

Диференційована функція $F(x)$ називається <u>**первісною**</u> для функції $f(x)$ на проміжку $a<x<b$, якщо $F'(x)=f(x)$ для кожного $a<x<b$.

Так, для функції $f(x)=\cos x$ первісною є функція $F(x)=\sin x$, оскільки $(\sin x)'=\cos x$. Зауважимо, що дана функція має не єдину первісну. Наприклад, функції $F_1(x)=\sin x+1$, $F_2(x) = \sin x + 3$, $F_3(x) = \sin x - 4$, які відрізняються лише на постійну, теж задовольняють умову $F_i'(x)=\cos x$.

Доведемо <u>**теорему:**</u> якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на деякому проміжку, то і функція $F(x)+C$, де C – будь-яка постійна, також є первісною для функції $f(x)$ на цьому проміжку.

Доведення:

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x).$$

Отже, досить знайти для функції $f(x)$ тільки одну первісну функцію $F(x)$, щоб знайти всі її первісні, бо вони відрізняються одна від одної тільки на постійну величину C.

Сукупність $F(x)+C$ всіх первісних функції $f(x)$ на інтервалі $a<x<b$ називають <u>**невизначеним інтегралом**</u> від функції $f(x)$ на цьому інтервалі і позначають $\int f(x)dx$.

Тут $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування, C – довільна стала.

Наприклад: $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \quad$ бо $\quad (tgx + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Геометрично вираз $F(x)+C$ можна зобразити як сімейство кривих, отриманих паралельним переносом будь-якої з них вздовж осі OY (рис. 1) .

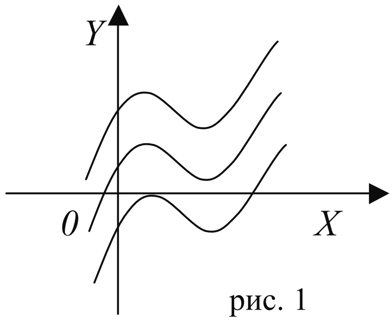


рис. 1

Якщо функція $f(x)$ має на деякому проміжку хоч одну первісну, то її називають інтегрованою на цьому проміжку.

7.2. Властивості невизначеного інтегралу.

1. Похідна невизначеного інтегралу рівна підінтегральній функції; диференціал невизначеного інтегралу рівний підінтегральному виразу:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x);\quad d\int f(x)dx=f(x)dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціалу функції рівний цій функції:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

3. Постійний множник можна винести за знак інтегралу:

$$\int Af(x)dx=A\int f(x)dx\,.$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функції рівний такій самій алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від кожної функції:

$$\int\left(f_1(x)\ \pm\ f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\ \pm\ \int f_2(x)dx.$$

5. Якщо функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, де k і b довільні числа ($k\neq 0$), то

$$\int f(kx+b)dx=\frac{F(kx+b)}{k}+C\,.$$

Для доведення властивостей 1-5 достатньо знайти похідні обох частин рівності.

Наприклад, доведемо властивість 4:

$$\left(\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx\right)'=f_1(x)\pm f_2(x),$$

і похідна лівої частини

$$\left(\int f_1(x)dx\right)' \pm \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) \pm f_2(x).$$

буде тотожньо рівна правій частині.

Основні формули інтегрування (таблиця інтегралів).

З кожної формули диференціювання випливає відповідна їй формула інтегрування. Наприклад, з того, що $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$, слідує рівність

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Запишемо таблицю основних інтегралів:

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1);$
3. $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x/a + C \\ -\arccos x/a + C \end{cases};$
11. $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases};$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad ;(a \neq 0)$
13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right| + C;$
14. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C \quad .$

Справедливість цих формул легко перевірити диференціюванням.

7.3. Безпосереднє інтегрування.

Під безпосереднім інтегруванням розуміють такий спосіб знаходження інтегралу, коли шляхом тотожних перетворень підінтегральної функції та застосування властивостей невизначеного інтегралу приходимо до одного чи декількох табличних інтегралів.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{3dx}{x^2}$.

Розв'язання: Використовуємо властивості степеня з від'ємним показником ($a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $a>0$) і знайдемо невизначений інтеграл від степеневої функції:

$$\int \frac{3dx}{x^2} = 3\int x^{-2}dx = \frac{3x^{-2+1}}{-2+1} + C = -3x^{-1} + C = \frac{-3}{x} + C .$$

Відповідь: $\int \frac{3dx}{x^2} = \frac{-3}{x} + C$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{2x\sqrt{x}}$.

Розв'язання: Використаємо властивість степеня з дробовим показником $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і знайдемо невизначений інтеграл від степеневої функції:

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int x^{-3/2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = -\frac{1}{\sqrt{x}} + C .$$

Відповідь: $\int \frac{dx}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} + C.$

Приклад 3: Знайти інтеграл: $\int 8x\sqrt[5]{x^3}\,dx$.

Розв'язання: Використаємо властивість степеня з дробовим показником і правило множення степеня з однаковими основами ($a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$).

Знайдемо невизначений інтеграл від степеневої функції:

$$\int 8x\sqrt[5]{x^3}\,dx = 8\int x\cdot x^{3/5}dx = 8\int x^{8/5}dx = 8\frac{x^{\frac{13}{5}}}{\frac{13}{5}} + C = \frac{40}{13}x^2\sqrt[5]{x^3} + C\ .$$

Відповідь: $\int 8x\sqrt[5]{x^3}\,dx = \dfrac{40}{13}x^2\sqrt[5]{x^3} + C.$

Приклад 4. Знайти інтеграл: $\displaystyle\int \frac{5x - x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Розв'язання: Використаємо властивості степеня з дробовим показником, правила дій над степенями з однаковими основами і знайдемо інтеграл від кожного доданку окремо:

$$\int \frac{5x - x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left(\frac{5x}{x^{1/3}} - \frac{x^{3/2}}{x^{1/3}}\right)dx =$$

$$5\int x^{2/3}dx - \int x^{7/6}dx = 3x\sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C\ .$$

Відповідь: $\displaystyle\int \frac{5x - x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = 3x\sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C.$

Приклад 5. Знайти інтеграл: $\displaystyle\int\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx.$

Розв'язання: Відкриємо дужки за формулою $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ і невизначений інтеграл від отриманої алгебраїчної суми функцій замінимо такою ж алгебраїчною сумою невизначених інтегралів від кожної функції:

$$\int\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \int\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)dx = x + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C\ .$$

Відповідь: $\displaystyle\int\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 dx = x + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C.$

Приклад 6. Знайти інтеграл: $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

Розв'язання: Для знаходження інтегралу використаємо формулу $\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$ і властивості невизначеного інтегралу:

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\operatorname{ctg} x + x + C.$$

Відповідь: $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + x + C.$

В практиці інтегрування часто зустрічаються інтеграли, для знаходження яких можна використовувати формули, які випливають з властивості 5:

1. $\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}e^{kx+b} + C;$

2. $\int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C;$

3. $\int \sin(kx+b) = -\frac{1}{k}\cos(kx+b) + C;$

4. $\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b) + C;$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2(kx+b)} = \frac{1}{k}\operatorname{tg}(kx+b) + C;$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2(kx+b)} = -\frac{1}{k}\operatorname{ctg}(kx+b) + C;$

6. $\int \frac{dx}{k^2 + b^2x^2} = \frac{1}{bk}\operatorname{arctg}\frac{b}{k}x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{b}{k}x + C.$

Так, при знаходженні $\int \cos\frac{x}{2}dx$ можна використовувати формулу:

$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C, \quad \partial e\ k = \frac{1}{2},$$

тоді

$$\int \cos\frac{x}{2}dx = 2\sin\frac{x}{2} + C \quad .$$

7.4.Інтегрування методом підстановки (заміна змінної).

Якщо інтеграл неможливо привести до табличного з допомогою елементарних перетворень, то одним з способів інтегрування є метод підстановки (заміни змінної).

Суть методу підстановки полягає в наступному: заміняють новою змінною таку частину підінтегральної функції, при диференціюванні якої отримуємо ту частину, що залишилась (не враховуючи постійного множника, на який завжди можна домножити чи доділити відповідний вираз). В результаті введення заміни підінтегральний вираз повинен набути вигляду:

$$f(t(x))\cdot t'(x)dx = f(t)dt,$$

що дозволяє звести інтеграл до табличного.

Приклад 7. Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}}$.

Розв'язання: Зробимо підстановку $t = 5 - 3x$, тоді $dt = -3dx$, звідки $dx = -\frac{dt}{3}$.

Далі:
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}} = \int \frac{-\frac{dt}{3}}{t^{2/3}} = -\frac{1}{3}\int t^{-2/3}dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{1/3}}{1/3} + C = -t^{1/3} + C = -t^{1/3} + C = -(5-3x)^{1/3} + C \quad .$$

Відповідь: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}} = -\sqrt[3]{5-3x} + C.$

Приклад 8. Знайти інтеграл: $\int (2+\cos x)^2 \sin x dx$.

Розв'язання: Нехай $2 + \cos x = t$, тоді: $-\sin x dx = dt$, звідки $\sin x dx = -dt$.

Отримаємо:
$$\int (2+\cos x)^2 \sin x dx = -\int t^2 dt = -t^3/3 + C = -\frac{1}{3}(2+\cos x)^3 + C.$$

Відповідь: $\int (2+\cos x)^2 \sin x dx = -\frac{1}{3}(2+\cos x)^3 + C.$

Приклад 9. Знайти інтеграл: $\int \frac{e^x dx}{2+3e^x}$.

Розв'язання: Нехай $t = 2 + 3e^x$, тоді $3e^x dx = dt$, $e^x dx = \frac{1}{3}dt$. Далі отримаємо:

$$\int \frac{e^x dx}{2+3e^x} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|2+3e^x\right| + C \quad .$$

Відповідь: $\int \frac{e^x dx}{2+3e^x} = \frac{1}{3}\ln\left|2+3e^x\right| + C$.

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \cos\frac{x}{2}dx$.

Розв'язання: Нехай $\frac{x}{2}=t$, тоді $\frac{1}{2}dx=dt$ звідки $2dt=dx$. Отримаємо:

$$\int \cos\frac{x}{2}dx = 2\int \cos t dt = 2\sin t + C = 2\sin\frac{x}{2}+C.$$

Відповідь: $\int \cos\frac{x}{2}dx = 2\sin\frac{x}{2}+C.$

7.5. Інтегрування частинами.

Виведемо формулу інтегрування частинами. Відомо, що:

$$(uv)'=u'v+uv',$$

або

$$d(uv)=vdu+udv.$$

Інтегруючи ліву та праву частини, отримаємо

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv,$$

або

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}.$$

Як бачимо, знаходження $\int udv$ зводиться до знаходження $\int vdu$, який повинен виявитись більш простим або табличним інтегралом.

При використанні методу інтегрування частинами підінтегральну функцію представляють у вигляді добутку двох множників u та dv, і знаходять du та v. Якщо одержаний інтеграл $\int vdu$ виявився складним, то можна спробувати поміняти значення u та dv. Для зручності вирази u, dv, du, v оформлюють у вигляді таблиці.

Метод інтегрування частинами часто застосовують при інтегруванні функцій, що містять добуток, логарифми і обернені тригонометричні функції.

Приклад 11. Знайти інтеграл: $\int x\cdot e^x dx$.

Розв'язання:

$$\int x\cdot e^x dx = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C.$$

$u=x$	$du=dx$
$dv=e^x dx$	$v=\int e^x dx=e^x$

Приклад 12. Знайти інтеграл: $\int x\cdot\cos 2x dx$.

Розв'язання:

$$\int x\cdot\cos 2x dx=\frac{x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x dx=\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\ ,$$

$u=x$	$du=dx$
$dv=\cos 2x\ dx$	$v=\int\cos 2x\ dx\ =0{,}5\ \sin 2x$

Приклад 13. Знайти інтеграл: $\int x^2\ln x dx$.

Розв'язання:

$$\int x^2\cdot\ln x dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2 dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C\quad .$$

$u=\ln x$	$du=1/x\ dx$
$dv=x^2dx$	$v=\int x^2dx=x^3/3$

7.6. Інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен.

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx;\quad\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;\quad\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx\ .$$

Для відшукання вказаних інтегралів квадратний тричлен перетворюють в квадратний двочлен, виділяючи повний квадрат

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right).$$

Таке представлення підінтегрального виразу дозволяє звести шукані інтеграли до табличних або до інтегралів виду

$$\int\sqrt{t^2+b}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+b}+\frac{b}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+b}\right|+C$$

$$\int\sqrt{a^2-t^2}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}+C\quad.$$

Наведемо приклади.

Приклад 14: Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

Розв'язання: Виділимо з квадратного тричлена повний квадрат

$$x^2+4x+8=x^2+2\cdot2\cdot x+4+4=(x+2)^2+4;$$

тоді інтеграл набуде вигляду

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}.$$

Введемо заміну: $x+2=t,\ dx=dt$, одержимо

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}=\int\frac{dt}{t^2+2^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C.$$

Відповідь: $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C.$

Приклад 15: Знайти інтеграл $I=\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$.

Розв'язання: Виділимо з квадратного тричлену повний квадрат

$$2x^2-3x+1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right).$$

і введемо заміну $x-\frac{3}{4}=t,\ dx=dt, 7-8x=1-8t$. Тоді

$$I=\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1-8t}{t^2-\frac{1}{16}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-\frac{1}{16}}dt-\frac{8}{2}\int\frac{t}{t^2-\frac{1}{16}}dt=I_1+I_2.$$

Перший з отриманих інтегралів, I_1, табличний

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2 - \frac{1}{16}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right| + C,$$

а другий, I_2, знаходимо заміною $t^2 - \frac{1}{16} = v,\ 2tdt = dv,\ tdt = \frac{1}{2}dv$

$$I_2 = \frac{8}{2}\int \frac{tdt}{t^2 - \frac{1}{16}} = 4\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v} = 2\ln|v| + C = 2\ln\left|t^2 - \frac{1}{16}\right| + C.$$

Повернемось до змінної x і запишемо результат

$$I = \ln\left|\frac{x-1}{x-0,5}\right| - 2\ln\left|x^2 - 1,5x + 0,5\right| + C.$$

Відповідь: $I = \ln\left|\frac{x-1}{x-0,5}\right| - 2\ln\left|x^2 - 1,5x + 0,5\right| + C.$

Приклад 16: Знайти інтеграл $I = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}}$.

Розв'язання: Виділимо повний квадрат з квадратного тричлена

$$x^2 - 4x - 3 = (x-2)^2 - 7,$$

і введемо заміну $x - 2 = t,\ dx = dt$; одержимо

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 - 7}} = \int\frac{dt}{\sqrt{t^2 - 7}} = \ln\left|x - 2 + \sqrt{(x-2)^2 - 7}\right| + C.$$

Відповідь: $I = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} = \ln\left|x - 2 + \sqrt{(x-2)^2 - 7}\right| + C.$

Приклад 17: Знайти інтеграл $I = \int\frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}}$.

Розв'язання: Виділимо з квадратного тричлена повний квадрат

$$9 + 6x - 3x^2 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3((x-1)^2 - 4) = 3((4 - (x-1)^2),$$

і введемо заміну $z = x - 1,\ dz = dx$.Тоді

$$I=\int\frac{(3x-5)\,dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3z-2}{\sqrt{4-z^2}}dz=\frac{3}{\sqrt{3}}\int\frac{zdz}{\sqrt{4-z^2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dz}{\sqrt{4-z^2}}=\sqrt{3}I_1-\frac{2}{\sqrt{3}}I_2.$$

П е р ш и й і н т е г р а л , I_1, знаходимо ввівши заміну

$$4-z^2=t,\ -2zdz=dt,\ zdz=-\frac{1}{2}dt$$

$$I_1=\int\frac{zdz}{\sqrt{4-z^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}+C=-\sqrt{4-z^2}+C.$$

Другий інтеграл є табличним

$$I_2=\int\frac{dz}{\sqrt{4-z^2}}=\arcsin\frac{z}{2}+C.$$

Підставимо знайдені інтеграли та вернемось до змінної x; одержимо

$$I=-\sqrt{3(4-z^2)}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{z}{2}+C=C-\sqrt{9+6x-3x^2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2}.$$

Відповідь: $I=C-\sqrt{9+6x-3x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{x-1}{2}.$

Приклад 18: Знайти інтеграл: $I=\int\sqrt{x^2+2x+6}dx$.

Розв'язання: Виділяємо повний квадрат в підкореневому виразі

$$x^2+2x+6=(x+1)^2+5;$$

тепер використовуючи уже відомі формули інтегрування, та поклавши $t=x+1,\ x=dt,\ b=5$ обчислюємо:

$$\int\sqrt{x^2+2x+6}dx=\int\sqrt{(x+1)^2+5}dx=\int\sqrt{t^2+5}dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+5}+\frac{5}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+5})+C=$$

$$=\frac{(x+1)}{2}\sqrt{(x+1)^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right)+C.$$

Відповідь: $I=\dfrac{(x+1)}{2}\sqrt{(x+1)^2+5}+\dfrac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right)+C$.

Приклад 19: Знайти інтеграл: $I=\int\sqrt{3+4x-x^2}\,dx$.

Розв'язування: Виділяємо повний квадрат в підкореневому виразі

$$3+4x-x^2=7-\left(x-2\right)^2;$$

тепер використовуючи уже відомі формули інтегрування, та поклавши $t=\left(x-2\right), dt=dx,\ a^2=7$ обчислюємо

$$\int\sqrt{3+4x-x^2}\,dx=\int\sqrt{7-t^2}\,dt=\frac{t}{2}\sqrt{7-t^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\frac{x-2}{2}\sqrt{7-(x-2)^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}}+C.$$

Відповідь: $\int\sqrt{3+4x-x^2}\,dx=\frac{x-2}{2}\sqrt{7-(x-2)^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}}+C.$

7.7. Інтегрування раціональних функцій.

Ціла раціональна функція – це многочлен, який інтегрується безпосередньо:

$$\int\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\right)dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\ldots a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\,.$$

Інтеграл від дробової раціональної функції $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, де $P(x),Q(x)$ – многочлени, можна виразити через елементарні функції шляхом розкладу на доданки, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника. Такий раціональний дріб називають правильним, в інших випадках – неправильним дробом. Неправильний раціональний дріб завжди можна перетворити в правильний, поділивши чисельник на знаменник.

Правильний раціональний дріб можна розкласти на доданки наступних двох видів:

$$\frac{A}{(x-a)^m},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

де m,n – цілі додатні числа.

Для розкладу правильного раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на доданки треба:

1. Розкласти знаменник $Q(x)$ на найпростіші дійсні множники, тобто записати у виді

$$Q(x)=a_0(x-a)^m\ldots(x-b)^k\cdot(x^2+px+q)^n\ldots(x^2+cx+d)^r\,.$$

2. Записати схему розкладу дробу на елементарні доданки

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+\frac{B_k}{(x-b)^k}+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n}+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2}+...+\frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r}$$

де $A_1, A_2,..., A_m, B_1, B_2,...B_k, M_1,..., M_n, N_1,..., N_n, C_1,..., C_r,...D_1,...D_r$ – невідомі постійні. Доданків з відповідними знаменниками є стільки, який степінь кожного множника в розкладі $Q(x)$.

3. Звільнитись від знаменників, домноживши обидві частини на $Q(x)$.

4. Скласти систему рівнянь відносно невідомих

$$A_1, A_2,..., A_m, B_1, B_2,...B_k, M_1,..., M_n, N_1,..., N_n, C_1,..., C_r,...D_1,...D_r,$$

прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах.

5. Розв'язати систему рівнянь і підставити знайдені значення

$$A_1, A_2,..., A_m, B_1, B_2,...B_k, M_1,..., M_n, N_1,..., N_n, C_1,..., C_r,...D_1,...D_r$$

в схему розкладу.

6. Одержані в розкладі дроби приводяться до інтегралів типу

$$I_1=\int\frac{dx}{(x-a)^m}=\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C,\ \ m\neq 1,$$

$$I_2=\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C,\ m=1,$$

$$I_3=\int\frac{Mx+N}{(x^2px+q)^n}dx.$$

Інтеграл I_3 знаходять по правилам розглянутим в параграфі?

<u>Приклад 20:</u> Знайти інтеграл $\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx.$

Розв'язання: Виконаємо дії згідно приведеної схеми:
1) розкладемо знаменник на найпростіші дійсні множники:

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x+2)^2;$$

2) запишемо схему розкладу підінтегрального дробу на елементарні доданки

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{B_1}{(x+2)^2};$$

3) звільнимось від знаменників, домноживши обидві частини на $x(x+2)^2$:

$$3x^2 + 8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + B_1x = (A+B)x^2 + (4A+2B+B_1)x + 4A;$$

4) складемо систему рівнянь для визначення невідомих A, B, B_1, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 4A + 2B + B_1 = 0 \\ 4A = 8 \end{cases};$$

5) розв'яжемо одержану систему :

$$A = 2,\ B = 3 - A = 1,\ B_1 = -4A - 2B = -10;$$

6) запишемо розклад підінтегральної функції на елементарні доданки та проінтегруємо

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2};$$

$$\int \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}\right)dx = 2\int\frac{1}{x}dx + \int\frac{1}{x+2}dx - 10\int\frac{1}{(x+2)^2}dx =$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C.$$

Відповідь: $\int \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}dx = 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C.$

Приклад 21: Знайти інтеграл $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx.$

Розв'язання:

1) Розкладемо знаменник на найпростіші дійсні множники:

$$x^4 + x = x(x^3 + 1) = x(x+1)(x^2 - x + 1);$$

2) запишемо схему розкладу підінтегрального дробу на елементарні доданки:

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1};$$

3) звільнимось від знаменників, домноживши обидві частини на $x(x+1)(x^2 - x + 1)$:

$$x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = A(x^3 + 1) + Bx(x^2 - x + 1) + (Cx + D)x(x+1) =$$

$$= (A + B + C)x^3 + (C + D - B)x^2 + (B + D)x + A;$$

4) складемо систему рівнянь для визначення невідомих A, B, C, D, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях *x:*

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ C + D - B = 4 \\ B + D = -2 \\ A = 1 \end{cases};$$

5) розв'яжемо одержану систему: $A = 1, B = -2, C = 2, D = 0;$

6) запишемо розклад підінтегральної функції на елементарні доданки та проінтегруємо

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2x + 0}{x^2 - x + 1};$$

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2x + 0}{x^2 - x + 1} \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x+1} dx + 2 \int \frac{x dx}{x^2 - x + 1} = \ln|x| - 2\ln|x+1| + 2I;$$

Інтеграл I запишемо у вигляді

$$\int \frac{x dx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{2(x-1) + 2}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}},$$

і використаємо заміни $t = x^2 - x + 1, dt = (2x-1)dx, \ v = x - \dfrac{1}{2}, dv = dx$.

Тоді

$$\int \frac{xdx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{v^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2v}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Отже

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx = \ln|x| - 2\ln|x+1| + \ln\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln \frac{|x|\left(x^2 - x + 1\right)}{(x+1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Відповідь: $\displaystyle\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx = \ln \frac{|x|\left(x^2 - x + 1\right)}{(x+1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

7.8. Вправи.

1. Яку дію називають інтегруванням?
2. Яку функцію називають первісною функції $f(x)$?
3. Дати значення невизначеного інтегралу.
4. Якими діями можна перевірити інтегрування?
5. Написати основні формули інтегрування (табличні інтеграли).
6. Знайти інтеграли:

a) $\displaystyle\int \frac{1 - 3x + 4x^2}{x} dx$; $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$; $\displaystyle\int x \sin x dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^5} dx$; $\displaystyle\int \frac{6^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; $\displaystyle\int x \cos 4x dx$;

c) $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx$; $\int 3x \cdot 3^{x^2} dx$; $\int (2x-3)\cos x dx$;

d) $\int \frac{x^3-1}{x^2+x+1}dx$; $\int \sqrt[3]{e^{3x}-9} \cdot e^{3x} dx$; $\int (1-4x)\sin 2x dx$;

e) $\int (\frac{5}{3}x^2 - \cos x)dx$; $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;

f) $\int 3^x e^x dx$; $\int \frac{6^x dx}{\sqrt{36^x+1}}$; $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$;

g) $\int \frac{2^x}{e^x}dx$; $\int \frac{4^x dx}{\sqrt[3]{5+4^x}}$; $\int \frac{x}{\cos^2 3x}dx$;

h) $\int (5\cos x - 6 \cdot 2^x)dx$; $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx$; $\int \frac{x}{\sin^2 3x}dx$;

i) $\int (\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x})dx$; $\int \frac{\sqrt{tgx}}{4\cos^2 x}dx$; $\int (2x+1)e^x dx$;

j) $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}dx$; $\int \cos x\sqrt{\sin x}dx$; $\int (2x+5)\cos 2x dx$;

k) $\int (5^x - x)dx$; $\int \frac{\arcsin x - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $\int e^{-3x}(2-x)dx$;

l) $\int (5+\sqrt{x}-\frac{1}{x})dx$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x tgx}$; $\int \arcsin x dx$;

m) $\int (\sin x - \frac{1}{x^2})dx$; $\int \frac{e^x dx}{e^x - 1}$; $\int \arccos 2x dx$;

n) $\int \frac{x^3-3x+5}{x^3}dx$; $\int \sin x\sqrt{\cos^3 x}dx$; $\int arctg 3x dx$;

o) $\int \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx$; $\int \frac{5^x}{1-5^x} dx$; $\int \ln 3x dx$;

p) $\int \frac{1+\cos 2x}{3\cos x} dx$; $\int ctgx dx$; $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$;

q) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}{x} dx$; $\int tgx dx$; $\int x \ln x dx$;

r) $\int \frac{x^2 - 7x + 3}{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{dx}{\left(5-\sqrt{x}\right)^4 \cdot \sqrt{x}}$; $\int (3x+1)e^{3x} dx$;

s) $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{dx}{\ln^2 x \cdot x}$; $\int (x-1)\sin 2x dx$;

t) $\int \frac{x^2 - 6x + 7x^3}{x^2} dx$; $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$; $\int (3x-1)\ln x dx$;

u) $\int (6\sqrt{v} - 3v^2 + 5v) dv$; $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$; $\int (1-2x)\ln x dx$;

v) $\int (x-1)\cdot(x+\sqrt{2}) dx$; $\int 5^x \cos 5^x dx$; $\int (1-x)\cos 2x dx$;

w) $\int (x-1)^2 dx$; $\int \sqrt{1-\cos x} \sin x dx$; $\int 5\arcsin 3x dx$;

x) $\int \frac{x^3 - 3x - 4 + 5x^5}{x} dx$; $\int \frac{4^x}{\sqrt{16^x + 1}} dx$; $\int (x-3)e^{2x} dx$;

y) $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} + 3x}{\sqrt{x}} dx$; $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$; $\int (2x-1)e^{3x} dx$.

7. Знайти інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен:

a) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$; $\int \frac{dx}{4x - 1 - 4x^2}$; $\int \frac{3x+4}{x^2 + 5x} dx$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$; $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2 + 6x}} dx$; $\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2 + 10x}} dx$;

c) $\int \sqrt{x^2 + 4x} dx$; $\int \sqrt{1 - 2x - x^2} dx$; $\int \sqrt{x^2 - 3} dx$.

8. Знайти інтеграли від раціональних функцій:

a) $\int \frac{xdx}{x^3 - 1}$; $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$; $\int \frac{(x^2 + 1)dx}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$;

b) $\int \frac{(7x - 15)dx}{x^3 - 2x^2 + 5x}$; $\int \frac{2x^5 - 2x + 1}{1 - x^4} dx$; $\int \frac{x^4 dx}{x^4 - 2x^2 + 1}$.

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Первісною називають ф-цію $F(x)$ для функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$ для будь-якого $x \in D(f(x))$.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ називають сукупність усіх первісних функцій $f(x)$ $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Властивості невизначеного інтегралу:

1. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$
2. $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx, \quad \text{де } K = const$
3. $\int (f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$
2. $\int x^{-1}dx = \ln x + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
10. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

Метод безпосереднього інтегрування

1. Алгебраїчні перетворення $f(x)$.
2. Властивості інтегралу.
3. Таблиця інтегралів.

Приклад:

$$\int((x^2+3)^2dx = \int(x^4+6x^2+9)dx^{(1)} =$$
$$= \int x^4dx + \int 6x^2dx + \int 9dx^{(2)} = \int x^4dx +$$
$$+6\int x^2dx + 9\int dx = \frac{x^5}{5} + 6\frac{x^3}{3} + 9x + C =$$
$$= \frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x + C$$

Метод підстановки

1. Добуток.
2. Складна функція.
3. Заміна складності.

Приклад: $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx=$

$\sqrt{x^3+4}dx$ – складна, x^5+4 – "складність"

Нехай $x^3+4=t$, тоді $(x^3+4)'dx = t'dx$,

або $3x^2dx = dt$, $x^2dx = \frac{1}{3}dt$. Одержимо

$$\int\sqrt{t}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int\sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^3+4)^3} + C.$$

Інтегрування по частинах

$$\int udv = uv - \int vdu; \quad ((uv)' = u'v + v'u)$$

Приклад:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$x = u$	$dx = du$
$e^x dx = dv$	$v = \int e^x dx = e^x$

Перевірка:

$$\boxed{\begin{array}{l}\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \\ (F(x)+C)' = f(x)\end{array}}$$

!

РОЗДІЛ 8. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

8.1. Поняття визначеного інтегралу.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $a \le x \le b$. Вважаємо для зручності, що функція $f(x)$ на вказаному проміжку невід'ємна і $a<b$. Розіб'ємо цей відрізок на n частин точками $a=x_0<x_1<x_2...<x_n=b$. На кожному з відрізків $x_{i-1} \le x \le x_i$ ($i=1, 2, 3,...n$) візьмемо довільну точку c_i і обчислимо суму:

$$f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+f(c_2)\Delta x_2+...+f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \ .$$

де $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Ця сума називається **інтегральною сумою** функції $f(x)$ на відрізку $a\le x \le b$.

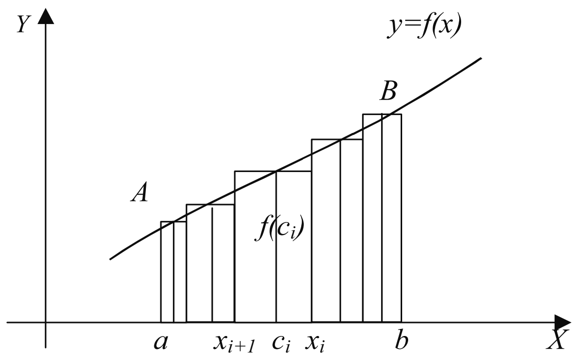


рис.1

Геометрично (рис.1) кожний доданок інтегральної суми дорівнює площі прямокутника з основою Δx_i і висотою $f(c_i)$, а вся сума дорівнює площі фігури, яку отримали з'єднанням всіх вказаних вище прямокутників.

Очевидно, при всіх можливих розбиттях відрізка $a \le x \le b$ на частини отримаємо різні інтегральні суми, а значить і різні східчасті фігури.

Будемо збільшувати число точок розбиття так, щоб довжина найбільшого з відрізків $x_{i-1} \le x \le x_i$ прямувала до нуля. В багатьох випадках при такому розбитті інтегральна сума буде прямувати до деякої кінцевої границі, не залежної ні від способу, яким вибираються точки ділення x_i, ні від того, як вибираються проміжні точки c_i.

Цю границю і називають визначеним інтегралом для функції $f(x)$ на відрізку $a \le x \le b$.

Визначеним інтегралом для функції $f(x)$ на відрізку $a \le x \le b$ називається границя, до якої прямує інтегральна сума при прямуванні до нуля довжини найбільшого часткового проміжку. Він позначається символом $\int_a^b f(x)dx$ і читається "інтеграл від a до b від функції $f(x)$ по dx", або скорочено "інтеграл від a до b від $f(x)dx$".

За означенням $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

Число a називається нижньою межею інтегрування; число b – верхньою межею; відрізок $a \le x \le b$ – відрізком інтегрування.

Зазначимо, що будь-яка неперервна на проміжку $a \le x \le b$ функція $f(x)$ має визначений інтеграл на цьому відрізку.

8.2. Геометричний зміст визначеного інтегралу.

Якщо інтегрована на відрізку $a \le x \le b$ функція $f(x)$ невід'ємна, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі S криволінійної трапеції $aABb$ (рис.1).

Уточнимо, що **криволінійною трапецією** називають фігуру, обмежену графіком неперервної функції $y = f(x)$, де $f(x) \ge 0$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю OX.

Отже, геометричний зміст визначеного інтегралу – це площа криволінійної трапеції.

Розглянемо криволінійну трапецію $CHKD$ (див. рис. 2), в якої абсциса точки C рівна x, а точки D – $x+\Delta x$. Графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь OY в точці A. Тоді площа криволінійної трапеції $CHKD$ рівна різниці площ криволінійних трапецій $OAKD$ і $OAHC$.

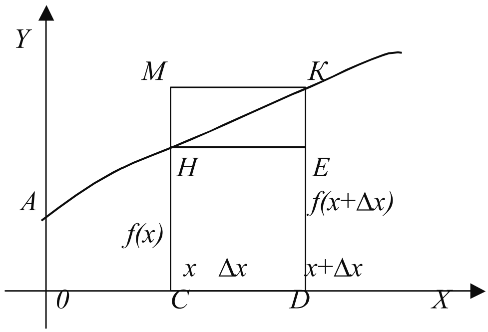


рис.2

Оскільки площа криволінійної трапеції *OAHC* залежить від x, то її можна зобразити символом $S(x)$. Аналогічно, площа криволінійної трапеції *CHKD* є функцією від $x+\Delta x$ і її можна позначити $S(x+\Delta x)$. Тому площа криволінійної трапеції *CHKD* дорівнює різниці $S(x+\Delta x)$ і $S(x)$ та позначається символом $\Delta S(x)$.

Побудуємо два прямокутники *CHED* і *CMKD*. Площа першого дорівнює $f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$. Оскільки площа криволінійної трапеції *CHKD* не менша площі прямокутника *CHED* і не більша площі прямокутника *CMKD*, то можна записати нерівність:

$$f(x)\cdot\Delta x \le \Delta S(x) \le f(x+\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Поділимо обидві частини цієї нерівності на Δx та знайдемо границі виразів при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\ .$$

Згадаємо, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x}=S'(x)$ і враховуючи неперервність функції $f(x)$,

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} f(x) = f(x).$$

отримаємо:

$$f(x)\le S'(x)\le f(x)\,,$$

звідси

$$S' = f(x)\,,$$

тобто похідна площі криволінійної трапеції дорівнює функції, яка задає верхню межу трапеції.

Таким чином, площа криволінійної трапеції є однією з первісних функції, яка задає верхню межу трапеції, і може бути визначена за допомогою інтегрування.

$$S(x) = \int f(x)dx = F(x) + C\ .$$

Остання рівність вірна для всіх x з проміжку $[a; b]$. Підставимо замість x число a. Отримаємо $S(a) = F(a)+C$. Але $S(a) = 0$, бо криволінійна трапеція перетворюється у відрізок, тому $C = -F(a)$. Таким чином

$$S(x) = F(x)-F(a)\ .$$

При $x = b$ одержимо вираз для обчислення площі криволінійної трапеції

$$S = F(b) - F(a)\ .$$

Отриманий вираз для обчислення S є приростом первісної $F(x)$ на $[a; b]$. Оскільки первісні відрізняються лише на постійну, то очевидно, що всі вони матимуть однаковий приріст на проміжку $[a; b]$. Звідси випливає ще одне означення визначеного інтегралу:

визначеним інтегралом називають приріст довільної первісної при зміні аргументу від a до b.

Дане означення записують у вигляді **формули Ньютона-Лейбніца**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\ ,$$

де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$.

8.3. Основні властивості визначеного інтеграла.

Всі нижче приведені властивості сформульовані в припущенні, що дані функції інтегровані на відповідних проміжках.

1. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0\ .$$

2. При перестановці меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\ .$$

3. Відрізок інтегрування можна розбивати на частини:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad \text{де } a<c<b.$$

4. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

5. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від функцій, що додаються:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

Доведення властивостей базується на формулі Ньютона-Лейбніца. Як приклад, доведемо властивість 3:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c); F(b) - F(a) = F(b) - F(a),$$

що і треба було довести.

Дана властивість легко ілюструється графічно (рис. 3)

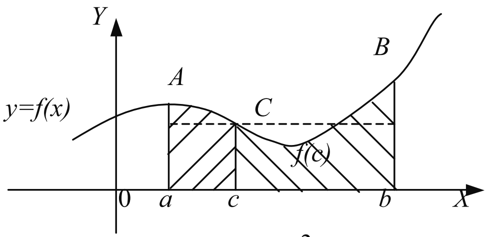


рис.3.

$$S_{aABb} = S_{aAcC} + S_{cCBb},$$

або

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

З рис. 3 легко побачити справедливість твердження **<u>теореми про середнє.</u>**

<u>Теорема.</u> Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, то існує точка c що належить даному проміжку, така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Тобто площа криволінійної трапеції *aABb* рівна площі прямокутника з сторонами $f(c)$ та $(b-a)$.

8.4. Безпосереднє обчислення визначеного інтеграла.

Для обчислення визначеного інтеграла при умові існування первісної користуються формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad .$$

З цієї формули видно порядок обчислення визначеного інтегралу:

1) знайти невизначений інтеграл від даної функції;

2) в отриману первісну підставити на місце аргументу спочатку верхню, а потім нижню межу інтеграла;

3) знайти приріст первісної, тобто обчислити інтеграл.

Приклад 1: Обчислити інтеграл:

$$\int_{-1/2}^{4} x dx \quad .$$

Розв'язання: Використавши вказане правило, обчислимо даний визначений інтеграл:

$$\int_{-1/2}^{4} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{4} = \frac{1}{2}\left(4^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(16 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{63}{4} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}.$$

Відповідь: $\int_{-1/2}^{4} x dx = 7\frac{7}{8}$.

Приклад 2: Обчислити інтеграл:

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \quad .$$

Розв'язання: Використаємо означення степеня з дробовим і від'ємним показником та обчислимо визначений інтеграл:

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 x^{-2/3}dx = \frac{x^{1/3}}{1/3}\Bigg|_1^8 = 3\sqrt[3]{x}\Bigg|_1^8 = 3\left(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1}\right) = 3(2-1) = 3.$$

Відповідь: $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$.

Приклад 3: Обчислити інтеграл:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right)dx .$$

Розв'язання: Інтеграл від різниці функцій замінимо різницею інтегралів від кожної функції.

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right)dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x dx = \operatorname{tg} x \Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} + \cos x \Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1-(-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 .$$

Відповідь: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right)dx = 2$.

Приклад 4: Обчислити інтеграл:

$$\int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{x}}dx .$$

Розв'язання: Використаємо означення степеня з дробовим показником, правило ділення суми на число і обчислимо визначений інтеграл від суми:

$$\int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 \frac{3x+1}{x^{1/2}}dx = \int_1^4 (3x^{1/2} + x^{-1/2})dx = 3\int_1^4 x^{1/2}dx + \int_1^4 x^{-1/2}dx =$$

$$= 3\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^4 + \frac{x^{1/2}}{1/2}\Bigg|_1^4 = 2x^{3/2}\Bigg|_1^4 + 2\sqrt{x}\Bigg|_1^4 = 2x\sqrt{x}\Bigg|_1^4 - 2\sqrt{x}\Bigg|_1^4 =$$

$$= 2\left(4\sqrt{4} - 1\right) + 2\left(\sqrt{4} - 1\right) = 2\left(8-1\right) + 2\left(2-1\right) = 14 + 2 = 16 \quad .$$

<u>**Відповідь:**</u> $\int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{x}}dx = 16$.

<u>8.5. Обчислення визначеного інтеграла методом підстановки.</u>

Обчислення визначеного інтеграла методом підстановки виконується в такій послідовності:

1) ввести нову змінну;
2) знайти диференціал нової змінної;
3) знайти нові межі визначеного інтегралу;
4) весь підінтегральний вираз виразити через нову змінну;
5) обчислити отриманий інтеграл.

<u>**Приклад 5.**</u> Обчислити інтеграл: $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}}$.

<u>**Розв'язання:**</u> Зробимо заміну $8–x = t$, тоді $–dx = dt,\ dx = –dt$.

Визначимо межі інтегрування для змінної t.

При $x = 0$ отримаємо $t_н = 8–0 = 8$, при $x = 7$ отримаємо $t_b = 8–7 = 1$.

Виразимо підінтегральний вираз через t і dt та перейдемо до нових меж, отримаємо:

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x}} = \int_8^1 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}} = -\int_8^1 t^{-1/3}dt = \int_1^8 t^{-1/3}dt = \frac{t^{2/3}}{2/3}\Bigg|_1^8 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}\Bigg|_1^8 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{64} - 1\right) = \frac{3}{2}(4-1) = \frac{3}{2}3 = \frac{9}{2} = 4{,}5 \quad .$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл: $\int\limits_1^2 \frac{x^2dx}{\left(x^3+2\right)^2}$.

Розв'язання: Вважатимемо, що $x^3+2=t$, тоді $3x^2dx=dt$, $x^2dx=\frac{1}{3}dx$. Визначимо межі інтегрування для змінної t. При $x=1$, отримаємо, $t_н=1^3+2=3$; при $x=2$ отримаємо $t_b=2^3+2=10$.

Виразимо підінтегральний вираз через t і dt, та перейдемо до нових границь, отримаємо:

$$\int\limits_1^2 \frac{x^2dx}{\left(x^3+2\right)^2}=\int\limits_3^{10}\frac{\frac{1}{3}dt}{t^2}=\frac{1}{3}\int\limits_3^{10}t^{-2}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}\Bigg|_3^{10}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}\Bigg|_3^{10}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{30}\right)=\frac{7}{90}.$$

Відповідь: $\int\limits_1^2 \frac{x^2dx}{\left(x^3+2\right)^2}=\frac{7}{90}$.

Приклад 7. Обчислити інтеграл: $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin xdx$.

Розв'язання: Нехай $\cos x=t$, тоді $-\sin xdx=dt$, $\sin xdx=-dt$.

Визначимо межі інтегрування для змінної t:

$$t_н=\cos 0=1; \quad t_b=\cos(\pi/2)=0.$$

Виразимо підінтегральний вираз через t і dt, та перейдемо до нових границь, отримаємо:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin xdx=\int\limits_1^0\sqrt{t}\left(-dt\right)=-\int\limits_1^0 t^{1/2}dt=\int\limits_0^1 t^{1/2}dt=\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^1=\frac{t^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}(1-0)=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin xdx=\frac{2}{3}$.

Приклад 8. Обчислити інтеграл: $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$.

Розв'язання: Спочатку перетворимо підінтегральний вираз:

$$\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1 - \cos^2 x)\sin x = \sin x - \cos^2 x \cdot \sin x .$$

Обчислимо інтеграл від різниці функцій, замінивши його різницею визначених інтегралів від кожної функції:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx - \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx \quad .$$

Обчислимо кожний інтеграл окремо.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -(0-1) = 1;$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x dx = \int\limits_1^0 t^2(-dt) = -\int\limits_1^0 t^2 dt = -\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^0 = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3} \quad ,$$

де $t = \cos x,\ dt = -\sin x dx.$

Тоді $$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} .$$

Відповідь: $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot$

8.6. Обчислення визначеного інтегралу частинами.

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ та їх похідні $u'(x)$ і $v'(x)$ неперервні на проміжку $[a; b]$, то формула інтегрування частинами для визначеного інтегралу має вигляд:

$$\int\limits_a^b u dv = vu\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du \quad .$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл: $\int_e^4 x\ln x dx$.

Розв'язання:

$$\int_e^4 x\ln x dx =$$

$u = \ln x$	$du = \frac{1}{x}dx$
$dv = xdx$	$v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\bigg|_e^4 - \int_e^4 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\bigg|_e^4 =$$

$$= 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - 4 + \frac{e^2}{4} = 8\ln 4 - 4 - \frac{e^2}{4} \quad .$$

Відповідь: $\int_e^4 x\ln x dx = 4(2\ln 4 - 1) - \frac{e^2}{4}.$

Приклад 10. Обчислити інтеграл: $\int_0^1 xe^{2x}dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^1 xe^{2x}dx =$$

$u = x$	$du = dx$
$dv = e^{2x}dx$	$v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$= \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^{2x}\right)\Big|_0^4 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right) \quad .$$

Відповідь: $\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$.

8.7. Наближені методи обчислення визначених інтегралів.

В тих випадках, коли обчислити визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца неможливо або важко, використовують методи наближеного інтегрування. Всі вони ґрунтуються на простих геометричних побудовах. Очевидно, що при достатньо малому відрізку $[a;\, b]$ площа S криволінійної трапеції наближено рівна площі прямокутника (“лівого” прямокутника рис. 4а, та “правого” прямокутника рис. 4.б), трапеції (рис. 5) або параболи (рис. 6).

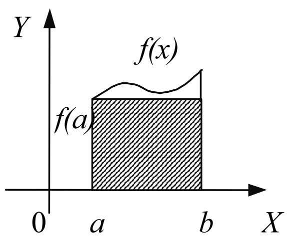


рис.4а

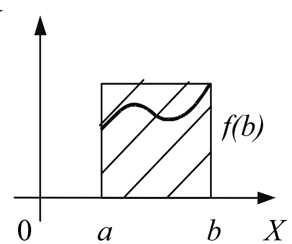


рис.4б.

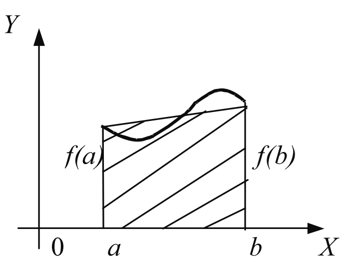


рис. 5

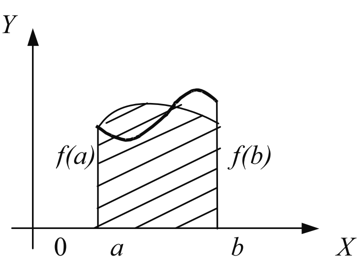


рис. 6

Запишемо наступні наближені рівності:

$$S \approx (b-a)\cdot f(a) \text{ (рис. 4а)};$$

$$S \approx (b-a)\cdot f(b) \text{ (рис. 4б)};$$

$$S \approx (b-a)\left(\frac{f(b)+f(a)}{2}\right) \text{ (рис. 5)};$$

$$S \approx \frac{b-a}{b}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) \text{ (рис. 6)}.$$

Щоб добитися більшої точності при знаходженні площі S, проміжок від a до b розбивають на n рівних частин (рис. 7) (при наближенні параболами проміжок розбивають на $2n$ частин).

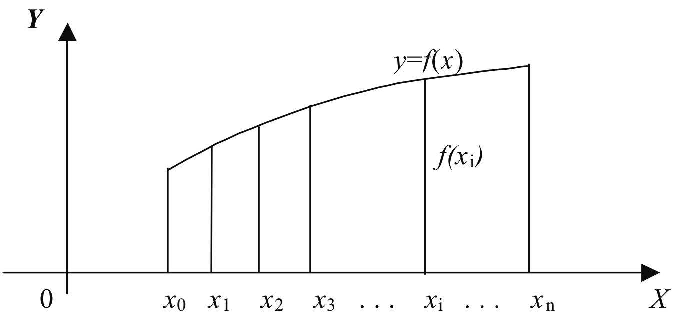


рис.7

Якщо для кожної з маленьких дуг використати попередні наближення, то для всієї площі S отримаємо наближене значення представлене у вигляді суми площ криволінійних трапецій:

$$S \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad ; \qquad S \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad ;$$

$$S \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_1)+f(x_n)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \quad ;$$

$$S \approx \frac{b-a}{2}\left(y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\right) \quad .$$

Перші дві формули носять назви формул “лівих” та “правих” прямокутників відповідно, третя – формули трапеції, а остання – формули Сімпсона.

Приклад 11. Обчислити за формулами прямокутників та трапецій $\int_0^1 \sin x^2 dx$ при n=10.

Розв'язання: Поділимо відрізок [0; 1] на (n=10) задану кількість частин. Тоді складемо таблицю значень підінтегральної функції в точках розбиття.

i	x_i	x_i^2	$y_i = \sin x_i^2$
0	$x_0 = 0$	$x_0{}^2 = 0$	$y_0 = 0$
1	$x_1 = 0{,}1$	$x_1{}^2 = 0{,}01$	$y_1 = 0{,}01$
2	$x_2 = 0{,}2$	$x_2{}^2 = 0{,}04$	$y_2 = 0{,}04$
3	$x_3 = 0{,}3$	$x_3{}^2 = 0{,}09$	$y_3 = 0{,}0899$
4	$x_4 = 0{,}4$	$x_4{}^2 = 0{,}16$	$y_4 = 0{,}1593$
5	$x_5 = 0{,}5$	$x_5{}^2 = 0{,}25$	$y_5 = 0{,}2474$
6	$x_6 = 0{,}6$	$x_6{}^2 = 0{,}36$	$y_6 = 0{,}3523$
7	$x_7 = 0{,}7$	$x_7{}^2 = 0{,}49$	$y_7 = 0{,}4706$
8	$x_8 = 0{,}8$	$x_8{}^2 = 0{,}64$	$y_8 = 0{,}5972$
9	$x_9 = 0{,}9$	$x^9{}_2 = 0{,}81$	$y_9 = 0{,}7243$
10	$x_{10} = 1$	$x_{10}{}^2 = 1$	$y_{10} = 0{,}8415$

За формулою "лівих" прямокутників матимемо:

$$S \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = 0{,}1(0 + 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}0899 + 0{,}1593 + 0{,}2474 +$$
$$+ 0{,}3523 + 0{,}4706 + 0{,}5972 + 0{,}7243) = 0{,}1 \cdot 2{,}6910 = 0{,}2691 \quad .$$

За формулою "правих" прямокутників матимемо:

$$S \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 0{,}1(0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}0899 + 0{,}1593 + 0{,}2474 +$$
$$+ 0{,}3523 + 0{,}4706 + 0{,}5972 + 0{,}7243 + 0{,}8415) = 0{,}1 \cdot 3{,}5325 = 0{,}3525 \quad .$$

За формулою трапецій отримаємо:

$$S \approx 0{,}1\left(\frac{0+0{,}8415}{2}+0{,}01+0{,}04+0{,}0899+0{,}1593+0{,}2474+0{,}3523+0{,}4607+0{,}7243\right)=0{,}3112\cdot$$

Для досягнення більшої точності число розбиттів відрізка треба збільшити, наприклад взяти $n=20$.

8.8. Практичне застосування визначеного інтегралу.

За допомогою визначеного інтегралу можна розв'язувати задачі фізики, механіки і т.д., які важко або неможливо розв'язати методами елементарної математики. Так, поняття визначеного інтегралу використовують при розв'язанні задач на обчислення площі фігур, роботи змінної сили, тиску рідини на вертикальну поверхню, шляху, пройденого тілом та ряду інших. Розглянемо деякі з них.

Обчислення площ плоских фігур.

Якщо фігура Φ є криволінійною трапецією, то її площа $S_ф$ згідно з геометричним змістом визначеного інтегралу рівна:

$$S_ф = \int_a^b f(x)dx\ .$$

Якщо ж фігура Φ не є криволінійною трапецією, то обчислення її площі зводиться до одного з наступних випадків:

а) крива $y=f(x)<0$ на $[a;\, b]$,

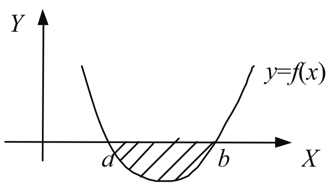


Рис. 8*а*.

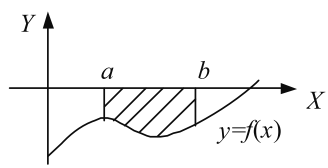


Рис. 8*б*.

в цьому випадку площу можна обчислити за формулою:

$$S_ф = \int_a^b |f(x)|dx \quad ;$$

б) якщо $f(x) = \varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ на $[a;\, b]$,

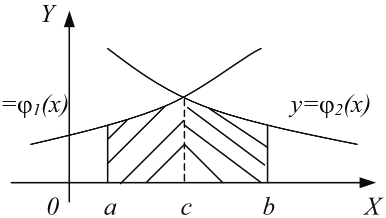


рис.9

в цьому випадку для знаходження площі фігури знаходять точку c, як абсцису точки перетину графіків функцій $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$, а площу обчислюють за формулою:

$$S_ф = \int_a^b f(x)dx = \int_a^c \varphi_1(x)dx + \int_c^b \varphi_2(x)dx \quad ;$$

в) якщо фігура обмежена двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$, ($f_1(x) \geq f_2(x)$ на $[a; b]$),

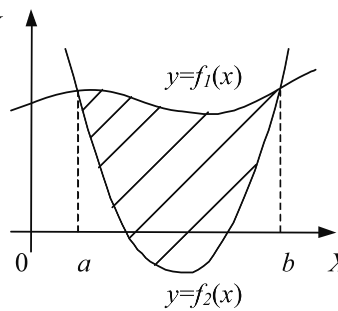


Рис.10*а.*

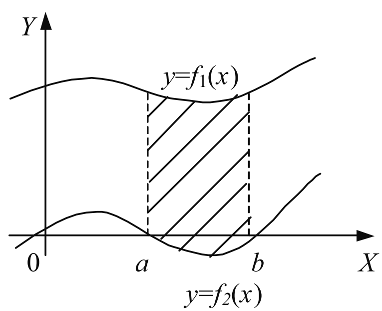


Рис.10*б.*

в цьому випадку площу фігури $S_ф$ знаходять за формулою:

$$S_ф = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx \quad .$$

Приклад 12. Обчислити площу фігури, обмеженої гіперболою $xy = 1$, віссю $0X$ і прямими $x = 1$; $x = e$ (рис. 11).

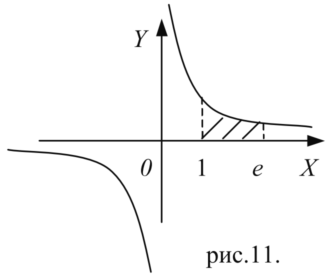


рис.11.

Розв'язання: Використавши формулу обчислення площі криволінійної трапеції, отримаємо:

$$S_ф = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1;$$

Відповідь: $S = 1$ кв.од.

Приклад 13. Обчислити площу фігури обмеженої лініями $y = x^2$ і $y^2 = x$ (рис.12).

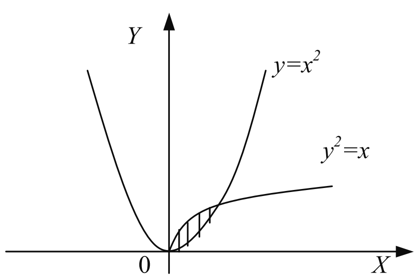


рис.12.

Розв'язання: Знайдемо границі інтегрування, тобто абсциси точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y^2 = x$. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}.$$

Маємо $(x^2)^2 = x$; $x^4 - x = 0$; $x(x^3-1) = 1$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
Отже, $a = 0$; $b = 1$.

Обчислення площі фігури зводиться до випадку в) при $f_1(x)=\sqrt{x}$, $f_2(x)=x^2$, тому

$$S_\phi = \int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx = \int_0^1\sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 =$$

$$=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \quad ,$$

Відповідь: S_ϕ =1/3 кв.од.

Приклад 14. Обчислити площу фігури обмеженої параболами $y=4-x^2$; $y=x^2-2x$ (рис. 13).

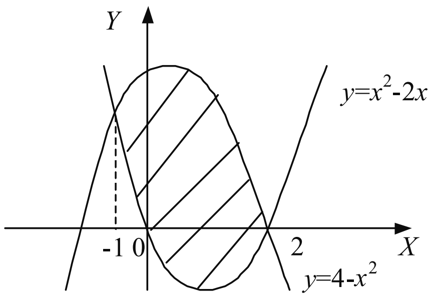


Рис.13.

Розв'язання: Знайдемо межі інтегрування, тобто абсциси точок перетину графіків функцій $y=4-x^2$ і $y=x^2-2x$. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=x^2-2x. \end{cases}$$

Маємо: $4-x^2=x^2-2x$; $2x^2-2x-4=0$; $x^2-x-2=0$,

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2};\quad x_1=-1,\quad x_2=2 \quad .$$

Шукану площу обчислюємо за формулою

$$S_{ф} = \int_{-1}^{2}\left(\left(4-x^2\right)-\left(x^2-2x\right)\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(4-2x^2+2x\right)dx = 4\int_{-1}^{2}dx - 2\int_{-1}^{-1}x^2dx + 2\int_{-1}^{2}xdx =$$

$$= 4x\Big|_{-1}^{2} - 2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + 2\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = 4(2+1) - \frac{2}{3}(8+1) + 4 - 1 = 12 - 6 + 3 = 9\,.$$

Відповідь: $S = 9$ кв. од.

Об'єм тіла обертання.

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі $0X$ криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)$, (де $a \le x \le b$), відрізком $[a;\ b]$ осі $0X$ і відрізками прямих $x = a$ і $x = b$ (рис. 14), обчислюється за формулою:

$$V = \pi\int_{a}^{b} f^2(x)dx\,.$$

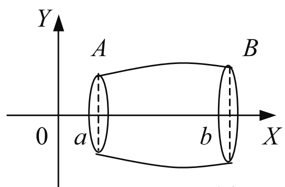


рис.14

Приклад 15. Обчислити об'єм кулі радіусом R (рис. 15).

Розв'язання: Куля утворена обертанням навколо осі $0X$ круга, обмеженого колом $x^2+y^2 = R^2$ з центром в початку координат і радіусом R.

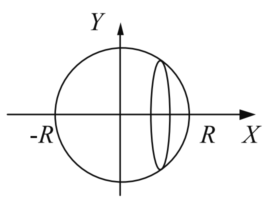


рис.15

Враховуючи симетрію круга відносно осі ординат, спочатку знайдемо половину шуканого об'єму:

$$\frac{1}{2}V_k = \pi\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi R^2 \int_0^R dx - \int_0^R x^2 dx = \pi R^2 x \Bigg|_0^R - \frac{\pi x^3}{3}\Bigg|_0^R =$$

$$= \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3} = \frac{3\pi R^3 - \pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}; \quad \frac{1}{2}V_k = \frac{2}{3}\pi R^3 \ (\textit{куб.од.}).$$

<u>Відповідь:</u> $V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$ (куб. од).

<u>Шлях, пройдений точкою.</u>

Якщо точка рухається прямолінійно і її швидкість $V = V(t)$ є відома функція часу, то шлях, який пройшла точка за проміжок часу $t_1 \le t \le t_2$, обчислюється за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt .$$

<u>Приклад 16.</u> Тіло рухається прямолінійно із швидкістю $V = 0{,}1t^3$ (V– в м/с). Знайти шлях, пройдений тілом за 10 с.

<u>Розв'язання:</u> Використовуючи формулу, знаходимо:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt = \int_0^{10} 0{,}1t^3 dt = \frac{1}{10}\cdot\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^{10} = \frac{1}{40}\cdot 10^4 = 250\ (\textit{м}) \quad .$$

<u>Відповідь:</u> $S = 250$ (м) .

<u>Приклад 17.</u> Швидкість тіла, що рухається прямолінійно дорівнює $V = (4t - t^2)$ (V– в м/с). Обчислити шлях, який пройшло тіло від початку руху до зупинки.

<u>Розв'язання:</u> В момент зупинки швидкість тіла дорівнює нулю, тобто

$$4t - t^2 = 0,\ t(4 - t) = 0,\ t_1 = 0;\ t_2 = 4.$$

Отже, тіло зупиниться через 4 с.

Шлях, який пройшло тіло за цей час, обчислюємо за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt = \int_0^4 \left(4t - t^2\right)dt = 4\int_0^4 tdt - \int_0^4 t^2 dt =$$

$$= 4\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^4 - \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^4 = 2\cdot 16 - \frac{1}{3}\cdot 64 = 32 - 21\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}\ (\textit{м}) \quad .$$

<u>Відповідь:</u> $S=10\dfrac{2}{3}$ (м) .

<u>Робота сили.</u>

Якщо змінна сила $F=F(x)$ діє в напрямку осі $0X$, то робота сили на відрізку $a\le x\le b$ обчислюється за формулою:

$$A=\int_a^b F(x)dx \quad .$$

<u>Приклад 18.</u> Обчислити роботу сили, яка потрібна при стисканні пружини на 0,08 м, якщо для стискання її на 1 см, потрібна сила 10Н.

<u>Розв'язання:</u> Згідно закону Гука, сила F, яка розтягує чи стискає пружину на x метрів, дорівнює $F=kx$, де k – коефіцієнт пропорційності.

Отже, $10=k\cdot 0{,}01$, тобто $k=1000$, звідси $F=kx=1000x$.

Шукану роботу знаходимо за формулою:

$$A=\int_a^b F(x)dx=\int_0^{0{,}08}100xdx=1000\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0{,}08}=1000\frac{0{,}0064}{2}=3{,}2 \quad (Дж).$$

<u>Відповідь:</u> $A=3{,}2 \quad (Дж)$.

<u>Приклад 19.</u> Сила 196,2 Н розтягує пружини на 18 см. Яку роботу вона виконує?

<u>Розв'язання:</u> Згідно закону Гука $F=kx$, звідси $k=\dfrac{F}{x}=\dfrac{196{,}2}{0{,}18}=1090(\text{Н/м})$,

F= $1090x$. Знаходимо шукану роботу:

$$A=\int_0^{0{,}18}1090xdx=\left.\frac{1090x^2}{2}\right|_0^{0{,}18}=545\cdot 0{,}0324\approx 17{,}7 \quad (Дж).$$

<u>Відповідь:</u> $A=17{,}7 \quad (Дж)$.

<u>Приклад 20.</u> Для стискання пружини на 3см необхідно виконати роботу в 16Дж. На яку довжину можна стиснути пружину, виконавши роботу в 144Дж?

<u>Розв'язання:</u> Згідно закону Гука, $F=kx$; тоді

$$A_1=\int_0^{0{,}03}kxxd=\left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^{0{,}03}=\frac{0{,}0009k}{2} \quad (Дж).$$

Тому, що $A_1 = 16$Дж, то

$$\frac{0{,}009k}{2} = 16, \text{ звідси } k = \frac{32}{0{,}0009} = \frac{320000}{9}\left(H/м\right) \quad .$$

Отже, $F = (3200/9)x$.

Далі матимемо:

$$A_2 = \int_0^a \frac{320000}{9} x dx = \frac{320000}{9} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^a = \frac{160000}{9} a^2 .$$

Але $A_2 = 114$ Дж, тобто:

$$\frac{160000}{9} a^2 = 114, \ a^2 = \frac{9 \cdot 144}{160000}, \ a^2 = 0{,}0081, \ a = 0{,}09\,(см) .$$

Відповідь: Пружину можна стиснути на 9 см.

Сила тиску рідини.

Сила тиску P рідини густиною ρ на вертикальну пластину, занурену в рідину, обчислюється за формулою:

$$P = \rho g \int_a^b S dx \quad .$$

Де $g = 9{,}81$м/с^2– прискорення вільного падіння, S – площа пластинки, а глибина занурення пластинки змінюється від a до b.

Приклад 21. Обчислити силу тиску води на одну із стінок акваріума, довжиною 30 см і висотою 20 см.

Розв'язання: Стінка акваріума має форму прямокутника, тому $S = 0{,}3x$, де $0 \le x \le 0{,}2$. Густина води дорівнює 1000 кг/м^3. Тоді сила тиску води на стінку акваріума, обчислюється за формулою:

$$P = \rho g \int_a^b S dx = 1000 \cdot 9{,}81 \int_0^{0{,}2} 0{,}3 x dx = 9810 \cdot 0{,}3 \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}2} = 9810 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}02 = 58{,}86\,(H) .$$

Відповідь: $P = 58{,}86\,(H)$.

Приклад 22. Обчислити силу тиску бензину на стінки циліндричного баку висотою 3 м і радіусом основи 1 м.

Розв'язання: Площа поверхні стінки циліндричного баку $S = 2\pi R x = 2\pi x$, де $0 \le x \le 3$. Густина бензину – 800 кг/м^3. Тоді сила тиску бензину на стінки баку буде:

$$P = 800 \cdot 9{,}81\int_0^3 2\pi x dx = 7848 \cdot 2\pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 7848 \cdot \pi \cdot 9 \approx 220000(H) \quad .$$

Відповідь: $P = 2{,}2 \cdot 10^5\ (H)$.

Приклад 23. Обчислити тиск води на занурену в неї вертикальну трикутну пластинку, з основою 6 м і висотою 2 м, вважаючи, що вершина трикутника лежить на поверхні води, а основа паралельно їй (рис. 16).

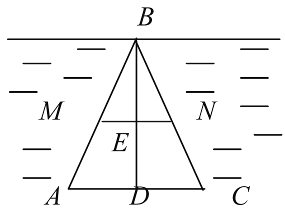


рис.16.

Розв'язання: Нехай NM – ширина пластинки на рівні $BE = x$. З подібності трикутників ABC і MBN, знаходимо

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BE}{BD}, \text{ або } MN = \frac{AC \cdot BE}{BD} = \frac{6x}{2} = 3x.$$

Використавши формулу одержимо:

$$P = \rho g\int_a^b Sdx = 1000 \cdot 9{,}81\int_0^2 3xdx = 9810 \cdot 3\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = 9810 \cdot x^3\Big|_0^2 = 9810 \cdot 8 = 78480(H)\,.$$

Відповідь: $P = 78480(H)$.

8.9. Невластиві інтеграли.

Інтеграли з нескінченими межами інтегрування або від функцій, які мають нескінчений розрив називають **невластивими**.

Невластиві інтеграли **з нескінченими межами** інтегрування визначають наступним чином:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \;;$$

$$\int_{-\infty}^{d} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \;;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{\beta\to\infty}\int_c^{\beta} f(x)dx;$$

де c – довільне дійсне число .

Невластиві інтеграли від функцій **з нескінченими розривами** також визначають через граничний перехід.

Якщо функція розривна на одному з кінців відрізка інтегрування, наприклад, в точці $x=b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \;;$$

якщо ж функція $f(x)$ має безмежний розрив в точці $x=c$, де $c\in[a;b]$ і неперервна в усіх інших точках цього проміжку, то

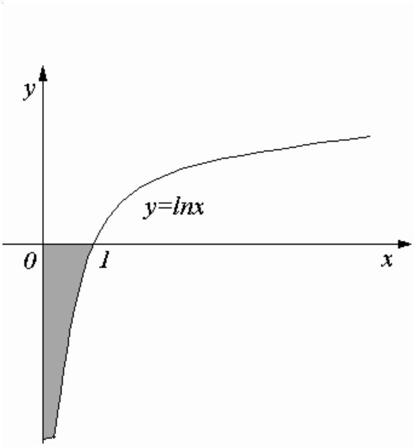
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\,.$$

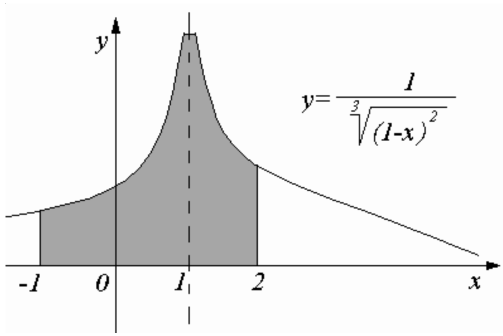
Якщо приведені вище границі існують для конкретного інтеграла, то його називають **збіжним**; якщо ж границі не існують – **розбіжним**.

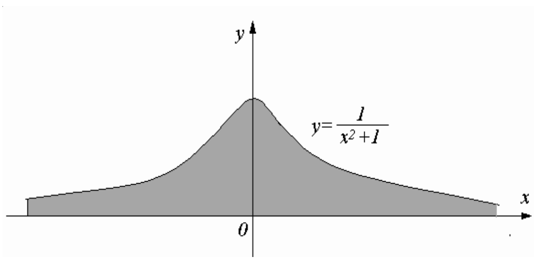
Оскільки обчислення границь – трудомістка робота, то деколи для встановлення збіжності невластивого інтегралу можна скористатись **ознакою порівняння:**

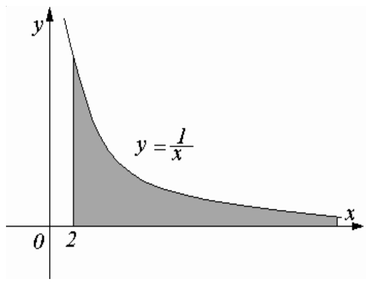
<u>**Ознака порівняння**</u>: Нехай $\left|f(x)\right|\le F(x)$ при $x\ge a$.Тоді, якщо $\int_a^{\infty} F(x)dx$ збіжний, то й $\int_a^{\infty} f(x)dx$ буде збіжним.

Геометрично, в прямокутній системі координат, невластивий інтеграл – це площа криволінійної трапеції з нескінченою основою або “не закритої” зверху.









Приклад 1: Обчислити інтеграл $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Роз’язання: Це невластивий інтеграл з верхньою межею рівною ∞. Згідно з означенням

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_{2}^{b} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_{2}^{b} x^{-2} dx = \lim_{b\to\infty} (-x^{-1} \Big|_{2}^{b}) = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Отже, інтеграл збіжний.

Приклад 2: Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \ln x dx$.

Розв’язання: Це невластивий інтеграл, бо функція $y = \ln x$ невизначена в т. $x = 0$ і $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$. Згідно з означенням

$$\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx.$$

Обчислимо $\int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx$ частинами:

$$\int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx = x \ln x \Big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 x \cdot \frac{1}{x} dx = \left(x \ln x - x \right)\Big|_\varepsilon^1 = -1 - \left(\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon \right).$$

$u = \ln x$	$du = \frac{1}{x} dx$
$dv = dx$	$v = x$

Отже,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0} (-1 - (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon)) = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} =$$

$$= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon = -1$$

При знаходженні границі $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \varepsilon$ застосовано правило Лопіталя.

Відповідь: $\int\limits_0^1 \ln x dx = -1$.

8.10. Вправи:

1. Дайте означення визначеного інтеграла.

2. Перерахуйте основні властивості визначеного інтегралу.

3. В чому полягає геометричний зміст визначеного інтегралу?

4. Напишіть формулу для визначення площі плоскої фігури з допомогою визначеного інтегралу.

5. За якими формулами знаходиться об'єм тіла обертання?

6. Напишіть формулу для обчислення шляху, пройденого тілом.

7. Напишіть формулу для обчислення роботи змінної сили.

8. За якою формулою обчислюється сила тиску рідини на пластинку?

9. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі $0X$ фігури, обмеженої параболою $y^2 = x$, прямою $x = 2$, віссю $0X$.

10. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі $0X$ фігури, обмеженої параболою $y^2 = x$, прямими $y = 1$, $y = 4$, віссю $0Y$.

11. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $V = 2+4t^3$ (V – в м/с). Обчисліть шлях, який пройшло тіло за перші 3 секунди.

12. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на 6 см, якщо сила в 1Н розтягує її на 1 см?

13. Обчислити силу тиску води на вертикальний прямокутний шлюз з основою 18 м і висотою 6 м.

14. Обчислити визначені інтеграли

15. а) $\int\limits_2^3 (3x^2 + \frac{1}{x})dx$; б) $\int\limits_1^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; в) $\int\limits_e^4 x \ln x dx$.

16. а) $\int\limits_1^8 \frac{7x\sqrt[3]{x}}{2} dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$; в) $\int\limits_0^1 \arcsin x dx$.

17. а) $\int\limits_{-1}^2 (3x^2 + \frac{4}{x^3} - 1)dx$; б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{ctgx} \cdot \sin^2 x}$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} x \cos x dx$.

18. а) $\int\limits_0^8 (\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1)dx$; б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin 5x \cdot \sin 7x dx$; в) $\int\limits_0^1 x arctgx dx$.

19. а) $\int\limits_1^4 (2x - \frac{9}{2}\sqrt{x} + \frac{8}{x^2})dx$; б) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x \cdot \cos 7x dx$; в) $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$.

20. а) $\int_1^{e^3}\left(\frac{4\sqrt[3]{x}-12+9x}{3x}\right)dx$; б) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\cdot\sin 4x dx$; в) $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

21. а) $\int_1^2\left(\frac{1-2x+\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{3\sin x+1}\cdot\cos x dx$; в) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$.

22. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$; б) $\int_{3\pi/2}^{2\pi}\sqrt{1-\cos x}\cdot\sin x dx$; в) $\int_{1/e}^{e}\ln|x|dx$.

23. а) $\int_{\pi/3}^{\pi/6}\left(\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\sin x}{3-\cos x}dx$; в) $\int_0^{\pi} x\sin x dx$.

24. а) $\int_6^{\pi/6}\frac{dx}{1-4\sin^2 x+4\sin^4 x}$; б) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{2+\sin x}$; в) $\int_0^1 \arccos x dx$.

25. а) $\int_1^3 2^x(1+2^x)dx$; б) $\int_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\sin t dt}{1+\cos t}$; в) $\int_0^{2\pi}\operatorname{arctg} x dx$.

26. а) $\int_4^5(4-x)^3 dx$; б) $\int_0^{\pi/6}e^{\sin x}\cdot\cos x dx$; в) $\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x dx$.

27. а) $\int_{-2}^3(4x^3-3x^2+2x+1)dx$; б) $\int_0^1 e^{x^2}x dx$; в) $\int_1^e \ln^2 x dx$.

28. а) $\int_{-1}^0(x^3+2x)dx$; б) $\int_0^{\sqrt[3]{2}}3e^{x^3}x^2 dx$; в) $\int_1^2\frac{\ln x}{x^5}dx$.

29. а) $\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int_0^{\pi/4} x\operatorname{tg}^2 x dx$.

30. а) $\int\limits_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^3 xe^{3x}dx$; в) $\int\limits_0^1 (\arcsin x)^2 dx$.

31. а) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - \sin x)dx$; б) $\int\limits_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$; в) $\int\limits_1^2 x\log_2 x dx$.

32. а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x})dx$; б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; в) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

33. а) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} (\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x)dx$; б) $\int\limits_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{1-4x^3}$; в) $\int\limits_0^{e-1} x\ln(x+1)dx$.

34. а) $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; в) $\int\limits_0^e x\ln^3 x dx$.

35. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x dx}{1+9^x}$; в) $\int\limits_1^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx$.

36. а) $\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2x dx$; б) $\int\limits_1^e \frac{\sin\ln x}{5x}dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} x^3 \sin x dx$.

37. а) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x dx$; б) $\int\limits_{-\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x dx$.

38. а) $\int\limits_{-1}^1 (e^x + \frac{1}{x^2})dx$; б) $\int\limits_0^{0,5} e^{\sin x}\cdot\cos x dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2\cos x dx$.

39. а) $\int\limits_1^2 (e^x + \frac{1}{x} - x^2)dx$; б) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$; в) $\int\limits_0^1 x^3 e^{2x} dx$.

Обчисліть площу фігури, яка обмежена лініями.

40. $x - y + 2 = 0; y = 0, x = -1, x = 2.$

41. $2x - 3y + 6 = 0; y = 0, x = 3.$

42. $x - y + 3 = 0; x + y = 0, y = 0.$

43. $x - 2y + 4 = 0; x + 2y - 8 = 0; \ y = x^2, y = 0, x = 0, x = 3.$

44. $y = x^2; \ y = 0; \ x = 0, x = 3.$

45. $y = 3x^2; \ y = 0; \ x = -3, x = 2.$

46. $y = x^2 + 1; \ y = 0, \ x = -1, x = 2.$

47. $y = 0{,}5x^2 + 2; \ y = 0, x = 1, x = 3.$

48. $\mathrm{y} = -\frac{1}{3}x^2 + 3; y = 0, x = 0, x = 3.$

49. $y^2 = x; \ y \geq 0, x = 0, x = 3.$

50. $y = -x^2 + 2x + 8; \ y = 0.$

51. $y = -\frac{2}{9}x^2 + x; y = 0.$

52. $y = -x^2 + 6x - 6; y = 0, x = 2, x = 3.$

53. $y = \frac{1}{x}; y = 0, x = 1, x = 3.$

54. $y = \frac{2}{x}; y = 0, x = 2, x = 4.$

55. $y = \cos x; y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}.$

56. $y = \operatorname{tg} x; y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}.$

57. $y^2 = 4x; x = 1, x = 9.$

58. $y^2 = 9x; x = 4.$

59. $y = \sin x; y = 0, x = -\frac{\pi}{2}, x = \pi.$

60. $y = \sin x; y = 0, x = 0, x = 2\pi.$

61. $y = x^2$; $y = -3$.

62.$y = x^2$; $y = 2x + 8$.

63. $y = x^2$; $y = x + 2$.

64. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 10$; $y = x + 2$.

Обчисліть об’єм тіл, утворених обертанням фігур навколо осі OX, обмежених графіками функцій

65. $y = x^2$; $y^2 = x$.

66. $y = \frac{x^4}{10}$; $y = 0$, $x = 2$;

67. $y = \sin x$, $y = 0$, $x \in [0; \pi]$;

68. $y = 3x - x^2$; $y = 0$;

69. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$;

70. $y = 10 - x^2$, $y = 0$;

71. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$;

72. $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x = 1$;

73. $y = 2x - x^2$, $y = 0$;

74. Швидкість руху точки $v = (24t - 6t^2)$ м/с. Знайдіть: а) шлях, пройдений точкою за 3 с від початку руху; б) шлях, пройдений точкою за третю секунду; в) шлях, пройдений точкою від початку руху до її зупинки.

75. Два тіла почали рухатися одночасно з однієї точки в одному напрямі по прямій. Перше тіло рухається з швидкістю $v = (4t + 5)$ м/с, друге – з швидкістю $v = (6t^2 + 2t)$ м/с. На якій відстані одне від одного вони будуть через 5 с?

76. Тіло, кинуте з поверхні Землі вертикально вгору з швидкістю $v = (39{,}2 - 9{,}8t)$ м/с. Знайти найбільшу висоту піднімання тіла.

77. Пружина розтягується на 0,02 м під дією сили 60 Н. Яку роботу виконує ця сила, розтягуючи пружину на 0,12 $м^2$.

78. Пружина в спокійному стані має довжину 0,1 м. Сила в 20 Н розтягує її на 0,01 м. Яку роботу треба виконати, щоб розтягти її від 0,12 м до 0,14 м?

79. Циліндричний стакан заповнено олією. Обчисліть силу тиску олії на бічну поверхню стакана, якщо його висота H=0,08 м і радіус основи R = 0,04 м. Густина олії 900 $кг/м^3$.

80. Обчисліть силу тиску води на дно і стінки акваріума, сторони якого 0,8х0,5х0,3. Акваріум доверху заповнений водою.

Дослідити збіжність невластивих інтегралів.

81. a) $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-3x}dx$; b) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^3}$; c) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$;

82. a) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$; b) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$; c) $\int\limits_{0}^{1} x\ln xdx$;

83. a) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^3+1}$; b) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$; c) $\int\limits_{0}^{1} \ln xdx$;

84. a) $\int\limits_{0}^{\infty} x^3e^{-x^4}dx$; b) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx$; c) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{x^2}{x^3+1}dx$;

85. a) $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x}{2}}dx$; b) $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$; c) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;

86. a) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx$; b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; c) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x}$;

87. a) $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; b) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}$.

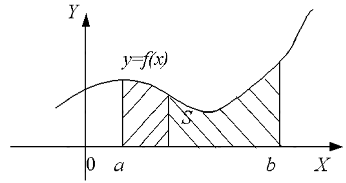
Визначений інтеграл (1)

Означення

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

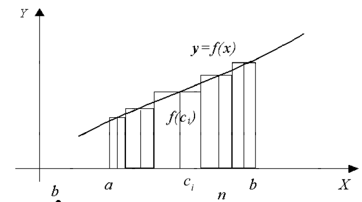
Визначений інтеграл рівний приросту довільної первісної функції $F(x)$ на проміжку $[a;\ b]$.

Геометричний зміст



Площа криволінійної трапеції.

Інтеграл як границя інтегральних сум



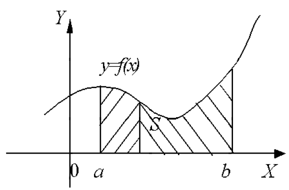
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Властивості

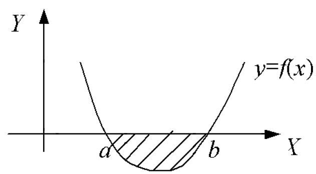
$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \qquad a < c < b$$

$$\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \qquad \int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \qquad C - const$$

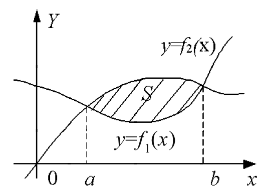
Застосування визначеного інтегралу



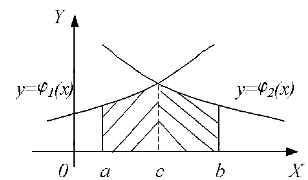
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



$$S = -\int_a^b f(x)dt$$



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dt$$



$$S = S_1 + S_2$$

Визначений інтеграл (2)

Обчислення шляху

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$$

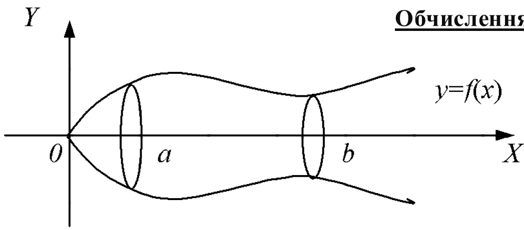
$[t_1; t_2]$ – проміжок часу, $V(t)$ – швидкість

Обчислення роботи

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

$[a, b]$ – переміщення, $F(x)$ – сила

Обчислення об'ємів тіл обертання



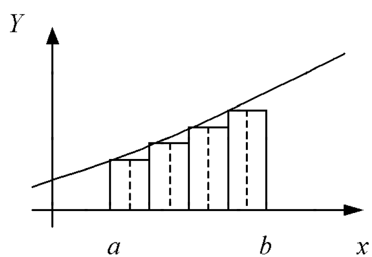
$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

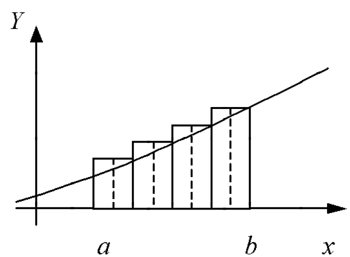
Наближені методи обчислення визначеного інтегралу

Формули прямокутників

$$\int_a^b ydx = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$$

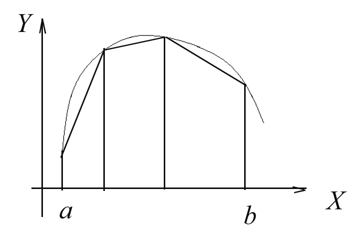
$$\int_a^b ydx = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})$$





Формула трапеції.

$$\int_a^b ydx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right)$$



<u>РОЗДІЛ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ</u>

<u>9.1. Основні поняття.</u>

Фізичні закони часто описують певні співвідношення між величинами, що характеризують процес швидкістю та прискоренням зміни цих величин. Математично такі закони записують як співвідношення між функціями та їх похідними. Якщо функція, яка описує фізичний процес невідома, то отримуємо рівняння, яке називають диференціальним. Отже, вивчення деяких фізичних процесів може бути замінено дослідженням розв'язків диференціальних рівнянь.

<u>Диференціальним рівнянням</u> n-го порядку називають вираз $F(x,y,y',y''...y^{(n)})=0$, де x – незалежна змінна, y – невідома функція, $y', y'',..., y^{(n)}$ – похідні невідомої функції.

<u>Розв'язком</u> диференціального рівняння називають будь-яку функцію, яка при підстановці її в рівняння перетворює його в тотожність.

<u>Порядком</u> диференціального рівняння називають порядок найстаршої похідної, яка входить в це рівняння.

<u>Наприклад,</u>

а) $y'+2y = \sin x$ – рівняння I порядку;

б) $y''+y'-2 = 0$;

$y''+ytgx = 0$ – рівняння II порядку;

в) $y'''+y'' = y\cdot y'$ – рівняння III порядку.

Розв'язки диференціальних рівнянь шукають за допомогою інтегрування.

<u>Наприклад:</u>

а) розв'язком диференціального рівняння I порядку

$y' - 2x = 0$ є:

$$y' = 2x,$$

$$y = \int 2xdx = x^2 + C.$$

б) розв'язком диференціального рівняння II порядку $y'' - 2x = 0$ є:

$$y' = \int 2xdx = x^2 + C_1,$$

$$y = \int \left(x^2 + C_1\right)dx = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2.$$

З наведених прикладів видно, що диференціальні рівняння мають не один, а безліч розв'язків, які визначені з точністю до постійних.

Доведено, що розв'язки рівняння n-го порядку залежать від n довільних сталих $C_1, C_2, \dots C_n$.

<u>Загальним розв'язком</u> (загальним інтегралом) диференціального рівняння називають таку функцію, яка перетворює дане рівняння в тотожність і містить стільки незалежних довільних сталих, який порядок цього рівняння.

Процес знаходження загального розв'язку називають інтегруванням диференціального рівняння.

Геометрично, загальному розв'язку диференціального рівняння відповідає сукупність (сімейство) всіх інтегральних кривих.

Як приклад, зобразимо графічно розв'язки диференціального рівняння $y' - 2x = 0$ (рис.1).

Поставимо задачу: серед усіх розв'язків диференціального рівняння, знайти той, який задовольнятиме певні умови. Такими умовами можуть бути значення функції та її похідних в фіксованій точці. Для наведеного прикладу (рис. 1), це означає, що серед усіх інтегральних кривих треба вибрати ту, яка проходить через точку з координатами $(x_0; f(x_0))$.

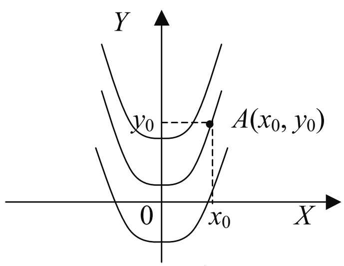


рис.1

Узагальнюючи сказане введемо поняття початкової умови.

<u>Початковими умовами</u> називають значення функції та її похідних в заданій точці x_0.

Розв'язок диференціального рівняння, який задовільняє заданим початковим умовам називають **<u>частковим розв'язком</u>**, а задачу знаходження часткового розв'язку – **<u>задачею Коші</u>**.

Знаходження загального розв'язку можливе лише для певних типів диференціальних рівнянь. Розглянемо деякі з них.

<u>9.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.</u>

Загальний вигляд такого рівняння:

$$X(x)V(y)dx + X_1(x)V_1(y)dy = 0,$$

де $X(x)$, $X_1(x)$ функції тільки від x, а $V(y)$, $V_1(y)$ – функції тільки від y.

Поділивши обидві частини рівняння на добуток $X_1(x) \cdot V(y)$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \frac{V_1(y)}{V(y)}dy = 0.$$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд:

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}dx + \int \frac{V_1(y)}{V(y)}dy = 0.$$

Зауваження. Якщо $x = a$, $y = в$ є розв'язками рівняння $X_1(x)V(y)= 0$, то функції $x = a$, $y = в$ будуть розв'язками диференціального рівняння при умові, що при цих значеннях x і y рівняння не втрачає числового змісту. Геометрично ці розв'язки представляють собою прямі, паралельні осям координат.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $ydy = xdx$. Знайдіть частковий розв'язок при умові $y = 4$, якщо $x = –2$.

Розв'язання: Це рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруючи знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$$\int ydy = \int xdx; \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C .$$

Для одержання більш простого за формою загального розв'язку постійну сталу в правій частині представимо у вигляді $C/2$, тоді $y^2 = x^2+C$. Підставивши в загальний розв'язок значення $y = 4$ і $x = –2$, отримаємо $16 = 4+C$, звідки $C = 12$. Отже, частковий розв'язок рівняння $y^2 = x^2+12$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння: $2x\sin ydx+(x^2+3)\cos ydy = 0$; знайти частковий розв'язок при умові $y = \frac{p}{2}$, якщо $x = 1$.

Розв'язання: Поділимо кожний член рівняння на $(x^2+3)\sin y$:

$$\frac{2xdx}{x^2+3} + \frac{\cos ydy}{\sin y} = 0 \ .$$

Інтегруючи способом підстановки, знаходимо

$$\int \frac{2xdx}{x^2+3} + \int \frac{\cos ydy}{\sin y} = C_1 \ ,$$

$$\int \frac{d(x^2+3)}{x^2+3} + \int \frac{d(\sin y)}{\sin y} = C_1; \quad \ln\left(x^2+3\right) + \ln\left(\sin y\right) = C_1 \ .$$

Після потенціювання отримаємо $(x^2+3)\cdot(\sin y) = e^{C_1}$, або $(x^2+3)\cdot(\sin y)=C$.

Оскільки, $(x^2+3)\cdot\sin y = 0$ при $\sin y =0$, і при цьому значенні диференціальне рівняння не втрачає числового змісту, то $\sin y = 0$ – розв'язок рівняння. Але він входить в знайдений розв'язок $(x^2+3)\cdot\sin y=C$ при $C=0$, значить, загальний інтеграл рівняння має вигляд $\sin y = \frac{C}{x^2+3}$. Підставивши в загальний інтеграл значення $y = \frac{p}{2}$ і $x = 1$, отримаємо $1= C/4$, звідки $C = 4$. Частковий розв'язок рівняння має вигляд $y = \frac{4}{x^2+3}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(1+e^x)yy' = e^x$. Знайти частковий розв'язок при умові: $y = 1$, якщо $x = 0$.

Розв'язання: Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то $(1+e^x)y\dfrac{dy}{dx} = e^x$, звідси

$$(1+e^x)ydy = e^x dx,\ \frac{y^2}{2} = \ln C(1+e^x)\,.$$

Після потенціювання отримаємо: $e^{y^2/2} = C(1+e^x)$.

Підставимо в загальний розв'язок y=1 і $x=0$. Отримаємо

$$e^{1/2} = C(1+e^0),\quad \sqrt{e} = 2C\,.$$

Звідси $C = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$. Отже, частковий розв'язок рівняння при наших умовах має вигляд:

$e^{y^2/2} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}\left(1+e^x\right)$, або $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}\left(1+e^x\right)$.

9.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Загальний вигляд такого рівняння:

$$y'+f(x)y = g(x)\,,$$

де $f(x)$, $g(x)$ – задані функції.

При $g(x)$ =0 дане рівняння називають лінійним однорідним диференціальним рівнянням. Воно має вигляд:

$$y' = f(x)\cdot y,$$

і розв'язується методом відокремлення змінних.

Якщо $f(x)$ =0, то одержимо рівняння

$$y' = g(x)\,,$$

яке розв'язується простим інтегруванням.

Один з методів розв'язку лінійного диференціального рівняння полягає у введенні заміни невідомої функції $y(x)$ на добуток двох невідомих функцій $u(x)$ та $v(x)$. Тоді схема знаходження розв'язку наступна:

– підставимо добуток $u(x)\cdot v(x)$ в рівняння:

$$(uv)'+f(x)(uv) = g(x),\ u'v+uv'+f(x)uv = g(x);$$

– згрупуємо отримані доданки:

$$u'v+u(v'+vf(x)) = g(x);$$

– функцію $v(x)$ шукатимемо з умови $v'+vf(x) = 0$;
– знайдену функцію $v = v(x)$, підставимо в рівняння, одержимо $u'\cdot v(x)=g(x)$;
– з останнього рівняння знайдемо функцію $u = u(x) + c$;

– запишемо загальний розв’язок рівняння як добуток знайдених функцій :

$$y = v(x)\cdot(u(x)+c).$$

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y' - y\text{ctg}x = \sin x.$$

Розв’язання: Дане рівняння є лінійним. Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$ і рівняння набуде вигляду

$$u'v + uv' - uv\text{ctg}x = \sin x,$$

або

$$u'v + u(v' - v\text{ctg}x) = \sin x.$$

Знайдемо функцію v з умови $v' - v\text{ctg}x = 0$. Тоді для пошуку u отримаємо рівняння $u'v = \sin x$.

Розв’яжемо рівняння $v' - v\text{ctg}x = 0$, отримаємо:

$$\frac{dv}{dx} - \text{ctg}x = 0, \quad \frac{dv}{v} = \text{ctg}x dx, \quad \ln|v| = \ln|\sin x|, \; v = \sin x.$$

Підставивши значення v в рівняння $u'v = \sin x$ і розв’язуючи його, знайдемо u:

$$u'\sin x = \sin x, \; u' = 1, \; du = dx, \; u = x + C.$$

Отже, загальний розв’язок рівняння має вигляд $y = (x+C)\sin x$.

Приклад 5. Знайти частковий розв’язок диференціального рівняння $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$ при умові: $y = 0$, якщо $x = 0$.

Розв’язання: Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. Рівняння набуде вигляду $u'v + v'u + 2xuv = 2x^2 e^{-x^2}$, або $u'v + (v' + 2xv) = 2x^2 e^{-x^2}$. Нехай $v' + 2xv = 0$, тоді $\frac{dv}{dx} = -2xv, \quad \frac{dv}{v} = -2xdx$.

Інтегруючи, отримаємо $\ln v = -x^2$, або $v = e^{-x^2}$.

При $v = e^{-x^2}$ рівняння матиме вигляд:

$$u'e^{-x^2} = 2x^2 e^{-x^2}, \quad \frac{du}{dx} = 2x^2, \quad du = 2x^2 dx \text{, звідки } u = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Загальний розв’язок даного диференціального рівняння $y = e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3 + C\right)$.

Підставивши в загальний розв’язок початкові умови, отримаємо: $0 = e^0(0 + C)$, звідки $C = 0$. Отже, частковий розв’язок даного рівняння при заданій умові $y = \frac{2}{3}x^3 e^{-x^2}$.

9.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами називається рівняння виду:

$$y''+py'+qy = f(x) ,$$

де p і q деякі числа.

Якщо $f(x) = 0$, то диференціальне рівняння називається лінійним однорідним і має вигляд:

$$y''+py'+qy = 0.$$

Справедлива **теорема:** якщо y_1 і y_2 часткові розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, причому $y_1 / y_2 \neq \text{const}$, то функція $y = C_1y_1+C_2y_2$ де C_1 і C_2 – постійні сталі, є загальним розв'язком цього рівняння.

Знайдемо такі функції y_1, y_2, які перетворять задане диференціальне рівняння в тотожність і задовільнять умови теореми. Ними будуть функції виду $y = e^{kx}$.

Дійсно, підставивши в рівняння отримаємо:

$$(e^{kx})''+(e^{kx})'\cdot p+q(e^{kx}) = 0,$$

$$k^2 e^{kx}+k\, e^{kx}\cdot p+ e^{kx}\cdot q = 0,$$

$$e^{kx}(k^2+kp+q) = 0.$$

Останній вираз перетвориться в нуль, якщо

$$k^2+kp+q = 0.$$

Рівняння $k^2+kp+q = 0$ називають **характеристичним.**

Воно визначає ті значення k, при яких функція $y = e^{kx}$ є частковим розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Можливі наступні випадки:

№ п/п	Корені характеристичного рівняння	Частинні розв'язки диференціального рівняння	Загальний розв'язок диференціального рівняння
1	$k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	$k_1 = k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = xe^{k_2 x}$	$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$
3	$\alpha \pm \beta \cdot i$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y''-5y'+6y = 0 .$$

Розв'язання: Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2 - 5k + 6 = 0, \quad D = 25 - 24 = 1,$$

$$k_1 = \frac{5-1}{2} = 2; \;\; k_2 = \frac{5+1}{2} = 3 .$$

Корені характеристичного рівняння є дійсними і різними, тому $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$ – часткові розв'язки, а $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y''+4y+4y = 0 .$$

Розв'язання: Характеристичне рівняння $k^2+4k+4 = 0$, або $(k+2)^2 = 0$ має дійсні корені $k_1 = k_2 = -2$, тому $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$ – часткові розв'язки, а $y = e^{-2x}(C_1+C_2x)$ загальний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y''+6y'+13y=0 ,$$

Розв'язання: Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2 - 6k + 13 = 0, D = 36 - 4 \cdot 13 = -16,$$

$$k_1 = \frac{-6-4i}{2} = -3 - 2i; k_2 = -3 + 2i$$

Корені характеристичного рівняння є комплексно – спряженими, тому $y_1 = e^{-3x}\cos 2x$, $y_2 = e^{-3x}\sin 2x$ – часткові розв'язки, а $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$ – загальний розв'язок даного диференціального рівняння.

Приклад 9. Знайти частковий розв'язок диференціального рівняння $y''-2y'+y = 0$ для початкової умови $y(0) = 4$; $y'(0) = 2$.

Розв'язання: Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1=0$, або $(k-1)^2 = 0$ має дійсні рівні корені $k_1 = k_2 = 1$, тому $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ – часткові розв'язки, а $y = e^x(C_1+C_2x)$ – загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Для визначення часткового розв'язку спочатку знайдемо похідну y' функції $y = e^x(C_1+C_2x)$:

$$y' = e^x(C_1+C_2x)'+ (e^x)'(C_1+C_2x) = e^xC_2+e^x(C_1+C_2x) = e^x(C_1+C_2+C_2x).$$

Тепер підставимо початкові умови у вирази для y і y':

$$\begin{cases} 4 = e^0 \cdot C_1 \\ 2 = e^0(C_1 + C_2) \end{cases} \text{або} \begin{cases} C_1 = 4 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{cases}, \text{ звідки } C_1 = 4,\ C_2 = -2 .$$

Підставивши ці значення в загальний розв'язок, знайдемо частковий розв'язок диференціального рівняння при даних початкових умовах:

$$y = e^x \cdot (4 - 2x) .$$

9.5. Вправи.

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Що таке порядок диференціального рівняння?
3. Визначте порядок рівнянь:

   а) $y'' + 2y' = 0$; б) $y' - y\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$;

   в) $y'' + y''' = y'$; г) $xyy' + x^2 - 2y = 0$.
4. Які види розв'язків має диференціальне рівняння?
5. Який розв'язок диференціального рівняння називається загальним?
6. Який розв'язок диференціального рівняння називається частковим?
7. Яку задачу називають задачею Коші?
8. Перевірте, чи розв'язком диференціального рівняння $y'\mathrm{ctg}x + y = 2$ є функція $y = \cos x$.
9. Запишіть загальний вигляд диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
10. Як розв'язуються диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними?
11. Запишіть загальний вигляд лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.
12. Як розв'язується лінійне диференціальне рівняння першого порядку?
13. Як визначається і як записується в загальному вигляді лінійне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами?
14. Що таке характеристичне рівняння?
15. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння: а) дійсні і різні; б) дійсні і рівні; в) комплексно-спряжені?
16. Тіло рухається зі швидкістю, що задається законом $v = \dfrac{1}{t+3}$. Знайти закон руху, якщо $S = 0$ при $t = 0$.
17. Прискорення прямолінійного руху матеріальної точки задано законом $a = 6t - 4$. Знайдіть закон руху, якщо $S = 5$ м, $v = 6$ м/с, при $t = 2$ с.

    Розв'яжіть диференціальне рівняння і знайдіть частковий розв'язок, що задовільняє відповідним умовам:

18. $2\sqrt{y} - y' = 0$, $y(0) = 1$.
19. $(1 + x^3)y' = 3x^2 y$, $y(0) = 2$.
20. $y' = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$, $y(\dfrac{\pi}{4}) = 0$.

21. $2y'y\sqrt{1-x^2}-e^{y^2}=0$, $y(0)=0$.

22. $y'e^x=x$, $y(0)=1$.

23. $y'+y\sin 2x=0$, $y(\frac{\pi}{4})=1$.

24. $x^2(y^3+5)dx+(x^3+5)y^2dy=0$, $y(0)=1$.

25. $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dx=0$, $y(\sqrt{3})=0$.

26. $xydx+(1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy=0$, $y(\sqrt{8})=0$.

27. $y'=\sqrt[5]{y}$, $y(0)=25$.

28. $\operatorname{tg} ydx-x\ln xdy=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$.

29. $y'=2x^2+5x+12$, $y(1)=\frac{1}{6}$.

30. $y'-y^2-3y+4=0$, $y(0)=1$.

31. $\sqrt{1+y^2}dx+\sqrt{1+x^2}dy=0$,

32. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$, $y(1)=2$.

33. $y'+2py=e^{-2px}$, $y(0)=0$.

34. $y'+4y=x^2e^{-4x}$, $y(0)=$

35. $x^2y'+5xy+4=0$, $y(\frac{1}{2})=62$.

36. $xy'+y=\cos x$,

37. $\frac{dy}{dx}-y=2x-x^2$,

38. $\frac{dy}{dx}-y=x-1$,

39. $\frac{dy}{dx}+xy=x^2$,

40. $\dfrac{dy}{dx}+3y=x^2+1,$

41. $y'+2y=x^2,$

42. $y'-y\,\mathrm{ctg}\,x=2x-x^2\,\mathrm{ctg}\,x,$

43. $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=\sin x\cdot\cos x,$

44. $x\ln x\dfrac{dy}{dx}+y=2\ln x,$

45. $y''-1=0,$ $\quad y(0)=2, y'(0)=0$.

46. $y''-2y'-3y=0,$ $\quad y(0)=8, y'(0)=0$.

47. $y''-10y'+25y=0,$ $\quad y(0)=2, y'(0)=8$.

48. $y''+6y'+9y=0,$ $\quad y(0)=1, y'(0)=2$.

49. $y''+2y'-8y=0,$ $\quad y(0)=4, y'(0)=-4$.

50. $y''+y'-20y=0,$ $\quad y(0)=\dfrac{9}{5}, y'(0)=0$.

51. $S''+S'-6S=0,$ $\quad S(0)=5, S'(0)=0$.

52. $y''-2y'-2y=0,$ $\quad y(0)=3, y'(0)=0$.

53. $y''-6y'+13y=0,$ $\quad y(0)=3, y'(0)=11$.

54. $y''-4y'+13y=0,$ $\quad y(0)=2, y'(0)=1$.

Диференціальні рівняння

<table>
<tr><th colspan="3">Першого порядку</th><th colspan="2">Другого порядку</th></tr>
<tr><th>Найпростіші
$\frac{dy}{dx}=f(x)$</th><th>З відокремлюваними змінними
$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$</th><th>Лінійні
$y'+f(x)y=g(x)$</th><th>Найпростіші
$y''=f(x)$</th><th>Лінійні однорідні з постійними коефіцієнтами
$y''+py'+qy=0$</th></tr>
<tr>
<td>1. Привести до виду $dy=f(x)dx$.
2. Проінтегрувати.
3. Знайти загальний розв’язок.
4. Знайти частковий розв’язок.</td>
<td>1. Розділити змінні
$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$
2. Проінтегрувати.
3. Знайти загальний розв’язок.
4. Знайти частковий розв’язок.</td>
<td>1. Заміна $y=uv$; $y'=u'v+uv'$
2. Одержали рівняння $u'v+u(v'+f(x)v)=g(x)$.
3. Вимагаєм $v'+f(x)v=0$. Знайшли $v=v(x)$.
4. Знаходимо u;
$u'v=g(x)$
$u=u(x)+C$.
5. Записати загальний розв’язок
$y=(u(x)+C)v(x)$.
6. Знайти частковий розв’язок.</td>
<td>1. Проінтегрувати двічі.
2. Знайти загальний розв’язок
$F(x;\ C_1;\ C_2)=0$.
3. Знайти частковий розв’язок.</td>
<td>1. Скласти характеристичне рівняння $k^2+pk+q=0$.
2. Знайти загальний розв’язок.
<table>
<tr><th>D</th><th>Корені характ.р-ня</th><th>Розв’язок диф. рівняння</th></tr>
<tr><td>$D>0$</td><td>$k_1\neq k_2$</td><td>$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$</td></tr>
<tr><td>$D=0$</td><td>$k_1=k_2$</td><td>$y=(C_1+C_2x)e^{kx}$</td></tr>
<tr><td>$D<0$</td><td>$k_1=a+bi$
$k_2=a-bi$</td><td>$y=e^{ax}(C_1\cos bx+$
$+C_2\sin bx)$</td></tr>
</table>
3. Знайти частковий розв’язок.</td>
</tr>
<tr><td colspan="5">

Диференціальне рівняння – $f(x;\ y;\ y';\ y'';\ldots y^{(n)})=0$

<u>Порядок</u> диференціального рівняння – порядок найстаршої похідної

<u>Загальний розв’язок</u> – функція від x, що залежить від C_1, C_2,...C_n (n – порядок рівняння), і задовільняє заданому диференціальному рівнянню.

<u>Частковий розв’язок</u> – загальний розв’язок з фіксованими значеннями C_1, C_2,...C_n.

<u>Задача Коші</u> – диференціальне рівняння+початкові умови.

<u>Розв’язок задачі Коші</u> – знаходження часткового розв’язку при заданих початкових умовах.

</td></tr>
</table>

РОЗДІЛ 10. РЯДИ

Рядом в математиці називають вираз виду

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

де $a_1, a_2, a_3 \ldots$ – члени деякої нескінченної послідовності. Член a_n називають загальним членом ряду.

Три крапки в кінці виразу вказують, що останнього доданку немає, тобто ряд є нескінченною сумою.

10.1. Числові ряди. Основні поняття і теореми.

Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – числа, то ряд називають числовим. В залежності від знаку чисел ряди можуть бути знакопостійними та знакозмінними (знакопочережними).

Наприклад, ряди:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \quad ,$$

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2n + \ldots \quad ,$$

$$-1 - 3 - 5 - \ldots - (2n-1) - \ldots$$

є знакопостійні, а ряди

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots \quad ,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} + \ldots$$

є знакозмінними (знакопочережними).

Знайти суму нескінченної кількості доданків безпосереднім додаванням не може ні людина, ні ЕОМ. Знайти можна лише суму скінченого числа доданків. Такі суми називають частковими сумами ряду. Наприклад,

$$S_1 = a_1 \ ,$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \quad ,$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad ,$$

....

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad .$$

А чи може існувати сума нескінченної кількості доданків? Розглянемо приклад: знайти суму ряду

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\ .$$

Обчислимо часткові суми цього ряду:

$$S_1=1\quad ,$$

$$S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\quad ,$$

$$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}\quad ,$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}\quad ,$$

$$S_5=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{31}{16}\quad .$$

Бачимо, що чим більша кількість доданків, тим ближче S_n наближається до числа 2. Даний приклад легко проілюструвати геометрично (рис.1).

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1\cdot 2=2\ .$$

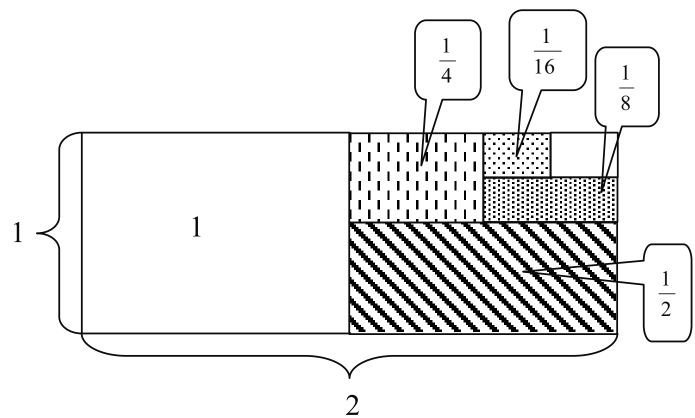


Рис.1

Не для кожного ряду послідовність часткових сум при $n \to \infty$ наближається до конкретного числа.

Наприклад, для ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n+1} + ... \ ,$$

часткові суми S_n рівні або 0, або 1; для ряду

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n + ... \ ,$$

часткова сума $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Ряд, для якого існує границя послідовності часткових сум при $n \to \infty$ називають **збіжним рядом,** а число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – **сумою ряду.** Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ або не існує, то ряд називають **розбіжним** і йому не приписують жодного числового значення.

При дослідженні рядів основними є два питання: чи буде даний ряд збіжним і чому буде рівна сума ряду. В багатьох практичних задачах принциповим є перше питання. Тому основну увагу приділимо питанню встановлення збіжності ряду.

Необхідна ознака збіжності знакопостійного ряду: Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то його загальний член a_n при необмеженому зростанні n прямує до нуля:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Приклад 1. Дано загальний член ряду: а) $b_n = \dfrac{n^3+1}{n^2}$; б) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3}$.

Написати ряд в розгорнутому вигляді і перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності ряду.

Розв'язання:

а) Знаходимо $b_1 = \dfrac{1^3+1}{1^2} = 2,\ b_2 = \dfrac{2^3+1}{2^2} = \dfrac{9}{4},\ b_3 = \dfrac{3^3+1}{3^2} = \dfrac{28}{9},\ b_4 = \dfrac{4^3+1}{4^2} = \dfrac{65}{16}$;

тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+1}{n^2} = 2 + \dfrac{9}{4} + \dfrac{28}{9} + \dfrac{65}{16} + ...$.

Тому, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+1}{n^2} = \infty \neq 0$, то необхідна ознака збіжності не виконується, отже ряд розбіжний.

б)Знаходимо $a_1=\frac{1^2+1}{1^3}=2,\ a_2=\frac{2^2+1}{2^3}=\frac{5}{8},\ a_3=\frac{3^2+1}{3^3}=\frac{10}{27},\ a_4=\frac{4^2+1}{4^3}=\frac{17}{64},...$

Записуємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}=2+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\frac{17}{64}+...$.

Необхідна ознака збіжності виконується, бо $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3}=0$.

Проте зробити висновок про збіжність ряду в даному випадку неможливо. Для встановлення збіжності ряду треба перевірити чи виконуються достатні умови збіжності.

<u>Достатні умови збіжності знакопостійного ряду.</u>

<u>Перша ознака порівняння.</u> Нехай дано два ряди $A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і $B=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, причому $a_n>b_n$. Тоді: а) із збіжності ряду (A) (з більшими членами) випливає збіжність ряду (B) (з меншими членами); б) із розбіжності ряду (B) випливає розбіжність ряду (A).

При застосуванні даної ознаки часто використовують ряди, збіжність яких відома. Це може бути гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (розбіжний); узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, (який збіжний при $\alpha>1$, розбіжний при $\alpha<1$); геометричну прогресію $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ (збіжний при $|q|<1$).

<u>Приклад 2.</u> Використовуючи першу ознаку порівняння, дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+...\ .$$

Розв'язання: Для порівняння використовуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – збіжну геометричну прогресію (бо $q<\frac{1}{2}$). Справедлива нерівність $\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}$, отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ збігається.

Друга ознака порівняння: Нехай дано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Якщо $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda$, де $\lambda\ne 0$, $\lambda\ne\infty$, то обидва ряди ведуть себе однаково, тобто збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-n}$.

Розв'язання: Тут $a_n=\frac{1}{2^n-n}$. Для порівняння використаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ з загальним членом $b_n=\frac{1}{2^n}$ – збіжну геометричну прогресію. Звідси:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{2^n}}=1 .$$

Тому, що $\lambda=1$, то обидва ряди ведуть себе однаково і, значить, даний ряд збіжний.

Ознака Даламбера. Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Тоді, якщо існує $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho,$ то при $\rho<1$ ряд збіжний; при $\rho>1$ ряд розбіжний; при $\rho=1$ потрібно скористатися іншою ознакою.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}=\frac{1!}{1^1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots=\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots .$$

Розв'язання: Тут $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, отже

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^n\,(n+1)n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \ .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ збіжний.

Ознака Коші: Нехай дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тоді, якщо існує $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \text{c}$, то при ρ <1 ряд збіжний; при ρ >1 ряд розбіжний; при ρ =1 потрібно скористатися іншою ознакою.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{2n}$.

Розв'язання: Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^2 =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^2 = 2^2 = 4 > 1 \ .$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{2n}$ – розбіжний.

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду (ознака Лейбніца).

Якщо члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a^{n}$ спадають по абсолютній величині та $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,$ то ряд збіжний.

Для знакозмінних рядів вводять поняття **абсолютної збіжності**.

Знакозмінний (знакопочережний) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a^{n}$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігаються одночасно даний ряд і ряд, складений з абсолютних величин його членів. Якщо ж збігається лише знакозмінний ряд , то його називають **умовно збіжним** рядом.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots\ ;$$

$$\text{б)}\ 1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{8^3}-\dots .$$

Розв'язання:

а) Тому, що $|1|>\left|\frac{1}{2}\right|>\left|\frac{1}{3}\right|>\left|\frac{1}{4}\right|>\dots$ і $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0,$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ збіжний за ознакою Лейбніца.

Але ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|$ розбіжний, як гармонічний і, звідси, висновок, що даний знакозмінний ряд збігається умовно.

б) Даний знакозмінний ряд збігається абсолютно, бо ряд, складений із модулів його членів: $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\dots+\frac{1}{n^3}+\dots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, є узагальнений гармонічний, який при показникові степеня більшому за одиницю збігається.

10.2 Функціональні ряди.

Якщо у ряді

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

члени послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – функції, то ряд називають функціональним.

Наприклад, функціональними будуть ряди

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx + \ldots \quad ,$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots \quad ,$$

$$\ln x + \ln(1+x) + \ln(2+x) + \ldots + \ln(n+x) + \ldots \quad .$$

Якщо в функціональний ряд підставити $x = x_0$, то він перетвориться в числовий. Отриманий при $x=x_0$ числовий ряд може бути збіжним, або розбіжним.

Точку $x=x_0$, в якій функціональний ряд перетворюється в збіжний числовий ряд, називають **точкою збіжності** ряду. Сукупність всіх точок збіжності для даного функціонального ряду називають його **областю збіжності.**

Очевидно, що в точках збіжності x_i існують значення сум S_i числових рядів, і можна встановити відповідність між точками збіжності та значеннями сум. Отже, сума функціонального ряду є деяка функція $f(x)$, область визначення якої співпадає з областю збіжності функціонального ряду. Кажуть, що функціональний ряд збігається до функції $f(x)$, або що функція $f(x)$ розкладається в ряд. Матимемо:

$$f(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \ldots + a_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

в області збіжності ряду.

Розглянемо деякі функціональні ряди.

10.3. Степеневий ряд.

Функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \ldots + a_n(x-b)^n + \ldots$$

називають степеневим рядом.

Тут x – незалежна змінна, $a_0, a_1, \ldots a_n$ – постійні коефіцієнти ряду, b – довільна стала.

Якщо ввести заміну $x - b = z$, то отримаємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \quad .$$

Отже, для вивчення степеневих рядів можна обмежитись розглядом ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

<u>Ознака збіжності степеневого ряду</u> (теорема Абеля). Якщо степеневий ряд $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ збіжний при $x = x_0$, то він збіжний, причому абсолютно, при всіх x, для яких виконується умова $|x| < |x_0|$. Якщо степеневий ряд розбіжний при $x = x_0$, то він розбіжний для всіх $|x| > |x_0|$.

Таким чином, із збіжності степеневого ряду в одній точці x_0 слідує його збіжність в цілому інтервалі $-x_0<x<x_0$. Число $R = |x_0|$ називають **<u>радіусом збіжності</u>** степеневого ряду. Радіус збіжності визначається з співвідношень:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad \text{або} \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right|,$$

які випливають з ознак Даламбера та Коші для числових рядів. Дійсно, по ознаці Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігатиметься, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{a_n / a_{n+1}}\right| = \left|\frac{x}{R}\right| < 1 .$$

Отже, при $|x| < R$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ буде абсолютно збіжним. Аналогічно доводиться і друге співвідношення.

Область збіжності степеневого ряду може бути рівна:

а) одній точці $x = a$;

б) відрізку $(a; b)$;

в) всій числовій осі.

Приклад 7. Дослідити на збіжність степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}$.

Розв'язання: Тут $a_n=\frac{n^2}{2^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$, тоді радіус збіжності

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{2^n(n+1)^2}=2,$ отже область збіжності $-2<x<2$.

Дослідимо збіжність ряду в граничних точках. При $x=\pm 2$ степеневий ряд матиме вигляд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(\pm 2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n n^2$. Обидва ці ряди розбіжні, бо для них не виконуються необхідні ознаки збіжності, отже область збіжності ряду (–2; 2).

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{(n^2+1)\cdot 2^n}}$.

Розв'язання: Введемо заміну $x-3=z$, тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{(n^2+1)\cdot 2^n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{(n^2+1)\cdot 2^n}},$$

запишемо: $a_n=\frac{1}{\sqrt{(n^2+1)\cdot 2^n}}$, $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{((n^2+1)^2+1)\cdot 2^{n+1}}}$.

Радіус збіжності

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{((n+1)^2+1)\cdot 2^{n+1}}}{\sqrt{(n^2+1)\cdot 2^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2};$$

отже область збіжності ряду $-\sqrt{2}<z<\sqrt{2}$, або $3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}$.

Перевіримо збіжність ряду в граничних точках: при $x=3+\sqrt{2}$ отримаємо знакопостійний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{(n^2+1)2^n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$

який є розбіжним (згідно другої ознаки порівняння з гармонічним рядом);

при $x = 3-\sqrt{2}$, отримаємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{(-2)^n}}{\sqrt{(n^2+1)2^n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}},$$

який збіжний згідно ознаки Лейбніца. Отже область збіжності ряду є

$$3-\sqrt{2}\le x<3+\sqrt{2}.$$

Властивості степеневих рядів.

Степеневі ряди мають ряд цікавих властивостей:

1. Сума степеневого ряду є неперервною функцією в області його збіжності.
2. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку з області його збіжності.
3. Степеневий ряд можна почленно диференціювати в будь-якій точці з області його збіжності.

10.4. Розклад функції в степеневий ряд. Ряд Маклорена.

Нехай функція $f(x)$ нескінченно диференційована в околі точки $x=0$ та розкладається в степеневий ряд

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+\ldots a_nx^n+\ldots .$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ можна визначити послідовно диференціюючи обидві частини ряду:

$$f'(x)=1\cdot a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots ,$$

$$f''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\ldots ,$$

$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4+\ldots ,$$

і т.д.

та підставляючи $x=0$ в отримані вирази:

$$f(0)=a_0,$$

$$f'(0)=1\cdot a_1=1!a_1, \qquad a_1=\frac{f'(0)}{1!},$$

$$f''(x)=1\cdot 2a_2=2!a_2, \qquad a_2=\frac{f''(0)}{2!},$$

$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3a_3=3!a_3, \qquad a_3=\frac{f'''(0)}{3!}.$$

і т.д.

Отримані вирази для коефіцієнтів підставимо в ряд; одержимо:

$$f(0)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots .$$

Такий ряд називають **<u>рядом Маклорена</u>** функції $f(x)$, а функцію $f(x)$ – породжуючою для ряду Маклорена.

Проведені міркування дозволяють зробити важливий висновок, який записують у вигляді теореми.

<u>Теорема.</u> Якщо нескінченно диференційована в околі точки $x = 0$ функція $f(x)$ може бути розкладена в степеневий ряд, то це буде ряд Маклорена цієї функції.

Обернене твердження, взагалі кажучи, невірне. Можна вказати такі функції, для яких ряд Маклорена розбіжний при $x = 0$, або ж сума ряду не співпадає з породжуючою його функцією. Відмітимо, що для елементарних функцій ряд Маклорена збігається до цих функцій в області своєї збіжності.

Розглянемо розклад в ряд Маклорена деяких функцій.

1. $y = e^x$.

а) знайдемо похідні функції та їх значення в т. $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y=e^x \\ y'=e^x \\ y''=e^x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)}=e^x \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} y(0)=e^0=1 \\ y'(0)=1 \\ y''(0)=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)}(0)=1 \end{array} ;$$

б) запишемо ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad ;$$

в) встановимо область збіжності отриманого ряду:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty, \text{ отже } -\infty < x < +\infty .$$

2. $y = \sin x$.

а) знайдемо похідні функції та їх значення в т. $x = 0$:

$y = \sin x$	$y(0) = \sin 0 = 0$
$y' = \cos x$	$y'(0) = \cos 0 = 1$
$y'' = -\sin x$	$y''(0) = 0$
$y''' = -\cos x$	$y'''(0) = -1$
$y^{IV} = \sin x$	$y^{IV}(0) = 0$

(похідні старших порядків повторюють попередні значення, $y^{\mathrm{V}} = y',\ y^{\mathrm{VI}} = y''$ і т. д.)

б) запишемо ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad ;$$

в) встановимо область збіжності отриманого ряду

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} 2n\cdot(2n+1) = \infty,$$

отже ряд збіжний на проміжку $(-\infty;+\infty)$.

Аналогічно:

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots$; область збіжності $(-\infty; +\infty)$.

4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$; область збіжності $(-1; 1)$.

5. $(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!} + \ldots$;

область збіжності $(-1; 1)$;

Даний ряд називають **біноміальним рядом**.

6. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$;

область збіжності (–1; 1).

Приклад 9. Розкласти функцію $f(x) = 2^x$ в ряд Маклорена.

Розв'язання: Знаходимо похідні і обчислюємо їх значення при $x = 0$:

$f(x) = 2^x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = 2^x \ln 2$	$f'(0) = \ln 2$
$f''(x) = 2^x \ln^2 2$	$f''(0) = \ln^2 2$
....	....
$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2$	$f^{(n)}(0) = \ln^n 2$

Тоді,

$$2^x = 1 + \frac{\ln^2 2}{1!}x + \frac{\ln^2 2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n 2}{n!}x^n + \ldots \ .$$

При розкладі в степеневий ряд деяких функцій можна використати заміну і вже відомі розклади.

Приклад 10. Розкласти в ряд функцію $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Розв'язання: Нехай $y = -x^2$, тоді

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \ldots + y^n + \ldots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}.$$

Приклад 11. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = e^{5x}$.

Розв'язання: Нехай $z = 5x$, тоді

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

отже,

$$e^{5z} = 1 + 5x + \frac{(5x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(5x)^n}{n!} + \ldots \ .$$

Розклад функції в степеневий ряд часто використовують для наближеного обчислення її значення.

<u>Приклад 12.</u> Обчислити значення функції $y = e^x$ при $x = 2$ з точністю 0,001.
<u>Розв'язання:</u> Використаємо розклад функції $y = e^x$ в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \,.$$

При $x = 2$ отримаємо

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^{10}}{10!} + \ldots \quad .$$

Обмежимось лише першими одинадцятьма членами, бо $\dfrac{2^{10}}{10!} < 0{,}001$, тобто наступні члени не впливатимуть на точність обчислення.

Отже, $e^2 \approx 1 + 2 + \dfrac{4}{2!} + \ldots + \dfrac{2^{10}}{10!} = 7{,}389$.

Використання властивостей степеневих рядів спрощує розв'язання багатьох задач.

<u>Приклад 13.</u>

а) Розкладемо в ряд функцію $y = \operatorname{arctg} x$.
Відомо, що

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n+1} x^{2n} + \ldots \,.$$

Проінтегруємо праву і ліву частини рівності

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n+1} x^{2n} + \ldots)\,dx \,.$$

Використавши другу властивість, одержимо:

$$\operatorname{arctg} x = \int dx - \int x^2 dx + \ldots + \int (-1)^{n+1} x^{2n} dx + \ldots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \,.$$

б) Знайти розклад функції $y=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$. Представимо функцію як суму

$y=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2}{1+2x}$. Тому, що $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, а $\dfrac{1}{1-2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$ отримаємо згідно першої властивості

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^n\cdot x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n\cdot 2^{n+1}\right)\cdot x^n \quad .$$

10.5. Гармонічні коливання.

Загальною ознакою всіх коливальних рухів є те, що вони періодично повторюються (або наближено повторюються) через певні проміжки часу. При вивченні коливань нас цікавлять, в основному, ті ознаки, які характеризують повторюваль-ність рухів. Це закон, по якому повторюється рух, час, через який система знову прийде в початковий стан, найбільші відхилення, яких досягає рухоме тіло і т.д. Найбільш простими коливальними процесами є рух маятника (при малих відхиленнях), рух тіла на пружині, напруга і сила змінного струму. Маючи різну фізичну природу всі ці процеси математично описуються одним і тим же рівнянням. Як приклад, розглянемо коливання матеріальної точки масою M навколо положення рівноваги (рис. 2). Невідомим є закон руху $x = x(t)$. Згідно закону Гука сила, що діє на тіло прямо пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги:

$$F=-kx\ ,$$

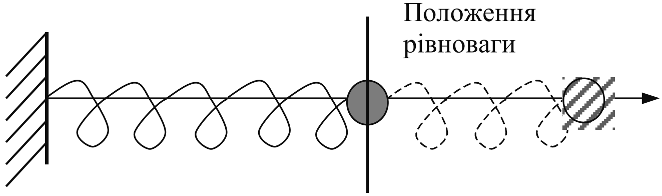


Рис.2

а згідно другого закону Ньютона ця ж сила рівна:

$$F=Mx'',$$

де k – коефіцієнт жорсткості пружини, M – маса тіла, x'' – прискорення руху тіла.

Для визначення закону руху тіла ми отримали диференціальне рівняння :

$$Mx'' = -kx, \qquad \text{або} \qquad Mx''+kx = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння, поділивши праву і ліву частини на M:

$$x''+p\,x = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння II порядку з постійними коефіцієнтами, його характеристичне рівняння має вигляд

$$r^2+p = 0.$$

Розв'язки складеного характеристичного рівняння комплексно-спряжені

$$r_1 = +i\sqrt{p}\,, \quad r_2 = -i\sqrt{p}\,.$$

Позначивши $\sqrt{p}$ через ω, одержимо

$$x = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\,.$$

Нехай $C_1 = A\sin\alpha$, $C_2 = A\cos$, тоді

$$x = A(\sin\alpha\cdot\cos(\omega t) + \cos\alpha\cdot\sin(\omega t))\,,$$

або

$$x = A\sin(\omega t+\alpha)\,.$$

Розв'язок показує, що рух відбувається по закону синуса (або косинуса). Такий рух носить назву **простого гармонічного коливання.** Оскільки $\left|\sin(\omega t+\alpha)\right|\langle 1$, то постійна A визначає найбільше відхилення точки від центра коливань. Її називають **амплітудою коливання.** Величина α визначає початкове положення тіла, її називають **початковою фазою**. Період коливання T визначається по формулі

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

а величина ν, обернена до періоду визначає число коливань за одну секунду, її називають **частотою коливань**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\,.$$

(Іноді частотою називають величину ω. Вона виражає число коливань за 2π секунду).

Для побудови графіків гармонічних коливань використовують елементарні перетворення графіку функції $y = \sin x$.

Рівняння

$$x = A\sin(\omega t+\alpha)$$

називають рівнянням гармонічних коливань, або просто **гармонікою.**

Більш складні коливання , якщо це можливо, вигідно представляти як суму декількох гармонічних коливань з однаковими частотами. Таким чином, виникає питання додавання гармонічних коливань. Сума двох гармонічних коливань з однаковими частотами, але різними фазами та амплітудами, буде теж гармонічним коливанням з тою ж частотою, проте з новою фазою та амплітудою.
Якщо

$$y_1 = A_1\sin(\omega t+\alpha_1),$$
$$y_2 = A_2\sin(\omega t+\alpha_2),$$

то $y = y_1+y_2= A\sin(\omega t+\alpha)$, де

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + A_2^2},$$

$$tg\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

Сума двох коливань з різними частотами не буде гармонічним коливанням. Для побудови графіка суми двох гармонічних коливань з різними частотами використовують графічний метод, який полягає в сумуванні ординат графіків у вузлових точках.

Довільний закон руху, чи більш загально, довільну функцію можна представити як нескінченну суму простих гармонік, тобто у вигляді тригонометричного ряду.

10.6. Тригонометричний ряд. Ряд Фур'є.

Періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ можна представити як суму ряду такого виду:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + (a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t) + (a_2\cos 2\omega t + b_2\sin 2\omega t) + \ldots =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n n\cos\omega t + b_n\sin n\omega t),$$

де $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ – постійні величини.

Такий ряд називають тригонометричним рядом, а сталі $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ – коефіцієнтами ряду. Говорять, що такий запис представляє собою розклад періодичної функції $f(x)$ в тригонометричний ряд. Покладемо $\omega t = x$, тоді ряд набуде вигляду:

$$f(x)=\frac{a^0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+...=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (T)$$

Як бачимо, всі доданки ряду T – тригонометричні функції з спільним періодом 2π. Тому й сума ряду T буде періодичною функцією з таким самим періодом. В силу періодичності суми ряду T розкласти в тригонометричний ряд неперіодичну функцію можна лише на відрізку, довжина якого дорівнює 2π. В подальшому використовується відрізок $(-\pi, \pi)$.

Перейдемо до питання знаходження коефіцієнтів ряду. Формули знаходження коефіцієнтів виводяться шляхом інтегрування лівої та правої частини ряду (T) і домноженням на $\cos nx$ або $\sin nx$. Запишемо формули:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \quad ;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx; \quad (n=1,2,3...),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx; \quad (n=1,2,3...).$$

Тригонометричний ряд, коефіцієнти якого визначені за приведеними формулами називають **рядом Фур'є** функції $f(x)$, а функцію $f(x)$ – породжуючою для ряду.

З вище записаних формул легко можна показати, що якщо $f(x)$ – парна функція, то

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx; \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx; \quad b_n=0$$

(говорять, що функція розкладається в ряд Фур'є по косинусах);

якщо $f(x)$ – непарна функція, то $a_0 = 0$; $a_n = 0$; $b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx$

(функція розкладається в ряд Фур'є по синусах).

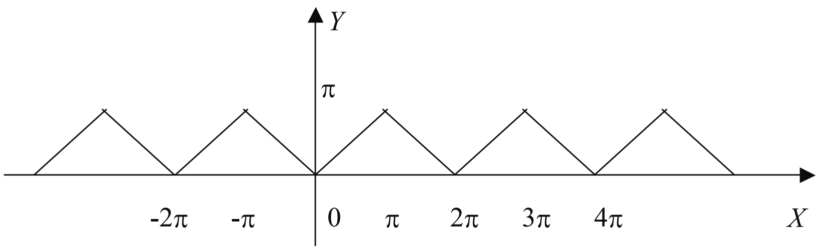
Зауважимо, що записаний для функції $f(x)$ ряд Фур'є не завжди збігатиметься саме до неї. Приведемо достатню умову збіжності ряду Фур'є до породжуючої його функції.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має скінченну кількість точок розриву І роду на проміжку $(-\pi; \pi)$, то її ряд Фур'є збігається до неї на цьому проміжку.

Приклад 13. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $y = |x|$ з періодом 2π.

Розв'язання:

а) Побудуємо графік даної функції з врахуванням періодичності:



б) Дана функція парна, тому коефіцієнти будемо знаходити за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad b_n = 0;$$

в) Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi;$$

Отже, знайдено $\boxed{a_0 = \pi}$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx;$$

даний інтеграл знаходимо інтегруванням частинами:

$u = x$	$du = dx$
$dv = \cos nx dx$	$v = \frac{1}{n}\sin nx$

Тоді $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx \right).$$

Враховуючи, що sin0 і sin$n\pi$ дорівнює 0, отримаємо:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \textit{якщо} \quad n - \textit{непарне} \\ 0, & \textit{якщо} \quad n - \textit{парне} \end{cases}.$$

Отже, $$\boxed{a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \textit{якщо} \quad n - \textit{непарне} \\ 0, & \textit{якщо} \quad n - \textit{парне} \end{cases}}.$$

г) Підставимо знайдені значення у формулу

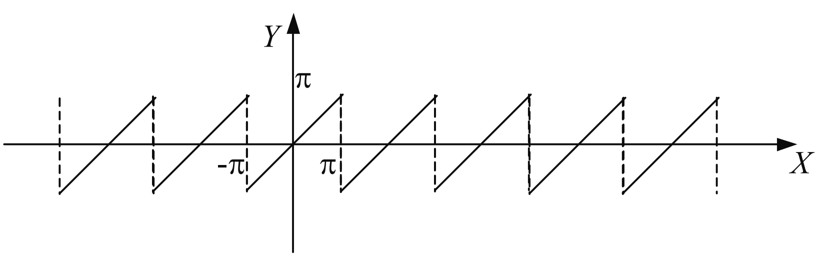
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \dots$$

отримаємо:

$$|x| \cong \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi\cdot 1^2}\cos x - \frac{4}{\pi\cdot 3^2}\cos 3x - \frac{4}{\pi\cdot 5^2}\cos 5x - \dots =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}.$$

Приклад 14. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = x$ ($T = 2\pi$).
Розв'язання:
а) Побудуємо графік даної функції з врахуванням періодичності:



б) Дана функція непарна, отже $a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx$.

в) Обчислимо коефіцієнти ряду

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx =$$

$u = x$	$du = dx$
$dv = \sin nx dx$	$v = -\frac{1}{n}\cos nx$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx \right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos \pi n + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos \pi n = \begin{cases} -\frac{2}{n}, & \text{якщо} \quad n - \text{парне} \\ \frac{2}{n}, & \text{якщо} \quad n - \text{непарне} \end{cases},$$

Тут враховано, що $\sin n\pi = \sin 0 = 0$, $\cos n\pi = \pm 1$ в залежності від значень n.
г) Підставимо знайдені значення в ряд Фур'є, який в даному випадку має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \ .$$

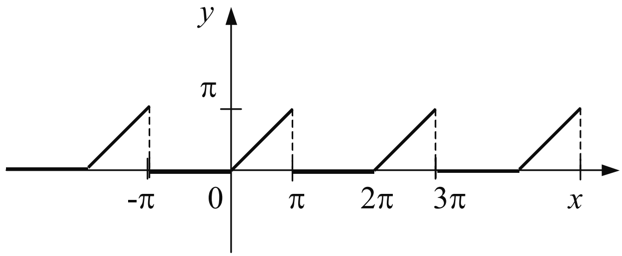
Отримаємо

$$x \cong 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \ldots (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx + \ldots = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \ .$$

Приклад 15. Розкласти в ряд Фур'є періодичну ($T = 2\pi$) функцію

$$y = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad -\pi < x \le 0 \\ x, & \text{якщо} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}.$$

Розв'язання:
а) Побудуємо графік даної функції, врахувавши періодичність:



б) Дана функція є ні парна, ні непарна, тому коефіцієнти ряду Фур'є обчислюватимемо за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx\,,$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx\,;$$

в) Обчислимо коефіцієнти ряду

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx =$$

$u = x$	$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$
$\mathrm{d}v = \cos nx\,\mathrm{d}x$	$v = \sin nx$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=$$

$$=\begin{cases}0, & \textit{якщо} \quad n-\textit{парне}\\ \dfrac{-2}{\pi n^2}, & \textit{якщо} \quad n-\textit{непарне}\end{cases}$$

Отже, $a_1=-\frac{2}{\pi}$; $\quad a_2=0$; $\quad a_3=-\frac{2}{3^2\pi}$ і т.д.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=$$

$u = x$	$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$
$\mathrm{d}v = \sin nx\,\mathrm{d}x$	$v = -\cos nx$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=-\frac{\cos n\pi}{n}=\begin{cases}-\dfrac{1}{n}, & \textit{якщо} \quad n-\textit{парне}\\ \dfrac{1}{n}, & \textit{якщо} \quad n-\textit{непарне}\end{cases}.$$

Отже, $b_1=1$; $\quad b_2=-\frac{1}{2}$; $\quad b_3=\frac{1}{3}$; $\quad b_4=-\frac{1}{4}$ і т.д.

г) Підставимо знайдені значення в загальний вигляд ряду Фур'є і отримаємо:

$$y\cong\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{2\pi}{3^2\pi}\cos 3x+\ldots.$$

Функції, які ми розкладали в ряд Фур'є були неперервними на $(-\pi;\ \pi)$. Якщо ж функція має точки розриву на $(-\pi;\ \pi)$, або необхідно встановити збіжність ряду Фур'є на кінцях відрізку, то використовують теорему Діріхлє.

Теорема Діріхлє. Якщо функція $f(x)$ кусково-неперервна на проміжку $[-\pi;\ \pi]$ (тобто має лише скінчену кількість точок розриву на цьому проміжку) і має скінчене число точок екстремуму, то ряд Фур'є цієї функції збігається в усіх точках даного проміжку, причому:

а) в точках неперервності функції його сума рівна $f(x)$;

б) в точках розриву функції $f(x)$ його сума рівна $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

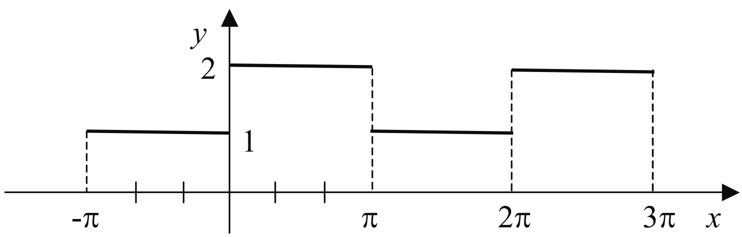
в) на кінцях проміжку сума ряду рівна $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Приклад 16. Розкласти в ряд Фур'є періодичну (T = 2π) функцію

$$y=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad -\pi<x<0\\ 2, & \text{якщо} \quad 0<x<\pi\end{cases}.$$

Розв'язання:

а) Побудуємо графік даної функції



б) Дана функція є ні парна, ні непарна, і має розрив в точці $x = 0$ з проміжку $(-\pi,\pi)$ та на кінцях проміжку.

Згідно з теоремою Діріхлє сума ряду Фур'є S_1 в т. $x = 0$ обчислиться за формулою

$$S_1=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2},$$

а сума ряду S_2 в т. $x=\pm\pi$ обчислиться за формулою

$$S_2=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}.$$

в) Для знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є використаємо відомі формули.

Обчислимо коефіцієнти ряду:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}1dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2dx=\frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0}+2x\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(\pi+2\pi)=\frac{3\pi}{\pi}=3;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}1\cdot\cos nx dx+\int_{0}^{\pi}2\cos nx dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}1\cdot\sin nx dx+\int_{0}^{\pi}2\sin nx dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{2\cos n\pi}{n}-\frac{2}{n}\right)=-\frac{1}{\pi n}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & \text{якщо } n-\text{парне}\\ \dfrac{2}{\pi n}, & \text{якщо } n-\text{непарне}\end{cases}$$

г) Запишемо розклад даної функції в ряд Фур'є, для точок з проміжків $(-\pi, 0)\cup(0; \pi)$.

$$y\cong\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x+\frac{2}{3\pi}\sin 3x+\frac{2}{5\pi}\sin 5x+\ldots\ .$$

В точках $x = 0; \pm\pi$ даний ряд збігатиметься до числа 3/2.

<u>10.7. Практичний гармонічний аналіз.</u>

Теорія розкладу функцій в тригонометричні ряди носить назву гармонічного аналізу. В практиці гармонічним аналізом називають представлення функцій, отриманих при розв'язуванні конкретних задач у вигляді ряду Фур'є. Коефіцієнти такого ряду Фур'є, як правило, обчислюють наближено. Якщо функції отримані з експериментальних даних, то вони зазвичай мають вигляд графіків або таблиць. У цих випадках коефіцієнти ряду Фур'є обчислюють за допомогою наближених методів інтегрування. Для наближеного обчислення інтегралів

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx,$$

застосовуємо будь-який з методів наближеного інтегрування. Застосуємо, наприклад, формулу лівих прямокутників (п. 7.7). Відрізок $[-\pi;\pi]$ поділимо на n рівних частин, тобто крок поділу візьмемо рівним $\Delta x=\dfrac{2\pi}{n}$. Позначимо точки поділу відрізку через $x_0=-\pi, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=\pi$, а значення функції в точках поділу через $y_0, y_1, \ldots y_n$. Тоді

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x = \frac{\Delta x}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1} y_i = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \quad ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos kx_i \Delta x = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos kx_i \quad ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin kx_i \Delta x = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin kx_i \quad .$$

Для полегшення обчислення коефіцієнтів Фур’є використовують різноманітні схеми та шаблони, а в більш складних випадках обчислення проводять з допомогою ЕОМ.

Приклад 1. Знайти тригонометричний многочлен другого порядку для функції, графік якої приведений на рис. 3.

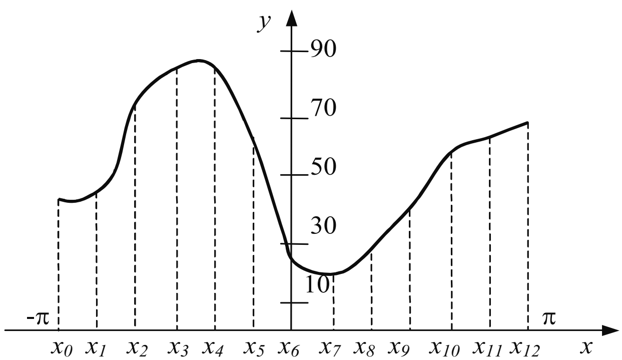


рис.3

Розв’язання. Поділимо відрізок на 12 частин, отримавши крок поділу. З графіку функції безпосереднім вимірюванням ординат знаходимо: $y_0 = 44, y_1 = 46, y_3 = 88,\ y_4 = 86,$ $y_5 = 63, y_6 = 24, y_7 = 20, y_8 = 26,\ y_9 = 40, y_{10} = 58, y_{11} = 65.$

Тоді по формулах наближеного обчислення коефіцієнтів ряду Фур’є одержимо:

$$a_0=\frac{2}{12}\sum_{i=0}^{11}y_i=\frac{1}{6}(44+46+76+\ldots+58+65)=\frac{636}{6}=106,$$

$$a_1=\frac{2}{12}\sum_{i=0}^{11}y_i\cos x_i=\frac{1}{6}(44\cos(-\pi)+46\cos(-\frac{5\pi}{6})+76\cos(-\frac{4\pi}{6})+$$

$$+88\cos(-\frac{3\pi}{6})+86\cos(-\frac{2\pi}{6})+63\cos(-\frac{\pi}{6})+24\cos 0+$$

$$+20\cos\frac{\pi}{6}+26\cos\frac{2\pi}{6}+40\cos\frac{3\pi}{6}+58\cos\frac{4\pi}{6}+65\cos\frac{5\pi}{6})=8{,}3\quad ,$$

$$a_2=\frac{2}{12}\sum_{i=0}^{11}y_i\cos 2x_i=\frac{1}{6}(44\cos(-2\pi)+46\cos(-\frac{2\cdot 5\pi}{6})+76\cos(-\frac{2\cdot 4\pi}{6})+\ldots$$

$$\ldots+58\cos\frac{2\cdot 4\pi}{6}+65\cos\frac{2\cdot 5\pi}{6})=-13{,}5\quad ,$$

$$b_1=\frac{2}{12}\sum_{i=0}^{11}y_i\sin x_i=\frac{1}{6}(44\sin(-\pi)+46\sin(-\frac{5\pi}{6})+\ldots+65\sin\frac{5\pi}{6})=22{,}3\quad ,$$

$$b_2=\frac{2}{12}\sum y_i\sin 2x_i=\frac{1}{6}(44\sin(-2\pi)+46\sin(-\frac{2\cdot 5\pi}{6})+\ldots$$

$$\ldots+65\sin\frac{2\cdot 5\pi}{6})=-14{,}3\quad .$$

Таким чином,

$$f(x)\approx 53+22{,}3\sin x+8{,}3\cos x-14{,}3\sin 2x-13{,}5\cos 2x\ .$$

Для функцій, заданих аналітично коефіцієнти ряду Фур'є знаходять згідно приведених формул (п.9.6).

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур'є криву двохпівперіодного випрямленого синусоїдального струму

$$i(t)=\begin{cases}A\sin\omega t, \text{якщо } 0\le t\le\dfrac{\pi}{\omega}\\ -A\sin\omega t, \text{якщо } \dfrac{\pi}{\omega}\le t\le\dfrac{2\pi}{\omega}\end{cases},$$

Розв'язання: Дану функцію можна представити у вигляді

$$I(t)=\left|A\sin\omega t\right|,\qquad -\pi\le t\le\pi\ .$$

Замінимо $\omega t = x$ і продовжимо функцію періодично на всю числову вісь (рис.4).

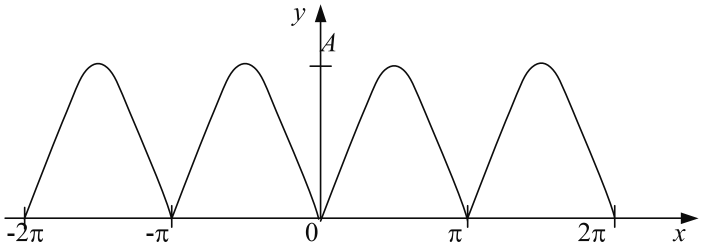


рис. 4

Тоді

$$y = i(t) = i(\frac{x}{\omega}) = i(x) = |A\sin x|.$$

Отримана функція парна, отже $b_n = 0$. Обчислимо коефіцієнти a_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|A\sin x|dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}|A\sin x|dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}A\sin x dx = \frac{2A}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{2A}{\pi}(-\cos\pi - (-\cos 0)) = \frac{4A}{\pi} \quad ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|A\sin x|\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}A\sin x\cos nx dx = \frac{A}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\sin(n+1)x -$$

$$- \sin(n-1)x)dx = \frac{A}{\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)x\right)\Big|_0^\pi \quad .$$

При n непарному $a_n = 0$; при n парному $a_n = -\dfrac{4A}{\pi(n^2-1)}$.

Функція $I(x)$ розклалась в ряд Фур'є

$$I(x) \cong \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi\cdot 3}\cos 2x - \frac{4A}{\pi\cdot 15}\cos 4x - \frac{4A}{\pi\cdot 35}\cos 6x - ...$$

а початкова функція $i(t)$, відповідно, в ряд Фур'є

$$i(t) \cong \frac{2A}{\pi}\left(1 - \frac{2}{3}\cos 2\varpi t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - ...\right) \quad .$$

Приклад 3. Розкласти в ряд Фур'є криву однопівперіодного випрямленого синусоїдального струму:

$$f(t)=\begin{cases} A\sin\omega t, якщо\ 0\le t\le \dfrac{\pi}{\omega}, \\ 0,\ якщо \dfrac{\pi}{\omega}\le t\le \dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases}.$$

Розв'язування: Нехай $\omega t = x$, тоді:

$$y=f(x)=i\left(\frac{x}{\omega}\right)=I(x)=\begin{cases} A\sin x,\ \ при\ \ 2\pi k\le x\le (2k+1)\pi \\ 0,\ \ при\ \ (2k+1)\pi\le x\le 2\pi(k+1) \end{cases}.$$

Графік функції представлено на рис. 5.

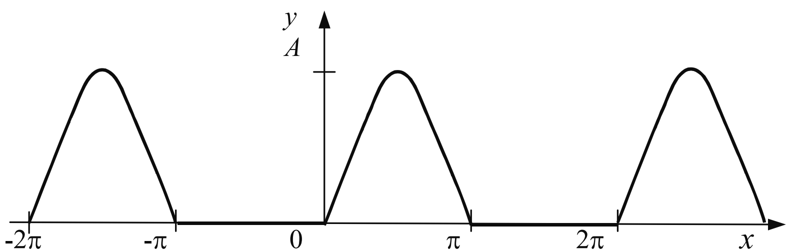


рис. 5

Отримаємо:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} A\sin x dx=\frac{A}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{2A}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} A\sin x\cos nx dx.$$

З попереднього прикладу відомо, що при *n* непарному $a_n=0$, а при *n* парному

$$a_n=-\frac{4A}{\pi(n^2-1)}.$$

Знайдемо b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} A\sin x\sin nx dx \,.$$

Якщо $n = 1$, то

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} A\sin^2 x dx = \frac{A}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2x)dx = \frac{A}{2\pi}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{A}{2\pi}\left(\left(\pi - \frac{1}{2}\right) - \left(0 - \frac{0}{2}\right)\right) = \frac{A}{2};$$

якщо $n \neq 1$, то $b_n = 0$.

Функція $I(x)$ розклалась в ряд Фур'є:

$$I(x) \cong \frac{2A}{2\pi} + \frac{A}{2}\sin x - \frac{4A}{\pi 3}\cos 2x - \frac{4A}{\pi 15}\cos 4x -$$
$$- \frac{4A}{\pi 35}\cos 6x - \ldots - \frac{4A}{\pi(4m^2-1)}\cos 2mx - \ldots \,.$$

Отже:

$$i(t) = I(\omega t) \cong \frac{A}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}\sin\omega t - \frac{4}{3}\cos 2\omega t - \ldots - \frac{4}{m^2-1}\cos 2m\omega t - \ldots\right) .$$

10.8.Вправи.

1. Дати означення числового ряду.
2. Що називається частковою сумою ряду?
3. Які ряди називаються збіжними?
4. Що називають сумою збіжного ряду?
5. Які ряди називають розбіжними?
6. Чи має суму розбіжний ряд?
7. Чи може збігатися ряд, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$?
8. Чи можна стверджувати, що ряд збігається, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?
9. Чи можна розв'язати питання про збіжність ряду, не користуючись необхідною ознакою збіжності?
10. Які ознаки збіжності числових рядів з додатніми членами базуються на порівнянні рядів?
11. Сформулюйте ознаку Даламбера.
12. Сформулюйте ознаку Коші.
13. Який ряд називається знакозмінним?
14. Сформулюйте ознаку Лейбніца.
15. Який ряд називається абсолютно збіжним?
16. Який ряд називається умовно збіжним?
17. Який ряд є геометричною прогресією?
18. Який ряд називається гармонічним?
19. Який ряд називається функціональним?
20. Як знайти область збіжності функціонального ряду?
21. Який ряд називається степеневим?
22. Що називають інтервалом збіжності степеневого ряду?
23. Як знайти інтервал збіжності степеневого ряду?
24. Який вигляд має ряд Маклорена?
25. За допомогою яких формул обчислюють коефіцієнти ряду Маклорена?
26. Запишіть ряд Маклорена для функцій: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$.
27. Який вигляд має гармонічна функція?
28. Що називають рядом Фур'є?
29. Запишіть формули для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є для функції з періодом 2π.
30. Запишіть формули для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є для парної та непарної функцій.

31. Записати перші п'ять членів ряду по заданому загальному члену

а) $a_n = \dfrac{1}{4n^2+1}$; б) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$; в) $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$; г) $a_n = \dfrac{n}{(n+1)2^n}$.

32. Знайти формулу загального члену ряду:

а) $2+4+8+16+\ldots$; б) $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{10}+\ldots$; в) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{24}+\ldots$;

г) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\ldots$; д) $\dfrac{2}{1}+\dfrac{4}{4}+\dfrac{6}{9}+\dfrac{8}{16}+\ldots$; е) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\ldots$;

є) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{16}{9}+\dfrac{81}{27}+\dfrac{256}{81}+\ldots$.

33. Довести, що даний ряд розбіжний а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+7}{3n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Дослідити на збіжність ряд за допомогою ознаки Даламбера:

34. $1+\dfrac{3}{1}+\dfrac{3^2}{1\cdot 2}+\dfrac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{3^n}{n!}+\ldots$.

35. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{3}{(\sqrt{3})^2}+\dfrac{5}{(\sqrt{3})^3}+\ldots+\dfrac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}+\ldots$.

36. $\dfrac{2}{5}+\dfrac{2^2\cdot 2^2}{5^2}+\dfrac{2^3\cdot 3^2}{5^3}+\ldots+\dfrac{2^n\cdot n^2}{5^n}+\ldots$.

37. $10+\dfrac{10^2}{2^2}+\dfrac{10^3}{3^3}+\ldots+\dfrac{10^n}{n^n}+\ldots$.

38. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\ldots$.

39. $\dfrac{1\cdot 2}{10}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{10^2}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{10^3}+\ldots$.

40. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}+\ldots$.

41. $1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\ldots$.

42. $1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\ldots$.

43. $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\ldots$.

44. $\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{6}{125}+\ldots+\frac{2n}{5^n}+\ldots$;

45. $\frac{3}{1^2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{3^2}+\ldots+\frac{3^n}{n^2}+\ldots$.

46. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots$.

47. $\frac{1\cdot 2}{3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3^3}+\ldots+\frac{(n+1)!}{3^n}+\ldots$.

48. $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots$.

49. $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 3}+\frac{3^3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{3^n}{n(n+1)}+\ldots$.

Дослідити на збіжність знакозмінний ряд:

50. $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}-\ldots+\frac{3^n}{n^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$.

51. $-\frac{1}{5}+\frac{2}{7}-\frac{3}{9}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n-1}{2n+1}+\ldots$.

52. $\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)!}+\ldots$.

53. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}+\ldots$.

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{n}{4n-1}$.

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n+1)!}$.

55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{n}{6n-1}$.

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(4n-1)^2}$.

Знайти радіус збіжності степеневого ряду:

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots;$

59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\cdot n!=x+2!\cdot x^2+\ldots+n!\cdot x^n+\ldots;$

60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}=\dfrac{x}{\sqrt{1}}+\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}+\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots;$

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^n=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3^2}x^2+\ldots+\dfrac{n}{3^n}x^n+\ldots;$

Знайти проміжки збіжності степеневого ряду:

62. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)\cdot 3^n};$

64. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}};$

63. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{(n+1)\cdot 4^n};$

65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)\cdot n};$

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{n^2}$.

58. Розкласти в ряд Маклорена функції:

а) $y=\cos 3x$; б) $y=e^{\frac{x}{2}}$; в) $y=\sin 5x$;

г) $y=\ln(1+6x)$; д) $y=e^{\sin x}$.

59. Використовуючи розклад в ряд Маклорена обчислити наближені значення функцій:

а) $\cos 0{,}5$; б) $\ln 1{,}3$; в) $\mathrm{arctg}\,0{,}2$; г) $2^{0{,}01}$.

д) e^2, з точністю до 0,001; е) $\ln 3$ з точністю до 0,0001.

Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом 2π, яка задана на проміжку $[-\pi,\pi]$:

60. $f(x)=\begin{cases}-x, \text{якщо } -\pi\le x\le 0\\ 0, \text{якщо } 0<x\le\pi\end{cases}$.

61. $f(x)=\begin{cases}-1, \text{якщо } -\pi\le x\le 0\\ 3, \text{якщо } 0<x\le\pi\end{cases}$.

62. $f(x)=2x+3$.

63. $f(x)=2-x$.

64. $f(x)=x+2$.

65. $f(x)=\begin{cases}2, \text{якщо } -\pi\le x\le 0\\ x, \text{якщо } 0<x\le\pi\end{cases}$.

66. $f(x)=x$.

67. $f(x)=3x$.

68. $f(x)=\dfrac{x}{2}$.

69. $f(x)=-x$.

70. $f(x)=-4x$.

71. $f(x)=-\dfrac{x}{3}$.

72. $f(x)=\pi-x$.

73. $f(x)=\dfrac{\pi+x}{2}$.

74. $f(x)=x-\pi$.

75. $f(x)=|x|$.

76. $f(x)=\dfrac{|x|}{2}$.

77. $f(x)=|3x|$.

78. $f(x)=\left|\dfrac{x}{4}\right|$.

79. $f(x)=\begin{cases}2-x, \text{якщо } -\pi\le x\le 0\\ 1, \text{якщо } 0<x\le\pi\end{cases}$.

80. $f(x)=\begin{cases}-3, \text{якщо } -\pi\le x\le 0\\ 3, \text{якщо } 0<x\le\pi\end{cases}$.

81. $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$.

82. $f(x)=|2-x|$.

83. $f(x)=|x-1|$.

84. $f(x)=|x+1|$.

Ряди

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Числові ряди (a_n – число)

Знакопостійні $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$	Знакозмінні $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$
Збіжні, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ $S_1 = a_1$ $S_2 = a_1 + a_2$ $\vdots$ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$	Умовно збіжні, якщо $\lvert a_{n+1}\rvert < \lvert a_n\rvert$, і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ Абсолютно збіжні, якщо збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\lvert (-1)^{n+1} a_n \right\rvert$

Ознаки.

Необхідна. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Достатні:

а) порівняння: Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) такі, що $a_n > b_n$. Тоді, якщо (1) збіжний→(2) збіжний; (2) розбіжний →(1) розбіжний.

б) Даламбера $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \begin{cases} <1 & \text{збіжний} \\ >1 & \text{розбіжн.} \\ =1 & \text{не відомо} \end{cases}$

в) Коші $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho \begin{cases} <1 & \text{збіжний} \\ >1 & \text{розбіжн.} \\ =1 & \text{не відомо} \end{cases}$

Функціональні ряди (a_n – функція)

Степеневі $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$	Тригонометр. $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
Радіус збіжності $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ Ряд Маклорена $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!} x + \dfrac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$	$a_0 = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ $a_n = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ $в_n = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$
Довідка $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \ldots$ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ $x \in (-1; 1)$ $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$ $x \in (-1; 1]$	$f(x)$– парна, $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx; \quad в_n = 0;$ $a_0 = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) dx,$ $a_n = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ $f(x)$– непарна, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ $a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \sin nx$

РОЗДІЛ 11. ГІПЕРБОЛІЧНІ ФУНКЦІЇ

11.1. Основні поняття.

Розглянемо одиничне коло з центром в початку координат, рівняння якого має вигляд: $x^2 + y^2 = 1$.

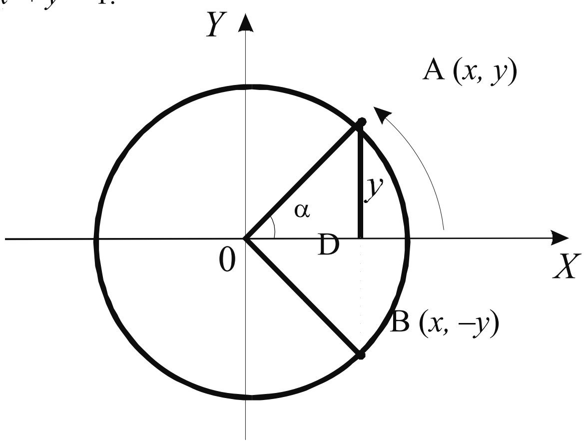


Рис. 1.

Згідно з означенням, синусом кута *a* називають ординату *y* точки A(x,y) одиничного кола, а косинусом – абсцису *x* цієї ж точки (рис. 1)

$$y = \sin\alpha\,, \qquad x = \cos\alpha\,.$$

Доведемо, що площа сектора AOB дорівнює числовому значенню кута AOD, взятому в радіанах.

Дійсно, якщо R= 1, а кут сектора AOB – $\varphi = 2\alpha$, то

$$S_{сект.} = \frac{S_{круга}}{360^\circ}\cdot\varphi = \frac{\pi R^2}{2\pi}\cdot 2\alpha = R^2\alpha = \alpha\ .$$

Отже, в тригонометричних функціях за аргумент можна приймати не лише кут, а й площу відповідного сектора.

Розглянемо тепер рівнобічну гіперболу з асимптотами $y = \pm x$, рівняння якої має вигляд

$$x^2 - y^2 = 1, \text{ або } y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

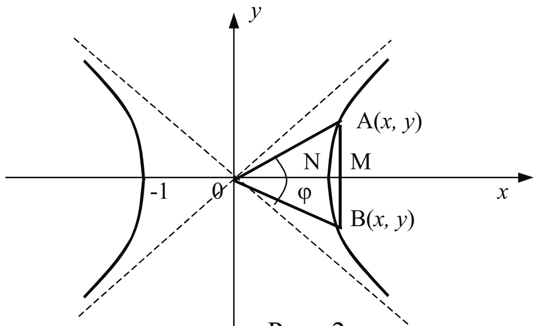


Рис. 2

Повторимо попередні міркування:

– виберемо на гіперболі т. А (x, y) ;
– знайдемо т. В $(x, -y)$;
– проведемо радіуси ОА і ОВ ($\angle AOB = \varphi$) .

Утворену фігуру OANB називають гіперболічним сектором (сектором φ), абсцису точки А – **гіперболічним косинусом** ;
ординату точки А – **гіперболічним синусом**.

Візьмемо за аргумент площу гіперболічного сектора φ. Отримаємо:

$$\mathrm{sh}\varphi = x,\ \mathrm{ch}\varphi = y\ .$$

Знайдемо площу гіперболічного сектора, як різницю площ трикутника АОВ і криволінійної трапеції ANB.

Тому, що фігура симетрична, матимемо

$$S_{AOB} = 2S_{AOM}, \qquad S_{ANB} = 2S_{ANM}\ .$$

Обчислимо:

$$S_{\Delta AOM} = \frac{1}{2}xy\ ;$$

$$S_{ANM} = \int_1^x f(x)dx = \int_1^x \sqrt{x^2-1}dx = x\sqrt{x^2-1}\,\Big|_1^x - \int_1^x \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2-1}\,\Big|_1^x - \int_1^x \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= x\sqrt{x^2-1}\,\Big|_1^x - \int_1^x \sqrt{x^2-1}dx - \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= x\sqrt{x^2-1}\,\Big|_1^x - \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} - S_{AMN} \,.$$

Звідси $2S = x\sqrt{x^2-1}\,\Big|_1^x - \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = x\sqrt{x^2-1}\,\Big|_1^x - \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,\Big|_1^x =$

$$= x\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,.$$

Згадавши, що $y = \sqrt{x^2-1}$ на $(0; +\infty)$ запишемо

$$S_{ANM} = \frac{xy}{2} - \frac{\ln(x+y)}{2}\,.$$

Отже, площа гіперболічного сектора

$$\varphi = 2\left(\frac{1}{2}xy - \left(\frac{xy}{2} - \frac{\ln(x+y)}{2}\right)\right) = \ln(x+y)\,,$$

або

$$\varphi = \ln(ch\varphi + sh\varphi)\,,$$

$$\boxed{ch\varphi + sh\varphi = e^{\varphi}}$$

З рівняння рівнобічної гіперболи отримаємо

$$x^2 - y^2 = 1;$$

$$\mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi = 1\,;$$

$$(\mathrm{ch}\varphi - \mathrm{sh}\varphi)\,(\mathrm{ch}\varphi + \mathrm{sh}\varphi) = 1\,,$$

$$(\mathrm{ch}\varphi - \mathrm{sh}\varphi) = \frac{1}{\mathrm{ch}\varphi + \mathrm{sh}\varphi} = \frac{1}{e^{\varphi}} = e^{-\varphi}\,.$$

Таким чином

$$\mathrm{ch}\varphi + \mathrm{sh}\varphi = e^{\varphi}\,,$$

$$\mathrm{ch}\varphi - \mathrm{sh}\varphi = e^{-\varphi}\,,$$

або, розв’язавши систему

$$\boxed{ch\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}}; \qquad \boxed{sh\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}}.$$

Аналогічно як в тригонометрії вводять поняття тангенса і котангенса

$$\mathrm{th}\varphi = \frac{\mathrm{sh}\varphi}{\mathrm{ch}\varphi} = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}; \quad \mathrm{ch}\varphi = \frac{\mathrm{ch}\varphi}{\mathrm{sh}\varphi} = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}.$$

<u>11.2. Властивості гіперболічних функцій.</u>

Парність та непарність перевіримо підставивши $(-x)$ у відповідні формули

$$\mathrm{sh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}x;$$

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \mathrm{ch}x;$$

$$\mathrm{th}(-x) = \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{e^{-x}+e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = -\mathrm{th}x;$$

$$\mathrm{cth}(-x) = \frac{1}{\mathrm{th}(-x)} = \frac{1}{-\mathrm{th}x} = -\frac{1}{\mathrm{th}x} = -\mathrm{cth}x.$$

Отже , як і в тригонометричних функціях, маємо $\mathrm{ch}x$ – парна, а $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{th}x$, $\mathrm{cth}x$ – непарні.

Решту властивостей легко встановити побудувавши графіки гіперболічних функцій.

Для побудови використаємо запис

$$shx = \frac{e^{x}}{2} - \frac{e^{-x}}{2},$$

$$chx = \frac{e^{x}}{2} + \frac{e^{-x}}{2},$$

тобто графіки функцій $y = \frac{e^{x}}{2}$; $y = \frac{e^{-x}}{2}$ (рис. 3).

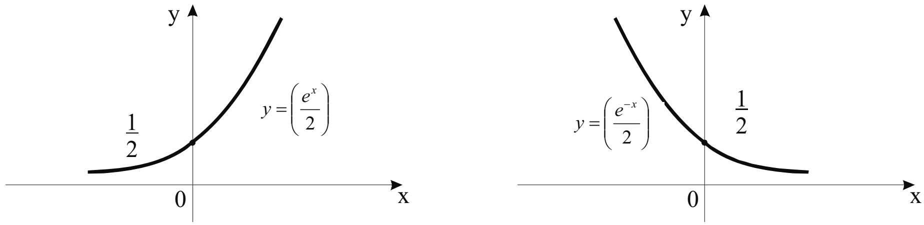


Рис. 3.

Отримані графічним сумуванням ординат графіки функцій $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$ мають вигляд:

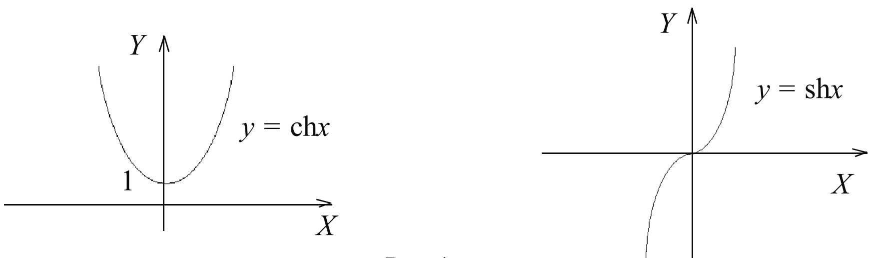
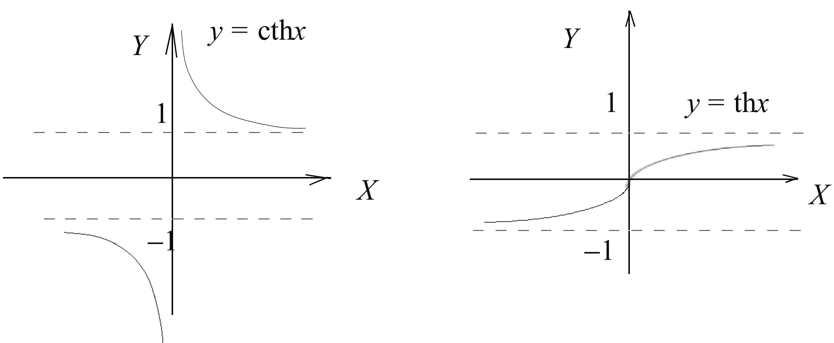


Рис. 4.

Графіки $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$ наступні



Бачимо, що на відміну від тригонометричних, гіперболічні функції неперіодичні. Основні властивості кожної з гіперболічних функцій вказані в опорному конспекті (п. 10.5).

Диференціювання та інтегрування гіперболічних функцій.

Гіперболічні функції можна диференціювати та інтегрувати. Виведемо формули похідних та інтегралів.

1. $(\text{sh}x)' = (\dfrac{e^x - e^{-x}}{2})' = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{ch}x$.

2. $(\text{ch}x)' = (\dfrac{e^x + e^{-x}}{2})' = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{sh}x$.

3. $(\text{th}x)' = \left(\dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}x}\right)' = \dfrac{\text{ch}x \cdot \text{ch}x - \text{sh}x \cdot \text{sh}x}{\text{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$.

4. $(\text{cth}x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$.

5. $\int \text{ch}x dx = \text{sh}x + C$.

6. $\int \text{sh}x dx = \text{ch}x + C$.

7. $\int \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} dx = \text{th}x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\text{cth}x + C$.

11.3. Перехід від гіперболічних функцій до тригонометричних і навпаки.

Використовуючи гіперболічні функції можна вивести формули Ейлера. Дійсно, згадаємо розклад в ряд Маклорена функцій $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots ;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots ;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots .$$

Покладемо в розкладі функції $y = e^x$ за аргумент $x = zj$. Отримаємо:

$$e^{zj} = 1 + \frac{zj}{1!} + \frac{(zj)^2}{2!} + \frac{(zj)^3}{3!} + \dots .$$

Враховуючи, що $j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1, j^{4k+m} = j^m$, де $m = 0, 1, 2, 3$ матимемо:

$$e^{zj} = 1 + \frac{zj}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3 j}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \dots = (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^7}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots) +$$

$$+ j(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots) = = \cos z + j \sin z .$$

Отже, $$\boxed{e^{zj} = \cos z + j \sin z}.$$

Легко знайти значення e^{-zj}:

$$e^{-zj} = \cos(-z) + j\sin(-z) = \cos z - j\sin z .$$

Отже, $$\boxed{e^{-zj} = \cos z - j \sin z}.$$

Звідси $\boxed{\cos z = \frac{e^{zj} - e^{-zj}}{2}}$; $\boxed{\sin z = \frac{e^{zj} - e^{-zj}}{2j}}$.

Саме ці формули дозволяють встановити залежність між тригонометричними і гіперболічними функціями.

Перехід від гіперболічної до тригонометричної функції	**Перехід від тригонометричної до гіперболічної функції**
$\mathrm{sh}(ix) = i \sin x$	$\sin(ix) = i\,\mathrm{sh} x$
$\mathrm{ch}(ix) = \cos x$	$\cos(ix) = \mathrm{ch} x$
$\mathrm{th}(ix) = i\,\mathrm{tg} x$	$\mathrm{tg}(ix) = i\,\mathrm{th} x$
$\mathrm{cth}(ix) = -i\,\mathrm{ctg} x$	$\mathrm{ctg}(ix) = -i\,\mathrm{cth} x$

Приймаємо без доведення, що всі тригонометричні формули дійсні і для уявного аргументу. Це припущення дозволить легко встановити залежності між гіперболічними функціями.

Наприклад:

1. $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\sin^2(ix) + \cos^2(ix) = (i\mathrm{sh}^2 x) + \mathrm{ch}^2 x = -\mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x = 1;$$

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

2. $$\sin(xi + yi) = \sin(xi)\cos(yi) + \sin(yi)\cos(xi);$$

$$i\mathrm{sh}(x+y) = i\mathrm{sh}x \cdot \mathrm{ch}y + i\mathrm{sh}y\mathrm{ch}x;$$

$$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}y\mathrm{ch}x.$$

Аналогічно можна отримати формули для

$$\mathrm{sh}(x-y),\ \mathrm{ch}(x-y),\ \mathrm{ch}(x+y),\ \mathrm{sh}2x,\ \mathrm{ch}2x.$$

11.4. Вправи:

1. Перечисліть основні способи задання функції та властивості функцій.
2. Дайте означення гіперболічних функцій.
3. Запишіть формули для обчислення sh$x$, ch$x$, th$x$, cth$x$.
4. Назвіть основні властивості функцій:
   а) sh$x$; б) ch$x$; в) th$x$; г) cth$x$.
5. Використовуючи властивості найпростіших перетворень графіків функцій, побудуйте графіки наступних функцій та опишіть їх властивості.

а) $y = \mathrm{sh}\,(x+1)$; б) $y = \mathrm{sh}x + 2$; в) $y = |\,\mathrm{sh}x\,|$;

г) $y = \mathrm{ch}\,(x-2)$; д) $y = \mathrm{ch}x - 2$; е) $y = |\,\mathrm{ch}x\,| - 3$;

є) $y = \mathrm{th}x + 1$; ж) $y = \mathrm{th}\,(x+2)$; з) $y = |1 - \mathrm{th}x\,|$;

к) $y = \mathrm{ch}\,(x-1)$; л) $y = \mathrm{ch}\ \ x - 2$; м) $y = |\,\mathrm{ch}x\,|$;

6. Довести тотожності:

а) $\dfrac{1+\mathrm{sth}^2 x}{2\mathrm{cth}x} = \mathrm{cth}2x$; б) $\mathrm{sh}x + \mathrm{sh}y = 2\mathrm{sh}\dfrac{x+y}{2}\mathrm{ch}\dfrac{x-y}{2}$.

в) $\dfrac{\mathrm{sth}x}{1+\mathrm{ch}x} = \mathrm{th}\dfrac{x}{2}$; г) $\mathrm{sh}^2\dfrac{x}{2} + \mathrm{ch}^2\dfrac{x}{2} = \mathrm{ch}x$.

7. Знайти похідні функції:

а) $y = \mathrm{ch}x^3$; б) $y = \mathrm{sh}^2(x+1)$; в) $y = \sqrt{\mathrm{th}x}$;

г) $y = 2\mathrm{sh}x - \mathrm{th}x$; д) $y = x \cdot \mathrm{cth}x$; е) $y = \dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}$;

є) $y=(1+\mathrm{ch}x)(1-\mathrm{sh}x)$; ж) $y=\mathrm{ch}^3 x$; з) $y=\sqrt[4]{\mathrm{ch}x^5}$;

и) $y=\mathrm{th}(\ln x)$; і) $y=x\,\mathrm{sh}\,x-\mathrm{ch}\,x$; й) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+\mathrm{th}\,x}{1-\mathrm{th}\,x}}$.

8. Дослідити функції на екстремум за допомогою І похідної:

а) $y=\mathrm{sh}^2 x$; б) $y=\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}$.

9. Знайти інтеграли:

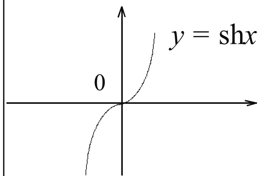
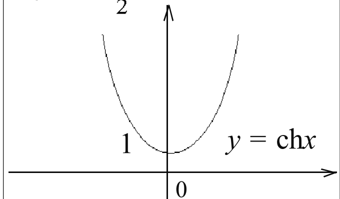
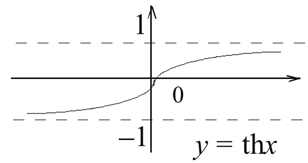
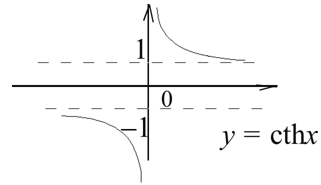
а) $\int \mathrm{cth}x\,dx$; б) $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{2}}$; в) $\int (2-\mathrm{sh}x)dx$; г) $\int x\,\mathrm{sh}x\,dx$;

д) $\int \mathrm{cth}^2 x\,dx$; е) $\int \sqrt{\mathrm{th}x}\,dx$; є) $\int \dfrac{x}{\mathrm{ch}^2 x}dx$; и) $\int \dfrac{1}{\mathrm{ch}x\cdot \mathrm{sh}x}dx$.

10. Розкласти в ряд Маклорена:

а) $y=\mathrm{sh}x$; б) $y=\mathrm{ch}x$.

ГІПЕРБОЛІЧНІ ФУНКЦІЇ sh$x$, ch$x$, th$x$, cth$x$

$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x$  $x=0$; $y=0$; $(0,0)$ $D(y)=R$; $E(y)=R$ $x\to\infty$; $\operatorname{sh}x\to\infty$ $x\to-\infty$; $\operatorname{sh}x\to-\infty$ *непарна;* *зростає в* $D(y)$	$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$  $x=0$; $y=1$; $(0,1)$ $D(y)=R$; $E(y)=[1;+\infty[$ $x\to\infty$; $\operatorname{ch}x\to\infty$ $x\to-\infty$; $\operatorname{ch}x\to\infty$ *парна, спадає на* $]-\infty;\ 0[$, *зростає на* $]0;+\infty;[$	$y=\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$  $x=0$; $y=0$; $(0,0)$ $e^x+e^{-x}\neq 0$ $D(y)=R$; $E(y)=]-1;1[$ $x\to\infty; \operatorname{th}x\to 1$ $x\to-\infty, \operatorname{th}x\to-1$ *непарна; зростає в* $D(y)$	$y=\operatorname{cth}\,x=\dfrac{\operatorname{ch}\,x}{\operatorname{sh}\,x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$  $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{cth}x=\pm\infty$ $e^x-e^{-x}\neq 0$; $D(y)=R\_UR_+$ $E(y)=\ ]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$ $x\to\infty; \operatorname{cth}x\to 1$ $x\to-\infty, \operatorname{cth}x\to-1$ *непарна, спадає в* $D(y)$
ПОХІДНА	**ІНТЕГРАЛИ**	**Основні співвідношення між гіперб. функціями**	**Зв'язок між гіперб. і тригонометр. функціями**
$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $(\operatorname{th}x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}$ $(\operatorname{cth}x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2x}$	$\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C$ $\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C$ $\int\dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2x}=\operatorname{th}x+C$ $\int\dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2x}=-\operatorname{cth}x+C$	$\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x=e^x$ $\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=e^{-x}$ $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$ $\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}2x$ $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x$ $\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}y\operatorname{ch}x$ $\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}y\operatorname{sh}x$ $\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{2}$ $\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{\operatorname{ch}x+1}{2}$	$\operatorname{sh}(jx)=j\sin x$; $\sin(jx)=j\operatorname{sh}x$; $\operatorname{ch}(jx)=\cos x$; $\cos(jx)=\operatorname{ch}x$; Формули Ейлера $\sin x=\dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$ $\cos x=\dfrac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ $\operatorname{th}(jx)=j\operatorname{tg}x$; $\operatorname{tg}(jx)=j\operatorname{th}x$; $\operatorname{cth}(jx)=-j\operatorname{ctg}x$

<u>РОЗДІЛ 12. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ</u>

<u>12.1. Основні поняття комбінаторики.</u>

Комбінаторика – це розділ математики, в якому розглядають різні комбінації скінченної кількості елементів та обчислюють число усіх можливих таких комбінацій.

До основних понять комбінаторики належать поняття розміщення, комбінації (сполуки) та перестановки.

<u>Перестановкою</u> n елементів називають встановлений в скінченій n-елементній множині порядок. Число всіх можливих перестановок з n елементів позначають P_n і обчислюють за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

<u>Розміщення.</u> Множина, в якій задано порядок розміщення її елементів називається впорядкованою. Розглянемо скінчену множину з n елементів. Усяка її впорядкована m – елементна підмножина ($m \le n$) називається розміщенням з n елементів по m. Число всіх можливих m-елементних розміщень для множини з n елементів (число всіх можливих розміщень з n елементів по m) обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

Вважають, що $A_n^0 = 1$.

<u>Комбінацією (сполукою)</u> називають m-елементну підмножину n-елементної множини, або просто підмножину з n елементів по m.

Підмножини, які відрізняються одна від одної порядком розміщення елементів, не вважаються різними.

Число всіх можливих підмножин по m елементів в кожній, для множини з n елементів, тобто число сполучень з n елементів по m елементів в кожному, позначають C_n^m і обчислюють за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad \textit{або} \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Число сполучень має такі властивості:

$$C_n^m = C_n^{n-m} (0 \le m \le n); \; C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Наприклад:

$$C_{78}^{75} = C_{78}^{78-75} = \frac{A_{78}^3}{P_3} = \frac{78 \cdot 78 \cdot 76}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 76076.$$

Приклад 1. Перед випуском група учнів з 30 чоловік обмінялися фотокартками. Скількі всього було роздано фотокарток?

Розв'язання: Передавання фотокарток одним учнем другому є розміщення з 30 елементів по два елементи. Шукане число фотокарток рівне числу розміщень з 30 елементів по два елемента в кожному:

$$A_{30}^{2} = 30 \cdot 29 = 870 .$$

Приклад 2. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4 без повторень?

Розв'язання: По умові дано множину з чотирьох елементів , які потрібно розташувати в певній послідовності. Значить, потрібно знайти кількість перестановок з чотирьох елементів:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Тобто з цифр 1, 2, 3, 4 можна скласти 24 чотиризначних числа (без повторень цифр).

Приклад 3. Скількома способами можна розмістити 10 гостей на десяти місцях за святковим столом?

Розв'язання: Шукане число способів дорівнює числу перестановок із десяти елементів:

$$P_{10} = 10! = 3628800.$$

Приклад 4. Скільки всього ігор мають провести 20 футбольних команд в одному чемпіонаті?

Розв'язання: Тому, що гра будь-якої команди A з командою B співпадає з грою команди B з командою A, то кожна гра є сполученням з 20 елементів по 2. Шукане число усіх ігор дорівнює числу сполучень з 20 елементів по 2 елементи в кожному:

$$C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190 .$$

Приклад 5. Скількома способами можна розподілити 12 чоловік по бригадах, якщо в кожній бригаді 6 чоловік?

Розв'язок: Склад кожної бригади є 6-елементною підмножиною множини з 12 елементів. Значить, шукане число способів дорівнює числу сполучень з 12 елементів по 6 в кожному:

$$C_{12}^{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 924 .$$

12.2. Випадкові події. Ймовірність події.

Теорія ймовірностей вивчає закономірності у випадкових подіях. Основними поняттями теорії ймовірності є випробування і події.

Під **випробуванням** (дослідом) розуміють реалізацію комплексу умов, внаслідок якого неодмінно відбудеться яка-небудь подія.

Наприклад: кидання монети – випробування; поява герба чи цифри – події.

Випадковою подією називають подію, пов'язану з даним випробуванням, яка при здійснені випробування може відбутися, а може і не відбутися. Слово “випадкова” для стислості часто опускають і говорять просто подія. Наприклад, постріл по цілі – це дослід, випадкові події у цьому досліді – попадання в ціль або промах.

Подія називається **вірогідною**, якщо в результаті досліду вона обов'язково відбудеться і **неможливою**, якщо вона не може відбутися. Наприклад: випадання не більше шести очків при киданні однієї гральної кості – вірогідна подія; випадання десяти очок при киданні однієї гральної кості – неможлива подія.

Події називаються **несумісними,** якщо ніякі дві з них не можуть відбутись одночасно.

Наприклад: попадання і промах при одному пострілі – це несумісні події.

Говорять, що декілька подій у даному досліді утворюють **повну систему подій,** якщо в результаті досліду неодмінно повинно відбутися хоча б одна з них. Наприклад: при киданні гральної кості події, які полягають у випаданні одного, двох, трьох, чотирьох, п'яти і шести очок, утворюють повну систему подій.

Події називають **рівноможливими**, якщо ні одна з них не є об'єктивно більш можлива, ніж інша. Наприклад при киданні монети випадання герба чи числа – події рівноможливі.

Кожна подія має якусь степінь можливості. Числова міра степеня об'єктивної можливості події – це ймовірність події.

Ймовірність події A позначається $P(A)$.

Нехай з системи n-несумісних рівноможливих наслідків випробувань m-наслідків сприяють події A. Тоді ймовірність події A обчислюється по формулі:

$$P(A)=\frac{m}{n}\ .$$

Ця формула носить назву класичного означення ймовірності.

Якщо B – вірогідна подія, то $m = n$, отже $P(B) = 1$;

Якщо C – неможлива подія, то $m = 0$, отже $P(C) = 0$;

Якщо A – випадкова подія, то $m \le n$, отже $P(A) \le 1$;

Тому ймовірність події знаходиться в межах.

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Розглянемо приклади безпосереднього обчислення ймовірностей.

<u>Приклад 6.</u> Гральну кістку кидають один раз.

Знайти ймовірність події: A – появи парного числа очок; B – появи не менше п'яти очок; C – появи не більше п'яти очок.

<u>Розв'язання</u>: дослід має шість рівноможливих незалежних наслідків (поява одного, двох, трьох, чотирьох, п'яти і шести очок), які утворюють повну систему.

Події A сприяють три наслідки (випадання двох, чотирьох і шести очок) тому $P(A) = 3/6 = 1/2$; події B – два наслідки (випадання п'яти і шести очок) тому $P(B) = 2/6 = 1/3$; події C – п'ять наслідків (випадання п'яти, одного, двох, трьох, чотирьох очок) , тому $P(C) = 5/6$.

При обчисленні ймовірності події часто доводиться використовувати формули комбінаторики.

<u>Приклад 7.</u> В урні знаходиться 7 червоних і 6 синіх кульок. З урни одночасно виймають дві кулі. Знайдіть ймовірність того, що обидві кулі червоні (подія A).

<u>Розв'язання:</u> Число рівноможливих незалежних наслідків дорівнює:

$$n = C_{13}^{2} = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78 .$$

Події A сприяють $m = C_7^2 = \dfrac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ наслідків.

Отже, $P(A) = \dfrac{21}{78} = \dfrac{7}{26}$.

<u>Приклад 8.</u> В партії з 24 деталей п'ять бракованих. З партії вибирають навмання 6 деталей. Знайдіть ймовірність того, що серед цих 6 деталей виявиться 2 браковані (подія B).

<u>Розв'язання:</u> Число рівноможливих незалежних подій дорівнює

$$n = C_{24}^{6} = \frac{24!}{6!18!} = 134596 .$$

Підрахуємо число наслідків, сприятливих для події B. Серед 6 взятих навмання деталей повинно бути 2 браковані і 4 стандартні. Дві браковані деталі з п'яти можна вибрати $C_5^2 = \dfrac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ способами, а 4 стандартних деталі з 19 стандартних деталей можна вибрати $C_{19}^4 = \dfrac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3876$ способами.

Кожна комбінація бракованих деталей може сполучатись з кожною комбінацією стандартних деталей, тому

$$m = 3876 \cdot 10 = 38760 .$$

Отже,

$$P(B) = \frac{38760}{134596} = \frac{510}{1771} \approx 0{,}3 \ .$$

Приклад 9. Дев'ять різних книг розташовані навмання на одній полиці. Знайти ймовірність того, що чотири книжки виявляться поставленими поряд (подія C).

Розв'язання: Тут число рівноможливих незалежних наслідків є $n = P_9 = 9!$ Уявимо собі, що чотири певних книги пов'язані разом, тоді цю зв'язку можна розташувати на полиці $P_6 = 6!$ способами (зв'язку додати до решти п'яти книг). В середині зв'язки чотири книги можна переставити $P_4 = 4!$ способами. При цьому кожна комбінація в середині зв'язки може сполучатись з кожним P_6 з способів утворення зв'язки, тобто $m = 6!\cdot 4!$.

Отже,

$$P(C) = \frac{6!4!}{9!} = \frac{1}{21}\,.$$

12.3. Дії над подіями та їх ймовірностями.

Більш складні випадкові події можна представити, як набір декількох більш простих. Наприклад, випадіння парного числа очок на гральній кості (подія A) може бути представлено, як набір подій A_1, A_2, A_3, де

A_1 – випадання двох очок;
A_2 – випадання чотирьох очок;
A_3 – випадання шести очок.

Для представлення складної події через більш прості вводять поняття додавання та множення подій.

Сумою (об'єднанням) двох подій A і B називають подію C, яка полягає в здійснені хоча б однієї із подій A або B (рис. 1).
Символічний запис:

$$C = A + B \text{ або } C = A \cup B.$$

Добутком (перетином) двох подій A і B називають подію C, яка полягає в одночасному здійснені і події A, і події B (рис. 2).
Символічний запис:

$$C = A \cdot B, \text{ або } C = A \cap B.$$

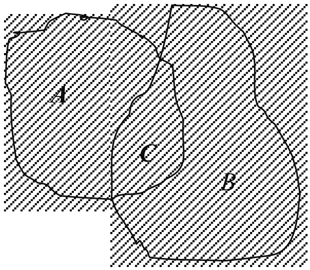


Рис. 1

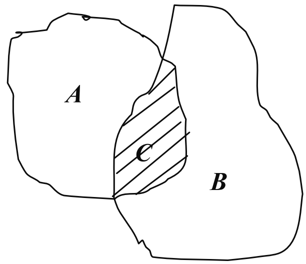


рис. 2

Приклад 10. Знайти суму подій: A – "поява одного очка при киданні гральної кості" і B – "поява двох очок при киданні гральної кості".

Розв'язання. Сумою $A+B$ є подія C – "поява не більше двох очок при киданні гральної кості", тому $A+B=C$.

Приклад 11. Знайти добуток подій A – "студент на екзамені витягує білет з парним номером" і B – "студент витягає білет з номером, який кратний п'яти".

Розв'язання. Добутком $A\cdot B$ є подія C – "студент витягнув білет з номером, який кратний десяти", тому $A\cdot B=C$.

Введені дії мають наступні властивості:

1. $A+B=B+A$; 2. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3. $A\cdot B=B\cdot A$; 4. $A(B\cdot C)=(A\cdot B)\,C$;
5. $A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$; 6. $A+\overline{A}=U$;
7. $A\cdot\overline{A}=V$;

де $\overline{A}$ – подія протилежна події A,
U – вірогідна подія,
V – неможлива подія.

Ймовірності добутку й суми подій встановлюють за допомогою відповідних теорем.

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій.

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Ймовірність появи однієї із кількох попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи.

Перед тим, як сформулювати теореми множення, введемо поняття умовної ймовірності події, та незалежних подій.

Умовною ймовірністю події A при умові B називають ймовірність настання події A, обчислену в припущенні, що подія B уже відбулася і позначають $P_B(A)$ або $P(A/B)$.

Події A, B, C,... називають **незалежними** в сукупності, якщо ймовірність кожної з них не змінюється в зв'язку із настанням, або ненастанням інших подій.

Теорема множення ймовірностей незалежних подій.

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$$

Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій.

Теорема множення ймовірностей залежних подій.

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B) = P(B)\cdot P_B(A)$$

Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку однієї з них на умовну ймовірність другої.

Приклад 12. В ящику лежать 20 деталей, причому 5 з них стандартні. Робітник бере 3 деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з них стандартна (подія A).

Розв'язання: Нехай B – подія, яка полягає в тому, що одна взята деталь стандартна, а дві – нестандартні; C – подія, яка полягає в тому, що дві взяті деталі стандартні, а одна – нестандартна; D – подія, яка полягає в тому, що всі три взяті деталі стандартні.

Очевидно, що подія A відбудеться, якщо відбудеться хоча б одна з подій B,C,D.

Отже, подію A можна записати як суми подій B, C, D: $A = B+C+D$. Події B, C, D – несумісні, отже

$$P(A) = P(B)+P(C)+P(D) = \frac{C_5^1 C_{15}^2}{C_{20}^3} + \frac{C_5^2 C_{15}^1}{C_{20}^3} + \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228}.$$

Дану задачу можна розв'язати простіше, якщо ввести подію $\overline{A}$ – жодна з взятих трьох деталей не буде стандартною. Тоді

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}),$$

а знайшовши ймовірність події $\overline{A}$

$$P\left(\overline{A}\right)=\frac{C_{15}^{3}}{C_{20}^{3}}=\frac{91}{228}\ ,$$

обчислимо

$$P(A)=1-\frac{91}{228}=\frac{137}{228}\ .$$

<u>Приклад 13.</u> Знайти ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число буде кратним або 3, або 5, або обом зразу.

<u>Розв'язання</u>: Нехай A – подія, яка полягає в тому, що вибране число кратне 3, а B – в тому, що вибране число кратне 5. Рнайдемо $P(A+B)$. Оскільки A, B – сумісні події, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)–P(AB)\,.$$

Обчислимо: $P(A)$=30/90 (серед чисел від 10 до 99 саме 30 кратні 3), $P(B)$=18/90 (чисел кратних 5 серед двоцифрових 18), $P(AB)$=6/90 (числа 15, 30, 45, 60, 90, 75 кратні і 3 і 5), отже

$$P(A+B)=\frac{30}{90}+\frac{18}{90}-\frac{6}{90}=\frac{7}{15}\ .$$

<u>Приклад 14.</u> В ящику 12 деталей, серед них 8 бракованих. Робітник бере за один раз 2 деталі, а потім за другий раз ще 2 деталі. Яка ймовірність, що взяті деталі стандартні?

<u>Розв'язання:</u> Нехай подія A – полягає в тому, що перший раз взяті деталі стандартні; подія B– полягає в тому, що за другий раз взяті деталі стандартні.

Тому, що A, B– залежні події, то

$$P(AB)=P(A)P_{A}(B)=\frac{C_{8}^{2}}{C_{12}^{2}}\cdot\frac{C_{6}^{2}}{C_{10}^{2}}=\frac{56}{99}\ .$$

<u>Приклад 15.</u> В одній урні 5 білих і 3 чорних куль, а у другій – 6 білих і 4 чорні кулі. Яка ймовірність, що з обох урн візьмуть чорну кулю?

<u>Розв'язання:</u> Нехай A – подія, яка полягає в тому, що чорну кулю взяли з першої урни; B – чорну кулю взяли з другої урни; Тому, що події A, B – незалежні, то

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{10}=\frac{3}{20}\ .$$

12.4. Формула повної ймовірності.

Бачимо, що ймовірність події можна обчислити як суму або добуток ймовірностей елементарних подій, причому процес встановлення ймовірності значно спрощується. Саме цій меті служить **формула повної ймовірності.**

Нехай H_1, $H_2 ... H_n$ – події, які утворюють повну групу, тобто вичерпують всі можливі випадки даного експерименту. Подія A може відбутись з настанням кожної з подій H_i з деякою ймовірністю $P_{H_1}(A)$.

Тоді ймовірність події A обчислюють за формулою

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

де $P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1$.

Події $H_1, H_2 ... H_n$ називають гіпотезами.

Приклад 16. Нехай деталі виготовляють на трьох верстатах. На першому виготовлено 40% всіх деталей, на другому – 35%, і на третьому – 25%. На першому 90% деталей були І сорту, на другому 80%, і на третьому – 70%. Яка ймовірність, що взята деталь І сорту.

Розв'язання: Складемо гіпотези:

H_1 – деталь виготовили на І верстаті,
H_2 – деталь виготовили на ІІ верстаті,
H_3 – деталь виготовили на ІІІ верстаті.

Подія A– взяти деталь першого сорту, може відбутись одночасно з кожною з гіпотез H_i.

Тоді

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) .$$

З умови задачі видно, що

$P(H_1) = 0,4;$ $\quad P(H_2) = 0,35;$ $\quad P(H_3) = 0,25;$

$P_{H_1}(A) = 0,9;$ $\quad P_{H_2}(A) = 0,8;$ $\quad P_{H_3}(A) = 0,7.$

Отже, $P(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,35 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,7 = 0,815$.

Якщо подія A може настати лише за умови появи однієї з гіпотез H_1, $H_2 ... H_n$, то ймовірність гіпотез можна переоцінити за **формулою Байєса.**

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} ,$$

де $P_A(H_i)$ – ймовірність кожної з гіпотез після випробування, в результаті якого настала подія A;

$P_{H_i}(A)$ – умовна ймовірність події A після настання події H_i;
$P(A)$ – ймовірність події A, знайдена за формулою повної ймовірності.

Приклад 17. В першому ящику 8 білих; 6 чорних куль, а в другому – 10 білих, 4 чорних. Навмання вибирають і ящик і кулю. Відомо, що вийнята куля чорна. Знайти ймовірність того, що було вибрано перший ящик.

Розв'язання: Введемо позначення: H_1 – було вибрано перший ящик; H_2 – було вибрано другий ящик; A – при проведенні двох послідовних випробувань вибору ящика і вибору кулі було вийнято чорну кулю.

Тоді $P(H_1)$= 1/2; $P(H_2)$= 1/2. Ймовірність вийняття чорної кулі після того, як вибрано перший ящик, становить $P_{H_1}(A)$ = 6/14=3/7. Ймовірність виймання чорної кулі після того, як вибрано другий ящик, дорівнює $P_{H_2}(A)$ = 4/14=2/7. За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність того, що вийнята куля була чорною

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7} = \frac{5}{14}.$$

Ймовірність того, що чорну кулю було вийнято з першого ящика, обчислюємо за формулою Байєса

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{5}{14}} = \frac{3}{5}.$$

12.5. Формула Бернуллі.

Нехай відбувається n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність того, що відбудеться подія A рівна p. Тоді ймовірність того, що при n випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів обчислюється за **формулою Бернуллі.**

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Дійсно, випадок, коли подія А відбудеться в кожному з перших k випробувань, і не відбудеться в інших $n - k$ випробуваннях можна представити як добуток подій A і $\overline{A}$:

$$\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{n-k}.$$

Згідно умови, всі випробовування незалежні, тому

$$P(\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A})}_{n-k}=\underbrace{P(A)\cdot\ldots\cdot P(A)}_{k}\cdot\underbrace{P(\overline{A})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A})}_{n-k}=p^k(1-p)^{n-k}.$$

Подія A може відбутись k раз при n випробуваннях і в іншій послідовності, наприклад

$$\underbrace{A\cdot\overline{A}\cdot A\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot A\cdot\overline{A}}_{n}\ ;$$

$$\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot\overline{A}\cdot A}_{n}\ ;$$

але ймовірність залишиться незмінною, бо від перестановки множників добуток не змінюється. Число всіх можливих послідовностей, в яких відбуватимуться події A і $\overline{A}$ рівне C_n^k. Додавши всі можливі випадки, по теоремі додавання ймовірностей несумісних подій отримуємо формулу Бернуллі.

Приклад 18. Ймовірність влучення в ціль з одного пострілу 0,8. Яка ймовірність влучити в ціль 7 разів з 10 пострілів?

Розв'язання: Загальне число випробувань $n = 10$; число влучень $k = 7$. Отже, ймовірність влучити 7 разів з 10 пострілів згідно формули Бернулі рівна:

$$P_{10}(7)=C_{10}^{7}(0{,}8)^7(1-0{,}8)^{10-7}=\frac{10!}{7!3!}(0{,}8)^7(0{,}2)^3=0{,}2\ .$$

Приклад 19. В урні 20 куль: 15 білих і 5 чорних. З урни послідовно беруть 5 куль, причому кожну взяту кулю повертають в урну перед наступною спробою. Знайти ймовірність того, що з 5 куль 2 будуть білі.

Розв'язання. Ймовірність взяти білу кулю в кожній спробі рівна $p=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, а чорну – $q=1-p=\frac{1}{4}$. По формулі Бернуллі знайдемо:

$$p_5(2)=C_5^2p^2q^{5-2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{45}{512}\ .$$

12.6. Дискретна випадкова величина, та її основні характеристики.

Випадковою величиною називають змінну X, яка в результаті випробування може прийняти одне і лише одне значення, не відоме раніше і таке, що залежить від наслідку випробування. Можна пояснити, що величина буде випадковою, якщо вона приймає в даному випробуванні різні значення.

Випадкові величини поділяються на **дискретні** та **неперервні**. Ми розглядатимемо дискретні випадкові величини.

Величину X називаємо **дискретною випадковою величиною**, якщо множина її можливих значень є скінченою або нескінченною послідовністю чисел $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$, де кожне співвідношення $X = x_i$ є елементарною випадковою подією і має визначену ймовірність $P = p_i$.

Оскільки, кожне значення дискретної випадкової величини має визначену ймовірність, то дані спостережень зручно заносити у таблицю: (табл. 1.)

табл 1.

Значення випадкової величини X	x_1	x_2	......	x_n
Ймовірність цього значення P	p_1	p_2	......	p_n

Дана таблиця носить назву **таблиці закону розподілу дискретної випадкової величини.** Закон розподілу можна задати також у вигляді рівняння або графічно.

Отже, **законом розподілу** дискретної випадкової величини X називають співвідношення між можливими значеннями x_i та їх ймовірністю p_i.

Якщо випадкова величина X може набувати скінчене число різних значень $x_1, x_2, \ldots x_n$, то елементарні події $X= x_1$, $X= x_2$,.... $X= x_n$ утворюють повну групу і тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці, тобто

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1 .$$

Важливою характеристикою дискретної випадкової величини X є математичне очікування.

Математичним очікуванням $M(X)$ дискретної випадкової величини X називають суму добутків всіх її можливих значень x_i на їх ймовірності p_i:

$$M(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ .$$

Властивості математичного очікування.

– Математичне очікування постійної величини дорівнює самій постійній

$$M(C) = C.$$

– Математичне очікування суми випадкових величин дорівнює сумі математичних очікувань доданків:

$$M(X+Y) = M(X)+M(Y).$$

– Математичне очікування добутку незалежних випадкових подій дорівнює добутку математичних очікувань цих величин:

$$M(X \cdot Y)= M(X) \cdot M(Y).$$

– постійний множник можна виносити за знак математичного очікування:

$$M(CX)= CM(X).$$

Приклад: Знайти математичне очікування величини X і Y, якщо відомі закони їх розподілу

X	-8	- 4	-1	1	3	7
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

Y	-2	- 1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$

Розв'язання: Знайдемо математичні очікування:

$$M(X) = -\frac{8}{12} - \frac{4}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{12} + \frac{7}{4} = \frac{7}{12},$$

$$M(Y) = -\frac{2}{6} - \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{3}{4} = \frac{7}{12}.$$

Ми отримали цікавий результат: закони розподілу величини X і Y різні, а їх математичні очікування однакові.

З рисунку 1 видно, що значення величини Y зосереджено біля математичного очікування $M(Y)$ (рис.1б), а значення

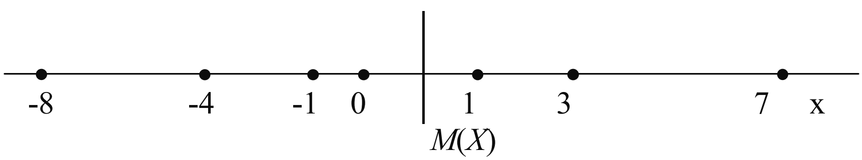


рис. 1а

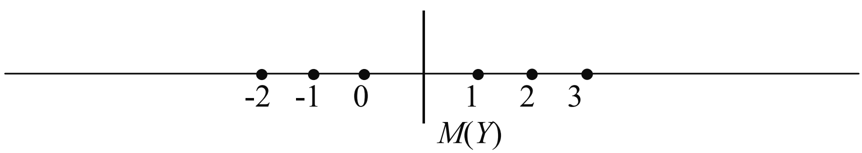


рис. 1б

рис. 1

величини X розкидано (розсіяно) далі від математичного очікування $M(X)$ (рис. 1а).

Основною числовою характеристикою розсіяння можливих значень випадкової величини X є дисперсія $D(X)$, яка визначається за формулою:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Величину $\sigma = \sqrt{D(X)}$ називають **<u>середнім квадратичним відхиленням</u>** випадкової величини X.

<u>Властивості дисперсії:</u>

– Дисперсія постійної величини, очевидно, дорівнює нулю: $D(C)=0$.

– Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, піднявши його до квадрату:

$$D(CX)=M(CX - M(CX))^2 = M(CX - CM(X))^2 = C^2M(X - M(X))^2 = C^2D(X).$$

– Дисперсія дорівнює математичному очікуванню квадрата випадкової величини мінус квадрат її математичного очікування:

$$D(X)= M(X-M(X))^2=M(X^2-2M(X)\cdot X+M^2(X))=M(X^2)-2M(X)\cdot M(X)+M^2(X)= M(X^2)-M^2(X).$$

– Якщо до всіх значень випадкової величини додати (відняти) постійне число, то дисперсія її не зміниться:

$$D(X \pm A) = D(X).$$

<u>Приклад 20.</u> Дискретна випадкова величина розподілена за законом:

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти $D(X)$.

<u>Розв'язання:</u> Спочатку знайдемо:

$$M(X) = -1\cdot 0{,}2 + 0 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}8 = 0{,}9,$$

а далі

$$M(X^2) = (-1)^2\cdot 0{,}2 + 0 + (1)^2\cdot 0{,}3 + (2)^2\cdot 0{,}4 = 2{,}1.$$

Знайдемо дисперсію:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2{,}1 - 0{,}81 = 1{,}29.$$

<u>12.7. Закон великих чисел.</u>

Припустимо, що відбувається n спостережень випадкової величини. Позначимо можливі значення випадкової величини, які вона приймає в спостереженнях (сукупність результатів спостережень назвемо випадковою вибіркою), через $x_1, x_2, \ldots x_n$, де індекси означають номери спостережень.

Середня арифметична можливих результатів n спостережень

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

називатиметься **середньою вибірковою**.

Коли випадкова величина набуває тільки невід'ємне значення, математичне очікування, в певній мірі, характеризує її закон розподілу. Більшість величин з якими доводиться працювати в дійсності, є невід'ємними.

Виникає питання, чи можна оцінити ймовірність відхилення додатньої випадкової величини від її математичного очікування.

Розглянемо приклад: Середня тривалість розмови по телефону на одній із АТС за даними ряду спостережень виявлена рівною $\bar{t}$ =100 сек. Чи можна отримати будь-яку інформацію про те, що серед розмов на цій АТС будуть мати місце розмови з тривалістю x, яка перевищує середню тривалість в $k = 6$ або більше разів. Максимально можлива частота розмови P_{max} з тривалістю $x = R$ =600 сек і більше при середній тривалості в 100 сек мала місце в тому випадку, якщо б одні розмови були довжиною тільки 600 сек, а інші тільки – 0 сек. Тому в цьому випадку P_{max} можна визначити з співвідношення:

$$600 \cdot P_{max} + 0(1 - P_{max}) = 100 \text{ сек},$$

або в загальному випадку

$$kP_{max} + 0(1 - P_{max}) = \bar{t}.$$

Знаходимо P_{max}:

$$P_{max} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6},$$

або в загальному випадку:

$$P_{max} = \frac{\bar{t}}{k\bar{t}} = \frac{1}{k}.$$

Таким чином, максимально можлива частота P_{max} розмов з тривалістю, яка в 6 разів перевищує середню тривалість рівна 1/6. Це означає, що частка P_{max} буде тільки рівна або менша 1/6 (але не більша)

$$P(x > 6 \cdot 100) \leq 1/6.$$

В загальному вигляді:

$$P\left(x > k\bar{x}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

Останню нерівність називають **нерівністю Чебишева**.

Застосуємо нерівність Чебишева до квадрату відхилення середньої вибіркової:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

від її математичного очікування $M(X)$.

Отримаємо, що

$$P\left(\left|\overline{x}-M(X)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D(X)}{n\varepsilon^2}\qquad\left(де\ \varepsilon^2=k^2\,\frac{D(X)}{n}\right).$$

Яка б не була мала стала величина ε, ймовірність того, що різниця між вибірковою середньою x і її математичним очікуванням $M(X)$ за абсолютною величиною перевищить ε, буде прямувати до 0 при $n\to\infty$. Дана нерівність носить назву <u>**закону великих чисел**</u>.

Розглянемо <u>приклад</u> застосування нерівності Чебишева.

Нехай ймовірність того, що на АТС відбулась телефонна розмова рівна p, а якщо ця телефонна розмова не відбулась, то $1-p$.

Запишемо значення випадкової величини: 1– розмова відбулась, 0 – розмова не відбулась.

Складемо закон розподілу для нашої випадкової величини:

x_i	1	0
ймовірність випадкової величини p_i	p	$1-p$

Запишемо математичне очікування:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=1\cdot p+0(1-p)=p\ .$$

Знайдемо дисперсію, використовуючи формулу $D(X)=M(X-M(X))^2$. Запишемо значення $(X-M(X))^2$.

x_i	1	0
$X-M(X)$	$1-p$	$0-p$

Обчислимо дисперсію:

$$D(X)=(1-p)^2\cdot p+p^2(1-p)=(1-p)p\,(1-p)+p=p\,(1-p)\ .$$

Якщо врахувати, що ймовірність того, що розмова відбулась $p=0{,}5$; то $1-p=0{,}5$, тоді дисперсія $D(X)=0{,}5(1-0{,}5)=0{,}25$.

Врахуємо, що при достатньо великій кількості телефонних розмов на АТС середня вибіркова запишеться як

$$\overline{x}=\frac{m}{n},$$

де n – число всіх спостережень за розмовами,

m – число спостережень, де розмова відбулась.

Підставимо значення $\bar{x} = \frac{m}{n}$, математичного очікування $M(x) = p$; дисперсія $D(X) = 0{,}25$ в нерівність Чебишева

$$P\left(\left|\bar{x} - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{n\varepsilon^2},$$

отримаємо

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{0{,}25}{n\varepsilon^2}; \quad P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Цей вираз означає, що яка б не була мала постійна ε, ймовірність p того, що різниця між середньою вибірковою $\frac{m}{n}$ і ймовірністю p перевищить ε, робиться близькою до нуля при достатньому числі спостережень n.

12.8. Вправи:

1. Які задачі розглядає комбінаторика?
2. Які множники в комбінаториці називаються перестановками?
3. Які множники в комбінаториці називаються розміщенням?
4. Які множники в комбінаториці називаються комбінаціями (сполуками)?
5. Яка подія називається випадковою, неможливою, вірогідною?
6. Які події називаються несумісними, рівноможливими? Приведіть приклади.
7. Привести приклади залежних та незалежних подій.
8. Дати класичне означення ймовірності події.
9. Які події утворюють повну систему подій?
10. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей несумісних подій.
11. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей сумісних подій.
12. Що називають умовною ймовірністю подій?
13. Сформулювати теореми множення ймовірностей залежних та незалежних подій.
14. Які події можна назвати гіпотезами?
15. Запишіть і поясніть формулу Байєса.
16. Запишіть формулу обчислення ймовірності повторення випробувань (формула Бернуллі).
17. Що називається дискретною випадковою величиною?
18. Як скласти закон розподілу дискретної випадкової величини?
19. Що називається математичним очікуванням і як його обчислюють?

20. Перелічіть властивості математичного очікування.

21. Що називається дисперсією?

22. Які властивості дисперсії?

23. Сформулюйте закон великих чисел.

24. В урні лежать 12 білих та 4 чорних куль. Яка ймовірність одночасно витягнути 3 білих та 1 чорну кулю?

25. В урні лежать 6 білих та 8 чорних куль. Яка ймовірність за першим разом взяти 2 білі, а за другим 2 чорні кулі?

26. В урні лежать 3 білі, 7 червоних та 5 чорних куль. Яка ймовірність, що серед 4-х взятих куль всі червоні?

27. З колоди карт навмання беруть 2. Яка ймовірність, що взяті карти тузи?

28. З 30 білетів студент вивчив 25. Яка ймовірність того, що витягнутий ним білет він не знає?

29. З цифр від 1 до 9 вибирають одну. Яка ймовірність, що вибрана цифра кратна 3?

30. В лотереї з 15 білетів 5 виграшні. Куплено 2 білети. Яка ймовірність того, що обидва білети виграшні?

31. В лотереї з 30 білетів 10 виграшних. Куплено два білети. Яка ймовірність того, що жоден білет невиграшний?

32. В якому випадку ймовірність двох незалежних подій рівна ймовірності одного з доданків?

33. З куль які пронумеровано всіма двозначними числами навмання беруть одну. Яка ймовірність, що номер кулі закінчується нулем?

34. На шести картках написано букви: “п”, “р”, “з”, “а”, “м”, “и”. Яка ймовірність, що отримаємо слово “призма”?

35. В партії з 20 шапочок 3 браковані. Яка ймовірність, що з 5 куплених вами шапочок 2 браковані?

36. В урні лежать 3 синіх, 5 білих і 4 чорних куль. Яка ймовірність, що 2 взяті вами кулі не білі?

37. Колоду карт поділили навпіл. Яка ймовірність, що в кожній половині є 2 королі?

38. З урни в якій лежить 8 пронумерованих куль вибирають по одній всі кулі. Яка ймовірність, що номери куль будуть йти в порядку зростання?

39. Екзаменаційні білети пронумеровані від 1 до 25. Яка ймовірність, що взятий білет має номер кратний 5?

40. Одна електрична лампочка на 1000 бракованих. Яка ймовірність, що з трьох куплених лампочок одна бракована?

41. З 12 білетів пронумерованих числами від 1 до 12 беруть спочатку один, а потім другий. Яка ймовірність, що перший взятий білет має парний номер, а другий – непарний?

42. З колоди карт беруть спочатку одну, а потім другу карту. Яка ймовірність, що обидві карти – дами?

43. В урні лежать 5 білих, 7 чорних, 8 червоних куль. Витягують 3 кулі. Яка ймовірність, що всі кулі різного кольору?

44. З 32 букв вирізаних з азбуки навмання беруть 5. Яка ймовірність, що складеться слово "конус"?

45. Шість томів творів Т. Шевченка поставили на полицю. Яка ймовірність, що вони стали в послідовному порядку?

46. Серед 30 учнів 18 хлопців та 12 дівчат. Яка ймовірність, що вибрали 2 хлопці та 2 дівчини?

47. Серед 30 учнів потрібно розподілити три путівки в Ялту, Косів та Сочі. Скільки є можливих варіантів розподілу путівок?

48. Треба розсадити 6 гостей. Скількома способами можна це зробити?

49. В ящику в довільному порядку покладено 12 деталей, з яких 10 стандартних. Контролер узяв навмання 3 деталі. Обчисліть ймовірність того, що хоча б одна з узятих деталей буде стандартною.

50. Робітник обслуговує два автомати, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший автомат не потребує уваги робітника 0,8, а для другого автомата ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайдіть ймовірність того, що протягом години жодний з автоматів не потребує уваги робітника.

51. В ящику складено деталі: 16 деталей з першої дільниці, 24 з другої і 20 з третьої. Ймовірність того, що деталь виготовлена на другій дільниці, відмінної якості, дорівнює 0,6, а для деталей, виготовлених на першій і третій дільницях, ймовірність дорівнює 0,8. Знайдіть ймовірність того, що навмання вийнята деталь буде відмінної якості.

52. Є три партії деталей по 30 штук у кожній. Кількість стандартних деталей у першій, другій третій партіях відповідно становить 30, 25, 20. З довільно вибраної партії навмання вийнято деталь, яка буде стандартною. Деталь повертають, вдруге навмання виймають деталь, яка також є стандартною. Знайдіть ймовірність того, що деталі були вийняті з третьої партії.

53. Під час обробки деталей на верстаті в середньому 4% з них бувають з дефектами. Яка ймовірність того, що кожні дві деталі з 30 взятих на перевірку будуть з дефектами?

54. Обчислити значення виразів:

а) $5!+6!$; б) $\frac{10!-8!}{50!}$; в) $6!(7!-3!)$;

г) $\frac{P_5+P_6}{P_4}$; д) A_{15}^3; е) $A_7^3+A_6^3+A_9^3$;

є) $\frac{A_6^5+A_6^4}{A_6^3}$; ж) C_{15}^{13}; з) $C_6^4+C_5^3$.

55. Перевірити рівності:

а) $C_n^6=\frac{A_n^{n-6}}{P_{n-6}}$; б) $C_{15}^6=C_{15}^9$; в) $C_{10}^5+C_{10}^6=C_{11}^6$;

г) $C_{20}^{12}=\frac{A_{20}^8}{P_8}$; д) $C_{15}^4-C_{15}^3=\frac{C_{16}^4}{2}$.

56. Розв'язати рівняння:

$$A_{2x}^3=14A_x^3.$$

57. Скількома способами можна скласти список з 10 чоловік?

58. Скількома способами можна вибрати 3 учнів з групи 25 чоловік?

59. Скількома способами можна утворити трицифрове число з цифр 2, 3, 7, 1?

Елементи теорії ймовірностей

<u>Комбінаторика</u>

$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, ! – факторіал; $0!=1$.

Події – *A, B, C*, $P(A)$ – ймовірність події.

<u>Престановки</u>

$$P_n = n!$$

$P_3=3!=1\cdot 2\cdot 3=6$

Якщо подія при заданих умовах може відбутися, то вона називається **випадковою**. Коли подія напевне не може відбутися називається **неможливою**.

Події називаються **несумісними**, якщо кожного разу може відбутися тільки одна з них.

Події називаються **протилежними**, якщо в умовах випробування вони, будучи єдиними його наслідками, несумісні.

Події *A, B* називаються **незалежними**, якщо поява однієї з них не впливає на появу іншої.

Імовірність настання події *A*, обчислена в припущенні, що подія *B* вже відбулася, називається **<u>умовною ймовірністю</u>** події *A* при умові *B*, позначається – $P_B(A)$.

<u>Комбінації</u>

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

<u>Властивості</u>

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$
$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

<u>Розміщення</u>

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

<u>Властивості</u>

$$A_n^{m+1} = (n+m)A_n^m$$
$$A_n^m = P_m C_n^m$$

<u>Класичне означення ймовірності</u>

Імовірністю події називається відношення числа наслідків *m*, які сприяють настанню події *A* до числа *n* усіх наслідків $P(A)=\dfrac{m}{n}$

<u>Теореми додавання</u>

$P(A+B)=P(A)+P(B)$; *A, B – несумісні*

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$; *A; B – сумісні*

<u>Теореми множення</u>

$P(AB)=P(A)P(B)$, *A;B – незалежні*

$P(AB)=P(A)P_A(B)$, *A;B – залежні*

$P_A(B)$ – *умовна ймовірність*

<u>Формула повної ймовірності</u>

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)P_{H_n}(A)$$

$H_1, H_2 \ldots H_n$ – *гіпотези*

<u>Формула Бернулі</u>

$$P_n(K)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad q=1-p,$$

P – ймовірність події *A*, яка настає *k* раз із *n* можливих.

РОЗДІЛ 13. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

13.1. Матриці. Основні поняття.

Поняття матриці вперше появилось в середині минулого століття в роботах англійських математиків У.Гамільтона (1805-1865) та А.Келі (1821-1895). В сучасній прикладній математиці матриці та пов'язані з ними поняття використовуються дуже широко при розв'язуванні найрізноманітніших задач. Зокрема, застосування матриць значно спрощує розв'язування складних систем рівнянь.

Матрицею називають прямокутну таблицю з m стрічок та n стовпців, складену з чисел або будь-яких об'єктів.

Обмежимось розглядом лише дійсних матриць, тобто матриць складених з дійсних чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ....a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ....a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}\ a_{m2}\ ....a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} $(i = 1, 2, ...\ m;\ j = 1, 2, ...\ n)$ називають **елементами матриці**. Перший індекс i означає номер стрічки, другий j – номер стовпця. Кількість стрічок та стовпців важлива для матриці, тому часто кажуть, що матриця має тип $m \times n$, або що матриця має розмір $m \times n$. Стрічки та стовпці називають ще рядами матриці.

Матриці позначають:

– круглими дужками або подвійними вертикальними рисками:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix};\quad \begin{Vmatrix} 23 & 4 & 12 \\ 34 & 45 & 8 \\ 5 & 67 & 105 \end{Vmatrix};$$

– великими буквами *A,B,C:*

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 23 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix};$$

– через скорочений запис:

$$A = (a_{ij}) \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots n$$

$$A = (a_{ij})_{m,n}$$

В залежності від чисел *m, n*, виду та розташування елементів виділяють наступні **типи матриць:**

– якщо $m=n$, то матрицю називають **квадратною;**

– якщо $m \neq n$, то матрицю називають **прямокутною**;

– якщо $m=1$ (матриця типу $1 \times n$), то її називають **стрічковою** або **вектором-стрічкою**;

– якщо $n=1$(матриця типу $m \times 1$), то її називають **стовпчиковою**, або **вектором-стовпцем**;

– матриця типу 1×1 – **скаляр** (число);

(якщо розглянути наступні матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 11 & 23 \\ 34 & 8 & 15 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \\ 12 & -9 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 12 & 5 & 8 \end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 0 \\ 34 \end{pmatrix},$$

$$K=(3),$$

то бачимо, що матриця A – квадратна, матриці B, C – прямокутні, матриця D – вектор-стрічка, матриця M – вектор-стовпець, матриця K – скаляр);

– якщо всі елементи квадратної матриці, крім a_{ij} при $i=j$ рівні 0, то матрицю називають **діагональною**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

– якщо всі ненульові елементи діагональної матриці рівні 1, то її називають **одиничною** матрицею і позначають буквою E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(якщо ввести символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases},$$

то одиничну матрицю можна записати в скороченому виді $E = (\delta_{ij})$);

– якщо всі елементи матриці – нулі, то її називають **нульовою** матрицею

$$A = 0 \quad \text{або} \quad A = 0_{mn};$$

– матриці виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots . a_{1n} \\ 0 \;\; a_{22} \ldots . a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \;\; 0 \ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}\; 0..0..0.....0 \\ b_{21}\, b_{22} \ldots\ldots..0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m1}\, b_{m2} \ldots b_{mn} \end{pmatrix}.$$

називають **трикутними** (нижня трикутна та верхня трикутна).

13.2. Дії над матрицями

Над матрицями можна виконувати певні дії, які , по аналогії з числами, називають додаванням, відніманням, множенням. Існують також дії, які визначені лише для матриць. Введемо правила виконання дій над матрицями.

1. Матриці вважають **рівними**, якщо вони одного й того ж типу, тобто мають однакову кількість стрічок та стовпців, і відповідні елементи рівні, тобто матриці $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ рівні ($A=B$), якщо $a_{ij}=b_{ij}$.

2. **Сумою двох матриць** $A=(a_{ij})$ та $B=(b_{ij})$ однакового типу називають матрицю $C=(c_{ij})$ того ж типу, елементи якої рівні сумам відповідих елементів матриць A та B, тобто $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Властивості дії додавання матриць:

$$A+(B+C)=(A+B)+C;$$
$$A+B=B+A;$$
$$A+0=A.$$

Приклад.

а) Знайти суму матриць A та B.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 7 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 15 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A+B=\begin{pmatrix} 12-4 & 2+1 & 7+6 \\ -3+15 & 4+8 & 0+10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 13 \\ 12 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

b) Записати матрицю A як суму матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 2+3 & 4 & 1 \\ 7+5 & 9 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Аналогічно визначають **різницю матриць**:

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}\; a_{12}-b_{12}\,....a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21}\; a_{22}-b_{22}\,...a_{2n}-b_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}-b_{m1}\; a_{m2}-b_{m2}\,...a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

4. **Добутком матриці $A=(a_{ij})$ на число k**, (або добутком числа на матрицю) називають матрицю, елементи якої одержані множенням елементів матриці A на число k:

$$kA=Ak=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}.$$

Властивості дії множення матриці на число:

$$1A=A;$$

$$0A=0;$$

$$c(pA)=(cp)A;$$

$$(c+p)A=cA+pA;$$

$$c\,(A+B)=cA+cB.$$

4. Матриця $(-1)A=-A$ називається **протилежною** для A.

(Якщо матриці відрізняються лише знаками своїх елементів, то їх називають протилежними).

Приклад.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ (-1)\cdot A=-A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 5 & 0 & -1 \\ -10 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. **<u>Множення</u>** матриць

Якщо кількість стовпців матриці A ($k\times n$) рівна числу стрічок матриці B ($n\times p$), то для них визначена матриця C ($k\times p$), яку називають їх добутком.

Елементи матриці C знаходять за наступним правилом:
елемент c_{ij} рівний сумі попарних добутків елементів *i*-ої стрічки матриці *A* та *j*-ого стовпця матриці *B*.

<u>Приклад.</u> Знайти добуток матриць A та B, якщо

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} b_{11}b_{12} \\ b_{21}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Згідно з приведеним правилом, щоб знайти c_{11} елементи першого рядка матриці A почленно множимо на елементи першого стовпчика матриці B; c_{12} – елементи першого рядка матриці A на елементи другого стовпця матриці B; c_{21} – елементи другого рядка матриці A на елементи першого стовпця матриці B; c_{22} – елементи другого рядка матриці A на елементи другого стовпця матриці B. Одержимо:

$$C=AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

<u>Властивості дії множення матриць:</u>

$$A(BC)=(AB)C;$$
$$\kappa(AB)=(\kappa A)B;$$
$$(A+B)C=AC+BC;$$
$$C(A+B)=CA+CB.$$

УВАГА! $AB\neq BA$.

Якщо $AB=BA$, то матриці називають **<u>комутативними</u>**. Одинична матриця E комутативна з будь-якою іншою, тобто $AE=EA=A$ і грає роль одиниці при множенні.

<u>Приклад.</u>

а) Знайти добуток матриць AB та BA якщо:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}5\cdot1+6\cdot3 & 5\cdot2+6\cdot4\\ 7\cdot1+8\cdot3 & 7\cdot2+8\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, $AB \neq BA$.

b) Перевірити, чи існують добутки AB та BA, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Кількість стовпців матрикі A співпадає з кількістю стрічок матриці B, отже можна знайти добуток матриць AB:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot2+3\cdot4 & 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot0\\ 5\cdot3+4\cdot2+6\cdot4 & 5\cdot3+4\cdot1+6\cdot3 & 5\cdot1+4\cdot3+6\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}19 & 13 & 7\\ 67 & 32 & 17\end{pmatrix}.$$

Знайти добуток матриць BA неможливо, бо кількість стовпців матриці B не співпадає з кількістю стрічок матриці A.

6. Транспонування матриць.

Якщо в матриці $A=(a_{ij})$ типу $m\times n$ замінити стрічки стовпцями, то одержимо так звану **транспоновану** матрицю A^T типу $m\times n$.

Приклад.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 45 & 13 & 5\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}2\\ 45\\ 13\\ 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix},\quad B^T=\begin{pmatrix}14\\ 25\\ 36\end{pmatrix}.$$

Властивості дії транспонування матриць:

– двічі транспонована матриця рівна початковій

$$A^{TT}=(A^T)^T=A;$$

– транспонована матриця суми рівна сумі транспонованих матриць доданків

$$(A+B)^T=A^T+B^T;$$

– транспонована матриця добутку рівна добутку транспонованих матриць співмножників, взятому в оберненому порядку

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

7. Матриця називається **<u>симетричною</u>**, якщо вона співпадає із своєю транспонованою матрицею, тобто якщо $A^T = A$.

Очевидно, що:

– симетрична матриця обов'язково квадратна;

– елементи, симетричні відносно основної діагоналі рівні;

– добуток AA^T є симетричною матрицею.

<u>Приклад.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ A^T = \begin{pmatrix} 14 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix},\ AA^T = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}.$$

8. Дві матриці називають **<u>еквівалентними</u>**, якщо одна отримана з іншої з допомогою елементарних перетворень.

<u>Елементарними перетвореннями</u> матриць називають наступні операції:

a) перестановка двох рядків або стовпців матриці;

b) домноження всіх елементів будь-якої стрічки (стовпця) на одне і те ж число, відмінне від нуля;

c) додавання до елементів будь-якої стрічки (стовпця) відповідних елементів іншої стрічки (стовпця), домножених на одне й те ж число.

<u>Приклад.</u> Розглянемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 25 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 7 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матриці *A, B, C, D* еквівалентні, бо: матриця *B* одержана з матриці *A* перестановкою першого та другого рядків; матриця *C* одежана з матриці *A* домноженням всіх елементів другого рядка на число 5; матриця *D* одержана з матриці *A* заміною третього рядка сумою подвоєних елементів першого рядка з елементами третього.

<u>13.3. Визначники, їх властивості та способи обчислення.</u>

Для довільної квадратної матриці порядку *n* можна встановити конкретну числову характеристику, яка носить назву **<u>визначника (детермінанта) матриці.</u>**

Визначник матриці позначають:

– вертикальними рискам;

– грецькою буквою Δ;
– виразом $\det A$.

Приклад.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В залежності від розміру матриці (деколи кажуть порядку матриці) визначники називають **<u>визначниками деякого порядку</u>**.

Якщо порядок матриці $n = 1$, то її визначником буде сам елемент матриці, тобто для $A = (a)$ визначник $\Delta = a$.

Якщо порядок матриці $n = 2$, тобто матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то визначником другого порядку, який відповідає такій матриці назвемо число, рівне

$$a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}\,.$$

Тобто визначик матриці A матиме вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,.$$

Для обчислення визначників матриць більш високих порядків необхідно ввести поняття мінора.

<u>Мінором M_{ij}</u> – довільного елементу a_{ij} матриці n-го порядку називають визначник n-1 порядку, який отримуємо після викреслення i-ої стрічки та j-ого стовпця.

Приклад. Мінорами матриці A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

будуть наступні визначники:

для елементу a_{11} $\qquad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$

для елементу a_{22} $\qquad M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$

для елементу a_{12} $\qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$

Мінор, взятий разом зі знаком носить назву **алгебраїчного доповнення A_{ij}** елементу a_{ij}.

Знаки алгебраїчних доповнень чергуються згідно схеми:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

в залежності від розтащування елементу a_{ij}.

Визначник матриці *n*-ого порядку рівний сумі добутків елементів однієї стрічки чи стовпця на їх алгебраїчні доповнення.

Запис визначника n-ого порядку через його алгебраїчні доповнення n–1-го порядку називають ***розкладом по і-ій стрічці чи j-му стовпцю***.

Наприклад, визначник n-го порядку записаний через розклад по елементах першої стрічки матиме вигляд:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} A_j^1 a_{1j} \ .$$

Приклад. Розкласти по першой стрічці визначник 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Бачимо, що визначник 3-го порядку розклався на визначники 2-го порядку, які можна обчислити по введеному раніше правилу.

Для визначників 3-го порядку можна використати мнемонічне правило, яке значно спрощує процес обчислення. Дійсно, дописавши два перших стовпчики та перемноживши діагональні елементи (див. приклад) з відповідними знаками, отримаємо вираз, який співпадає з виразом отриманим при розкладі по мінорах:

$$\Delta = \underbrace{\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right|}_{-} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}}_{+} =$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

При обчисленні визначників більш високих порядків поступово розкладають мінори аж до визначників 2-го порядку.

Очевидно, що при обчисленні визначників більш високих порядків найзручніше розкладати по мінорах тієї стрічки (стовпця), в якій найбільше нульових елементів (добуток дорівнюватиме нулю).

Для досягнення такого результату використовують властивості визначників.

<u>Властивості визначників:</u>

1) $\det A = \det A^T$, тобто визначник не змінюється при транспонуванні матриці;

2) якщо одна стрічка визначника складається лише з нулів, то визначник рівний нулю (те ж саме відноситься до стовпця);

3) при перестановці двох стрічок (стовпців) місцями визначник змінює знак;

4) визначник, що містить дві однакові стрічки (стовпці) рівний нулю;

5) якщо всі елементи деякої стрічки визначника помножити на довільне число k то сам визначник помножиться на це ж число;

<u>наслідок</u>: спільний множник всіх елементів стрічки або стовпця можна винести за знак визначника;

6) визначник, який містить дві пропорційні стрічки (стовпці) рівний нулю;

7) якщо до елементів однієї стрічки (стовпця) додати елементи іншої (можливо домножені на деякий коефіцієнт), то визначник не зміниться;

8) визначник трикутної матриці рівний добутку елементів, які розміщені на головній діагоналі матриці;

9) визначник добутку матриць рівний добутку визначників матриць

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

<u>Приклад 1</u>. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 34 & 20 \\ 15 & 43 & 66 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування.

Віднімаючи від першого стовпчика потроєний останній стовпець одержимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Далі визначник розкладемо по першому стовпчику:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}.$$

Тепер можна використати приведене мнемонічне правило для обчислення визначника 3-го порядку. Можна також продовжити використовувати властивості визначників для подальшого спрощення виразу. Так, віднімемо від 2-го стовпчика подвоєний 1-ий стовпець, одержимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розклавши визначник по першій стрічці матимемо:

$$\Delta = 8 \cdot \begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot (500 - 400) = 800.$$

Приклад 2. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & - \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування.

Зведемо елемети 3-ої стрічки до нулів, залишивши лище один ненульовий елемент в другому стовпці. Для цього:

– другий стовпець помножимо на 2 і віднімемо від першого

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

– другий стовпець додамо до третього

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тепер легко розкласти по 3-ій стрічці:

$$\Delta = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Можна продовжити використовувати властивості визначників для спрощення виразу:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 11 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 11 = -5,$$

або використати мнемонічне правило.

Можливі й інші варіанти приведення визначника до зручного для обчислення вигляду.

Приклад 3. Обчислити визначник матриці AB, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Обчислимо визначники матриць A та B:

$$\det A = -2 - 5 = -7, \qquad \det B = 8 - 12 = -4,$$

отже, згідно з властивостями визначників

$$\det(AB) = -7\,(-4) = 28.$$

13.4. Обернена матриця. Ранг матриці.

Мінори певного порядку можна визначити для будь-якої (не лише квадратної) матриці. Матриця може мати багато мінорів, причому деякі з них можуть дорівнювати нулю, а інші – ні.

Найвищий порядок мінору матриці, який не дорівнює нулю, називають **рангом матриці.**

Приклад.

а) Розглянемо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Матриця не має мінорів третього порядку, але має три мінори другого порядку, які рівні нулю

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0\,; \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 0\,; \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, ранг матриці A $\operatorname{rang} A = 1$.

b) Розглянемо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Мінор 3-го порядку цієї матриці, тобто її визначник, рівний нулю:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 = 0\,.$$

Розглянемо мінори 2-го порядку:

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 = -3\,.$$

Бачимо, що існує мінор 2-го порядку, відмінний від нуля. Отже, $\operatorname{rang} A = 2$.

Очевидно, що ранг матриці не може перевищувати її порядок.

Ранги транспонованих матриць співпадають.

Можна довести, що ранг матриці рівний максимально можливому числу її лінійно незалежних стрічок (стовпців). Так, в приведеному нами прикладі стрічки $1 \;\; -1 \;\; 3$ та $4 \;\; -1 \;\; 5$ дають в сумі стрічку $3 \;\; 0 \;\; 2$, тобто стрічки матриці лінійно залежні.

Матриця, ранг якої менший за її порядок, називається **<u>виродженою</u>** матрицею (це матриця, визначник якої рівний нулю).

Для невироджених матриць (а такими можуть бути лише квадратні) вводять поняття **<u>оберненої</u>** матриці .

По аналогії з множенням чисел, **<u>оберненою</u>** для матриці A називають матрицю A^{-1}, якщо

$$A\,A^{-1}=A^{-1}\,A=E\,.$$

Для матриці A оберненою буде матриця:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & An1 \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

<u>Зауваження.</u>

1. Алгебраїчні доповнення елементів рядків матриці стоять у відповідних стовпцях, тобто проведена операція транспонування.

2. Якщо в рівнянні $AA^{-1}=E$ виконувати однакові елементарні перетворення стрічок матриць A та E до того часу, поки матриця A не перетвориться в одиничну, то рівняння прийме вид $EA^{-1}=\widetilde{E}$, де $\widetilde{E}$ – перетворена одинична матриця.Тому, що $EA^{-1}=A^{-1}$, отримаємо $A^{-1}=\widetilde{E}$, тобто обернена матриця – це перетворена одинична.

<u>Властивості обернених матриць.</u>

$$(A^{-1})^{-1}=A;$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\,;$$
$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(AA^{-1})^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E;$$
$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1};$$
$$\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,.$$

Остання властивість легко доводиться. Дійсно, згідно з властивостями визначників відомо, що

$$\det A \det(A^{-1}) = \det E = 1,$$

звідки

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти матрицю, обернену до матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Розв'язування.</u>

a) Встановимо, чи матриця A не буде виродженою; для цього обчислимо $\det A$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -19.$$

Визначник відмінний від нуля, тому для матриці A існує A^{-1}.

b) Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} відповідних елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 21,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -28,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 11.$$

c) Запишемо матрицю M, складену з алгебраїчних доповнень елементів матриці A:

$$M = \begin{pmatrix} 21 & -3 & -13 \\ -5 & -2 & 4 \\ -28 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

d) Запишемо обернену матрицю A^{-1}, транспонувавши матрицю M:

$$A^{-1}=\frac{1}{19}\cdot M^T=-\frac{1}{19}\cdot\begin{pmatrix}21 & -5 & -28\\ -3 & -2 & 4\\ -13 & 4 & 11\end{pmatrix}.$$

е) Необхідно перевірити правильність виконання операцій, тобто перевірити, що

$$AA^{-1}=E,$$

або що

$$\det A\ \det A^{-1}=1.$$

Дійсно,

$$\det A^{-1}=\begin{vmatrix}-\frac{21}{19} & \frac{5}{19} & \frac{28}{19}\\ \frac{3}{19} & \frac{2}{19} & -\frac{4}{19}\\ \frac{13}{19} & -\frac{4}{19} & -\frac{11}{19}\end{vmatrix}=\frac{1}{(-19)^3}\begin{vmatrix}21 & -5 & -28\\ -3 & -2 & 4\\ -13 & 4 & 11\end{vmatrix}=\frac{1}{(-19)^3}\cdot 361=-\frac{1}{19},$$

$$\det A\det A^{-1}=-19\cdot(-\frac{1}{19})=1.$$

Отже, обернена матриця знайдена правильно.

Приклад 2. Знайти обернену матрицю для матриці A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Запишемо паралельно матриці A та E та виконуватимемо над ними однакові елементарні перетворення, спрямовані на перетворення матриці A в одиничну:

$$\begin{matrix} A & \qquad\qquad & E \\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} & \qquad\qquad & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\end{matrix}$$

– домножимо перший рядок матриць A та E на три та віднімемо від другого рядка відповідної матриці:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix};$$

– додамо другі рядки матриць A та E з першими:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

– домножимо другі рядки на $-\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

В результаті наведених вище перетворень з одиничної матриці E ми отримали матрицю, обернену до матриці A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність знаходження оберненої матриці, обчисливши її згідно схеми, приведеної в прикладі 1:

– обчислимо визначник матриці A, $\det A = 4 - 6 = -2$;

– обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = 4, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1;$$

– складемо матрицю M, складену з алгебраїчних доповнень та транспонуємо її:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

– запишемо обернену матрицю для матриці A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot M^t = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, матриці співпадають.

13.5. Системи n лінійних рівнянь з n невідомими.

Означення. Лінійним рівнянням з n невідомими називають рівняння виду:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \ ,$$

де $a_1, a_2, .. a_n$ – коефіцієнти рівняння; $x_1, x_2, \ldots x_n$ – невідомі, b – вільний член.

В курсі середньої школи розглядали лінійні рівняння з одним, двома та трьома невідомими. Це рівняння:

$$ax = b; \quad ax + by = c; \quad ax + by + cz = d.$$

Геометрично ці рівняння зображають точку на числовій прямій, пряму на площині, площину в просторі.

Розв'язком лінійного рівняння вважають сукупність значень невідомих цього рівняння, які перетворюють його в істину тотожність.

Системою лінійних рівнянь називають два або більше рівнянь, які розв'язуються спільно. Це означає, що **розв'язком системи** будуть ті розв'язки її рівнянь, які задовільняють **всі** рівняння системи.(перетин розв'язків рівнянь системи).

В загальному вигляді система m лінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі; $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nm}$ – коефіцієнти системи; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – вільні члени.

Систему можна представляти як добуток матриць:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Такий запис системи називають **матричною формою** запису .

Якщо ввести позначення

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix},$$

то систему можна записати у вигляді **матричного рівняння**:

$$AX=B.$$

Система називається **однорідною,** якщо всі вільні члени рівні нулю ($AX=0$).

Система називається **квадратною,** якщо $n=m$ (кількість рівнянь та кількість невідомих рівна).

Не кожна система має розв'язки, наприклад система складена з наступних рівнянь:

$$x_1+x_2=1$$

$$x_1+x_2=2$$

розв'язків не матиме.

Система називається **сумісною,** якщо вона має хоча б один розв'язок і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв'яку.

Якщо сумісна система має лише один розв'язок, то вона називається **визначеною**.

Однорідна система завжди сумісна , вона має так званий **тривіальний** розв'язок $x_1=x_2=...=x_n=0$.

Однорідна система має нетривіальний розв'язок тоді і лише тоді, коли ранг матриці, складеної з її коефіцієнтів менший за число n її стовпців.

Квадратна однорідна система має нетривіальний розв'язок, лише тоді коли визначник матриці, складеної з її коефіцієнтів рівний нулю.

Питання сумісності системи лінійних рівнянь повністю вирішується наступною теоремою.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система була сумісною, необхідно і достатньо щоб ранг основної матриці A співпадав з рангом **розширеної** матриці $\widetilde{A}$ (матриця A, до якої приєднано стовпець вільних членів).

Доведення. Розглянемо матриці A та $\widetilde{A}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Мінор, який визначає ранг матриці A входить в матрицю $\widetilde{A}$, отже ранг матриці $\widetilde{A}$ або рівний рангу матриці A, або на одиницю більший за нього.

Необхідність. Якщо система A сумісна, то існують значення невідомих $k_1, k_2,..., k_n$, які є її розв'язками. Підставивши ці значення в систему, одержимо m тотожностей, з яких видно, що останній стовпець матриці $\widetilde{A}$ є сумою всіх останніх стовпців, взятих разом з коефіцієнтами $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (лінійною комбінацією стовпців матриці A). Визначник, у якого стовпці лінійно залежні рівний нулю. Отже, ранги матриць співпадають.

Достатність. Нехай ранги матриць A та $\widetilde{A}$ співпадають. Це означає, що кількість лінійно незалежних стовпців у цих матрицях однакова. Тому, що матриці відрізняються лише останнім стовпцем матриці $\widetilde{A}$, існують числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$, такі, що сума стовпців матриці A взятих разом з цими числами, рівна стовпцю вільних членів з системи $\widetilde{A}$. Отже числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ є розв'язками системи.

Теорема доведена.

Відмітимо, шо сумісна система має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли ранг матриці A рівний числу невідомих.

Приклад 1. Встановити сумісність системи:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Ранг матриці,складеної з коефіцієнтів системи рівний 2. Ранг розширеної матриці рівний 3, бо

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35.$$

Відповідь: система несумісна.

Приклад 2. Встановити сумісність системи:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \\ 4x_1 + 9x_2 = 11 \end{cases}.$$

Розв'язання. Ранг матриці, складеної з коефіцієнтів системи рівний 2, тобто рівний числу коефіцієнтів. Ранг розширеної матриці 2. Отже, система сумісна і має єдиний розв'язок.

Відповідь: система сумісна.

Приклад 3. Встановити сумісність системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Ранг матриці, складеної з коефіцієнтів системи 2. Ранг розширеної матриці 2.

Відповідь: система сумісна.

13.6. Розв'язування систем *n* лінійних рівняньз *n* невідомими.

1. Матричний метод. Одним з способів розв'язку системи лінійних рівнянь є її домноження на обернену матрицю.

Нехай дано систему:

$$AX = B.$$

Домножимо праву і ліву частини на A^{-1}:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \text{ або } (A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Тому, що $A^{-1}A = E$, одержимо:

$$X = A^{-1}B.$$

Знаходження оберненої для матриць високих поядків досить складне, тому матричний метод використовують відносно рідко.

Приклад 1. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = 15 \end{cases}.$$

Розв'язання.

a) Запишемо систему в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

b) Обчислимо визначник матриці *A:*

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

c) Запишемо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 4 & -1 \\ \frac{2}{5} & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця знайдена правильно, бо

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1.$$

d) Обчислимо добуток матриць $A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 4 & -1 \\ \frac{2}{5} & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже,
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = 2,\ y = 1,\ z = 3.$

2. Метод Крамера. Нехай дано систему (запишемо у вигляді матричного рівняння) n лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$AX = B.$$

Звідси
$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} M^t B,$$

де Δ – визначник матриці A, M^T – матриця, складена з алгебраїчних доповнень елементів a_{ij} матриці A:

$$M^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{n2} & ..A_{n1} \\ ... & .. & .. \ .. \\ A_{1n} & A_{2n} & ..A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Виконаємо дії:

$$X = \frac{1}{\Delta} \cdot M^T \cdot B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ..A_{n1} \\ .. & .. & .. \ .. \\ A_{1n} & A_{2n} & ..A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{12}b_2 + ... + A_{n1}b_n \\ .... \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, отримані вирази для елементів матриці X – це розклади то елементах i -ої стрічки деякого визначника, а саме:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & .. & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_n & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix},\quad x_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & .. & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & b_n & .. & a_{nn} \end{vmatrix},..,\quad x_n = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nn} & b_n \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

де Δ – визначник матриці A, а Δ_{x_n} – визначник матриці , в якій стовпець коефіцієнтів, що стоять при x_n замінено на стовпець вільних членів (матриця B).

Якщо $\Delta \neq 0$, то система матиме єдиний розв’язок.

Якщо Δ =0, то система або невизначена, або несумісна. Система буде несумісною(не матиме жодного розв’язку), якщо хоча б один з $\Delta_{x_n} \neq 0$.

Якщо ж, $\Delta = 0$ і $\Delta_{x_n} = 0$, то система матиме безліч розв’язків(невизначена).

<u>**Приклад**</u>**.** Знайти розв’язки системи:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y - 2z = -3 \\ 5x - 6y - 4z = 3 \end{cases}.$$

<u>**Розв’язання**</u>**.**

а) Обчислимо визначник матриці A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -70 .$$

b) Обчислимо визначник Δ_x . Для цього перший стовпець матриці A замінимо на стовпець вільних членів (матрицю B) і для отриманої матриці обчислимо визначник:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 3 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -70.$$

c) Обчислимо визначники Δ_y, Δ_z. Для цього замінимо відповідні стовпці матриці A на стовпець відьних членів і обчислимо визначники отриманих матриць:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 70, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -140.$$

d) Знайдемо значення невідомих x, y, z:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-70}{-70} = 1,$$
$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{70}{-70} = -1,$$
$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-140}{-70} = 2.$$

<u>Відповідь</u>. $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

<u>3. Метод Гаусса</u>. Суть методу Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи. Пояснимо на прикладі системи трьох рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}.$$

Поділимо коефіцієнти першого рівняння на a_{11}. Одержимо систему:

$$\begin{cases} x + \tilde{a}_{12}y + \tilde{a}_{13}z = \tilde{d}_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}.$$

Якщо тепер послідовно домножити перше рівняння на коефіцієнти a_{21} та a_{31} і відняти відповідно від другого та третього рівнянь системи, то одержимо:

$$\begin{cases} x + \tilde{a}_{12}y + \tilde{a}_{13}z = \tilde{d}_1 \\ \quad\; \tilde{a}_{22}y + \tilde{a}_{23}z = \tilde{d}_2 \\ \quad\; \tilde{a}_{32}y + \tilde{a}_{33}z = \tilde{d}_3 \end{cases}.$$

Невідоме x ми виключили з другого та третього рівнянь системи.

Виключимо таким же способом y: поділимо друге рівняння на $\tilde{a}_{22}$, а потім, домноживши на $\tilde{a}_{32}$ віднімемо від третього. Одержимо:

$$\begin{cases} x+\widetilde{a}_{12}y+\widetilde{a}_{13}z=\widetilde{d}_1 \\ \qquad y+\widetilde{\widetilde{a}}_{23}z=\widetilde{\widetilde{d}}_2 \\ \qquad\quad \widetilde{\widetilde{a}}_{33}z=\widetilde{\widetilde{d}}_3 \end{cases}.$$

З тетього рівняння знаходимо z, з другого $-\,y$, з першого $-\,x$.

Алгоритм можна застосовувати до систем більш високих порядків.

На практиці, при безпосередньому обчисленні зручно використовувати розширену матрицю системи:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nn} & b_n \end{pmatrix},$$

яку за допомогою елементарних перетворень приводять до виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} & ..\widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \widetilde{a}_{23} & ..\widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ .. & .. & .. & ..\ .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & ..\ 1 & \widetilde{b}_n \end{pmatrix}.$$

Приклад 1. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-2y+3z=10 \\ 2x+3y+z=-1 \\ 3x-y+2z=13 \end{cases}.$$

Розв’язання. Коефіцієнт a_{11} системи рівний 1, тому випишемо розширену матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Домножимо першу стрічку на 2 та віднімемо від другої:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{pmatrix} \Bigg| \, 2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{pmatrix},$$

а потім домножимо першу стрічку на 3 та віднімемо від третьої:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{pmatrix} \Bigg| \, 3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \\ 0 & 5 & -7 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & -17 \end{pmatrix}.$$

Продовжимо вилучати змінні з другого та третього рівнянь системи (з другої та третьої стрічки розширеної матриці). Коефіцієнт a_{22} рівний 1, тому просто домножимо другу стрічку на 5 та віднімемо від третьої:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & -17 \end{pmatrix} \Bigg| 5 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Система звелась до виду:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ \qquad y - z = -3 \\ \qquad -2z = -2 \end{cases}.$$

З третього рівняння системи знаходимо z=1, підставивши знайдене значення в друге рівняння системи знайдемо $y = -2$, а з першого рівняння – $x = 3$.

<u>Відповідь</u>. $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$.

<u>Приклад 2.</u> Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 5 \\ 4x - 7y + 2z = -1 \\ 2x - 3y - 5z = -6 \end{cases}.$$

<u>Розв'язання.</u> Випишемо розширену матрицю системи:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 4 & -7 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix},$$

Поділимо першу стрічку на коефіцієнт a_{11}= 3. Одержимо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 4 & -7 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Домножимо першу стрічку матриці послідовно на 4 та 2 і віднімемо відповідно від другої та третьої стрічок:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{10}{3} & -\frac{23}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{23}{3} & -\frac{28}{3} \end{pmatrix}.$$

Поділимо другу стрічку отриманої матриці на $a_{22} = -\frac{13}{3}$. Одержимо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{10}{13} & \frac{23}{13} \\ 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{23}{3} & -\frac{28}{3} \end{pmatrix}.$$

Домножимо другу стрічку матриці на $-\frac{5}{3}$ та віднімемо її від третьої стрічки:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{10}{13} & \frac{23}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{249}{39} & -\frac{249}{39} \end{pmatrix}.$$

Початкова система звелась до вигляду:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}z = \frac{5}{3} \\ \qquad y + \frac{10}{13}z = \frac{23}{13} \\ \qquad -\frac{249}{39}z = -\frac{249}{39} \end{cases}.$$

З третього рівняння одержимо $z=1$, з другого – $y=1$, з першого $x=1$.

Відповідь: $x=1$, $y=1$, $z=1$.

13.7. Вправи.

1. Дати означення матриці.

2. Встановити розмір матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 7 & 1 & 23 \end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 & 1 & -5 \\ 7 & -11 & 2 & 34 & -5 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix},\qquad M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Для матриць з вправи 2 визначити елементи $a_{22}, a_{11},\ b_{32}, b_{23}, c_{21}, k_{21}, k_{15},\ m_{31}, k_{23}$, d_{12}.

4. Знайти добуток матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Встановити, чи будуть матриці *A, B* комутативні.

5. Для матриць з вправи 2 знайти добутки AC, BD, DB, якщо така дія можлива. Чи будуть дані матриці комутативні?

6. Дати означення визначника матриці.Сформулювати правило обчислення визначника.

7. Дати означення мінора.

8. Дати означення алгебраїчного доповнення елемента матриці. Записати схему встановлення знаків алгебраїчних доповнень.

9. Для матриць *A, B* з вправи 2 обчислити мінори M_{21}, M_{22}.

10. Для матриці *B* з вправи 2 обчислити алгебраїчні доповнення A_{31}, A_{22}, A_{12}.

11. Дати означення рангу матриці.Що означає, що ранг матриці рівний *k*?

12. Встановити ранг матриць з вправи 2.

13. Обчислити визначники:

$$a)\begin{vmatrix} -12 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix},\quad b)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}\quad c)\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix}\quad d)\begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 11 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & -6 \end{vmatrix};$$

$$e)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}\quad f)\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\quad g)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$h)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix},\quad i)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}\quad j)\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}\quad k)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$l)\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix},\quad m)\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}\quad n)\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

12. Записати матрицю, обернену даній:

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\quad b)\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad c)\ C=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$d)\ D=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix},\quad e)\ K=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad f)\ M=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

13. Довести, що визначник діагональної матриці рівний добутку її діагональних елементів $a_{11}\, a_{22} ... a_{nn}$.

14. Довести, що визначник трикутної матриці рівний добутку її діагональних елементів $a_{11}\, a_{22} ... a_{nn}$.

15. Розв'язати системи рівнянь різними способами:

$$1.\ \begin{cases} 7x-3y+5z=32 \\ 5x+2y+z=11 \\ 2x-y+3z=14 \end{cases}\qquad 3.\ \begin{cases} x-8y+3z=2 \\ 2x+y+z=1 \\ 4x+7y-4z=0 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 10 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y - 3z = 11 \\ 3x + 2y + 4z = 18 \\ -4x + 3y - z = -5 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x + 3y - 4z = -21 \\ -2x + 3y + 2z = -6 \\ 3x + 3y - 8z = -31 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y + z - u = 2 \\ x + 2y - 2z - u = 5 \\ -3x + 2y + 5z + u = -3 \\ 2x - z - u = 4 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} -x + 2y + z = -4 \\ -3x - 2y - 5z = 5 \\ 4x - 2y + 2z = 17 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - 2y + 2z = 13 \\ 3x + 2y - 10z = -33 \\ -2x + y + 5z = 7 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} -x + 3y + 2z = 3 \\ 2x - 5y + 4z = 3 \\ 3x - 10y - 14z = -18 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 32 \\ 5x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + 3z = 14 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 10 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 4x - 5(y + 1) = 1 \\ \frac{5}{12}y - \frac{1}{2}z = -1 \\ \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{3}{2}z = -1 \end{cases}$.

16. При яких значеннях параметра m система матиме: a) єдиний роз’язок; b) безліч розв’язків; c) не матиме розв’язків:

1. $\begin{cases} x + m^2 y = m \\ x + 4y = -2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x - 1.5y = 2 \\ 3x - 3my = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ mx + 12y = 12 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x + 4y = 27 \\ 3x - (m - 2)y = 12 \end{cases}$

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

МАТРИЦЯ - ТАБЛИЦЯ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{mn}$$

ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

$$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{m1} & b_{m2} & .. & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & .. & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & .. & a_{2n}\pm b_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & .. & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & .. & ka_{1n} \\ .. & .. & .. \\ ka_{m1} & .. & ka_{mn} \end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .. & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & .. & a_{m2} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{1n} & a_{2n} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Добуток AB існує, якщо кількість стовпців A рівна числу стрічок B.

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{n1} & b_{n2} & .. & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1p1c & 1p2c & .. & 1pNc \\ 2p1c & 2p2c & .. & 2pNc \\ .. & .. & .. & .. \\ Np1c & Mp2c & .. & NpNc \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$!

Якщо $AB=BA$, то матриці називають **комутативними.**

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$, де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}

Одинична	**Трикутна**	**Симетрична**	**Вектор-стрічка**
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & d & m \\ d & b & k \\ m & k & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ **Вектор-стовпець** $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$
$\Delta=1$	$\Delta=a_{11}a_{22}.....a_{nn}$		

ВИЗНАЧНИК – ЧИСЛО

$$\det A=\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКА

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},\ \Delta=\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\ \underbrace{\quad}_{-}\ \underbrace{\quad}_{+}$$

Визначник рівний сумі добутків елементів рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

МІНОР	**АЛГЕБРАЇЧНЕ ДОПОВНЕННЯ**
Визначник, який залишився після викреслення i-ої стрічки та j-го стовпця M_{ij}	Мінор, взятий разом зі знаком A_{ij}
$\begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1j} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{i1} & .. & a_{ij} & .. & a_{in} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nj} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} + & - & + & - & .. \\ - & + & - & + & .. \\ + & - & + & - & .. \\ - & + & - & + & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$

Властивості визначників.

1. Якщо одна стрічка (стовпець) – нулі, то $\Delta=0$
2. Якщо дві стрічки (стовпці) однакові або пропорційні, то $\Delta=0$.
3. Спільний множник елементів стрічки (стовпця) можна винести за знак Δ .
4. Якщо до елементів однієї стрічки (стовпця) додати елементи іншої (можливо домножені на коефіцієнт) то Δ не зміниться.
5. При перестановці двох стрічок (стовпців) Δ змінює знак.
6. $det(AB)=detA\ detB\quad detA=detA^T$

СИСТЕМИ *n* ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З *n* НЕВІДОМИМИ

II-го порядку	III-го порядку
$\begin{cases} a_1x+b_1y=d_1 \\ a_2x+b_2y=d_2 \end{cases}$	$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases};$

МЕТОДИ

II-го порядку	III-го порядку
Крамера: $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix};$ $x=\frac{\Delta x}{\Delta}\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}$	$\Delta=\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix};\ \Delta x=\begin{vmatrix} d_1b_1c_1 \\ d_2b_2c_2 \\ d_3b_3c_3 \end{vmatrix};\ \Delta y=\begin{vmatrix} a_1d_1c_1 \\ a_2d_2c_2 \\ a_3d_3c_3 \end{vmatrix};\ \Delta z=\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix};$ $x=\frac{\Delta x}{\Delta}\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}$
Гаусса: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & \Rightarrow x \\ m_1y=k_1 & \Rightarrow y\Uparrow \end{cases}$	Зрівняти коефіцієнти і відняти р-ня $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ Зрівняти коефіцієнти і відняти р-ня $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ m_1y+n_1z=k_1 \\ m_2y+n_2z=k_2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \Rightarrow x \\ m_1y+n_1z=k_1 \Rightarrow y\Uparrow \\ p_1z=q_1 \Rightarrow z\Uparrow \end{cases}$

Матричний: 1. $A\cdot X=B,\quad X=B\cdot A^{-1}$

2. Одночасно зводимо матриці A та E за допомогою лінійних комбінацій рядків так, що матриця A перетворюється в одиничну матрицю, а матриця E в A^{-1}. Тоді $X=B\cdot A^{-1}$

II-го порядку	III-го порядку
$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

14. ВЕКТОРИ

14.1 . Вектор. Види векторів.

В математиці вектором називають величину, яка характеризується лише числом і напрямом. Так визначені вектори ще називають вільними векторами. Прикладом фізичних величин, які мають векторний характер є швидкість, сила, прискорення. Геометрично вектор – це напрямлений відрізок, хоча правильніше говорити про цілий клас напрямлених відрізків, які всі паралельні між собою, мають однакову довжину та напрям.

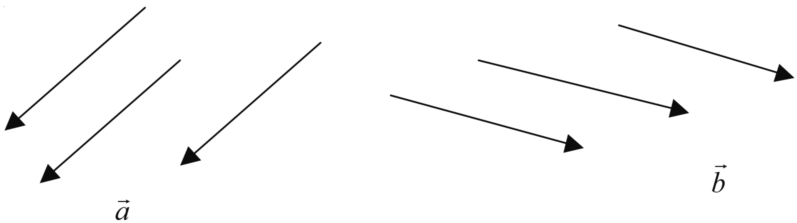
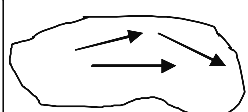
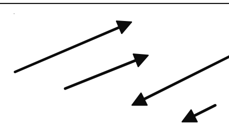
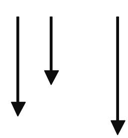
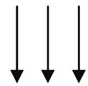
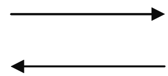


Рис.1

Вектори позначають малими латинськими буквами з рискою зверху $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$, або двома великими латинськими буквами, що визначають його початок та кінець, наприклад $\vec{AB}, \vec{NM}, \vec{KL}$. Довжина (модуль) вектора – це довжина відрізка, який відповідає даному вектору і позначається $|\vec{a}|, |\vec{b}|$, або $|\vec{AB}|, |\vec{KL}|$. В залежності від співвідношення довжин та напрямів розрізняють наступні види векторів:

№	Назва	Означення	Ілюстрація
1	Копланарні	Компланарними називають вектори, які лежать в одній площині	
2	Колінеарні	Колінеарними називають вектори, які лежать на паралельних прямих $\vec{a} \parallel \vec{b}$	
3	Співнапрямлені	Співнапрямленими називають колінеарні вектори, напрями яких співпадають $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$	

4	Протилежно-напрямлені	Протилежнонапрямленими називають колінеарні вектори, напрями яких є протилежними $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$	
5	Рівні	Рівними називають колінеарні вектори, довжини і напрями яких співпадають $\vec{a}=\vec{b}$	
6	Протилежні	Протилежними називають колінеарні вектори, довжини яких рівні, а напрями протилежні $\vec{a}=-\vec{b}$	
7	Нуль-вектор	Нуль-вектором називають вектор, довжини якого рівна нулю $\vec{0}$	
8	Одиничний	Одиничним називають вектор, довжини якого рівна одиниці вимірювання $\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$	

<u>14.2. Дії над векторами.</u>

Розглянемо основні дії, визначені над векторами.

1. Додавання векторів. Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$. Такий спосіб додавання векторів називають **правилом трикутника.**

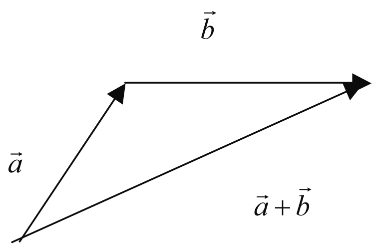


Рис. 2.

Враховуючи, що $\vec{b}_1 = \vec{b}$, $\vec{a}_1 = \vec{a}$, то знайти суму векторів $\vec{a} + \vec{b}$ можна також за так званим “правилом паралелограма” (рис. 3).

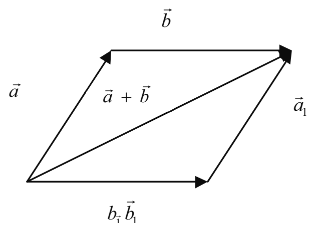


Рис. 3.

Віднімання векторів зводиться до додавання протилежного вектора

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Запишемо основні властивості дії додавання векторів:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Зауважимо, що сума декількох векторів знаходиться послідовним додаванням двох із них, наприклад:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = ((\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}) + \vec{d}.$$

Геометрично сума декількох векторів знаходиться їх послідовним відкладенням один за одним так, щоб початок наступного співпадав з кінцем попереднього. Сумою є вектор, що з’єднуватиме початок першого вектора з кінцем останнього (рис. 4). Якщо така послідовність векторів дає замкнену ламану то сумою векторів є $\vec{0}$ (рис. 5).

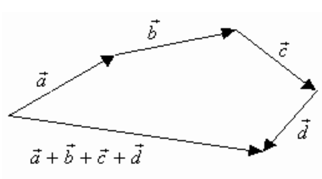


Рис. 4.

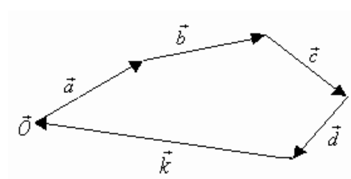


Рис. 5.

2. Множення вектора на число. Добутком вектора $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) на число k $(k \neq 0,\ k \in R)$ називають вектор $\vec{b}$, для якого виконуються умови:

а) $\left|\vec{b}\right| = k\left|\vec{a}\right|$;

б) $\vec{b}\,||\vec{a}$, при чому $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ – співнапрямлені якщо $k > 0$; $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ – протилежно напрямлений, якщо $k < 0$. Звідси, очевидно, що необхідною і достатньою умовою колінеарності векторів є співвідношення $\vec{a} = k\vec{b}$.

Запишемо основні властивості дії множення вектора на число:

1. $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$.

2. $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$.

3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

3. Скалярний добуток векторів. Скалярним добутком $(\vec{a}, \vec{b})$ або $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вираз $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$, де $\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0}$, φ – кут, що утворюють вектори. Відмітимо, що кутом між векторами вважають кут між їх напрямами. Якщо хоча б один із векторів рівний $\vec{0}$, то їх скалярний добуток вважають рівним нулю.

Очевидно, що скалярний добуток двох ненульових векторів буде рівний нулю тоді і тільки тоді коли ці вектори перпендикулярні(ортогональні). Дійсно, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ то $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = 0$. Але $\left|\vec{a}\right| \neq 0,\ \left|\vec{b}\right| \neq 0$ отже

$$\cos\varphi = 0,\ \varphi = 90^\circ, \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Навпаки, якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\varphi = 90^\circ$ і згідно з означенням

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 90^\circ = 0.$$

Наприклад, скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ буде рівним

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0^\circ = \left|\vec{a}\right|^2.$$

Запишемо основні властивості дії скалярного множення векторів:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}\cdot$

2. $k\vec{a}\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4. Векторний добуток. Векторним добутком $\vec{a}\times\vec{b}$ або $[\vec{a},\ \vec{b}]$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

1) модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку модулів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними

$$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a},^\wedge\vec{b})\ ;$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до площини, яка визначається векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 5);

3) вектор $\vec{c}$ напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно з кінця вектора $\vec{c}$ таким, що відбувається проти руху стрілки (тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і утворюють праву впорядковану трійку, або правий репер).

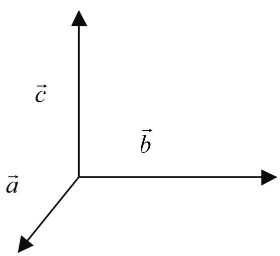


Рис. 5. Права трійка векторів.

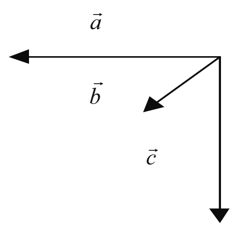


Рис. 6. Ліва трійка векторів.

Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Векторний добуток виражається формулою $\vec{a}\times\vec{b}=S\vec{e}$, де S – площа паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{e}$ – одиничний вектор напрямку $\vec{a}\times\vec{b}$.

Наведемо основні властивості векторного добутку:

1) векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює нулю, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, або один із них нульовий;

2) від перестановки місцями векторів-співмножників векторний добуток змінює знак на протилежний: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (векторний добуток не має властивості переставності);

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (розподільний закон);

4) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b})$ (сполучний закон).

Фізичний зміст векторного добутку такий. Якщо $\vec{F}$ – сила, а $\vec{r}$ – радіус-вектор точки її прикладання , що має початок у точці O, то момент сили $\vec{F}$ відносно точки O є вектор, який дорівнює векторному добутку $\vec{r}$ на $\vec{F}$, тобто $m_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$.

5. Змішаний добуток векторів. Змішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називають скалярний добуток вектора $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Змішаний добуток позначають $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, тому за означенням матимемо

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\ .$$

Як результат скалярного добутку векторів $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ та $\vec{c}$ змішаний добуток є скалярною величиною (числом). Геометрично змішаний добуток – це об’єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятий зі знаком плюс, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку, і зі знаком мінус, коли ця трійка ліва (рис. 7).

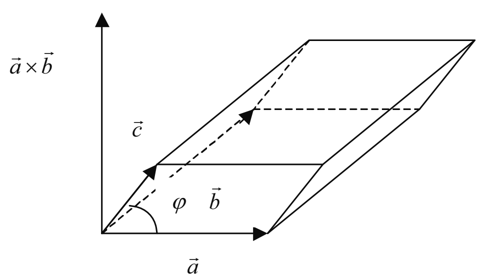


Рис. 7. Змішаний добуток векторів.

Дійсно, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\gamma$, де φ – кут між векторами $\vec{a}, \vec{b}$; γ – кут між векторами $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ та $\vec{c}$.

Об'єм V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ рівний добутку площі основи S на висоту h.

Але

$$S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi, \quad h = |\vec{c}| \cdot \cos\gamma,$$

тобто

$$V = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\gamma = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Проте знак змішаного добутку збігається зі знаком $\cos\gamma$, тобто він додатній, коли кут γ гострий ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів) і від'ємний, коли кут γ тупий ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють ліву трійку векторів). Тому

$$V = \left|(\vec{a}, \vec{b}\vec{c})\right|.$$

З геометричного змісту змішаного добутку випливає, що

1) змішаний добуток рівний нулю тоді і тільки тоді, коли пермножувані вектори компланарні (умова копланарності векторів);

2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

З огляду на комутативність скалярного добутку та антикомутативність векторного, для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ матимемо

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Приклад 1.

Довести, що коли M – точка перетину медіан трикутника ABC і O – довільна точка простору, то виконується рівність: $\vec{OM} = \frac{1}{3}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right)$.

Розв'язування.

Нехай CC_1 медіана трикутника ABC. За властивістю медіан трикутника $\vec{MC_1} = \frac{1}{3}\vec{CC_1}$. Застосувавши до векторів $\vec{MC_1}$ і $\vec{CC_1}$ формулу віднімання векторів

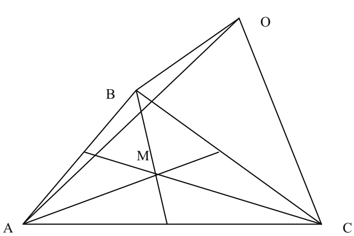


Рис. 8.

дістанемо:

$$\vec{OC_1} - \vec{OM} = \frac{1}{3}\left(\vec{OC_1} - \vec{OC}\right),$$

звідси

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OC} + \frac{2}{3}\vec{OC_1}.$$

Але

$$\vec{OC_1} = \left(\vec{OA} + \vec{OB}\right),$$

тоді $$\vec{OM}=\frac{1}{3}\vec{OC}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OA})=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})\cdot$$

Приклад 2.

У прямокутному паралелепіпеді ребра AB, AD, AA_1, мають довжини 2, 3, 5. Визначити довжини відрізків AC та DC_1 та кут між прямими AC і AC_1.

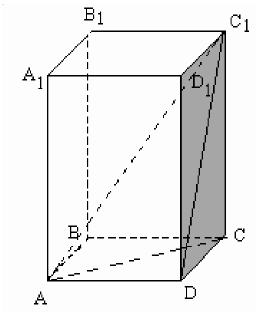


Рис. 9.

Розв'язування. Нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – одиничні вектори спрямовані вздовж ребер, що розглядаються. Тоді $\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=1$, $\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}=0$ (оскільки паралелепіпед прямокутний). Далі,

$$\vec{AB}=2\vec{a},\vec{AD}=3\vec{b},\vec{AA_1}=5\vec{c},$$

а тому справедливо

$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AB}+\vec{AD}=2\vec{a}+3\vec{b};$$

$$\vec{DC_1}=\vec{DC}+\vec{CC_1}=\vec{AB}+\vec{AA_1}=2\vec{a}+5\vec{c}\cdot$$

Цим завершено "переклад" умови задачі на "мову" векторів.

Тепер проведемо обчислення з векторами:

$$\vec{AC}^2=\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)^2=4\vec{a}^2+12\vec{a}\vec{b}+9\vec{b}^2=4+9=13,$$

$$\vec{DC_1}^2=\left(2\vec{a}+5\vec{c}\right)^2=4\vec{a}^2+20\vec{a}\vec{b}+25\vec{c}^2=4+25=29,$$

$$\vec{AC}\cdot\vec{DC_1}=(2\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}+5\vec{c})=4\vec{a}^2+10\vec{a}\vec{c}+6\vec{a}\vec{b}+15\vec{b}\vec{c}=4\cdot$$

Накінець "перекладаємо" отримані векторні рівності знову на "геометричну мову". Оскільки $\vec{AC}^2=\left|\vec{AC}\right|^2$ то $\left|\vec{AC}\right|=\sqrt{\vec{AC}^2}=\sqrt{13}$ аналогічно $DC_1=\sqrt{29}$.

Далі оскільки $\vec{AC}\cdot\vec{DC_1}=\left|\vec{AC}\right|\left|\vec{DC_1}\right|\cos\varphi$ де φ – кут між даними векторами то

$4=\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}\cdot\cos\varphi$, звідки отримаємо $\cos\varphi=\dfrac{4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}$. Тепер за допомогою тригонометричних таблиць знаходимо значення кута $\varphi\approx 18^\circ 7'$.

14.3. Розклад вектора по базису.

Базисом на площині називають впорядковану пару неколінеарних векторів і точку відліку.

Теорема. Будь-який вектор $\vec{c}$ на площині можна розкласти за двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто представити у вигляді: $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

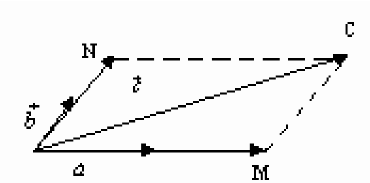


Рис. 10.

Доведення. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні і вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ неколінеарні. Від точки О відкладемо всі три вектори і на продовженні векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ побудуємо паралелограм $ONCM$ так, щоб вектор $\vec{c}$ був його діагоналлю.

Тоді по правилу паралелограма $\vec{c} = O\vec{M} + O\vec{N}$.

Але $O\vec{M} = x \cdot \vec{a}$, $ON = y \cdot \vec{b}$, як колінеарні вектори. Отже, вектор $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Числа, які стоять при базисних векторах у розкладі вектора за двома неколінеарними векторами називають координатами вектора в даному базисі і позначають $\vec{c} = (x; y)$.

Відповідно в просторі базисом називатиметься впорядкована трійка некомпланарних векторів і точка відліку. Для чотирьох некомпланарних векторів справедлива наступна теорема.

Теорема. Будь-який вектор $\vec{d}$ в просторі можна розкласти за трьома некомпланарними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто представити у вигляді: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Доведення. Від точки О відкладемо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ і на продовженні векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ побудуємо паралелепіпед $OBDAO_1B_1D_1A_1$ в якому вектор $OD_1 = \vec{d}$ є діагоналлю. Як бачимо

$$O\vec{D} = O\vec{B} + O\vec{A} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad O\vec{D}_1 = O\vec{D} + DD_1 = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Числа x, y, z які стоять при базисних векторах у розкладі вектора за трьома некомпланарними векторами називають координатами вектора в просторі і позначають

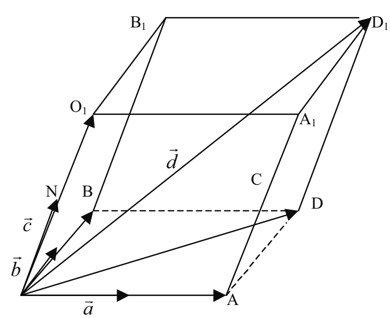


Рис. 11.

$\vec{d} = (x; y; z)$. Якщо базисні вектори взаємоперпендикулярні (їх позначають $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), то разом з точкою відліку вони утворюють декартову систему координат, а координати вектора в такому базисі називають декартовими координатами. В декартовій системі координат розклад вектора матиме вид $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Якщо початком вектора $\vec{a}$ є точка $A(x_A; y_A; z_A)$, а кінцем – точка $B(x_B; y_B; z_B)$, то координати вектора

$\vec{a} = A\vec{B}$ визначають як різницю відповідних координат точок A і B,

$$\vec{a} = A\vec{B} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right), \text{ тобто}$$

$$\vec{a} = A\vec{B} = \left(x_B - x_A\right)\vec{i} + \left(y_B - y_A\right)\vec{j} + \left(z_B - z_A\right)\vec{k}.$$

Звідси легко встановити довжину вектора як відстань між двома точками:

$$\left|\vec{a}\right| = \left|A\vec{B}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}.$$

14.4. Дії над векторами, заданими своїми координатами.

1. При додаванні двох, або більше векторів їх відповідні координати додаються:

$$\left(x_1; y_1; z_1\right) + \left(x_2; y_2; z_2\right) = \left(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\right).$$

Дійсно:

$$\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) + \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) = \left(x_1 + x_2\right)\vec{i} + \left(y_1 + y_2\right)\vec{j} + \left(z_1 + z_2\right)\vec{k}.$$

2. При відніманні векторів відповідні координати віднімаються:

$$\left(x_1; y_1; z_1\right) - \left(x_2; y_2; z_2\right) = \left(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\right).$$

Доведення аналогічне попередньому.

3. При множенні вектора на число всі координати множаться на це число.

Справді, для вектора $\left(x_1; y_1; z_1\right)$ та числа λ маємо:

$$\lambda\left(x_1; y_1; z_1\right) = \lambda\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) = \left(\lambda x_1\vec{i} + \lambda y_1\vec{j} + \lambda z_1\vec{k}\right) = \left(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\right).$$

4. Скалярний добуток двох векторів $\left(x_1; y_1; z_1\right), \left(x_2; y_2; z_2\right)$ дорівнює сумі добутків відповідних координат: $\left(x_1; y_1; z_1\right) \cdot \left(x_2; y_2; z_2\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Справді:

$$\left(x_1; y_1; z_1\right) \cdot \left(x_2; y_2; z_2\right) = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \cdot \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) =$$

$$= x_1x_2\vec{i}\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\vec{i} +$$

$$+ z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\vec{k}$$

Оскільки $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$ виконується $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$, а $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$. Отже, ми можемо записати

$$\left(x_1; y_1; z_1\right) \cdot \left(x_2; y_2; z_2\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

5. Векторний добуток векторів $\vec{a}\left(x_1; y_1; z_1\right)$ і $\vec{b}\left(x_2; y_2; z_2\right)$ заданих своїми координатами обчислюється так:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=\left(y_1z_2-z_1z_2\right)\vec{i}+\left(z_1x_2-x_1z_2\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)\vec{k}$$

6. Змішаний добуток трьох векторів $\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)$ і $\vec{c}\left(x_3;y_3;z_3\right)$ дорівнює:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Дійсно,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_a & z_a\\ y_b & z_b\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_a & z_a\\ x_b & z_b\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_a & y_a\\ x_b & y_b\end{vmatrix}\cdot\vec{k},$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})=\begin{vmatrix}y_a & z_a\\ y_b & z_b\end{vmatrix}\cdot x_c-\begin{vmatrix}x_a & z_a\\ x_b & z_b\end{vmatrix}\cdot y_c+\begin{vmatrix}x_a & y_a\\ x_b & y_b\end{vmatrix}\cdot z_c=\begin{vmatrix}x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}$$

Приклад 1.

Знаючи координати векторів $\vec{a}=\left(2,3,-4\right)$; $\vec{b}=\left(-1;2;1\right)$; $\vec{c}=\left(3;0;2\right)$, знайти координати векторів $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{c}$.

Розв'язання:

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(2+(-1);3+2;-4+1\right)=\left(1;5;-3\right),$$

$$\vec{a}-\vec{c}=\left(2-3;3-0;-4-2\right)=\left(-1;3;-6\right),$$

Відповідь: $\vec{a}+\vec{b}=\left(1;5;-3\right)$; $\vec{a}-\vec{c}=\left(-1;3;-6\right)$.

Приклад 2.

Знаючи координати векторів $\vec{p}=\left(-2;1;3\right)$ та $\vec{q}=\left(3;-2;-4\right)$ обчислити координати вектора $3\vec{p}-4\vec{q}$.

Розв'язання.

$$3\vec{p}-4\vec{q}=3\cdot(-2;1;3)-4\cdot(3;-2;-4)=(-6;3;9)-(12;-8;-16)=(-18;11;25)$$

Відповідь: $3\vec{p}-4\vec{q}=\left(-18;11;25\right)$.

Приклад 3.

Знаючи координати векторів $\vec{a}=(4;-1;1)$, $\vec{b}=(8;3;3)$, $\vec{c}=(5;1;1)$ обчислити:

а) скалярний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

б) векторний добуток векторів $\vec{a}\times\vec{b}$;

в) змішаний добуток векторів $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Розв'язання.

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot 8+(-1)\cdot 3+1\cdot 3=32-3+3=32$;

б) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -1 & 1\\ 8 & 3 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 8 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & -1\\ 8 & 3\end{vmatrix}\vec{k}=$

$=(-1\cdot 3-3\cdot 1)i-(4\cdot 3-8\cdot 1)j+(4\cdot 3-8\cdot 1)k=-6i-4j+20k=(-6;-4;20)$;

в) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 8 & 3 & 3\\ 5 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -1 & 2\\ 8 & 3 & 0\\ 5 & 1 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}8 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=2(8\cdot 1-5\cdot 3)=-14.$

Відповідь: $\vec{a}\cdot\vec{b}=32;\ \ \vec{a}\times\vec{b}=(-6;-4;20);\ \ (\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-14$.

На основі наведених вище формул дій над векторами можна встановити наступні умови та співвідношення для ненульових векторів

$$\vec{a}(x_1;y_1;z_1),\ \vec{b}(x_2;y_2;z_2),\ \vec{c}=(x_3;y_3;z_3).$$

1. Кут між векторами.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

звідси

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

2. Умова перпендикулярності двох векторів:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

(вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток рівний нулю).

3. Умова колінеарності двох векторів: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ (вектори колінеарні тоді і лише тоді, коли відповідні їх координати пропорційні).

4. Умова компланарності трьох векторів.

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

(три вектори компланарні тоді і лише тоді, коли їх змішаний добуток рівний нулю).

5. Поділ відрізка АВ у заданому відношенні.

Якщо точка $M=\left(x;y;z\right)$ ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB}=\lambda$, то координати точки M знаходяться по формулі:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Якщо точка M ділить відрізок AB навпіл то $\lambda=1$, і координати точки знаходяться згідно формул:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{2};y=\frac{y_1+\lambda y_2}{2};z=\frac{z_1+\lambda z_2}{2}.$$

14.5. Вправи:

1. Дайте означення вектора, абсолютної величини вектора, нульового вектора.
2. Дайте означення колінеарних векторів.
3. Дайте означення рівних векторів.
4. Як знайти координати вектора заданого парою точок?
5. Як знайти абсолютну величину вектора?
6. Дайте визначення скалярного добутку векторів.
7. Запишіть формулу для обчислення скалярного добутку двох векторів за їх координатами.
8. Сформулюйте умову колінеарності двох векторів.
9. Сформулюйте умову перпендикулярності двох векторів.
10. Запишіть формулу обчислення кута між двома векторами.
11. Як знайти віддаль між двома точками?
12. Як знайти координати середини відрізка?
13. Запишіть формулу для обчислення кута між двома векторами.
14. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{AB},\vec{CK}$, якщо $A(-5{,}2)$, $B(1,-3)$, $C(2{,}-1)$ $K(-3,5)$.

15. Обчислити кут між векторами $\vec{a}(-1,2), \vec{b}(2,6)$.

16. Вектор $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, $(a \neq 0)$. При яких значеннях k:

a) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; b) $|\vec{a}| > |\vec{b}|$; c) $|\vec{a}| < |\vec{b}|$.

17. Вектор $\vec{AB}$ колінеарний вектору $\vec{a} = (3;-4)$. Визначити координати точки B, якщо $A(8;5)$.

18. Вектор $\vec{a}$ колінеарний вектору $\vec{b} = (-2,5)$. Знайти абсцису вектора $\vec{a}$, якщо його ордината дорівнює 15.

19. Дано вектор $\vec{a} = (4;5)$. Знайти координати будь якого вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}$. Скільки розв'язків має задача.

20. Знайти кут, який утворює вектор $\vec{a} = (3;4)$ з віссю абсцис.

21. Знайти величину кута, який утворює вектор $\vec{b} = (-8;6)$ з віссю ординат.

22. Дано вектори $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (2;2;-1)$, $\vec{c} = (0;1;-2)$, $d(2;-1;0)$. Обчислити:

a) скалярний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}$;

b) скалярний добуток векторів $\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}$;

c) векторний добуток $\vec{c}, \vec{d}$;

d) векторний добуток $\vec{a} + \vec{c}, \vec{d}$;

e) змішаний добуток векторів $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$;

f) змішаний добуток векторів $\vec{a} + 2\vec{d}; \vec{c} - 3\vec{d}; 3\vec{b} - 2\vec{d}$.

23. У рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні. Знайти величину кута між бічними сторонами цього трикутника.

24. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати такі вектори

a) $\vec{b} - \vec{a}$; b) $-\vec{b} - \vec{a}$; c) $2\vec{a} - \vec{b}$; d) $-\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$.

25. На матеріальну точку діють сили F_1 і F_2. Знайти величину їх рівнодіючої, якщо $|F_1| = 8H$, $|F_2| = 6H$, $(F_1 \hat{;} F_2) = 90°$.

26. До центру правильного шестикутника прикладено три сили, які напрямлені в три послідовні вершини. Знайдіть величину рівнодіючої, Якщо величина кожної з даних сил дорівнює 1Н.

27. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}\hat{;}\vec{b}) = 135^0 .$$

28. Дано вектор $\vec{a}$=(4;-7). Знайти координати одиничних векторів, перпендикулярних до вектора .

29. Дано вектор $\vec{a}$=(5;3). Відомо, що ордината перпендикулярного до нього вектора дорівнює 10. Визначити абсцису вектора .

30. Знайти значення α і β, при яких вектори $\vec{a}$=(3;-1;α) і $\vec{b}$=(2;β;1) взаємно перпендикулярні, якщо $|\vec{b}| = 3$.

31. Знайти кут між вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ і віссю абсцис, якщо A(-2;3), B(0;8), C(5;3) і D(10;5).

32. Обчислити площу трикутника, вершини якого задано координатами у прямокутній системі координат: A(1;2), B(4;-5), C(5;3).

33. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грань $ABCD$ - квадрат із стороною a; ребро AA_1 також дорівнює a і утворює з ребрами AB і AD кути, які дорівнюють а. Знайти довжину діагоналі BD_1 і кут між прямими BD_1 і AC.

34. Доведіть ,що $\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \le |\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

35. Доведіть, що коли $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$, то відрізки AB і CD симетричні відносно деякої точки.

36. Неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають однакові довжини. Доведіть, що Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

37. Сторони правильного п’ятикутника $A_1A_2A_3A_4A_5$ дорівнюють a. Позначивши буквою O центр цього п’ятикутника, знайдіть довжини векторів:

a) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$;

b) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}$.

38. Доведіть, що при будь-якому виборі точки O, рівність

$$\overrightarrow{OC} = k \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - k) \cdot \overrightarrow{OB}$$

є необхідною і достатньою умовою належності точок A, B, C ($A \ne B$) одній прямій.

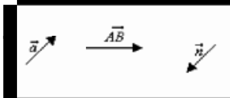
39. Довести, що трикутник з вершинами A(1;1), B(2;3) і C(5;-1) – прямокутний.

40. Дано вершини трикутника A(1;4), B(3;-9) і C(-5;2). Обчислити довжину його медіани проведеної з вершини B.

ВЕКТОРИ І КООРДИНАТИ

Вектор – напрямлений відрізок $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}, \vec{AK}\right)$

ГЕОМЕТРИЧ[redacted]



Характеристика: 1) Довжина $|\vec{a}|$

2) Напрям

Властивості: 1) $\vec{a} = \vec{b}$, якщо співпадають [redacted]

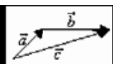
2) $-\vec{a}$, якщо напрям протилежний напрямку вектора $\vec{a}$;

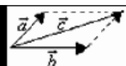
3) $\vec{a} \| \vec{b}$ якщо вони лежать на паралельних прямих, такі вектори називають колінеарними $(\vec{a} = \lambda\vec{b})$;

4) $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо їх напрямки складають кут 90°

(Теорема $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b} = 0$).

Дії: 1) додавання:





а) правило трикутника $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$;
б) правило паралелограма.

2) Віднімання: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

3) $k \cdot \vec{a} = \begin{cases} \textit{розтяг в } k \textit{ раз при } k > 1 \\ \textit{стиск в } k \textit{ раз при } 0 < k < 1 \\ -|k| \cdot \vec{a} \textit{ при } k < 0 \end{cases}$

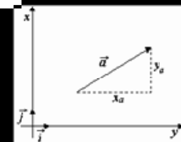
4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$.

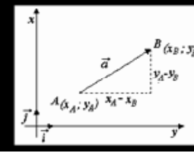
5) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, де $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$ і $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – права трійка (площа паралелограма)

6) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ (об'єм паралелепіпеда)

$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ – кут між напрямками векторів.

Характеристика[redacted]





$\vec{a} = (x_a; y_a)$ $\qquad \underset{B-A}{\vec{AB}} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

Властивості: 1) $\vec{a} = \vec{b}$, якщо $x_a = x_b$, $y_a = y_b$, $z_a = z_b$

2) $\vec{a} = -\vec{a}$, якщо $x_a = -x_a$, $y_a = -y_a$, $z_a = -z_a$

3) $\vec{a} \| \vec{b}$, якщо $\dfrac{x_a}{x_b} = \dfrac{y_a}{y_b} = \dfrac{z_a}{z_b} = \lambda$

4) $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$

Дії: 1) $\vec{a} \pm \vec{b} = \left(x_a \pm x_b; y_a \pm y_b; z_a \pm z_b\right)$

2) $k\vec{a} = \left(kx_a; ky_a; kz_a\right)$

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

4) $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^{\ 2}}$

5) $\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

6) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$ $\qquad$ 7) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_a & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$

15. ПРЯМІ НА ПЛОЩИНІ

15.1. Рівняння прямих.

Відомо, що пряму лінію на площині можна провести, якщо:

1) задано дві точки;

2) задано точку і паралельний їй вектор (такий вектор називаємо напрямним для даної прямої);

3) задано точку і перпендикулярний їй вектор (такий вектор називаємо **нормальним** для даної прямої);

4) задано точку та кут, який дана пряма утворює з додатнім напрямом осі Ox.

Складемо рівняння таких прямих.

1. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

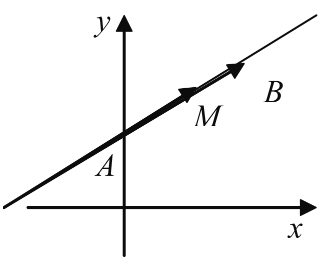


Рис. 1.

Нехай на прямій l задані точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ (рис. 1).

Якщо точка $M(x, y)$ належить прямій l, то вектор $\vec{AM} = (x - x_1; y - y_1)$ колінеарний вектору $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Запишемо умову колінеарності векторів

$$\vec{AM} \,||\, \vec{AM} : \qquad \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}.$$

Дане рівняння визначає **рівняння прямої, що проходить через дві точки**. Отже, рівняння складено.

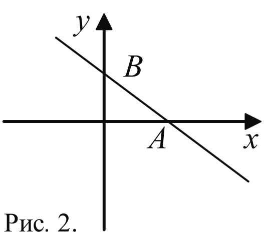


Рис. 2.

Якщо задані точки лежать на осях координат, тобто $A(a, 0)$, $B(0, b)$ (рис. 2), то рівняння прямої, що проходить через дві точки буде записано так:

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}; \quad \text{або}$$

$$\frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b};$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Останнє рівняння ще називають **рівнянням прямих у відрізках**.

2. Рівняння прямої, що проходить через задану точку з відомим напрямним вектором.

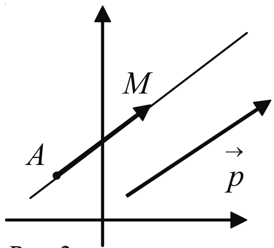


Рис. 3.

Нехай точка $A(x_1, y_1)$ належить прямій l, яка паралельна вектору $\vec{p}=(m,n)$ (рис. 3). Якщо точка $M(x, y)$ належить прямій l, то вектор $\vec{AM}=(x-x_1;y-y_1)$ колінеарний вектору $\vec{p}$. Згідно умови колінеарності векторів отримаємо:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}.}$$

Дане рівняння визначає **рівняння прямої, що проходить через задану точку з заданим напрямним вектором.**

3. Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора (нормальне рівняння прямої).

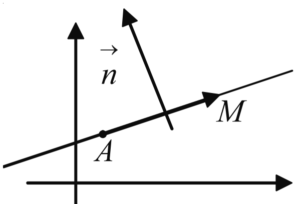


Рис. 4.

Нехай точка $A(x_1, y_1)$ належить прямій l, а вектор $\vec{n}=(a,b)$ перпендикулярний цій прямій (рис. 4). Якщо точка $M(x, y)$ належить прямій l, то вектор $\vec{AM}=(x-x_1;y-y_1)$ перпендикулярний вектору $\vec{n}$.

Згідно умови перпендикулярності векторів

$\vec{AM}\cdot\vec{n}=0$, отже

$$\boxed{a(x-x_1)+b(y-y_1)=0}$$

Дане рівняння і є **рівнянням прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору** (**нормальне рівняння прямої**).

4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Нехай пряма l нахилена до додатного напрямку осі Ox під кутом α і проходить через задану точку $A(x_1, y_1)$ (рис. 5). Побудуємо трикутник AMK, в якому $AB=x-x_1$, $BM=y-y_1$ $\angle MBA=90^0$.

Якщо точка $M(x, y)$ належить прямій l, то $\angle MAB=\alpha$ і $\frac{MB}{AB}=tg\alpha.$

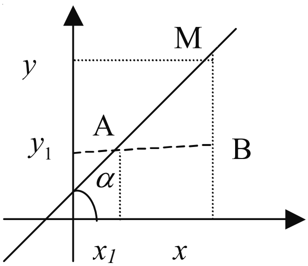


рис.5

Отже, $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=tg\alpha.$

Якщо позначити $\mathrm{tg}\alpha = k$, то отримаємо **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом *k***

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)\,.}$$

Якщо $\alpha = 0^0$, то і k=0, а це означає, що пряма l паралельна осі Ox.

Якщо $\alpha = 90^0$, то $k = \mathrm{tg}\alpha$ немає змісту, а це означає , що пряма l паралельна осі Oy (перпендикулярна осі Ox).

Якщо пряма перетинає вісь Oy в заданій точці $A(0, b)$, то рівняння прямої набуває вигляду

$$y - b = k(x - 0),$$

$$y = kx + b.$$

Розглянемо ряд прикладів.

<u>Приклад 1.</u> Дано трикутник ABC , з заданими координатами вершин A(-3;2), B(1;5) і C(5;-7). Записати рівняння медіани, що виходить з вершини A.

<u>Розв'язання:</u>

Якщо точка M – середина сторони BC , то легко визначити координати точки:

$$x_M = \frac{1+5}{2} = 3; \qquad y_M = \frac{5+(-7)}{2} = -1.$$

Підставивши координати точок A і M в рівняння прямої, що проходить через дві точки, отримаємо:

$$\frac{x+3}{3+3} = \frac{y-2}{-1-2},$$

або $x + 2y - 1 = 0$.

<u>Відповідь:</u> $x + 2y - 1 = 0$ – рівняння медіани ΔABC проведеної з вершини A.

<u>Приклад 2.</u> Записати рівняння прямої, що проходить через точку A(4;-3) і відсікає на осях трикутник площею три квадратні одиниці (рис. 6).

<u>Розв'язання:</u>

Для розв'язку задачі застосуємо рівняння прямої у відрізках $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

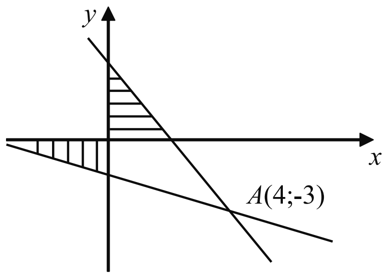


Рис. 6.

За умовою задачі $S_{\Delta}=3$ кв.од. Площу прямокутних трикутників можна представити через довжини відрізків, які відсікає пряма на осях координат, $S_{\Delta}=\frac{ab}{2}$. Тому, $ab=\pm 6$ (два знаки, оскільки a і b можу мати і різні знаки).

Шукана пряма проходить через дану точку $A(4;-3)$, тому її координати задовольняють рівняння прямої у відрізках і ми можемо записати $\frac{4}{a}+\frac{-3}{b}=1$, тобто отримали ще одну залежність між a і b.

Для визначення a і b маємо дві системи:

$$\begin{cases} ab=6; \\ \frac{4}{a}-\frac{3}{b}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} ab=-6; \\ \frac{4}{a}-\frac{3}{b}=1. \end{cases}$$

З першої системи знаходимо $a_1=2;\ b_1=3$, а розв'язавши другу систему отримаємо $a_2=-4;\ b_2=-\frac{3}{2}$.

Запишемо рівняння шуканих прямих: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ і $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1$.

Відповідь: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; $-\frac{x}{4}-\frac{2y}{3}=1$.

Приклад 3: Записати рівняння прямої, що проходить через точку $Q(-3;4)$ і утворює з додатним напрямком осі Ox кут 30^0.

Розв'язання: Оскільки $\alpha=30^0$, то $k=tg\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Підставивши значення $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_1=-3, y_1=4$ в рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, отримаємо

$$y-4=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3),\text{ або } \sqrt{3}x-3y+12+3\sqrt{3}=0.$$

Відповідь: $\sqrt{3}x-3y+12+3\sqrt{3}=0$.

15.2. Загальне рівняння прямої.

Якщо в одержаних вище рівняннях прямої виконати певні алгебраїчні перетворення, то всі вони будуть зведені до рівняння:

$$\boxed{ax + by + c = 0,}$$

яке називають **загальним рівнянням прямої.**

Наприклад, розглянемо рівняння прямої, яка проходить через дані дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Позначимо $x_2 - x_1 = g$, $y_2 - y_1 = d$ і зведемо до спільного знаменника

$$d(x - x_1) = g(y - y_1),$$

$$dx - gy = dx_1 - gy_1$$

або

$$ax + by + c = 0.$$

Аналогічно, розглянемо нормальне рівняння прямої

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0,$$

$$ax + by - (ax_1 + by_1) = 0,$$

тобто

$$ax + by + c = 0.$$

Як бачимо, коефіцієнти *a, b* в загальному рівнянні прямої це координати **нормального вектора** цієї прямої.

Відмітимо, що знаючи загальне рівняння прямої, можна завжди отримати хоча б одне з вище вказаних рівнянь прямої.

Розглянемо розміщення прямої відносно системи координат в залежності від значень коефіцієнтів *a, b, c* загального рівняння прямої.

1. Якщо $a = 0$, то рівняння матиме вигляд $by + c = 0$, або $y = -\dfrac{c}{b}$, тобто всі точки прямої матимуть ту саму ординату $-\dfrac{c}{b}$; це означає, що пряма паралельна осі Ox.

2. Якщо $a = 0,\ c = 0$, то рівняння матиме вигляд $y = 0$, тобто одержимо рівняння осі Ox.

3. Якщо $b = 0$, то рівняння матиме вигляд $ax + c = 0$, або $x = -\dfrac{c}{a}$, тобто всі точки прямої матимуть ту саму абсцису $-\dfrac{c}{a}$; це означає, що пряма паралельна осі Oy.

4. Якщо $b = 0,\ c = 0$, то рівняння набуває вигляд $x = 0$, тобто одержимо рівняння осі Oy.

5. Якщо $c = 0$, то рівняння матиме вигляд $ax + by = 0$. Це рівняння задовольняють координати точки $O(0,0)$ і, отже, пряма проходитиме через початок координат.

Знаючи загальне рівняння прямої можна визначити **кут між прямими,** як кут між їх нормальними векторами.

15.3. Кут між прямими

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ та } a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

тоді $\vec{n}_1 = (a_1, b_1),\ \vec{n}_2 = (a_2, b_2)$. Позначимо через φ кут між прямими l_1 і l_2, а через ψ – кут між їх нормальними векторами $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

Якщо $\psi \le 90^0$, то $\varphi = \psi$ і $\cos\varphi = \cos\psi$ (рис. 7); якщо $\psi > 90^0$, то $\varphi = 180^0 - \psi$ і $\cos\varphi = -\cos\psi$ (рис.8). Отже $\cos\varphi = |\cos\psi|$.

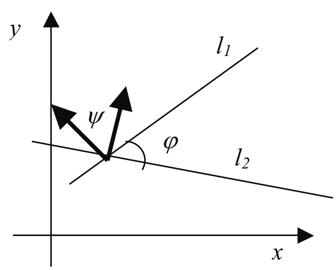


Рис. 7.

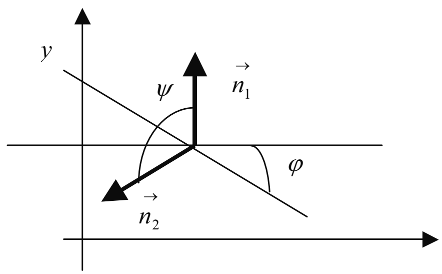


Рис. 8.

Запишемо скалярний добуток векторів $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cos\psi.$$

Звідси

$$\cos\psi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|},$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} .$$

Приклад 4. Обчислити кут між прямими

$$-3x - 4y + 25 = 0,\ 4x + 3y - 25 = 0.$$

Розв'язання: Запишемо нормальні вектори заданих прямих

$$\vec{n}_1 = (-3;-4),\ \vec{n}_2 = (4;3).$$

Згідно вище наведеної формули отримаємо

$$\cos\varphi = \frac{|-3 \cdot 4 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{24}{25},$$

використовуючи калькулятор отримаємо $\varphi \approx 16^0$.

Відповідь: $\varphi \approx 16^0$.

Якщо рівняння прямих l_1 та l_2 записані, як рівняння прямих з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$,то записавши їх у вигляді

$$k_1 x - y - b_1 = 0,\ k_1 x - y - b_1 = 0.$$

одержимо координати нормальних векторів $\vec{n}_1 = (k_1;-1),\ \vec{n}_2 = (k_2;-1)$ і формула для обчислення косинуса кута між прямими набуде вигляду

$$\cos\varphi = \frac{|k_1 \cdot k_2 + 1|}{\sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \sqrt{k_2^2 + 1}} .$$

Оскільки $0^0 \le \varphi \le 90^0$, то $\sin\varphi \ge 0$ і $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$.

Звідси

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{(k_1 k_2 + 1)}{\sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \sqrt{k_2^2 + 1}}\right)^2} = \frac{|k_1 - k_2|}{\sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \sqrt{k_2^2 + 1}},$$

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 \cdot k_2 + 1}\right|$$

$$tg\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 \cdot k_2 - 1}\right|.$$

Якщо знаменник в останній формулі перетворюється в нуль, тобто $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0$, то прямі l_1 та l_2 **перпендикулярні**, а кут $\varphi = 90^0$.

<u>**Приклад 5.**</u> Знайти кут між прямими $y = -\frac{x}{7} + 2$ і $y = \frac{3}{4}x + 5$.

<u>**Розв'язання:**</u>

Рівняння прямих записано, як рівняння прямих з кутовими коефіцієнтами

$$k_1 = -\frac{1}{7},\ k_2 = \frac{3}{4}, \text{ отже } tg\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{7} - \frac{3}{4}}{-\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4} + 1}\right| = 1$$

Кут між прямими дорівнює 45^0.

<u>**Відповідь:**</u> $\varphi = 45^0$.

<u>**Приклад 6.**</u> Довести, що прямі $y = -\frac{x}{3} - 3$ і $y = 3x - 1$ перпендикулярні.

<u>**Розв'язання:**</u>

Перевіримо, чи виконується умова перпендикулярності прямих з кутовими коефіцієнтами $k_1 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot k_2 = 3$: $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Отже, прямі перпендикулярні.

<u>15.4. Перетин прямих.</u>

Якщо прямі l_1 і l_2 не паралельні, то знаходження **точки** їх **перетину** зводиться до розв'язку системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_2 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}.$$

<u>**Приклад 7.**</u> Знайти координати точки перетину прямих

$$2x + y = 0 \text{ і } 3x + 2y - 1 = 0.$$

Розв'язання:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 3x + 2\cdot(-2x) - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 3x - 4x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Відповідь: (–1; 2).

Сукупність прямих , що проходять через дану точку називають **пучком прямих** на площині з центром в цій точці.

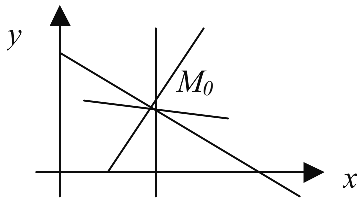


Рис. 6.

Якщо задано точку $M_0(x_0, y_0)$, то одне з рівнянь або

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

або

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

є **рівнянням пучка прямих** з центром в заданій точці M_0 (рис. 9).

Приклад 8. Записати рівняння пучка прямих з центром в точці *M*(2;-3)
Розв'язання: Запишемо рівняння пучка прямих в загальному вигляді:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Підставимо координати точки *M*, отримаємо: $a(x-2) + b(y+3) = 0$ – рівняння пучка прямих з центром в точці *M*.

Відповідь: $a(x-2) + b(y+3) = 0.$

15.5. Відстань від точки до прямої.

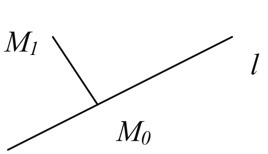


рис.10

Під відстанню від точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямої *l*, що задана рівнянням

ax + by + c=0,

розуміють довжину перпендикуляра $|M_0M_1|$, де $M_0(x_0; y_0) \in l$. (рис.10).

Відомо, що $\vec{n} = (a, b)$ – це нормальний вектор даної прямої, а вектор $\vec{n}_0 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ – нормальний одиничний вектор цієї ж прямої.

Вектори $\vec{n_0}$ та $\overrightarrow{M_0M_1}$ перпендикулярні до прямої l, тому вони колінеарні.

Отже, $$\left|\vec{n_0}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \left|\vec{n_0}\right|\cdot\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\cdot\cos 0^0 = \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|.$$

Запишемо останню рівність в координатах:

$$\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(x_1-x_0)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(y_1-y_0)\right| = \left|\frac{ax_1+by_1-(ax_0+by_0)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$

Оскільки точка $M_0(x_0;y_0)\in l$, то $ax_0+by_0+c=0$ і $ax_0+by_0=-c$. Підставимо, одержимо **рівняння відстані від точки до прямої :**

$$\boxed{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \frac{\left|ax_1+by_1+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.}$$

<u>**Приклад 8.**</u> Визначити відстань від точки $M(3;2)$ до прямої $4x-3y+14=0$.
<u>**Розв'язання:**</u> Підставимо дані умови в рівняння відстані від точки до прямої:

$$d=\frac{\left|ax_1+by_1+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4\cdot 3+(-3)\cdot 2+14}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{20}{5}=4.$$

<u>**Відповідь:**</u> $d=4$.

<u>**Приклад 9.**</u> Дано вершини трикутника $A(-2;7)$, $B(2;-1)$, $C(8;3)$. Записати рівняння:
1) висоти опущеної з вершини A на сторону BC;
2) медіани проведеної з вершини B.
<u>**Розв'язання:**</u>
1) Запишемо рівняння висоти AK, виконавши попередньо наступні дії:
a) Виберемо довільно точку $M(x, y)$, яка належить прямій AK.
b) Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM}=(x-(-2);y-7),\quad \overrightarrow{AM}=(x+2;y-7).$$

c) Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC}=(-8-2;3-(-1)),\ \overrightarrow{BC}=(-10;4).$$

d) Використовуючи умову перпендикулярності векторів і запишемо рівняння висоти AK:

$$\vec{BC} \perp \vec{AM} \Rightarrow \vec{BC} \cdot \vec{AM} = 0 ,$$

або

$$-10(x + 2) + 4(y - 7)=0.$$

Отже, $5x - 2y + 24 = 0$ – рівняння висоти AK.

2) Для того, щоб записати рівняння медіани BD, необхідно знайти координати точки D, яка ділить відрізок AC навпіл. Тому:

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2}; \ y_D = \frac{y_A + y_C}{2}, \text{ тобто } x_D = -5; \ y_D = 5.$$

Запишемо рівняння медіани BD медіани, як рівняння прямої, що проходить через дві точки B і D:

$$\frac{x-2}{-5-2} = \frac{y+1}{5+1}; \ \frac{x-2}{-7} = \frac{y+1}{6}, \text{ або } 6x-12=7y-7.$$

Отже, $6x + 7y - 5 = 0$ – рівняння медіани BD.

Відповідь: $5x - 2y + 24 = 0$ – рівняння висоти AK; $6x + 7y - 5 = 0$ – рівняння медіани BD.

15.6. Вправи

1. Які рівняння лінії на площині вам відомо?

2. Запишіть рівняння осей координат і прямих паралельних їм.

3. Дайте означення нормального вектора, напрямного вектора і кутового коефіцієнту прямої.

4. Сформулюйте умови перпендикулярності і паралельності двох прямих.

5. Запишіть формули для обчислення кута між двома прямими.

6. Як знайти точку перетину двох прямих?

7. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві точки.

8. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дану точку з відомим напрямним вектором.

9. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора (нормальне рівняння прямої).

10. Запишіть рівняння прямої у відрізках.

11. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

12. Записати рівняння прямих, що проходять через точку $K(-3;4)$ паралельно осям координат.

13. Дано вершини трикутника $A(1,-3)$, $B(5, -1)$, $C(-3, 5)$. Скласти рівняння:

a) сторони AB;

b) медіани проведеної з вершини B;

c) висоти опущеної з вершини C на сторону AB.

14. Дано вершини трикутника $A(-1, 8)$, $B(7, -2)$, $C(-5, 4)$. Скласти рівняння сторони AC і медіани BD цього трикутника, зробити рисунок.

15. Дано трикутник з вершинами $M(0;-2)$, $N(6;2)$, $P(2;4)$. Записати рівняння сторони MP, медіани NE і висоти ND.

16. Яку ординату має точка $C(-1, y)$, що належить тій самій прямій, що і точки $A(-5, 2)$ і $B(-3, -1)$.

17. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCK$: $A(-1, 2)$, $B(-2, -2)$, $C(5, -2)$. Записати рівняння його діагоналей AC і BK.

18. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $C(-5, 3)$ і $D(1, -2)$. Зобразити на координатній площині.

19. Знайти кут між прямими $2x - 3y - 1 = 0$, $3x + y - 11 = 0$. Зробити рисунок.

20. Дано рівняння сторін трикутника ABC: $5x + 3y + 1 = 0$ (AB); $x + y + 1 = 0$ (BC); $7x + 5y - 1 = 0$ (AC). Визначити координати вершин A і B цього трикутника, зробити рисунок.

21. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $K(2;-7)$ перпендикулярно прямій $3x + y - 2 = 0$. Зробити рисунок.

22. Дано вершини трикутника $A(-1, 3)$, $B(-2 -1)$, $C(5, -3)$. Записати рівняння прямої, що проходить через середину сторони AC перпендикулярно стороні AB. Зробити рисунок.

23. Скласти рівняння , що проходить через точку $K(-3; 4)$ і відсікає на осі абсцис відрізок , який рівний 5. Зробити рисунок.

24. Дві прямі перетинаються в точці $C(-2, -4)$. Знайти кут між ними, якщо одна з них проходить через точку $A(1, 2)$, а інша – через точку $B(1, -3)$. Зробити рисунок.

25. В трикутнику дано координати середин його сторін $(-2, -1)$, $(-1, -1)$ і $(-4, 2)$. Записати рівняння сторін трикутника. Зробити рисунок.

26. Дано дві прямі $x + y + 3 = 0$ і $2x + 3y - 1 = 0$. Знайти віддаль між точками, в яких їх перетинає пряма $4x + 3y + 7 = 0$. Зробити рисунок.

27. Довести, що прямі $2x - y + 7 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ проходять через одну точку. Зробити рисунок.

28. Протилежні вершини квадрата лежать в точках $A(-2, 5)$, $C(2, 8)$. Знайти довжину і записати рівняння його діагоналей. Зробити рисунок.

29. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(0; 8)$, якщо площа трикутника утвореного прямою і осями координат дорівнює 16.

30. Визначити площу трикутника утвореного прямою $5x + 8y - 40 = 0$ і осями координат.

31. Дано пряма $2x - 3y + 5 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(4;-5)$:

a) паралельно даній прямій;

b) перпендикулярно даній прямій.

32. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $C(-3;4)$ і утворює з додатним напрямком осі Oy кут 60^0.

33. Знайти кутовий коефіцієнт прямої $3x - 7y + 2 = 0$ і побудувати її.

34. Визначити кут між прямими:

a) $x+5y+9=0$; $2x-3y+1=0$;

b) $2x+y-5=0$; $3x-y+4=0$;

c) $y=1{,}5x+6$; $2y+3x-7=0$;

d) $y=\dfrac{2}{3}x-7$; $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=1$;

e) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$; $\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1$.

35. Обчислити віддаль d між паралельними прямими:

a) $4x-3y+25=0$; $8x-6y+25=0$;

b) $5x-12y-20=0$; $5x-12y-13=0$;

c) $3x-4y-20=0$; $6x-8y+25=0$.

36. Дослідити взаємне розташування нижче вказаних пар прямих. У випадку їх перетину визначити координати точки перетину:

a) $x+y-3=0$; $3x-3y-9=0$;

b) $x=4$; $x+y=0$;

c) $y=0$; $y-7=0$;

d) $2x+y+1=0$; $2x+y+5=0$.

37. Знайти точки перетину нижче вказаних пар прямих:

a) $3x-2y-5=0$; $5x+y-17=0$;

b) $4x-3y-7=0$; $2x+3y-17=0$;

c) $2x+5y-29=0$; $5x+2y-20=0$.

38. Через точку перетину прямих $4x+2y-19=0$ і $5x+6y+6=0$ провести пряму перпендикулярно прямій $x+y+1=0$.

39. Дано рівняння сторін трикутника

$$x-y+4=0;\ 4x+2y-19=0;\ 5x+6y+9=0.$$

Визначити координати його вершин та значення кутів.

40. Через точку перетину прямих $x-y+4=0$, $4x+2y-19=0$ провести пряму паралельну прямій $2x-3y+6=0$.

41. Дано пряма $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-2}=1$. Визначити відстань від прямої до початку координат.

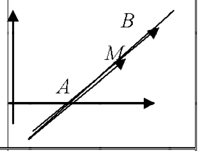
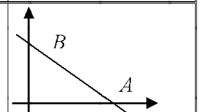
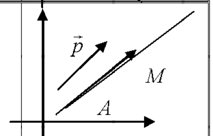
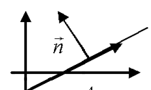
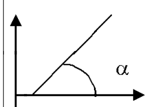
42. Дано рівняння прямої $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$. Необхідно скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину цієї прямої з віссю абсцис перпендикулярно бісектрисі координатного кута першої чверті.

43. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $4x-3y-15=0$ і знаходиться від неї на відстані $d=3$.

Прямі на площині

Загальне рівняння прямої *ax*+ *by* + *c* = 0

Рівняння прямих.

назва	дано	рівняння	ілюстрація
Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}.$	
Рівняння прямої у відрізках	$A\ (a;\ 0)$, $B\ (b;\ 0)$	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	
Рівняння прямої з відомим напрямним вектором	$\vec{p}=(m,n)$; $A\ (x_1,\ y_1)$	$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$	
Нормальне рівняння прямої	$\vec{n}=(a,b)$ $A(x_1,\ y_1)$	$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$	
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$A(x_1,\ y_1)$; α або $k=\mathrm{tg}\alpha$	$y-y_1=k(x-x_1)$	

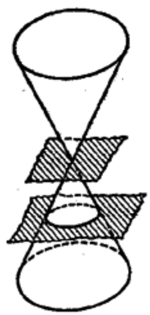
***Кут між прямим* l_1 і l_2** l_1: $ax_1+by_1+c=0$ l_2: $ax_2+by_2+c=0$	$\cos\varphi=\dfrac{\lvert\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\cdot\lvert\vec{n}_2\rvert}=\dfrac{\lvert a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2\rvert}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ $\mathrm{tg}\varphi=\left\lvert\dfrac{k_1-k_2}{k_1\cdot k_2-1}\right\rvert$
***Перетин прямим* l_1 і l_2** l_1: $ax_1+by_1+c=0$ l_2: $ax_2+by_2+c=0$	$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_2=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$
***Відстань від т.*$M_1(x_1;y_1)$ *до прямої* l: $ax+by+c=0$**	$\left\lvert\overrightarrow{M_0M_1}\right\rvert=\dfrac{\lvert ax_1+by_1+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Рівнянням пучка прямих з центром в точці $M_0(x_0,\ y_0)$	$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ або $y-y_0=k(x-x_0)$
***Нормальний вектор прямої* l: $ax+by+c=0$**	$\vec{n}=(a;b)$
***Нормальний одиничний вектор прямої* l:** $ax+by+c=0$	$\vec{n}_0=\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$
Умова перпендикулярності l_1: $ax_1+by_1+c=0$ l_2: $ax_2+by_2+c=0$	$a_1a_2+b_1b_2=0$ ***або*** $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$
Умова паралельності l_1: $ax_1+by_1+c=0$ l_2: $ax_2+by_2+c=0$	$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ ***або*** $k_1=k_2$

16. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Криві, які одержуються при перетині кругової конічної поверхні площиною називаються конічними поверхнями або коніками. До них відносяться такі криві як коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Дійсно:

■ Якщо площина перетинає конічну поверхню перпендикулярно осі обертання, то в перетині утворюється коло, якщо площина проходить через вершину конуса, то в перетині утворюється точка, тобто вироджене коло (рис. 1).



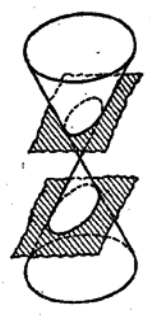
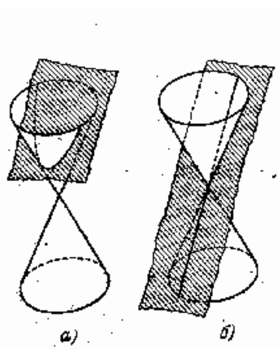


Рис. 1. Рис. 2.

■ Якщо площина перетинає тільки одну частину конічної поверхні і не паралельна жодній твірній, то в перетині буде еліпс (рис. 2).

■ Якщо площина перетинає одну частину конічної поверхні і паралельна одній твірній, то в перетині буде парабола (рис. 3а), якщо площина проходить через вершину і одну з твірних, то в перетині буде пряма, тобто вироджена парабола (рис. 3б).



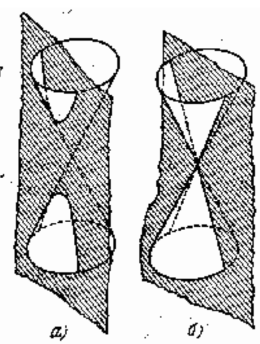


Рис. 3. Рис. 4.

■ Якщо площина перетинає дві частини конічної поверхні і паралельна осі конічної поверхні, то в перетині буде гіпербола(рис. 4а), якщо січна площина проходить через вершину конуса і перетинає дві його частини, то в перетині буде пара прямих, що перетинаються, тобто вироджена гіпербола (рис. 4б).

Розлянемо кожну з цих кривих.

16.1. Коло.

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається центром. Якщо точка C – центр кола, R – її радіус, M – довільна точка кола, то з означенням кола

$$|CM| = R$$

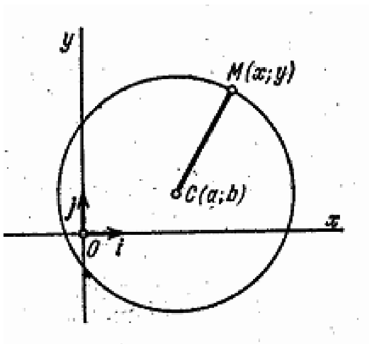


Рис. 5.

Дана рівність є рівнянням кола радіуса R з центром у точці C.

Нехай на площині задано прямокутну декартову систему координат (рис. 5) і точка C $(a;b)$ – центр кола радіуса R. Нехай M $(x;y)$ – довільна точка цього кола. Оскільки $|CM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, то рівняння кола можна записати

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.}$$

Дане рівняння називають **загальним рівнянням кола** або рівнянням кола радіуса R з центром в точці $(a;b)$.

Наприклад, рівняння

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25,$$

є рівнянням кола радіуса $R = 5$, з центром в точці (1; -3).

Якщо центр кола збігається з початком координат, то рівняння кола набирає вигляду

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Дане рівняння називають канонічним рівнянням кола.

Приклад 1. Скласти рівяння кола радіуса $R = 9$ з центром у точці $C\,(3; -6)$.

Розв'язання:

Підставивши значення координат точки C і значення радіуса в рівняння кола, матимемо $(x-3)^2+(y-(-6))^2=81$, або

$$(x-3)^2+(y+6)^2=81.$$

Приклад 2. Довести, що рівняння $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ є рівнянням кола. Знайти його центр і радіус.

Розв'язання:

Перетворимо ліву частину заданого рівняння:

$$x^2+4x+4-4+y^2-2y+1-1-4=0.$$

Звідси

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9.$$

Це рівняння є рівнянням кола з центром у точці (-2; 1), радіус кола дорівнює 3.

16.2. Еліпс.

Еліпсом називається множина точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок тієї самої площини стала і більша за відстань між цими точками.

Такі точки називаються **фокусами** еліпса, а відстань між ними **фокальною відстанню**. Покажемо, як, виходячи з означення еліпса, можна розбити еліптичну клумбу. Заб'ємо в землю два кілочки (рис .6) потім нитку зв'яжемо в кільце і натягнемо це кільце на обидва кілочки. Натягнувши нитку третім кілочком, креслимо еліпс. Змінивши відстань між кілочками і довжину нитки, дістаємо еліпси різних розмірів і форм.

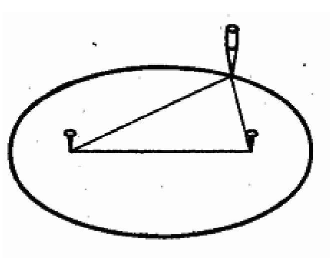


Рис. 6.

Позначимо фокуси еліпса буквами F_1 і F_2. Нехай фокальна відстань $|F_1F_2| = 2c$. Якщо M – довільна точка еліпса (рис. 7), то за означенням еліпса сума $|F_1M| + |F_2M|$ є величина стала. Позначивши її через $2a$, дістаємо

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a.$$

Зазначимо, що за означенням еліпса $2a > 2c$, тобто $a > c$. Попередня рівність є рівнянням еліпса. Якщо точка F_1 збігається з точкою F_2 то рівняння еліпса набирає вигляду

$$2|F_1M| = 2a, тобто |F_1M| = a.$$

Це рівняння є рівнянням кола радіуса a з центром в точці F_1. Таким чином, коло є окремим випадком еліпса.

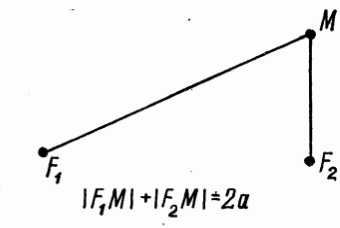


Рис.7.

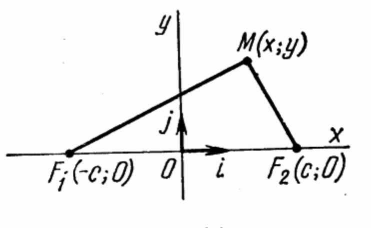


Рис. 8.

Вибиримо систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокуси еліпса, вісь ординат через середину відрізка F_1F_2 і перпендикулярна до нього.

Тоді фокусами будуть точки F_1(-c;0) і F_2(c;0) (рис. 8). Нехай $M(x;y)$ – будь-яка точка еліпса, тоді

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \ i \ |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

підставляючи знайдені значення F_1M і F_2M в рівняння еліпса, дістаємо

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Зведемо дане рівняння до простішого вигляду. Для цього перенесемо другий доданок в праву частину і піднесемо обидві частини рівняння до квадрату

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

після спрощень дістаємо

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

Піднісши обидві частини до квадрату матимемо

$$(x-c)^2+y^2=(a-\frac{c}{a}x)^2.$$

Звідси

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2,$$

за означення еліпса $a>c$, тому a^2-c^2 – додатнє число. Позначимо його через b^2, тобто $b^2=a^2-c^2$. Тоді рівняння набере вигляду

$$\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2.$$

Розділивши обидві частини рівності на b^2 отримаємо

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.}$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням еліпса.

Якщо $a=b$, тобто $c=0$, то рівняння еліпса набуває вигляду

$$x^2+y^2=a^2,$$

що визначає рівняння кола.

Приклад 1. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точку M (5;0), якщо фокальна відстань дорівнює 6.

Розв'язання:

Оскільки фокальна відстань дорівнює 6, то $c=3$. Запишемо рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

За умовою задачі точка $M(5;0)$ належить еліпсу, отже

$$\frac{25}{a^2}=1,$$

звідси $a^2=25$. Знайдемо b^2, $b^2=a^2-c^2=25-9=16$.

Отже, шуканим рівнянням еліпса є рівняння

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Приклад 2. Довести, що рівняння $36x^2 + 100y^2 - 3600 = 0$ є рівнянням еліпса, знайти координати фокусів і фокальну відстань.

Розв'язання:

Розділивши обидві частини рівнянь на 3600, дістаємо

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1,$$

це є рівнянням еліпса.
З рівняння $b^2 = a^2 - c^2$ випливає, що $a^2 - b^2 = c^2$. Оскільки $a^2 = 100$, $b^2 = 36$, то $c^2 = 64$, звідси $c = 8$. Фокуси еліпса знаходяться в точках $F_1(-8; 0)$ і $F_2(8; 0)$. Фокальна відстань

$$|F_1F_2| = 16.$$

Дослідимо еліпс за його рівнянням.

1. Еліпс не проходить через початок системи координат, так як координати точки $O(0;0)$ не задовільняють рівняння.

2. Еліпс перетинає кожну з осей координат в двох точках.

Щоб визначити координати точок перетину еліпса з віссю Ox, треба розв'язати рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, та $y=0$, одержимо $x = \pm a$.

Отже, точками перетину еліпса з віссю Ox будуть $A(a;0)$ і $C(-a;0)$.

Аналогічно знаходимо точки перетину з віссю Oy: $B(0;b)$ і $D(0;-b)$.

Точки A, B, C, D називають **вершинами еліпса.**

Відрізок AB називається **великою віссю** еліпса, відрізок BD – **малою віссю.** Фокуси еліпса F_1 і F_2 лежать на великій осі. Довжина великої осі дорівнює $2a$, малої осі $2b$. Числа a і b називаються **півосями еліпса**.

3. Еліпс має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, а також центр симетрії.

Це легко показати, так як невідомі в рівняння входять тільки в другій степені. Центр симетрії еліпса називається **центром еліпса**.

4. Еліпс можна дістати рівномірним стиском кола.

Розгянемо коло радіуса $R=a$ з центром в початку координат. Нехай $P(X; Y)$ довільна точка кола (рис. 9).

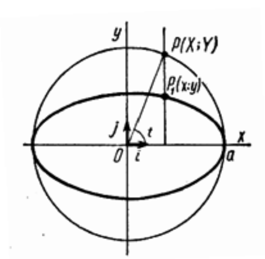


Рис. 9.

Тоді $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1$. Точці $P(X;Y)$ на колі поставимо у відповідність точку $P_1(x;y)$ таку, щоб $x=X$ і $y=\frac{b}{a}Y$. Точку P_1 дістанемо завдяки зсуву точки P, при якому абсциса не змінюється, а ордината зменшується у відношені $\frac{b}{a}$. Координати точки P_1 задовільняють рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{X^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b}{a}Y\right)^2}{b^2}=\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1.$$

Отже, P_1 знаходиться на еліпсі.

Таким чином, еліпс можна дістати з кола рівномірним стисканням до осі Ox, при якому, ординати точок зменшуються в тому самому відношенні $\frac{b}{a}$. Звідси випливає, що форма еліпса залежить від значення $\frac{b}{a}$. Чим менше це відношення, тим більш стиснутим буде еліпс, і, навпаки, чим більше відношення $\frac{b}{a}$, тим еліпс буде більш округлим. Якщо значення $\frac{b}{a}$ найбільше, тобто $\frac{b}{a}=1$, то еліпс перетворєються в коло. Для характеристики форми еліпса доцільно користуватися не відношенням $\frac{b}{a}$, а відношенням $\frac{c}{a}$. Відношення півфокусної відстані c до великої півосі a називається **ексцентриситетом еліпса**. Його позначають буквою e.

$$e=\frac{c}{a}.$$

Оскільки $0\le c<a$, то ексцентриситет еліпса задовільняє нерівності $0\le e<1$.

Звідси $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ або $e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

<u>Приклад</u>. Дано два еліпса $16x^2+25y^2-400=0$ та $9x^2+25y^2-225=0$. Порівняти їх форму.

<u>Розв'язання:</u>

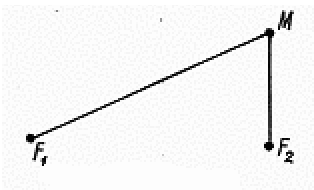
Перепишемо рівняння еліпсів у вигляді $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ і $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Для першого еліпса $a_1=5, b_1=4$, відповідно $c_1=\sqrt{25-16}=3,\ e_1=\frac{3}{5}$. для другого еліпса $a_2=5,\ b_2=3$, відповідно $c_2=\sqrt{25-9}=4,\ e_2=\frac{4}{5}$. В даному випадку $e_2>e_1$, відповідно другий еліпс стиснутий до великої осі більше ніж перший.

16.3. Гіпербола.

Гіперболою називається множина точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох даних точок площини сталий і менший за відстань між цими точками.

Такі точки називаються фокусами гіперболи, а від стань між ними – фокальною відстанню.

Позначимо фокуси гіперболи буквами F_1, F_2. Нехай фокальна відстань $|F_1F_2|=2c$.



$||F_1M|-|F_2M||=2a$

Рис. 10.

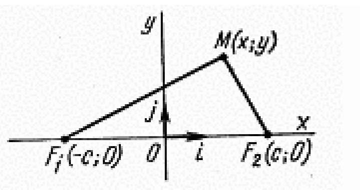


Рис. 11.

Якщо M – довільна точка гіперболи (рис. 10) , то за означенням гіперболи модуль різниці $|F_1M|-|F_2M|$ сталий. Позначивши його через 2a, дістанемо

$$||F_1M|-|F_2M||=2a.$$

Зазначимо, що за означенням гіперболи $2a<2c$, тобто $a<c$.

Дана рівність є рівнянням гіперболи. Виберемо систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокуси гіперболи; вісь ординат проведемо через середину відрізка F_1F_2 перпендикулярно до нього Тоді фокусами гіперболи будуть точки $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$ (рис.11).

Нехай $M(x;y)$ – будь-яка точка гіперболи, тоді

$$\left|F_1M\right|=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \text{ і } \left|F_2M\right|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ .$$

Підставляючи значення $|F_1M|$ і $|F_2M|$ в рівняння дістанемо

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a\,.$$

Це рівняння є рівнянням гіперболи у вибраній системі координат. Його можна звести до більш простого вигляду.

Нехай $x \geq 0$, тоді рівняння можна записати без знака модуля:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

або

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Звідси

$$(x-c)^2+y^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2$$

$$x^2-2xc+c^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2$$

За означенням гіперболи $a<c$, тому c^2-a^2 – додатнє число. Позначимо його через b^2, тобто покладемо $b^2=c^2-a^2$, тоді рівняння набирає вигляду

$$\frac{b^2}{a^2}x^2-y^2=b^2.$$

Розділивши почленно на b^2, дістанемо рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Якщо $x<0$, то рівняння записують без знака модуля

$$-\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

і так само, як при $x \geq 0$, зводиться до канонічного виду.

Рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ називається канонічним рівнянням гіперболи.

Приклад 1. Записати канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M\left(-5;\frac{9}{4}\right)$, якщо фокальна відстань гіперболи дорівнює 10.

Розв'язання. Оскільки $|F_1 F_2|=10$, то $c = 5$. Запишемо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

За умовою точка належить гіперболи, отже:

$$\frac{25}{a^2} - \frac{81}{16b^2} = 1.$$

З другого рівняння дістанемо співвідношення для визначення a^2 і b^2:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - a^2.$$

Розв'язавши систему:

$$\begin{cases} \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{81}{16b^2} = 1 \\ b^2 = 25 - a^2 \end{cases};$$

знайдемо $a^2 = 16$, $b^2 = 9$. Шуканим рівнянням є рівняння $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Приклад 2 Довести, що рівняння

$$20x^2 - 29y^2 = 580.$$

є рівнянням гіперболи. Знайти координати фокусів.

Розв'язання. Розділивши обидві частини рівняння на 580, дістанемо

$$\frac{x^2}{29} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

Це є рівняння гаперболи, для якої $a^2=29$, $b^2=20$. Із співвідношення $b^2+a^2= c^2$ знаходимо $c^2=29 + 20 = 7$, $c = 7$. Отже, фокуси гіперболи знаходяться в точках $F_1(-7;0)$, $F_2(7;0)$.

Дослідимо гіперболу за його рівнянням.

Розглянемо гіперболу, задану в деякій прямокутній декартовій системі координат своїм канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Наведемо такі властивості гіперболи:

1. Гіпербола не має спільних точок з віссю Оу, а вісь Ох перетинає в двох точках.

Щоб визначити координати точок перетину гіперболи з віссю Oy, треба розв'язати сумісно їх рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \; x = 0.$$

Підставляючи $x = 0$ в рівняння гіперболи, дістанемо $y^2 = -b^2$, а це означає, що система не має розв'язків. Отже, гіпербола не перетинає вісь ординат.

Щоб визначити координати точок перетину гіперболи з віссю Ox, треба розв'язати сумісно їх рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \; y=0.$$

Точка перетину гіперболи з віссю Ox повинна мати ординату $y = 0$ і, крім того, повинна належати гіперболі. Підставивши $y = 0$ в рівняння гіперболи, дістанемо

$$x = \pm a.$$

Отже, точками перетину гіперболи з віссю Ox будуть точки $A(a; 0)$ і $B(-a; 0)$; вони називаються вершинами гіперболи.

Відрізок AB називається дійсною віссю гіперболи. Довжина відрізка AB, очевидно, дорівнює $2a$. Число a називають **дійсною піввіссю гіперболи**, число b – **уявною піввіссю**.

2. Гіпербола має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії.

В рівняння змінні x і y входять тільки у другому степені. Таким чином, якщо координати точки $N(x; y)$ задовольняють рівняння, то це ж рівняння задовольнятимуть і координати точок $N_1(-x; y)$ і $N_2(x; -y)$.

Легко бачити, що точка N_1 симетрична точці N відносно осі ординат, точка N_2 симетрична точці N відносно осі абсцис. Таким чином, гіпербола має дві осі симетрії, вони взаємно перпендикулярні.

3. Гіпербола має центр симетрії.

Якщо координати точки $N(x; y)$ задовольняють рівняння гіперболи, то це саме рівняння задовольняють і координати точки $K(-x; -y)$. Точка K, очевидно, симетрична точці N відносно початку координат. Таким чином, гіпербола має центр симетрії. Центр симетрії гіперболи називається **центром гіперболи.**

4. Гіпербола перетинається з прямою $y = kx$ при $|k| < \frac{b}{a}$ *у двох точках.* Якщо $|k| \geq \frac{b}{a}$, то спільних точок у гіперболи і прямої немає.

Щоб визначити координати точок перетину гіперболи і прямої $y = kx$, треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx \end{cases}$$

Виключаючи y дістанемо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2 x^2}{b^2} = 1$$

звідки

$$\left(b^2 - k^2 a^2\right)x^2 = a^2 b^2.$$

При $b^2 - k^2 a^2 \le 0$, тобто при $|k| \ge \frac{b}{a}$, здобуте рівняння, а тому й система розв'язків не мають. Отже, прямі, що проходять через початок координат з кутовим коефіцієнтом, модуль якого більше або дорівнює $\frac{b}{a}$, не перетинають гіперболу. Прямі, рівняння яких мають вигляд $y = \frac{b}{a}x,\ y = -\frac{b}{a}x$, називаються **асимптотами гіперболи**.

При $b^2 - k^2 a^2 > 0$, тобто при $|k| < \frac{b}{a}$, система має два розв'язки:

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}, \qquad y = \pm\frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}.$$

Таким чином, кожна пряма, що проходить через початок координат з кутовим коефіцієнтом, модуль якого менший ніж $\frac{b}{a}$, перетинає гіперболу у двох точках. При $k = 0$ з формул дістаємо $x = \pm a$, $y = 0$, тобто пряма $y = 0$ перетинає гіперболу в її вершинах.

Оскільки гіпербола симетрична відносно осей координат, то досить вивчити її форму в першому квадранті координатної площини. З формул

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}, \qquad y = \pm\frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}, \quad k > 0.$$

маємо, що із зростанням k від 0 до $\frac{b}{a}$ (при цьому пряма $y = kx$ повертається проти руху стрілки годинника) і абсциси, і ординати точок перетину прямої з гіперболою зростають. Пряма $y = kx$ перетинає гіперболу у більш віддалених від початку координат точках. Отже, гіпербола має вигляд, зображений на рис. 11. Вона складається з двох не зв'язаних між собою частин, які називаються її **вітками.**

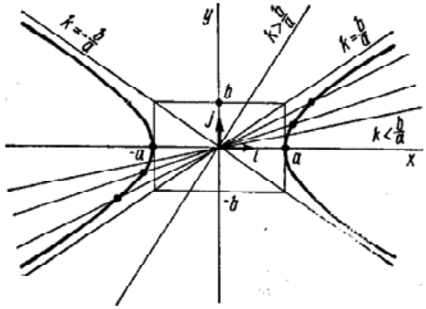


Рис. 11.

Як вже бачили (рис. 11), права вітка гіперболи розміщена вище від асимптоти $y = -\frac{b}{a}$ і нижче від асимптоти $y = \frac{b}{a}$. Тому відношення $\frac{b}{a}$ півосей гіперболи визначають її форму. Чим менше це відношення, тим сильніше гіпербола стиснена до осі Ox.

Як і у випадку еліпса, для характеристики форми гіперболи доцільно користуватися не відношенням $\frac{b}{a}$, а відношенням $\frac{c}{a}$.

Відношення півфокусної відстані c до дійсної півосі a називається **ексцентриситетом гіперболи**. Ексцентриситет позначається буквою e. Отже,

$$e = \frac{c}{a}.$$

Оскільки для гіперболи $c > a$, то ексцентриситет гіперболи задовольняє нерівності $e > 1$.

Виразимо ексцентриситет гіперболи через відношення $\frac{b}{a}$ її півосей:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

тобто:

$$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\ .$$

Згідно з формулою, меншим значенням відношення $\frac{b}{a}$ відповідають менші значення ексцентриситету. Таким чином, чим менший ексцентриситет гіперболи, тим сильніше стиснена вона до осі абсцис.

Гіпербола називається **рівносторонньою** (або рівнобічною), якщо довжини її півосей рівні між собою. Оскільки для рівносторонньої гіперболи $a=b$, то її рівняння має вигляд:

$$x^2-y^2=a^2\,.$$

Асимптотами рівносторонньої гіперболи є прямі $y=x$ і $y=-x$. Отже, асимптоти рівносторонньої гіперболи взаємно перпендикулярні.

Ексцентриситет рівносторонньої гіперболи:

$$e=\sqrt{2}\,\cdot$$

<u>Приклад 3.</u> Дано фокуси гіперболи $F_1(-10;0)$ і $F_2(10;0)$ та її асимптоту $4x+3y=0$. Знайти рівняння гіперболи.

<u>Розв'язання</u>

Записавши рівняння асимптоти у вигляді $y=-\frac{4}{3}x$, знайдемо відношення півосей гіперболи $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$.

З умови задачі випливає, що $c=10$. Тому $a^2+b^2=100$. Задача зводиться до розв'язання рівнянь

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4}{3}\\ a^2+b^2=100\end{cases}.$$

Підставивши $b=\frac{4}{3}a$ у друге рівняння системи, дістанемо

$$a^2+\frac{16a^2}{9}=100\,.$$

звідки $a^2=36$. Тепер знаходимо $b^2=64$. Отже, гіпербола має рівняння $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

16.4. Парабола.

Параболою називається множина точок площини, для кожної з яких відстань до даної точки дорівнює відстані до даної прямої, яка не проходить через дану точку.

Така точка називається **фокусом** параболи, а пряма – **директрисою** (напрямною). Відстань від фокусу до директриси називається **фокальним параметром** параболи і позначається через p.

Виберемо систему координат таким чином, що вісь Ox проведено через фокус F перпендикулярно до директриси. Точку перетину осі абсцис з директрисою позначимо через D (рис. 12), за початок координат O візьмемо середину відрізка DF, за додатній напрям осі Ox – напрям променя OF.

У цій системі координат фокус F має координати $\left(\frac{p}{2};0\right)$, а рівнянням директриси є рівняння

$$x+\frac{p}{2}=0\,.$$

Нехай $M(x;\ y)$ – будь-яка точка шуканої множини. Опустимо з точки M перпендикуляр на директрису, і нехай N – основа цього перпендикуляра. Тоді $|MN|$ є відстань від точки M до директриси і, отже,

$$|MF|=|MN|.$$

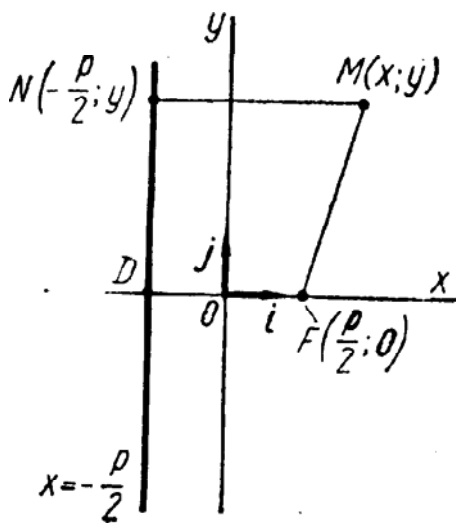


Рис. 12.

Оскільки $\left|MF\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $\left|MN\right| = \left|x + \frac{p}{2}\right|$, то

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Це рівняння є рівнянням параболи у вибраній системі координат. Його можна спростити. Внаслідок того що обидві частини рівняння невід'ємні, то рівняння

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 .$$

рівносильне попередньому рівнянню . В результаті перетворень дістанемо рівняння

$$\boxed{y^2 = 2px.}$$

Воно називається **канонічним рівнянням параболи**.

Наведемо такі властивості параболи:

1. Парабола має вісь симетрії.

Змінна y входить у рівняння тільки у другому степені. Тому, якщо координати точки $M_1(x;\, y)$ задовольняють рівняння параболи, то й координати точки $N_2(x;\, -y)$ задовольнятимуть його. Точка N_1 симетрична точці N_2 відносно осі Ox. Отже, вісь Ox є симетрією параболи. Вісь симетрії параболи називається **віссю параболи**. Точка перетину параболи з віссю називається **вершиною параболи**. Вершина параболи знаходиться в початку координат.

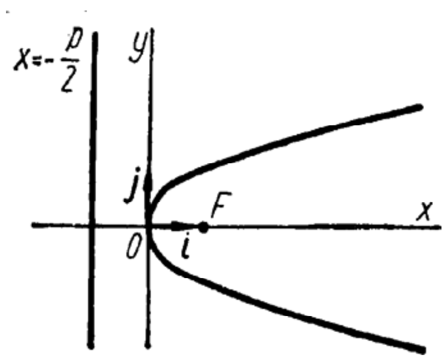


Рис. 13.

2. Парабола розміщена у півплощині $x \geq 0$.

Справді, оскільки параметр p додатний, то рівняння можуть задовольняти тільки точки з невід'ємними абсцисами, тобто точки півплощини $x \geq 0$.

3. Парабола є об'єднанням графіків функцій

$$y = +\sqrt{2px}, \quad y = -\sqrt{2px} \text{ (рис. 13).}$$

Щоб упевнитися в цьому, досить розв'язати рівняння відносно змінної y.

Приклад 1. Світловий промінь $y = -2$ падає на дзеркало, осьовим перерізом якого є парабола $y^2 = 24x$ (рис. 14). Знайти рівняння прямої, якій належить відбитий промінь.

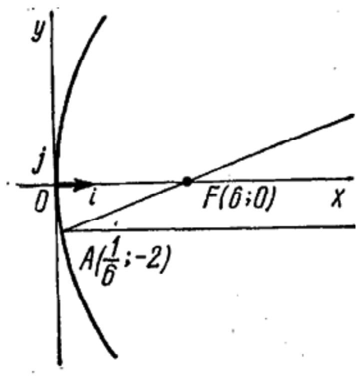


Рис. 14.

Розв'язання.

Якщо падаючий промінь паралельний головній оптичній осі параболічного дзеркала, то відбитий промінь проходить через його фокус. У цьому разі вісь параболічного дзеркала збігається з віссю Ox. Пряма $y = -2$ паралельна осі абсцис, і тому відбитий промінь пройде через фокус параболи $y^2 = 24x$. Оскільки $2p = 24$, тобто $\frac{p}{2} = 6$, то фокусом параболи є точка $F(6; 0)$.

Щоб знайти точки падіння світлового променя, треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = 24x \\ y = -2 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо точку падіння променя $A\left(\frac{1}{6};-2\right)$.

Відбитий промінь належить прямій, яка проходить через точки $\left(\frac{1}{6};-2\right)$ і (6; 0). Запишемо рівняння цієї прямої

$$\frac{y-0}{-2-0}=\frac{x-6}{\frac{1}{6}-6}.$$

Звідси отримаємо $12x-35y-72=0$.

Якщо фокус параболи розміщений лівіше осі Oy (рис.15), тобто має координати $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, то рівняння параболи буде:

$$y^2=-2px.$$

Якщо фокус параболи лежить на осі Oy (рис.16), тобто має координати $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, то рівняння параболи буде:

$$x^2=2py.$$

Якщо фокус параболи лежить на осі Oy (рис.17), тобто має координати $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, то рівняння параболи буде:

$$x^2=-2py.$$

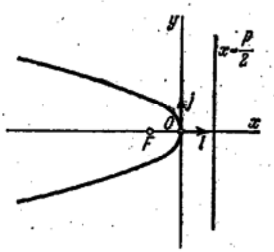


Рис. 15.

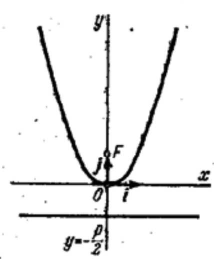


Рис. 16.

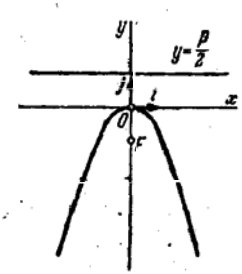


Рис. 17.

16.5. Загальне рівняння другого порядку з двома змінними.

Загальне рівняння другого порядку з двома змінними має вигляд

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \cdot$$

Розгляне ні раніше канонічні рівняння прямих являються частковими випадками даного рівняння.

1. При A=1, B=0, C=1, D=0, E=0, F= $-R^2$, то рівняння буде мати вигляд

$$x^2+y^2=R^2.$$

і, відповідно, буде рівнянням кола.

2. При $A=\dfrac{1}{a^2}$, B=0, $C=\dfrac{1}{b^2}$, D=0, E=0, F= - 1, то рівняння буде мати вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

і, відповідно, буде рівнянням еліпса.

3. При $A=\dfrac{1}{a^2}$, B=0, $C= -\dfrac{1}{b^2}$, D=0, E=0, F= - 1, то рівняння буде мати вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

і, відповідно, буде рівнянням гіперболи.

4. При A=0, B=0, C= 1, D= $-p$, E=0, F= 0, то рівняння буде мати вигляд

$$y^2 = 2px,$$

і, відповідно, буде рівнянням параболи.

16.6. Вправи.

1. Скласти рівняння кола: а) радіуса $R = 4$ з центром у початку координат; б) радіуса $R = -\frac{4}{3}$ з центром у початку координат; в) радіуса $R = 5$ з центром у точці C(- 4; 2); г) радіуса $R = \frac{7}{5}$ з центром $D\left(-1;-\frac{3}{5}\right)$.

2. Скласти рівняння кола, центр якого збігається з початком координат, якщо коло дотикається до прямої $x = 3$.

3. Записати рівняння кола, центр якого знаходиться в точці $C(3; 7)$, якщо відомо, що воно дотикається до осі Ox.

4. Записати рівняння кола, центр якого знаходиться в точці перетину прямих 2 $x + 3x - 13 = 0$, $x + y - 5 = 0$, якщо воно дотикається до осі ординат.

5. Записати рівняння кола, яке проходить через точку $A(6; 2)$ з центром у точці $C(2; - 1)$.

6. Записати рівняння кола, центр якого лежить на осі абсцис, якщо коло дотикається до прямих $x = 8$ і $y = 3$.

7. Дано точки $M_1(2; 3)$ і $M_2(10; 9)$. Записати рівняння кола, діаметром якого є відрізок M_1M_2.

8. Коло дотикається до осі ординат у початку координат і проходить через точку $M_1(- 4; 0)$. Записати рівняння кола і знайти точки перетину її з бісектрисами координатних кутів.

9. Довести, що рівняння $7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$ є рівнянням еліпса. Знайти координати фокусів і фокальну відстань.

10. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо: а) його півосі дорівнюють 7 і 3; б) його півосі дорівнюють 3 і 4; в) його велика піввісь дорівнює 5, а фокальна відстань дорівнює 6; г) його мала піввісь дорівнює 4, а фокальна відстань дорівнює 6.

11. Дано еліпс $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$. Знайти ординату точок еліпса, абсциса яких дорівнює -3.

12. Ординати точок кола $x^2 + y^2 = 36$ зменшено в три рази за абсолютною величиною. Скласти рівняння нової кривої.

13. Дано еліпс $25x^2 + 49y^2 = 1225$. Знайти довжини осей, координати фокусів і ексцентриситет.

14. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо його велика піввісь $a = 5$, а ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$.

15. Записати канонічне рівняння еліпса, в якого відстані від фокуса до кінців великої осі дорівнюють 1 і 9.

16. Земля рухається по еліптичній орбіті, в одному з фокусів якої знаходиться Сонце. Обчислити ексцентриситет земної орбіти, якщо найближча до Сонця точка земної орбіти (перигелій) знаходиться на відстані 147 млн. км від Сонця, а найбільш віддалена від Сонця точка орбіти (афелій) знаходиться на відстані 152 млн. км від нього.

17. Записати рівняння дотичної до еліпса в точці (3; - 3), якщо його рівняння $36x^2 + 12y^2 - 432 = 0$.

18. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо фокальна від-стань дорівнює 30 і гіпербола проходить через точку (- 9; 0).

19. Довести, що рівняння $x^2 - 25y^2 - 275 = 0$ є рівнянням гіперболи. Знайти координати фокусів.

20. Для гіперболи $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ знайти: а) півосі; б) координати фокусів; в) координати вершин; г) рівняння асимптот.

21. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань від однієї з її вершин до фокусів дорівнює 9 і 1.

22. Дано гіперболу $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{36} = 1$. Записати рівняння паралельних прямих, що обмежують частину площини, яка не містить жодної гіперболи.

23. Знайти асимптоти гіперболи $x^2 - y^2 = 9$. Побудувати гіперболу і обчислити її ексцентриситет.

24. Дано рівняння гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$. Знайти координати її фокусів і вершин, ексцентриситет і рівняння асимптот. Зробити рисунок.

25. Скласти канонічне рівняння гіперболи, дійсна піввісь якої дорівнює 5, а ексцентриситет 1,4.

26. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо її асимптоти мають рівняння $y = \pm 2x$, *а* фокусна відстань дорівнює 10.

27. Знайти рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - y^2 = 1$, кутовий коефіцієнт яких дорівнює 2.

28. Ексцентриситет траєкторії руху першої радянської космічної ракети, запущеної в бік Місяця 2 січня 1959 р., дорівнює 1,05. Визначити вид траєкторії ракети.

29. Записати рівняння параболи, якщо координати фокуса (4; 0), а рівняння директриси $x + 4 = 0$.

30. Скласти канонічне рівняння параболи, яка проходить через точку (5; 3).

31. Дано параболу $y^2 = 5x$. Знайти точки параболи, відстань від яких до фокуса дорівнює 4.

32. Скласти канонічне рівняння параболи, в якої фокус знаходиться в точці перетину прямої $2x - 5y - 8 = 0$ з віссю абсцис. Побудувати цю параболу.

33. Звести рівняння параболи $3y = x^2 + 4x - 11$ до канонічного виду.

34. Записати рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо: а) парабола розміщена в верхній півплощині симетрично відносно осі ординат і фокальний параметр дорівнює 4; б) парабола розміщена в нижній півплощині симетрично осі ординат і фокальний параметр дорівнює 6; в) парабола розміщена в правій півплощині симетрично відносно осі абсцис, а її фокальний параметр дорівнює 3; г) парабола розміщена в лівій півплощині симетрично відносно осі абсцис, а її фокальний параметр дорівнює 5.

35. Записати рівняння параболи, яка проходить через початок координат і симетрична відносно осі ординат, якщо координати фокуса, $F(0;\ -3)$.

36. Фокус параболи має координати $F(-6;\ 0)$, а рівняння директриси $x - 6 = 0$. Скласти рівняння параболи

37. Знайти рівняння параболи, якщо її вершина знаходиться в точці $A(-4;\ 5)$, а фокус – в точці $B\ (-2;\ 5)$. Записати рівняння її осей і директриси.

38. Дано фокус параболи $(-3;\ -4)$ і рівняння її директриси $x + 1 = 0$. Записати рівняння параболи і знайти точки перетину параболи з осями координат.

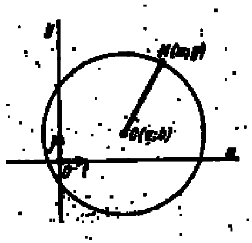
39. Парабола проходить через точки $A(0;\ 6)$ і $B(4;\ 0)$ симетрично відносно осі абсцис. Записати рівняння параболи і побудувати її.

40. Скласти рівняння параболи і записати рівняння її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $y = x$ та кола $x^2 + y^2 - 10y = 0$ і симетрична відносно осі ординат. Побудувати коло, пряму і параболу.

Криві другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dy + Ey + F = 0$$

Коло



Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається центром.

Характеристики:

$C\ (a;b)$ – центр кола

R-радіус

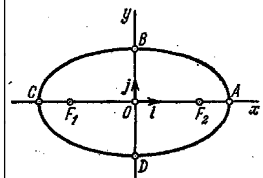
Рівняння кола:

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Рівняння кола з центром в початку координат:

$x^2+y^2=R^2$

Еліпс



Еліпсом називається множина точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок тієї самої площини стала і більша за відстань між цими точками.

Характеристики:

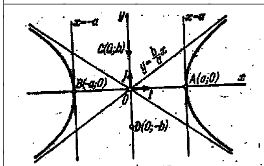
Фокуси: $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$

Осі: велика $2a$, мала $2b$

Ексцентриситет еліпса: $e=\dfrac{c}{a}$

Рівняння: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Гіпербола



Гіперболою називається множина точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох даних точок площини сталий і менший за відстань між цими точками.

Характеристики:

Фокуси: $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$

Дійсна вісь $2a$

Уявна вісь $2b$

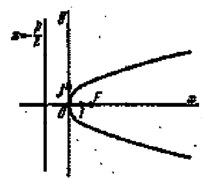
Ексцентриситет гіперболи: $e=\dfrac{c}{a}$

Рівняння: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Асимтоти: $y=\dfrac{b}{a}x$; $y=-\dfrac{b}{a}x$

Рівньостороння гіпербола: $x^2-y^2=a^2$

Парабола

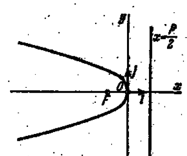


Параболою називається множина точок площини, для кожної з яких відстань до даної точки дорівнює відстані до даної прямої, яка не проходить через дану точку.

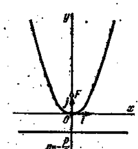
Характеристики:

Фокус $F(\dfrac{p}{2};0)$ Директриса $x+\dfrac{p}{2}=0$

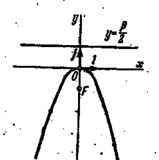
Рівняння $y^2=2px$



$y^3=-2px$



$x^2=2py$



$x^2=-2py$

Спогади зі школи

Рівняння

лінійні

$ax+b=0$

$ax=-b$

$x=-\frac{b}{a}$

квадратні

$ax^2+bx+c=0 (a\neq 0)$

$D=b^2-4ac\geq 0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

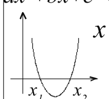
Нерівності

лінійні $ax+b>0$; $x>\frac{-b}{a}$

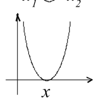
квадратні $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$

Шукаємо корені рівняння:

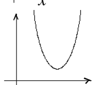
$ax^2+bx+c=0$ (x_1 і x_2)



$x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$
$D>0$



$x\in(-\infty,x)\cup(x,+\infty)$
$D=0$



$x\in(-\infty,+\infty)$
$D<0$

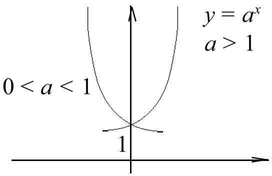
Властивості степенів

$\alpha^n\cdot\alpha^m=\alpha^{n+m}$; $\frac{\alpha^n}{\alpha^m}=\alpha^{n-m}$

$\frac{1}{\alpha^n}=\alpha^{-n}$; $\sqrt[m]{\alpha^n}=\alpha^{\frac{n}{m}}$

$(\alpha^n)^m=\alpha^{nm}$; $\alpha^0=1$

Показникова функція



Логарифми

$\alpha^c=b\Leftrightarrow\log_a b=c$

α – *основа*; $\ln b$; $\lg b$

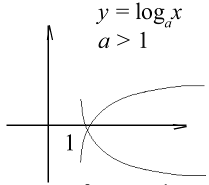
$\log m+\log n=\log mn$

$\log m-\log n=\log\frac{m}{n}$

$k\log m=\log m^k$

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}=\frac{\ln b}{\ln a}=\frac{\lg b}{\lg a}$

Логарифмічна функція



Тригонометрія

$\sin^2 б+\cos^2 б=1$

$tgб=\frac{\sin a}{\cos a}$; $ctgб=\frac{\cos a}{\sin a}=\frac{1}{tga}$

$\sin(б\pm в)=\sin б\cos в\pm\sin в\cos б$

$\cos(б\pm в)=\cos б\cos в\mp\sin б\sin в$

$\sin 2б=2\sin б\cos б;$

$\cos 2б=\cos^2 б-\sin^2 б$

$\cos^2 б=\frac{1+\cos 2a}{2};$

$\sin^2 б=\frac{1-\cos 2a}{2}$

$\sin б\cos в=\frac{1}{2}(\sin(б+в)+\sin(б-в))$

$\sin б\sin в=\frac{1}{2}(\cos(б-в)-\cos(б+в))$

$\cos б\cos в=\frac{1}{2}(\cos(б+в)+\cos(б-в))$

$\sin б+\sin в=2\sin\frac{б+в}{2}\cos\frac{б-в}{2}$

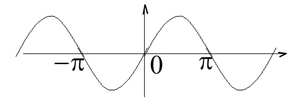
$\cos б+\cos в=2\cos\frac{б+в}{2}\cos\frac{б-в}{2}$

$\sin б-\sin в=2\sin\frac{б-в}{2}\cos\frac{б+в}{2}$

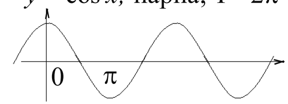
$\cos б-\cos в=-2\sin\frac{б+в}{2}\sin\frac{б-в}{2}$

sin x		cos x		tg x, ctg x	
+	+	-	+	-	+
-	-	-	+	+	-

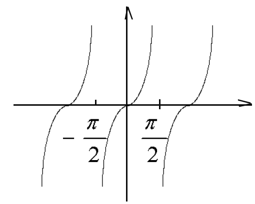
$y=\sin x$; непарна; T $=2\pi$



$y=\cos x$; парна; T $=2\pi$



$y=\text{tg}\,x$; непарна; T $=\pi$



	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ДОДАТОК

Тема: системи числення

1. Перевести задане число з двійкової системи числення в
а) вісімкову; б) шіснадцяткову; в) десяткову системи числення

1. 10011101110,0110001
2. 11011100100,1011101
3. 10110011101,1110111
4. 110010111010,11011011
5. 111000100111,00100101
6. 100011110011,10001001

2. Перевести задане число з вісімкової системи числення в
а) двійкову; б) десяткову системи числення

1. 236,71
2. 463,45
3. 520,14
4. 671,23
5. 746,03
6. 354,12

3. Перевести задане число з шіснадцяткової истеми числення в
а) двійкову; б) десяткову системи числення

1. 2A,3E
2. B4,17
3. 79,A2
4. CB,45
5. 24,6
6. 61,AC

4. Перевести задане число з десяткової системи числення в двійкову

1. 347,421
2. 259,371
3. 456,334
4. 297,453
5. 703,261
6. 523,671

5. Перевести число з завдання 4 з десяткової в вісімкову або шіснадцяткову системи числення.

Тема: Наближені обчислення

1. Записати означення абсолютної похибки наближеного числа. Яке число можна взяти як границю абсолютної похибки?
2. Знайти абсолютну та відносну похибки числа, якщо всі його цифри вірні, а $x = 0{,}28$.
3. Визначити вірні і сумнівні цифри:

   $3{,}47 \pm 0{,}01$ $\quad$ $3{,}471 \pm 0{,}005$ $\quad$ $15{,}64 \pm 0{,}2$.
4. Виконати дії, користуючись правилами дій над наближеними числами: $0{,}347 : 2{,}4$.

Тема: Наближені обчислення

1. Назвіть джерела отримання наближених чисел. Запишіть означення абсолютної та відносної похибок наближеного числа.
2. Вкажіть, скільки вірних цифр мають числа.

   а) $5{,}74 \pm 0{,}01$ $\quad$ б) $3{,}483 \pm 0{,}003$ $\quad$ в) $0{,}843 \pm 0{,}025$.
3. Округліть число до десятих та знайдіть абсолютну та відносну похибки заокруглення $x = 3{,}4857$.
4. Виконати дії, користуючись правилами дій над наближеними числами: $3{,}48+0{,}3451+25{,}6$.

Тема: Наближені обчислення

1. Записати наближені числа через вірні цифри:

   а) $15{,}831 \pm 0{,}1$ $\quad$ б) $5{,}637 \pm 0{,}003$ $\quad$ в) $0{,}546 \pm 0{,}07$.
2. Елекетричне коло складається з трьох послідовно з’єднаних провідників з опорами

   $R_1 = 5{,}74 \pm 0{,}01$ $\quad$ $R_2 = 3{,}483 \pm 0{,}003$ $\quad$ $R_3 = 6{,}843 \pm 0{,}025$.

   Обчисліть загальний опір кола за формулою $R = R_1 + R_2 + R_3$. Знайти границю абсолютної та відносної похибок результату.
3. Знайти абсолютну похибку наближеної рівності $11/40 \approx 0{,}27$.
4. Яке вимірювання проведене більш точно: 0,3281 чи 184,4?

Тема: Наближені обчислення

1. Дати означення абсолютної та відносної похибки числа.
2. Як визначити вірні цифри наближеного числа?
3. Обчислити наближене значення результату, користуючись:

   а) правилами дій над наближеними числами;

   б) формулами для оцінки границь похибок.

Дано: $a = 4{,}53;\ b = 0{,}391$ $\left|\begin{array}{l} h_{a+b} = h_a + h_b \\ \varepsilon_{ab} = \varepsilon_a + \varepsilon_b \\ \varepsilon_{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{n}\varepsilon_a \\ \varepsilon_{a^n} = n\varepsilon_a \end{array}\right.$

Знайти: $a – b$; $a{:}b$; $\sqrt[3]{a}$; b^5.

Тема: Наближені обчислення

1. Сформулюйте правило округлення чисел.
2. Яке з вимірювань більш точне

   $5{,}641 \pm 0{,}001$ чи $2 \cdot 10^3 \pm 1$?
3. Обчислити наближене значення результату, користуючись формулами для оцінки границь похибок результатів дій. Результат записати через вірні цифри.

Дано: $a = 3{,}01;\ b = 2{,}6$ $\left|\begin{array}{l} h_{a+b} = h_a + h_b \\ \varepsilon_{ab} = \varepsilon_a + \varepsilon_b \\ \varepsilon_{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\varepsilon_a \\ \varepsilon_{a^3} = 3\varepsilon_a \end{array}\right.$

Знайти: $a+b$; $a \cdot b$; $\sqrt{b}$; a^3.

Тема: Комплексні числа

Дано: $z_1 = 7 - 3j;\ z_2 = 1+3j;\ z_3 = -2 - 4j.$			
Знайти	**Відповіді**		
1. $z_2 - z_1 - z_3$	1. $6 - 4j$ 2. Інша відповідь	3. $-4 + 10j$ 4. $-8 + 2j$	5. $10 + 4j$
2. $z_2 \cdot z_3$	1. $-14 - 10j$ 2. $-2 - 4j$	3. 10 4. Інша відповідь	5. $10 - 10j$
3. $\frac{z_1}{z_2}$	1. $-0{,}2 - 2{,}4j$ 2. $7 - j$ 3. $\frac{1}{5} + 2\frac{2}{5}j$	4. $\frac{2}{9} + 2\frac{2}{3}j$ 5. Інша відповідь	
4. z_2^2	1. Інша відповідь 2. $-8 + 6j$	3. $10 + 6j$ 4. -8	5. $-8 - 6j$
5. $2j^{63} - 4j^{36} + 3j^{22} - j^{13}$	1. $-7 - 3j$ 2. $-2j$	3. $-5 - j$ 4. Інша відповідь	5. $4 - 2j$

Тема: Комплексні числа

Дано: $z_1 = -2 - 3j;\ z_2 = 2+3j;\ z_3 = 4 + 2j$			
Знайти	**Відповіді**		
1. $z_2 - z_1 - z_3$	1. $-4 + 2j$ 2. $8j$	3. Інша відповідь 4. $4 + 2j$	5. $8 + 8j$
2. $z_2 \cdot z_1$	1. $-13 - 12j$ 2. Інша відповідь	3. -13 4. $5 - 12j$	5. $-4 - 9j$
3. $\frac{z_2}{z_3}$	1. $0{,}1 + 0{,}8j$ 2. $0{,}5 - 1{,}5j$	3. $0{,}7 + 0{,}8j$ 4. Інша відповідь	5. $\frac{1}{6} + 1\frac{1}{3}j$
4. z_3^2	1. Інша відповідь 2. $12 - 8j$	3. $20 - 16j$ 4. 20	5. $12 - 16j$
5. $2j^{63} - 4j^{36} + 3j^{22} - j^{13}$	1. $4 + 2j$ 2. $1 - j$	3. $-1 + j$ 4. $9 - 5j$	5. Інша відповідь

Тема: Комплексні числа

Знайти	Відповіді
1. Спростити $i^{100}+i^{98}+i^{63}$	1. $-i$ 2. Інша відповідь 3. $2i+3$ 4. $2i$
2. Виконати дії: $\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right):\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$	1. $1/2e^{i\frac{\pi}{4}}$ 2. $1/2e^{i\frac{\pi}{6}}$ 3. Інша відповідь 4. $1/8e^{i\frac{\pi}{6}}$
3. Виконати дії: $(1-i)^2\cdot 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.	1. $4\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 2. $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ 3. $3\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ 4. Інша відповідь
4. Виконати дії: $\sqrt{11}(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)(3+4\sqrt{2}\,i)$	1. Інша відповідь 2. $3\sqrt{11}+4\sqrt{22}i$ 3. $-3\sqrt{11}+4\sqrt{22}i$ 4. $-3\sqrt{11}+2\sqrt{22}i$
5. Записати в алгебраїчній формі: $\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$	1. $-i+i\sqrt{3}$ 2. Інша відповідь 3. $\sqrt{3}+i$ 4. $-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$
6. Записати в алгебраїчній формі: $2\cdot e^{-i\frac{5\pi}{3}}$	1. $2\sqrt{3}-i2\sqrt{2}$ 2. $-2-\sqrt{2}i$ 3. Інша відповідь 4. $-2\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

Тема: Комплексні числа

1. Представити в показниковій формі $z=2-2i;\quad z=\sqrt{3}-i$
2. Виконати дії і записати результат в показниковій формі:

a) $7(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^3$;

b) $\frac{24(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}$;

c) $\frac{i^6+i^5}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}$.

Тема: Комплексні числа

Знайти	Відповіді
1. Спростити $i^{37}+i^{123}-i^{85}+i^{202}$.	1. $-2-i2$ 3. $2+i2$ 2. Інша відповідь 4. $2-i$
2. Виконати дії: $2(\cos150^0+i\sin150^0)$: $3(\cos105^0+i\sin105^0)$	1. $2/3e^{i45^0}$ 3. Інша відповідь 2. $0{,}6e^{i60^0}$ 4. $0{,}6e^{i90^0}$
3. Виконати дії: $(1+i\sqrt{3}):4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$	1. $8e^{i\frac{\pi}{4}}$ 2. $8\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ 3. $3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ 4. Інша відповідь
4. Виконати дії: $5\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}):(3+2i)$	1. Інша відповідь 2. $5\sqrt{12}e^{i135^0}$ 3. $2\sqrt{3}e^{i335^0}$ 4. $5\sqrt{3}e^{i150^0}$
5. Записати в алгебраїчній формі: $\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{3}}$	1. $\sqrt{3}+i$ 3. $\frac{5}{13}-i\frac{25}{13}$ 2. Інша відповідь 4. $-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$
6. Записати в алгебраїчній формі: $2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$	1. $1+i\sqrt{3}$ 3. Інша відповідь 4. $2-2i$ 2. $-2-\sqrt{2}i$

Тема: Комплексні числа

1. Представити в показниковій формі $z=\sqrt{3}-3i,\quad z=-1+i$
2. Виконати дії і записати результат в показниковій формі:

a) $2(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12})^2;$

b) $2(\cos120°+i\sin120°)\cdot3(\cos60°+\sin60°);$

c) $\dfrac{(-\sqrt{2-\sqrt{2}i})^6}{12e^{-i\frac{\pi}{2}}}.$

Тема: Границя функції						1
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x}{2x^3-x^2-x}$	**-2**	інша відповідь	**1**	**0**	$\frac{1}{2}$	**2**
2. $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{4a^2-x^2}{x-2a}$	$4a$	**2**	$\frac{1}{2}$	інша відповідь	$2a$	$-4a$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$	**1**	**4**	**3**	-1	інша відповідь	-4
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{2x+2x^2-8}$	∞	інша відповідь	**0**	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$
5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{1-\sqrt{x+3}}$	**2**	**1**	-2	**0**	інша відповідь	$\frac{1}{3}$
6. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{2a}{x^2-a^2}-\dfrac{1}{x-a}\right)$	a	інша відповідь	$\frac{1}{2a}$	$-a$	$-\frac{1}{2a}$	**2**

Тема: Границя функції						2
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$	інша відповідь	**8**	**1**	**-32**	-8	**0**
2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-7x+10}$	$\frac{4}{3}$	**5**	інша відповідь	$\frac{3}{4}$	**1**	$\frac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4+8x^2}{x^2}$	**1**	інша відповідь	**3**	**0**	$\frac{4}{3}$	**8**
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{3x^2-x-1}$	**3**	$-\frac{1}{3}$	**0**	$\frac{1}{3}$	інша відповідь	$\frac{1}{2}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$	інша відповідь	**0**	$\frac{1}{8}$	**2**	$-\frac{1}{8}$	**3**
6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3+a^3}{x^2+a^2}$	$-\frac{3}{2}a$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}a$	**0**	$\frac{3}{2}a$	інша відповідь

Тема: Границя функції						3
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4x}{x}$	$\dfrac{1}{2}$	**4**	**0**	$\dfrac{1}{4}$	інша відповідь	**- 4**
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$	$-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$	$\sqrt{a}$	$\dfrac{1}{2}$	інша відповідь	**0**	$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4}{x^2+5x^3}$	**4**	$\dfrac{5}{3}$	**0**	$\dfrac{3}{5}$	інша відповідь	$\dfrac{4}{5}$
4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-5x}{15-15x^2}$	$\dfrac{1}{18}$	$\dfrac{1}{3}$	**5**	інша відповідь	**3**	$-\dfrac{1}{18}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}$	інша відповідь	**1**	**2**	**5**	**- 1**	$\dfrac{1}{2}$
6. $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{4a^2-x^2}{x-2a}$	**4**	інша відповідь	$-4a$	$2a$	**2**	$4a$

Тема: Границя функції						**4**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$	$-\dfrac{3}{2}$	**3**	**4**	$\dfrac{3}{10}$	інша відповідь	**- 4**
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$	**2**	**- 3**	**3**	інша відповідь	**0**	**5**
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x-2a}{5x^2+5a^2}$	$\dfrac{1}{5a}$	a	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{a}$	інша відповідь	$-\dfrac{1}{5a}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{4x^2+7x-5}$	$\dfrac{1}{5}$	інша відповідь	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{3}{4}$	$-\dfrac{4}{7}$	∞
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-6x}{7x-8x^2}$	$\dfrac{5}{7}$	**0**	$\dfrac{5}{8}$	$-\dfrac{6}{7}$	$\dfrac{3}{4}$	інша відповідь
6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$	**9**	**27**	**- 3**	**0**	**3**	інша відповідь

Тема: Похідна.	**1**

Опорні знання	**Знайти y'.**
$(U+V)' = U' + V'$ $(U \cdot V)' = U'V + U \cdot V'$ $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$ $f'(U(x)) = f'(U) \cdot U'(x)$ $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ $\left(a^U\right)' = a^U \ln a \cdot U'(x)$ $C' = 0$ $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	1. $y=2^x+3^x+5^x$ 2. $y=4^x \cdot 5^x$ 3. $y=4e^x \cdot 2^x$ 4. $y = \frac{1+2^x}{1+2^x}$ 5. $y = \frac{10^x}{10^x - 3}$ 6. $y = 3^{2x^2}$ 7. $y = 4^{\sqrt{x}}$ 8. $y = 5^{\sqrt{1+e^x}}$ 9. $y = 6^{\frac{x}{x+1}}$ 10. $y = \sqrt{2^x - 1}$ 11. $y=3x^2 \cdot 2^{x+1}$ 12. $y = \sqrt{x^2+1} \cdot 7^{\sqrt{x^2+1}}$

Тема: Похідна.	**2**

Опорні знання.	**Знайти y'.**
$(U+V)' = U' + V'$ $(U \cdot V)' = U'V + U \cdot V'$ $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$ $f'(U(x)) = f'(U) \cdot U'(x)$ $\left(e^x\right)' = e^x$ $\left(e^U\right)' = e^U \cdot U'$ $C' = 0$ $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	1. $y = 3e^x + x^3 - 1$ 2. $y = e^x \cdot x^2$ 3. $y = 2e^x \cdot \sqrt{x}$ 4. $y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ 5. $y = 3x^{10} - 4e^x$ 6. $y = e^{x^2}$ 7. $y = 4e^{\sqrt{x}}$ 8. $y = e^{2x+1}$ 9. $y = 3e^{\frac{x+1}{2-x}}$ 10. $y = 3e^{\sqrt{x+1}} \cdot x^2$ 11. $y = e^{3x}\sqrt{x^2+1}$ 12. $y = e^{\sqrt{x^2+1}}$ 13. $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{\sqrt[3]{3x+1}}$ 14. $y = \sqrt[4]{3e^x + x\sqrt{x}}$

<table>
<tr><td colspan="2"><u>Тема: Похідна</u>.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Опорні знання.</td><td colspan="2">Знайти y'.</td></tr>
<tr><td>
$(U+V)' = U' + V'$
$(U \cdot V)' = U'V + U \cdot V'$
$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$
$f'(U(x)) = f'(U) \cdot U'(x)$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$
$\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\left(e^x\right)' = e^x$
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
</td><td colspan="2">
1. $y = \sin x + 3\cos x$ 11. $y = \cos^2 x$
2. $y = 4\mathrm{ctg}x - 3\mathrm{tg}x$ 12. $y = x^3 tg\sqrt{x}$
3. $y = 5\sin x \cdot \mathrm{tg}x$ 13. $y = \cos 5^x$
4. $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$ 14. $y = 2^x \mathrm{ctg} 3^x$
5. $y = \dfrac{tgx + 1}{tgx - 1}$ 15. $y = 4\sin 5x$
6. $y = \mathrm{tg}x\,(\cos x + \sin x)$ 16. $y = 3\cos\dfrac{x}{x+1}$
7. $y = \sin\sqrt{x}$ 17. $y = \sin\sqrt{1-x^2}$
8. $y = \cos x^2$ 18. $y = tg\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
9. $y = \sqrt{\sin x}$ 19. $y = \cos^2\sqrt{tg\dfrac{3x}{x+1}}$
10. $y = \sqrt{1-\sin x}$ 20. $y = e^{\cos x}$
</td></tr>
</table>

Тема: Похідна.		**4**
Опорні знання.	**Знайти y', y''.**	
$a^0=1$	1. $y=x^{12}$	11. $y=\frac{x^2\cdot x^{-3}}{x^4}$
$a^1=a$	2. $y=3x^7$	12. $y=\frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$
$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$	3. $y=2x^{-8}$	13. $y=7x^2-3x^5+2$
$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	4. $y=21x^{\frac{4}{7}}$	14. $y=\frac{3}{x^3}+\frac{4}{9x^4}-x$
$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$	5. $y=12x^{-\frac{3}{4}}$	15. $y=5\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}$
$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	6. $y=\frac{1}{x^{14}}$	16. $y=\sqrt[3]{x^7}-\frac{3}{4\sqrt{x^5}}$
$\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$	7. $y=\frac{3}{x^7}$	17. $y=\frac{3x^4-5x^2}{x^7}$
$C'=0\ C=const$	8. $y=\sqrt[3]{x^5}$	18. $y=\frac{2x^7-x^{-3}}{3x^2}$
$\left(U(x)+V(x)\right)'=U'(x)+V'(x)$	9. $y=\frac{1}{\sqrt{x^7}}$	19. $y=\frac{\sqrt[3]{x^4}-2x^{-\frac{2}{5}}}{4\sqrt{x}}$
$\left(Cf(x)\right)'=C\left(f(x)\right)'$	10. $y=\frac{4}{7\sqrt[8]{x^5}}$	20. $y=\sqrt[4]{x^3}+\frac{12-x}{\sqrt[3]{x}}$

Тема: Похідна та її застосування.	**1**

1. Знайти похідну функції. $y = \dfrac{2^{3x} + \sqrt{\ln x}}{1 + x^2} + e^{\frac{4}{x}}$

2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

   $y = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 20$.

3. Сила струму I (в амперах) змінюється залежно від часу t (в секундах) за законом:

$$I = 2t^2 - 5t$$

   Знайдіть прискорення зміни силу струму.

Тема: Похідна та її застосування.	**2**

1. Знайти похідні функцій.

$$y = 4x^3 + 5\sqrt[3]{x} - 12;\ y = \left(2e^x + 1\right)tgx;\ y\frac{\sin x}{1 + \cos x};$$

$$y = 2^{\sin x};\qquad y = \sqrt{1 + x^2};\qquad y = e^{x^2}$$

2. Знайти найбільше та найменше значення функції на проміжку

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{3}\ ,\qquad \text{якщо } [-2; 2]$$

3. Тіло рухається по закону:

$$S = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + 1$$

   (t - в секундах, S - в метрах). Знайти прискорення в момент часу t = 5с.

Тема: Похідна та її застосування.	**3**

1. Знайти похідну функції: $y = \ln\sqrt{2x-1}\left(5^{x} - e^{\sqrt{x}}\right)$
2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

   $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 15$.
3. Знайти швидкість тіла, яке рухається по закону:

$$S = t^3 + 5t^2 + 4$$

(S - в метрах, t - в секундах) в момент часу $t = 2$с.

Тема: Похідна та її застосування.	**4**

1. Знайти похідну функції:

$$y = \ln\frac{x}{x^2+1}\cdot\sqrt{1+e^{3x}}$$

2. З куска дроту завдовжки l зігнути прямокутник, що має найбільшу площу. Знайти сторони прямокутника.
3. Тіло рухається по закону:

$$S = 2t^3 - t^2 - 4$$

В який момент часу швидкість руху найменша?

Тема: Диференціал функції	**1**
1. Дати геометричне тлумачення диференціалу функції. 2. Знайти диференціали функцій. $y=\sqrt{1+x^2}+4^{x^2+1};\ y=x^3\ln x;\ y=\dfrac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$ 3. Обчислити диференціал шляху, якщо $S=\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{1}{2}t^2+t-2$ при $t=3$, $\Delta t=0{,}02$.	
Тема: Диференціал функції	**2**
1. Дати означення диференціалу функції. 2. Знайти диференціали функцій $y=2\sin 5x+3\cos 4x;\ y=xe^{x^2};\ y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 3. Знайти наближене значення приросту функції $y=2x^3-3x^2+4$ при зміні аргументу від 3 до 3,001.	
Тема: Диференціал функції	**3**
1. Знайти диференціали функцій. $y=\ln(x+\ln x)e^x;\ y=e^{\sin 3x}+2^{\sqrt{1+x^2}}$ 2. Знайти наближене значення: $\sqrt{8{,}94}$. 3. Вивести загальну формулу для обчислення наближених значень функції $y=\ln(1+x)$ (при зміні аргументу від x_0 до $x_0+\Delta x$).	

Тема: Невизначений інтеграл.	**1**
1. $\int\left(5^x+3\sin 2x+4\right)dx$ 2. $\int x\sqrt[3]{\left(3x^2-1\right)^2}\,dx$ 3. $\int x\cos x dx$	4. $\int\left(6-\frac{x^3}{3\sqrt{x}}+\frac{4}{x}-x^7\right)dx$ 5. $\int\frac{\cos x dx}{4+3\sin x}$ 6. $\int\frac{xdx}{4+3x^2}$

Тема: Невизначений інтеграл	**2**
1. $\int\left(\frac{4}{4+x^2}+\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}+3\right)dx$ 2. $\int\frac{x^2dx}{5-2x^3}$ 3. $\int xarctgxdx$	4. $\int tg^2 xdx$ 5. $\int\frac{\cos xdx}{\left(3\sin x+1\right)^3}$ 6. $\int\cos xdx\cdot\left(3\sin x+1\right)^3dx$

Тема: Невизначений інтеграл	**3**
1. $\int\sin^2 5xdx$ 2. $\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-2t^3}}$ 3. $\int arctgxdx$	4. $\int\frac{\ln x}{x}dx$ 5. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)dx$ 6. $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

Тема: Визначений інтеграл	**1**

1. Обчислити інтеграли:

$$\int_0^{\pi/2}(\cos 3x-\sin 2x)dx; \qquad \int_0^1 x^2\left(5-2x^3\right)dx; \qquad \int_0^1 xe^x\,dx.$$

2. Знайти середнє значення функції $y = 2x^2+x$ на проміжку [1; 2].

3. Знайти площу фігури, обмежену лініями.

$$y = x^2,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0.$$

Тема: Визначений інтеграл	**2**

1. Обчислити інтеграли

$$\int_{-1}^{1}\left(5-x-3x^2\right)dx; \qquad \int_0^1 x^2e^{x^3+1}dx; \qquad \int_0^{\pi/4}x\sin x dx.$$

2. Знайти середнє значення функції $y=\frac{1}{2}\sin 3x$ на проміжку $[0; \frac{\pi}{6}]$.

3. Знайти площу фігури, обмежену лініями

$$y=\frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0.$$

Тема: Визначений інтеграл.	**3**

1. Обчислити інтеграли

$$\int_0^{\pi/2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)dx; \qquad \int_0^2\frac{xdx}{\sqrt{25-4x^2}}; \qquad \int_0^{\pi/3}x\cos xdx.$$

2. Знайти середнє значення функції $y = \cos^2 x$ на проміжку $[0; \frac{\pi}{4}]$.

3. Знайти площу фігури, обмежену лініями.

$$y = x^2+2,\ \ y = 2x+2$$

Тема: Диференціальні рівняння	**1**
1. Розв'язати задачу Коші. а) $y''-2y'-3y=0$, при $y(0)=8$, $y'(0)=0$; б) $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, при $y(0)=1$. 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння. а) $y'-\dfrac{y}{x}=0$; б) $\sin x dx+\dfrac{dy}{\sqrt{y}}=0$.	

Тема: Диференціальні рівняння	**2**
1. Розв'язати задачу Коші а) $y''+y'-20=0$, при $y(0)=9/5$, $y'(0)=0$; б) $y'=xe^{-y}$, при $y(1)=0$. 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння а) $\dfrac{dy}{x-1}=\dfrac{dx}{y-2}$; б) $y^2dx=e^x dy$	

Тема: Диференціальні рівняння	**3**
1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння. а) $y'=2\cos x-3$; б) $y'=x\sqrt{y}$; в) $y''-4y'+5y=0$. 2. Розв'язати задачу Коші. а) $y'=2+y$, при $y(0)=3$ б) $y''=2e^{4x}$, при $y(0)=1$, $y'(0)=1$	

Тема: Гіперболічні функції	**1**

1. Довести тотожність $\dfrac{1+\operatorname{cth}^2 x}{2\operatorname{cth} x}=\operatorname{cth} 2x$

2. Знайти похідні функцій $y=\sqrt{\operatorname{ch} x}$, $\quad y=\operatorname{th} x-\sqrt{x^3}$

3. Знайти інтеграл: $\int \operatorname{cth} x dx$

Тема: Гіперболічні функції	**2**

1. Довести тотожність: $\dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}=\operatorname{th}\dfrac{x}{2}$

2. Знайти похідну функції $y=\operatorname{ch}^2 x,\ y=\operatorname{cth} 3x+4x^2$

3. Знайти інтеграл: $\int \operatorname{ch}^3 x dx$

Тема: Степеневі ряди	**1**

1. Встановити інтервал збіжності степеневого ряду

$$1+\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^2}{5^2\sqrt{3}}+\frac{x^3}{5^3\sqrt{4}}+\cdots$$

2. Розкласти в ряд Маклорена функцію: $y=e^{3x}$.

Тема: Степеневі ряди	**2**

1. Встановити інтервал збіжності степеневого ряду

$$1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\cdots$$

2. Розкласти в ряд Маклорена функцію: $y=\sin 4x$

Тема: Числові ряди	**1**

Користуючись відомими ознаками збіжності числових рядів, дослідити на збіжність наступні ряди:

1. $1+\dfrac{3}{1}+\dfrac{3^2}{1\cdot 2}+.....+\dfrac{3^n}{n!}+....$
2. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2\cdot 4^2}+\dfrac{1}{3\cdot 4^3}+\dfrac{1}{4\cdot 4^4}+...+\dfrac{1}{n\cdot 4^n}+...$
3. $\dfrac{4}{7}+\dfrac{7}{12}+\dfrac{10}{17}+...+\dfrac{3n+1}{5n+2}+...$
4. $1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}-...+(-1)^n\dfrac{2n+1}{2^n}+...$
5. $\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{7}\right)^3+\left(\dfrac{5}{9}\right)^4+...+\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n+...$

Тема: Числові ряди	**2**

Користуючись відомими ознаками збіжності числових рядів, дослідити на збіжність наступні ряди:

1. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+...+\dfrac{n}{2^n}+...$
2. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3^2}+\dfrac{1}{3\cdot 3^3}+\dfrac{1}{4\cdot 3^4}+...+\dfrac{1}{n\cdot 3^n}+...$
3. $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 5}+\dfrac{1}{\ln 6}-...$
4. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+...+\dfrac{n}{n+1}+...$
5. $\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{3}{3}\right)^2+\left(\dfrac{5}{4}\right)^3+\left(\dfrac{7}{5}\right)^4+...+\left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^n+...$

Тема: Числові ряди	**1**

1. Встановити збіжність чи розбіжність ряду з допомогою ознаки порівняння рядів

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+.....+\frac{1}{(3n-1)^2}+....$$

2. Дослідити по ознаці Даламбера збіжність рядів

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+...+\frac{1}{(2n-1)2^n}+...$$

3. Встановити абсолютну чи умовну збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Тема: Числові ряди	**2**

1. Встановити збіжність чи розбіжність ряду з допомогою ознаки порівняння рядів

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+....+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+....$$

2. Дослідити по ознаці Даламбера збіжність рядів

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}+...$$

3. Встановити абсолютну чи умовну збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2$$

Тема: Ряди	**1**

1. Довести, що ряд збіжний абсолютно

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^n}+\ldots$$

2. Розкласти в ряд Маклорена функцію: $y=e^{4x}$.

3. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y=\begin{cases}2 \;\; при \;\; -\pi<x<0\\ -2 \;\; при \;\; 0<x<\pi\end{cases}$

Тема: Ряди	**2**

1. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\ldots+\frac{n}{5^n}+\ldots.$

2. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y=e^{3x}$.

3. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y=\begin{cases}-1 \;\; при \;\; -\pi<x<0\\ 1 \;\; при \;\; 0<x<\pi\end{cases}$

Тема: Ряди	**3**

1. Довести, що ряд збігається умовно

$$1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{n}{n+1}+\ldots$$

2. Розкласти в ряд Маклорена функцію: $y=\cos\frac{x}{2}$. Обчислити значення функції при $x = 0{,}2$, зберігши 4 перших члени розкладу.

3. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y=|x|$

Тема: Теорія ймовірності.	**1**
1. Розв’яжіть рівняння: $C_{15}^{5}=3x$. 2. В ящику 6 куль, серед яких 3 білі. Вибрали 2 кулі. Яка ймовірність, що обі кулі білі? 3. З 12 білетів беруть спочатку один, а потім другий. Яка ймовірність, що номер першого взятого білета парний, а другого - непарний?	

Тема: Теорія ймовірності.	**2**
1. Розв’яжіть рівняння: $A_{7}^{3}=42x$. 2. Знайти ймовірність того, що навмання взяте двоцифрове число буде кратним а) або 3, або 5; б) і 3, і 5 одночасно. 3. В ящику 10 деталей, з яких 3 браковані. Яка ймовірність, що серед 4 взятих деталей 2 браковані.	

Тема: Теорія ймовірності.	**3**
1. Обчислити: $(A_{15}^{5}+C_{8}^{2})\cdot P_{3}$. 2. Яка ймовірність вгадати шестизначний телефонний номер, якщо серед цифр немає нуля і цифри не повторюються? 3. Яка імовірність з 32 чисел вибрати парне число?	

Тема: Теорія ймовірності.	**1**

1. В групі 25 студентів, серед яких 5 - відмінники, 12 - вчаться лише на 5 та 4, 6 - вчаться задовільно, а 2 учні - не встигають. Яка ймовірність, що викликаний по списку учень або відмінник, або не встигаючий.
2. Гральну кістку кидають двічі. Знайти $P(A \cdot B)$, якщо подія A полягає в тому, що випало 1 очко, а подія B - в тому, що випала парна кількість очок.
3. Знайти $M(X)$ і $D(X)$, якщо закон розподілу дискретної випадкової величини X має вигляд.

x_i	4,9	5,3	4,1	5,8
P_i	0,3	0,4	0,1	0,2

Тема: Теорія ймовірності.	**2**

1. В групі 15 хлопців і 10 дівчат. Треба вибрати 5 чергових. Яка ймовірність, що будуть вибрані а) лише хлопці; б) лише дівчата; в) 3 дівчат і 2 хлопці; г) не більше однієї дівчини?
2. В одній урні 4 білих та 8 чорних куль, а в другій - 3 білих та 9 чорних куль. З кожної урни вийняли по одній кулі. Яка ймовірність, що обі кулі білі?
3. Знайти $M(X)$ і $D(X)$, якщо закон розподілу дискретної випадкової величини X має вигляд.

x_i	7,3	8,1	7,9	8,4
P_i	0,1	0,5	0,3	0,1

Тема: Елементи лінійної алгебри	**1**

Дано матриці:

$$A=\begin{pmatrix}2\ 3\ 5\\0\ 6\ 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1\ 5\ 6\\4\ 6\ 9\\0\ 1\ 3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}4\\5\\7\\1\end{pmatrix}.$$

Завдання:

1. Визначити тип матриць A, B, C.
2. Записати матриці A, C в загальному вигляді.
3. Записати значення елементів $b_{12},, \ b_{23}, b_{22}$.
4. Знайти $A+B, \ AB\ , \ BC$ якщо ці дії можливі.
5. Перевірити, чи матриці A,B є комутативними (чи $AB = BA$)
6. Довести, що $A\ A^T$ - симетрична матриця.

Тема: Елементи лінійної алгебри	**2**

Дано матриці:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5 & 7\\0 & 1 & 6 & 1\\4 & 0 & 5 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 6\\1 & 5\\3 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2 & 9 & 0\\7 & 1 & 5\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Завдання

1. Встановити вид заданих матриць.
2. Знайти добутки AB та BA, AC та CA якщо це можливо.
3. Визначити, чи буде матриця $(AB)^{\mathrm{T}}$ симетричною.
4. Довести, що $EC= CE$
5. Знайти матрицю D таку, що $B+D= E$

Тема: Елементи лінійної алгебри	1

1. Знайти матрицю AB, встановити її ранг та скласти матрицю $(AB)^{-1}$

$$A=\begin{pmatrix}2&3&5\\0&6&1\\1&2&4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1&5&6\\4&6&9\\2&4&6\end{pmatrix}$$

2. Встановити ранг матриці.

$$D=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\2&3&1&1\\4&-1&0&2\\2&1&-1&2\end{pmatrix}$$

Тема: Елементи лінійної алгебри	2

1. Знайти матрицю AB, встановити її ранг та скласти матрицю$(AB)^{-1}$

$$A=\begin{pmatrix}3&4&5\\0&1&6\\4&-6&5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2&9&3\\7&1&5\\1&6&8\end{pmatrix}$$

2. Встановити ранг матриці.

$$D=\begin{pmatrix}1&7&0&0\\3&4&5&1\\-1&2&3&-1\\2&5&0&3\end{pmatrix}$$

Тема: Елементи лінійної алгебри	**1**

1. Обчислити визначники даних матриць різними способами:
a) розкладом по зручному для вас стовбцю чи стрічці;
b) використавши властивості визначника для зменшення кількості обчислень;
c) спрощеним способом.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.Обчислити визначник довільним способом

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Тема: Елементи лінійної алгебри	**2**

1. Обчислити визначники даних матриць різними способами:
a) розкладом по зручному для вас стовбцю чи стрічці;
b) використавши властивості визначника для зменшення кількості обчислень;
c) спрощеним способом.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2.Обчислити визначник довільним способом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Тема: Вектори	**1**
1.Протилежними вершинами паралелограму є A(-4;2) і C(2;-3), B(0;1) і D. Знайти координати точки D. 2.Довести, що коли O – точка перетину медіан трикутника ABC, то $O\vec{A}+O\vec{B}+O\vec{C}=\vec{0}$	

Тема: Вектори	**2**
1.Використовуючи поняття векторного добутку векторів, обчисліть площу трикутника з вершинами $A(-2;-4;0),\ B(-2;-1;4),\ C(-2;3;1)$. 2. Довести, що чотирикутник з вершинами $A(1;4;3),\ B(2;3;5),\ C(2;5;1),\ D(3;43)$ - паралелограм.	

Тема: Вектори	**3**
1.Використовуючи поняття змішаного добутку векторів, обчисліть об'єм паралелепіпеда з сторонами OA, OB, OC, якщо $O(0;0;0;),\ A(3;-1;2),\ C(-1;1;-3),\ D(2;-1;1)$ 2.Дано вектори $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k},\ \vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$. Обчислити координати векторів $2\vec{a}-3\vec{b},\ (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$	

Тема: Вектори	**4**
1.Дано $A(2;-3;4),\ B(1;2;-1),\ C(3;-2;1),\ D(-1;2;0).$ Знайти $a)\ A\vec{B}+2D\vec{C};\qquad b)\ A\vec{C}\cdot B\vec{C};$ $c)\ A\vec{B}\times B\vec{D};\qquad d)[A\vec{D},C\vec{D}]$ 2.Відрізок AB, кінцями якого є точки $A(-6;1;12),\ B(9;4;-9)$ поділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.	

Тема: Пряма лінія на площині	**1**
1.Скласти рівняння прямої, яка а) проходить через точку $M(4;-3)$ перпендикулярно до прямої $5x-2y+10=0;$ б) проходить через точку $M(4;-3)$ паралелельно до прямої $5x-2y+10=0;$ в) проходить через точку $M(4;-3)$ і утворює з віссю ОХ кут 30^0. 2.Знайти відстань від точки $V(-2;4)$ до прямої $4x-3y-5=0.$	

Тема: Пряма лінія на площині	**2**
1.Трикутник задано вершинами $A(-7;3),\ B(2;-1),\ C(-1;-5).$ Знайти а) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC; б) рівняння медіани AD; в) рівняння висоти AK; г) кут В; д) рівняння бісектриси CN.	

Тема: Пряма лінія на площині	**3**
1. Сторони трикутника задано рівняннями $$11x+2y-21=0,\ 8x-3y+7=0,\ 3x+5y+21=0 .$$ Знайти координати вершин та рівняння середньої лінії трикутника. 2. Перевірити, чи прямі $3x-4y+12=0,\ \ 4x+3y-6=0$ перпендикулярні	

Тема: Пряма лінія на площині	**4**
1.При якому значенні параметра k прямі $y=5x-4,\ \ y=kx-2$ будуть а) перпендикулярні; б) паралельні; в) утворювати між собою кут 30^0. 2. До прямої, що проходить через точки $A(-4;2),\ \ B(8;4)$ проведено перпендикуляр через точку, яка ділить відрізок (від A до B) у відношенні 3:4. Скласти рівняння перпендикуляра.	

Тема: Криві другого порядку	**1**
1. Скласти рівняння кола, яке проходить через точку (8;5) і має центр а) у початку координат; б) в точці (-3;2). 2.Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі OX, якщо її дійсна вісь рівна 20, а уявна – 8. Яким буде ексцентриситет гіперболи ? 3. Дано рівняння параболи $x^2-8x-4y+28=0$. Знайти координати її вершини.	

ЛІТЕРАТУРА

1. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: В трьох книгах. – К.: Либідь, 1994.
2. Пискунов Н.С. Диференциальное и мнтегральное исчисление. – т. 1, 2. – М.: Наука, 1985.
3. Подольский В.А., Суходский А. М. Сборник задач по высшей математике. – М.: Высшая школа, 1974.
4. Глагольев Н.С., Орлов Е.А., Топазов Н.Г. Математика для заочних техникумов. – М.: Высшая школа, 1963.
5. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. – М.: Наука, 1980.
6. Богомолов М.В. Практичні заняття з математики – К.: Вища школа, 1983.
7. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика. – М.: Высшая школа, 1991.
8. Шкиль Н.И., Слепкань З.И., Дубинчук Е.С. Алгебра и начала анализа. – К.: Вежа, 1995.
9. Курс математики для техникумов. ч. 1, 2. Под ред. Матвеева Н.М. – М.: Наука, 1977.
10. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных диференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967.
11. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механіки, ч.1. – М.: Наука, 1967.
12. Демидович Б.П., Маран И.А. Основи вычислительной математики. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
13. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974.
14. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. – К.: Наукова думка, 1972.

Литвин І.І., Конопчук О.М., Желізняк Г.О.

Вища математика

Навчальний посібник

Керівник видавничих проектів *Б.А. Сладкевич*
Комп'ютерна верстка *Є.А. Ткаченко*
Дизайн обкладинки *Б.В. Борисов*

Підп. до друку 30.04.2004. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Друк офсетний.
Ум.друк.арк. _____ . Наклад _____ прим.
Зам. №

Видавництво «Центр навчальної літератури»,
вул. Електриків, 23, м. Київ, 04176
тел./факс 416-01-34, тел. 416-04-47, 416-20-63, 451-65-95
e-mail: office@uabook.com, meteor@uabook.com
офіційний сайт: www.cul.com.ua

Свідоцтво ДК №1014 від 16.08.2002