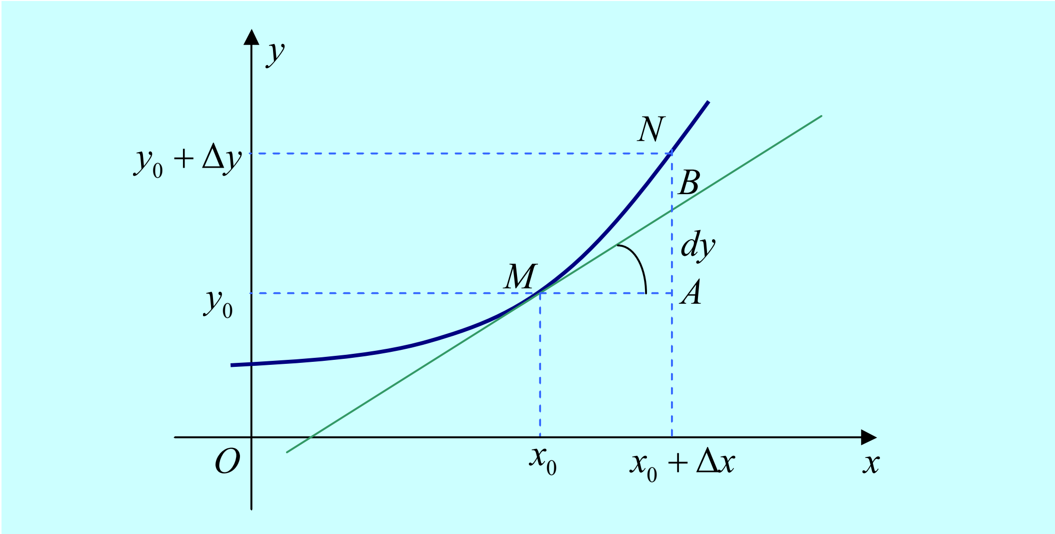
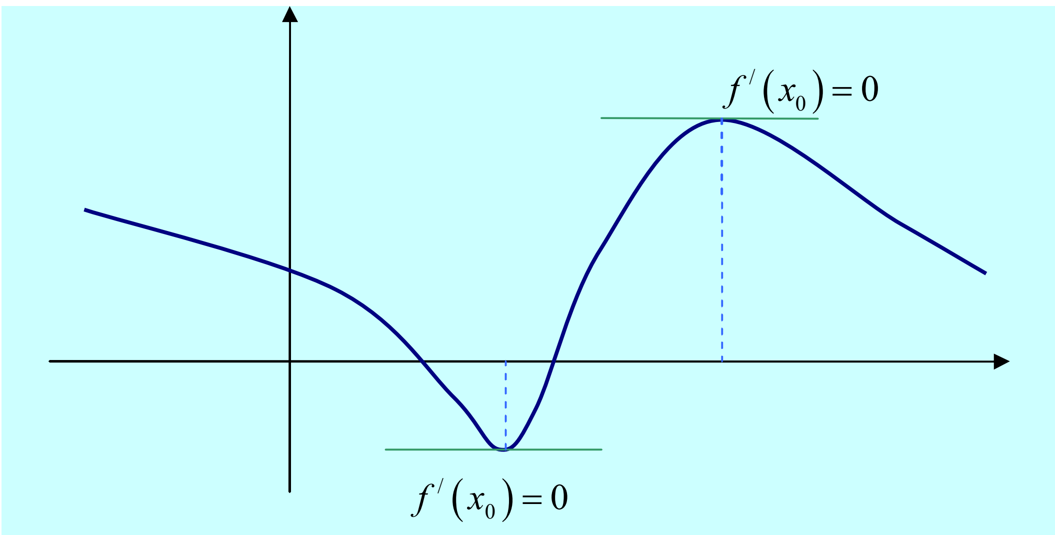


А.П. Харченко, В.О. Гаєвська, Г.В Лисянська

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ
ЧАСТИНА ІІ

Навчальний посібник



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

А.П. Харченко, В.О. Гаєвська, Г.В. Лисянська

ВИЩА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ
ЧАСТИНА ІІ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України

Харків „НТМТ” 2013

УДК 517
Х – 22

Рецензенти:
В.С.Михайленко, доктор фіз.-мат. наук, професор каф. вищої математики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (ХНАДУ)
А.В.Макаричев, кандидат фіз.-мат. наук, доцент каф. вищої математики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету (ХНАДУ)
А.П.Слесаренко, доктор фіз.-мат. наук, професор, лауреат держ. премії України, провідний співробітник ІПМаш НАН України
Є.В.Поклонський, кандидат фіз.-мат. наук, доцент каф. вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури (ХНУБА)
Н.Ю.Іохвідович, кандидат фіз.-мат. наук, доцент каф. вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури (ХНУБА)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист №1/11-347 від 16.01.13)

А.П. Харченко, В.О. Гаєвська, Г.В. Лисянська

Х-22 Вища математика в прикладах і задачах, частина II: Навчальний посібник. – Х.: „НТМТ”, 2013. – 233с.

ISBN 978-617-578-127-2

У навчальному посібнику наведено необхідний теоретичний матеріал з курсу «Вища математика » для розв’язання прикладів і задач, а також достатню кількість прикладів докладного розв’язання типових задач. Посібник містить варіанти домашніх завдань та підсумкових завдань. Видання розроблено відповідно до діючої в вищих навчальних закладах програми з курсу «Вища математика».

Призначається для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Іл.: 42; табл.: 1; бібліогр.: 7 назв.

УДК 517

ISBN 978-617-578-127-2

ВСТУП

Мета даного навчального посібника – допомогти студентам опанувати курс вищої математики. Особливо плідно видання може бути використане при самостійній роботі.

Даний посібник є другою частиною запланованого авторами видання курсу вищої математики українською мовою – диференціальне числення функції однієї та багатьох незалежних змінних.

Для функції однієї змінної докладно розглянуті означення та методи обчислення похідної та її застосування, диференціал функції та його застосування до наближених обчислень а також похідні та диференціали вищіх порядків. Окремо в якості застосування похідної розглянуто метод обчислення границь функції за правилом Лопіталя. У розділі дослідження функції однієї змінної вводяться поняття асимптоти графіка функції та формули для знаходження параметрів рівняння похилої асимптоти; поняття монотонності та екстремумів функції, найменшого і найбільшого значень функції на відрізку; поняття опуклості і угнутості функції, точок перегину. Надається план повного дослідження функції та побудови графіка.

Для функції багатьох змінних розглядається поняття області визначення, ліній рівня і поверхонь рівня, границі функції та методи їх обчислення. Наводяться поняття та правила обчислення частинних похідних та повного диференціалу першого, другого та більш високих порядків. Розглядаються методи диференціювання неявної функції двох змінних.

Для дослідження функції багатьох змінних вводяться поняття дотичної площини і нормалі поверхні, правила знаходження екстремуму та найбільшого (найменшого) значення функції у замкненій області.

У посібнику також розглядається поняття скалярного поля, похідної у заданому напрямку та градієнта.

Кожен розділ посібника супроводжується короткими відомостями з теорії, наводяться типові задачі й методика їх розв'язання. Подається також ряд задач і прикладів для самостійного розв'язування. До всіх завдань є відповіді, у деяких випадках – необхідні вказівки.

Щоб забезпечити безперервну роботу над курсом протягом семестру, наводяться варіанти підсумкових завдань з кожного розділу. Є також питання для підготовки до модульного контролю.

1 ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

1.1 Означення похідної, її геометричне і механічне тлумачення

1.1.1 Означення похідної

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і нехай $x_0+\Delta x$ – точка цього околу, $\Delta x \neq 0$.

Якщо відношення $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ має границю при $\Delta x \to 0$, то ця границя називається похідною функції $f(x)$ в точці x_0 і позначається $f'(x)$. Таким чином,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \tag{1}$$

тобто похідною функції $f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення (якщо вона існує) приросту функції $f(x)$ в точці x_0 до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 має скінченну похідну, то вона називається диференційованою в цій точці.

Якщо функція $y=f(x)$ диференційована в кожній точці інтервалу $(a;b)$, то

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

де Δx – приріст аргументу,
Δy – приріст функції (рис 1).

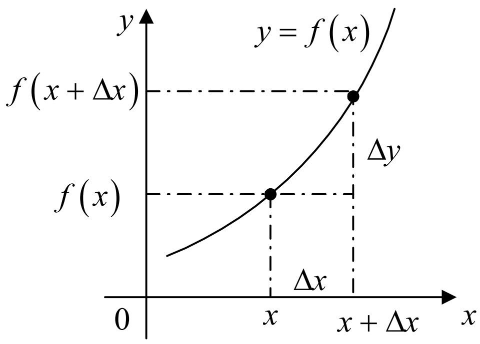


Рис. 1

Для того, щоб в точці x_0 існувала похідна функції $f(x)$, необхідно й достатньо, щоб в цій точці існували права та ліва похідні цієї функції і щоб права похідна дорівнювала лівій похідній, тобто

$$f'_-(x)=f'_+(x).$$

Якщо $f'(x)=\infty$, то кажуть, що функція $f(x)$ має в точці x нескінченну похідну.

Для позначення похідної функції $y=f(x)$ використовуються й інші символи: y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Значення похідної при $x=x_0$ позначають так: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Операція знаходження похідної від даної функції називається диференціюванням цієї функції.

Для безпосереднього знаходження похідної від функції $y = f(x)$ застосовують наступне загальне правило:

1) надають аргументу x довільний приріст Δx і знаходять нарощене значення функції $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$;

2) знаходять приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) складають відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

4) знаходять границю одержаного відношення при $\Delta x \to 0$. Ця границя (якщо вона існує) і дає шукану похідну y' від функції $y = f(x)$.

Слід зауважити, що часто у виразі "похідна від функції $f(x)$" слово "від" опускають і говорять: "похідна функції $f(x)$".

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1 Використовуючи означення похідної, знайти похідну функції $y = 3x^2 - 4x$.

Розв'язання. Для даної функції маємо

1) $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) = 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4 \cdot \Delta x$;

2) $\Delta y = (3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4 \cdot \Delta x) - (3x^2 - 4x) = 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4 \cdot \Delta x$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4 \cdot \Delta x}{\Delta x} = 6x - 4 + 3 \cdot \Delta x$;

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (6x - 4 + 3 \cdot \Delta x) = 6x - 4$.

Таким чином, $y' = 6x - 4$.

Приклад 2 Знайти похідну від функції $y = \sin x$ при $x = 0$.

Розв'язання. За означенням (1)

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(0 + \Delta x) - \sin 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Навіть на простому прикладі (див. приклад 1) видно, що знаходження похідної безпосередньо за означенням забирає багато часу і часто є трудомістким. Тому на практиці питання знаходження похідної розв'язується за допомогою правил і формул диференціювання.

1.1.2 Геометричне тлумачення похідної

Рівність (1) можна записати так:

$$k = tg\alpha = f'(x_0), \tag{2}$$

тобто похідна функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0; f(x_0))$ з додатним напрямком осі Ox (рис. 2). Це твердження виражає геометричний зміст похідної.

Справді, оскільки $tg\alpha$ є неперервною функцією кута φ, то $tg\varphi \to tg\alpha$ при $\varphi \to \alpha$ (рис.2). Отже, кутовий коефіцієнт k дотичної M_0T до кривої $y = f(x)$ в точці M_0 можна обчислити за формулою

$$k = tg\alpha = \lim_{\varphi \to \alpha} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

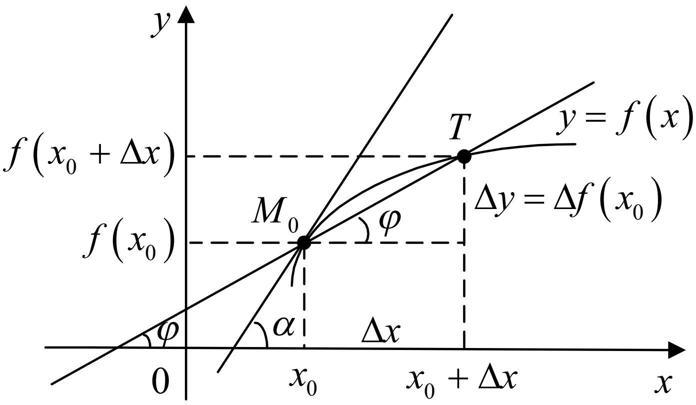


Рис. 2

1.1.3 Механічне тлумачення похідної

Нехай точка M рухається по прямій за законом $S = S(t)$, де S - довжина шляху, взята від деякої початкової точки M_0, t - час, за який пройдено шлях S.

Нехай M положення точки в момент t (рис. 3); M_1 - в момент $t + \Delta t$; $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$ - довжина шляху, пройденого за час Δt.

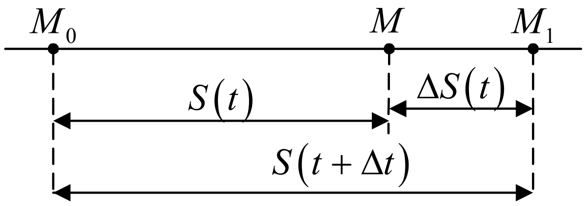


Рис. 3

Відношення $\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}$ в механіці називають середньою швидкістю руху на дільниці MM_1, а границю цього відношення при $\Delta t \to 0$ називають швидкістю руху в точці M, або миттєвою швидкістю в момент t. Якщо миттєву швидкість в момент t позначити через $\upsilon(t)$, то

$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t). \tag{3}$$

Отже, переконуємося в тому, що миттєва швидкість в момент t дорівнює похідній від шляху за часом. Це твердження виражає механічний зміст похідної.

1.2 Рівняння дотичної і нормалі до кривої

З курсу аналітичної геометрії відомо, що рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює k, має такий вигляд: $y-y_0=k(x-x_0)$.

Дотична до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0;f(x_0))$ має кутовий коефіцієнт $k=f'(x_0)$ (рис.4) .

Отже, рівнянням дотичної буде:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0). \qquad (4)$$

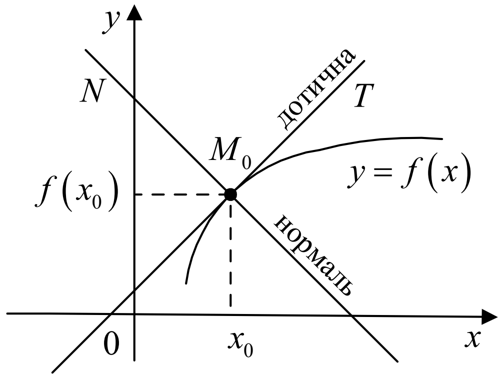


Рис. 4

Відзначимо, що коли дотична паралельна осі Ox, то кут її нахилу α з додатним напрямком осі Ox дорівнює нулю і тоді $tg\alpha=f'(x_0)=0$.

Якщо дотична в точці $M_0(x_0;f(x_0))$ паралельна осі Oy ,то $\alpha=90^\circ$ ї тоді $tg\alpha=f'(x_0)=\infty$.

Пряма, яка перпендикулярна до дотичної кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0;f(x_0))$ і проходить через точку M_0, називається нормаллю до цієї кривої в точці M_0 (рис. 4). Оскільки кутові коефіцієнти двох взаємно перпендикулярних прямих на площині зв'язані співвідношенням $k_1\cdot k_2=-1$, то рівняння нормалі до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0;f(x_0))$ набуває вигляду

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (5)$$

Зауважимо, що рівняння (5) має сенс за умови $f'(x_0)\neq 0$. Якщо ж $f'(x_0)=0$, то рівняння нормалі набуде вигляду $x=x_0$.

Приклад 1 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=5x^2-3x+2$ у точці з абсцисою $x=1$.

Розв'язання. За умовою задачі $x_0=1$. Тоді $f(x_0)=f(1)=5\cdot 1^2-3\cdot 1+2=4$. Знайдемо похідну функції $y=5x^2-3x+2$ у точці $x_0=1$. Вона дорівнює

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(5(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+2\right)-\left(5\cdot 1^2-3\cdot 1+2\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(7+5\cdot\Delta x)=7.$$

Згідно з (4) і (5) рівняння шуканої дотичної і нормалі мають відповідно вигляд $y-4=7\left(x-1\right)$ і $y-4=-\frac{1}{7}\left(x-1\right)$, або

$$7x-y-3=0 \quad \text{і} \quad x+7y-29=0.$$

Кутом між двома кривими $y=f_1\left(x\right)$ і $y=f_2\left(x\right)$ в точці їх перетину $M_0\left(x_0;y_0\right)$ називають кут між дотичними до цих кривих в точці M_0 (рис. 5), який обчислюють за формулою

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}. \qquad (6)$$

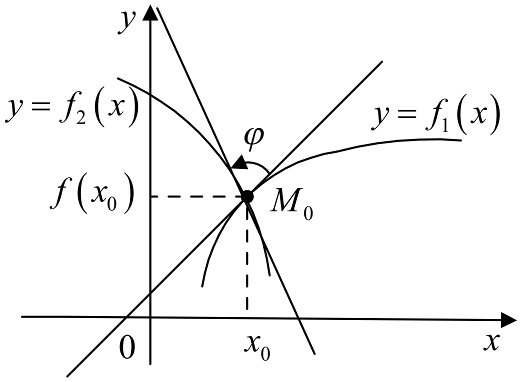


Рис. 5

Приклад 2 За якими кутами перетинаються криві $y=x^2$ і $y^2=x$?

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даних лінії. Розв'язуючи систему їх рівнянь $\begin{cases} y=x^2, \\ y^2=x, \end{cases}$ одержимо дві точки: $O(0;0)$, $M(1;1)$.

Оскільки дотичні до кривих в точці $O(0;0)$ збігаються з осями координат, то кут міх кривими дорівнює $90°$.

У точці $M(1;1)$ кут між кривими визначимо за формулою (6):

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Враховуючи, що $k_1=y'(1)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Bigg|_{x=1}=\frac{1}{2}$, бо дотична до кривої $y^2=x$ в точці M утворює з додатним напрямком осі Ox гострий кут, а

$k_2=y'(1)=\left(2x\right)\big|_{x=1}=2$, одержимо $\quad tg\varphi=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}.$

Отже, $\varphi=arctg\frac{3}{4}$.

1.3 Основні правила диференціювання функцій

$$\left(C\right)'=0 \qquad \left(C=const\right); \qquad (7)$$

$$\left(u+v-z\right)'=u'+v'+z'; \tag{8}$$

$$\left(uv\right)'=u'v+uv'; \tag{9}$$

$$\left(Cu\right)'=Cu'; \tag{9а}$$

$$\left(\frac{u}{C}\right)'=\frac{1}{C}u'; \tag{9б}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v+v'\cdot u}{v^2},\quad v\neq 0; \tag{10}$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{Cv'}{v^2},\quad v\neq 0; \tag{10а}$$

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \text{ або } \frac{dy}{dx}=\frac{df\left(u\right)}{du}\cdot\frac{du\left(x\right)}{dx},\quad \text{якщо } y=f\left(u\right), \tag{11}$$

де $u=\varphi\left(x\right)$ – правило диференціювання окладної функції.

Слід пам'ятати, що в наведених правилах $C=const$, а y,z,u,v - диференційовні функції.

Значення похідних деяких функцій наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – таблиця похідних.

$y=f(x)$	$y=f(u)$, де $u=\varphi(x)$, тобто $y=f(\varphi(x))$
1	2
$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$ 12)	$\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$ 12а)
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 13)	$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$ 13а)
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ 14)	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}\cdot u'$ 14а)
$\left(\sin x\right)'=\cos x$ 15)	$\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$ 15а)
$\left(\cos x\right)'=-\sin x$ 16)	$\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$ 16а)
$\left(tgx\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ 17)	$\left(tgu\right)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$ 17а)
$\left(ctgx\right)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ 18)	$\left(ctgu\right)'=-\frac{1}{\sin^2 u}u'$ 18а)
$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ 19)	$\left(au\right)'=a^u\ln a\cdot u';\ 0<a\neq 1$ 19а)

$\left(e^x\right)' = e^x$ 20)	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$ 20а)
$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$ 21)	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ 21а)
$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$ 22)	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u',\ 0 < a \neq 1$ 22а)
$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 23)	$\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ 23а)
$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 24)	$\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ 24а)
$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$ 25)	$\left(arctgu\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ 25а)
$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$ 26)	$\left(arcctgu\right)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ 26а)

Ці правила та формули слід запам’ятати і використовувати для «находження похідних функцій.

Зауваження 1 Починати диференціювання треба із застосування відповідних правил і лише після цього використовувати формули диференціювання основних елементарних функцій (див. таблицю похідних).

Зауваження 2 Слід мати на увазі, що взагалі не обов’язково диференціювати задану функцію відразу. Можна попередньо зробити її тотожні перетворення, якщо це доцільно (тобто веде до опрощення диференціювання) а потім продиференціювати.

Зауваження 3 Не рекомендується захоплюватись спрощенням виразів, одержаних внаслідок диференціювання, бо основна мета полягає в опануванні технікою диференціювання, а не в перевірці уміння робити тотожні перетворення.

При знаходженні похідних слід пам’ятати (за означенням):

$$a^0 = 1,\ a \neq 0; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0; \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},\ a > 0;$$

знати правила дій із степенями та коренями:

$$a^m a^n = a^{m+n}; \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \qquad \left(a^m\right)^n = a^{mn};$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{\pi}} b^{\frac{1}{\pi}},\ a > 0, b > 0; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{\pi}}}{b^{\frac{1}{\pi}}},\ a > 0, b > 0.$$

Тут m і n - будь-які раціональні числа.

Розв’язання прикладів і задач

Застосовуючи правила і формули диференціювання, знайти похідні функцій.

Приклад 1 $y = 3x^2 - 5x + 1$.

Розв'язання. Застосовуючи послідовно правила (8), (7), (9а) і формулу (12), дістаємо

$$y' = (3x^2)' - (5x)' + (1)' = 3(x^2)' - 5(x)' + 0 = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 = 6x - 5.$$

Приклад 2 $y = ax^2 + bx + c$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі маємо

$$y' = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = a(x^2)' + b(x)' + 0 = a \cdot 2x + b \cdot 1 = 2ax + b.$$

Приклад 3 $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно правила (8), (9а), (7) і формули (І3) і (14), знаходимо

$$y' = \left(2\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\sqrt[4]{3}\right)' = 2\left(\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\sqrt[4]{3}\right)' =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)' + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}.$$

При знаходженні похідних в подібних прикладах проміжні дії можна виконувати усно, записуючи лише остаточний результат диференціювання. Наприклад, $y = 2x^3 + 5\sqrt{x} - 3$, $y' = 6x^2 + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$.

Прилад 4 $f(z) = \dfrac{2z^3 - 3z + \sqrt{z} - 1}{z}$. Знайти $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Розв'язання. Потрібно знайти значення похідної при $z = \dfrac{1}{4}$. Для цього спочатку знайдемо $f'(z)$, а потім обчислимо її значення при заданому значенні аргументу. Попередньо виконаємо тотожні перетворення $f(z)$:

$$f(z) = 2z^2 - 3 + z^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{z}.$$

Згідно з правилами (8), (9а), (7) і формулою (12)

$$f'(z) = \left(2z^2\right)' - \left(3\right)' + \left(z^{-\frac{1}{2}}\right)' - \left(\frac{1}{z}\right)' = 4z - \frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{z^2}.$$

При $z = \dfrac{1}{4}$ $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = 4 \cdot \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2} = 1 - 4 + 16 = 13.$

Приклад 5 Знайти y', якщо $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$.

Розв'язання. На основі правил (9), (8), (7), (9а) і формули (12), одержимо

$$y'=(x^2-3x+3)'\cdot(x^2+2x-1)+(x^2-3x+3)\cdot(x^2+2x-1)'=$$
$$=(2x-3)(x^2+2x-1)+(x^2-3x+3)(2x+2)=$$
$$=2x^3+4x^2-2x-3x^2-6x+3+2x^3+2x^2-6x^2-6x+6x+6=4x^3-3x^2-8x+9.$$

Приклад 6 $S(t)=\dfrac{3t^2+1}{t-1}$. Знайти $S'(t)$.

Розв'язання. Використовуючи правила (10), (8), (9а) і формулу (12), дістанемо

$$S'(t)=\left(\frac{3t^2+1}{t-1}\right)'=\frac{\left(3t^2+1\right)'\cdot(t-1)-\left(3t^2+1\right)\cdot(t-1)'}{(t-1)^2}=\frac{6t\cdot(t-1)-\left(3t^2+1\right)\cdot 1}{(t-1)^2}=$$
$$=\frac{6t^2-6t-3t^2-1}{(t-1)^2}=\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}.$$

Приклад 7 Знайти похідну функції $y=\dfrac{2}{x^3-1}$.

Розв'язання. За правилом (10а) маємо

$$y'=\left(\frac{2}{x^3-1}\right)'=-\frac{2\left(x^3-1\right)'}{\left(x^3-1\right)^2}=-\frac{2\cdot 3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}=-\frac{6x^2}{\left(x^3-1\right)^2}.$$

Приклад 8 $y=\dfrac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$. Знайти y'.

Розв'язання. На основі правила (9б) знаходимо

$$y'=\left(\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(1-x^3\right)'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(0-3x^2\right)=-\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}.$$

Приклад 9 $S(t)=\dfrac{3}{5-t}+\dfrac{t^2}{5}$. Обчислити $S'(0)$ і $S'(2)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо $S'(t)$, використовуючи правила (8), (10а) і (9б): $S'(t)=\left(\dfrac{3}{5-t}\right)'+\left(\dfrac{t^2}{5}\right)'=-\dfrac{3(5-t)'}{(5-t)^2}+\dfrac{1}{5}\left(t^2\right)'=\dfrac{3}{(5-t)^2}+\dfrac{2t}{5}$.

Підставляючи значення аргументу t у вираз для похідної, дістанемо

$$S'(0)=\frac{3}{(5-0)^2}+\frac{2\cdot 0}{5}=\frac{3}{25};\qquad S'(2)=\frac{3}{(5-2)^2}+\frac{2\cdot 2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{17}{15}=1\frac{2}{15}.$$

Приклад 10 Знайти $z'(0)$, якщо $z(t)=\left(\sqrt{t}^{\,3}+1\right)\cdot t$.

Розв'язання. Перепишемо задану функцію у вигляді $z(t)=\left(t^{\frac{3}{2}}+1\right)\cdot t=t^{\frac{5}{2}}+t$.

Тоді $z'(t)=\left(t^{\frac{5}{2}}\right)'+(t)'=\frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}+1$. При $t=0$ одержимо $z'(0)=\frac{5}{2}\cdot 0+1=1$.

Задача 11 Який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y=\frac{4}{15}x^5-\frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x=1$?

Розв'язання. Знаходимо похідну $y'=\frac{4}{3}x^4-\frac{1}{3}x^2$. При $x=1$ $y'(1)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$, тобто $tg\alpha=1$, звідки $\alpha=45^\circ$.

Задача 12 Знайти кут між параболами $y=8-x^2$ і $y=x^2$.

Розв'язання. Розв'язуючи спочатку систему рівнянь $\begin{cases} y=8-x^2, \\ y=x^2, \end{cases}$ знаходимо точки перетину парабол: $M_1(2;4)$ і $M_2(-2;4)$.

Продиференціюємо рівності $y_1=8-x^2$ і $y_2=x^2$:

$y_1'=\left(8-x^2\right)'=-2x, \quad y_2'=\left(x^2\right)'=2x.$

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до парабол в точці M_1, тобто значення похідних при $x=2$: $k_1=-4$; $k_2=4$.

Таким чином, згідно з формулою (6), $tg\varphi_1=\frac{4+4}{1-16}=-\frac{8}{15}$; $\varphi_1=arctg(-\frac{8}{15})$.

Аналогічно визначається кут між кривими в точці M_2: $\varphi_2=arctg\frac{8}{15}$ (рис. 6).

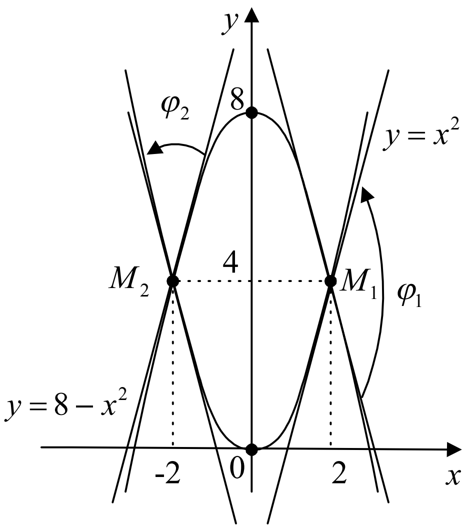


Рис. 6

Задача 13 В якій точці дотична до параболи $y=x^2$ перпендикулярна до прямої $2x-6y+5=0$?

Розв'язання. Кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y=x^2$ в будь-якій її точці дорівнює $y'=\left(x^2\right)'=2x$, а кутовий коефіцієнт даної прямої $k=-\frac{A}{B}=\frac{1}{3}$.

За умовою перпендикулярності двох прямих $2x\cdot\frac{1}{3}=-1$. Звідси знаходимо $x=-\frac{3}{2}$.
Підставляючи значення $x=-\frac{3}{2}$ в будь-яке із заданих рівнянь, одержимо $y=\frac{9}{4}$.

Таким чином, $M\left(-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$ – шукана точка.

Задача 14 Точка рухається по прямій так, що її відстань від початкового пункту через t секунд дорівнює $S=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$;

а) в які моменти точка була в початковому пункті?
б) в які моменти її швидкість дорівнювала нулю?

Розв'язання. Виходячи із механічного тлумачення похідної за формулою (3), маємо

$$v(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2\right)'=t^3-12t^2+32t=t\left(t^2-12t+32\right)=t(t-4)(t-8).$$

Розв'язуючи рівняння $v(t)=0$, тобто $t(t-4)(t-8)=0$, знаходимо $t_1=0$, $t_2=4$ і $t_3=8$.

Точка буде в початковому пункті тоді, коли $S(t)=0$.
Оскільки $S(t)=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2=\frac{1}{4}t^2\left(t^2-16t+64\right)=\frac{1}{4}t^2(t-8)^2$, то розв'язуючи рівняння $\frac{1}{4}t^2(t-8)^2=0$, знаходимо $t_1=0$ і $t_2=8$.

Таким чином, точка була в початковому пункті при $t_1=0$ і $t_2=8$, а її швидкість дорівнювала нулю при $t_1=0$, $t_2=4$ і $t_3=8$.

Задача 15 Тіло масою 3 кг рухається прямолінійно за законом

$$S=1+t+t^2,$$

де S виражено в сантиметрах, t – в секундах. Обчислити кінетичну енергію тіла $\left(T=\frac{mv^2}{2}\right)$ через 5 секунд після початку руху.

Розв'язання. За формулою (3) $v(t)=S'(t)=\left(1+t+t^2\right)'=1+2t.$

Через 5 секунд після початку руху швидкість тіла дорівнюватиме $v(5)=11$, а його кінетична енергія

$$T(5)=\frac{3\cdot 121}{2}=181{,}5\cdot 10^3 \text{ ерг.}$$

Питання для самоперевірки

1 Що називається приростом аргументу і приростом функції?

2 Дайте означення похідної функції.

3 Сформулюйте необхідну і достатню умови існування похідної функції в точці x_0.

4 Пригадайте правило, яке застосовують для безпосереднього знаходження похідної функції.

5 У чому полягає геометричне тлумачення похідної?

6 Яке механічне тлумачення має похідна?

7 Запишіть рівняння дотичної та нормалі до кривої.

8 Що називають кутом між двома кривими?

9 Сформулюйте основні правила диференціювання функції.

10 Напишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.

Вправи

Продиференціювати задані функції.

1 $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}.$ Відповідь: $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

2 $y = \sqrt{x}\left(x^3 - \sqrt{x} + 1\right).$ Відповідь: $3,5x^2\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

3 $u = \frac{v^5}{v^3 - 2}.$ Відповідь: $\frac{2v^4(v^3 - 5)}{(v^3 - 2)^2}.$

4 $z = \frac{1}{t^2 + t + 1}.$ Відповідь: $-\frac{2t + 1}{(t^2 + t + 1)^2}.$

5 $\rho = \varphi \sin\varphi + \cos\varphi.$ Відповідь: $\varphi\cos\varphi.$

6 $S = \frac{\sin t}{1 + \cos t}.$ Відповідь: $\frac{1}{1 + \cos t}.$

7 $y = \left(x^2 - 2x + 3\right)\cdot e^x.$ Відповідь: $e^x\left(x^2 + 1\right).$

8 $y = x^3 - 3^x.$ Відповідь: $3x^2 - 3^x \ln 3.$

9 $y = e\left(\cos x + \sin x\right).$ Відповідь: $2e^x \cos x.$

10 $y = x^2 \log_3 x.$ Відповідь: $2x\log_3 x + \frac{x}{\ln 3}.$

11 $y = \frac{1}{\ln x}.$ Відповідь: $-\frac{1}{x\ln^2 x}.$

12 $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}.$ Знайти $f'(1);\ f'(4);\ f'(a^2).$

Відповідь: $f'(1) = 2;\ f'(4) = 2,5;\ f(a^2) = 3 - \frac{1}{|a|}.$

13 $\rho(\varphi) = \frac{\varphi}{1 - \varphi^2}.$ Знайти $\rho'(2)$ і $\rho'(0).$ Відповідь: $\rho'(2) = \frac{5}{9};\ \rho'(0) = 1.$

14 $f(t)=\dfrac{t^2-5t-1}{t^2}$. Знайти $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

Відповідь: $f'(-1)=-8$; $f'(2)=\dfrac{19}{16}$; $f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=3a^4+10a^3-a^2$.

15 $y(x)=\left(1+x^3\right)\left(5-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Знайти $y'(1)$ і $y'(a)$.

Відповідь: $y'(1)=16$; $y'(a)=15a^2+\dfrac{2}{a^3}-1$.

16 Показати, що $f'(a)=f'(-a)$, якщо $f(x)=4-5x+2x^3-x^5$.

І7 Скласти рівняння дотичних до лінії $y=x-\dfrac{1}{x}$ в точках її перетину з віссю абсцис. Відповідь: $y=2x-2$; $y=2x+2$.

18 Скласти рівняння нормалі до лінії $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ в точці а абсцисою $x=3$. Відповідь: $27x-3y-79=0$.

19 На лінії $y=x^2\left(x-2\right)^2$ знайти точки, в яких дотичні паралельні осі абсцис. Відповідь: $O(0;0)$; $M_1(1;1)$; $M_2(2;0)$.

20 Показати, що лінія $y=x^5+5x-12$ в кожній із своїх точок нахилена до осі Ox під гострим кутом.

21 Під яким кутом перетинаються лінії $y=\dfrac{1}{x}$ і $y=\sqrt{x}$?

Відповідь: $arctg\,3$.

22 Тіло рухається вздовж прямої за законом $S=5t^3+1$, де шлях S визначається в метрах, а час t - в секундах. Якою була швидкість тіла через 2 секунди після початку ру

Відповідь: $v=60$ м/с.

23 Колесо обертається так, що кут повороту пропорційний квадрату часу. Перший оберт був вроблений колесом за 8 секунд. Знайти кутову швидкість ω через 32 секунди після початку руху.

Відповідь: $\omega=2\pi$ рад/с.

24 Заряд, що протікає через провідник, починаючи з моменту часу $t=0$, зображується формулою $Q=2t^2+3t+1$ (Кл). Знайти силу струму в кінці п'ятої секунди.

Відповідь: 23 А.

25 Залежність міх кількістю x речовини, одержуваної в деякій хімічній реакції, і часом t виражається рівнянням $x=a\left(1-e^{-kt}\right)$. Визначити швидкість реакції. Відповідь: $k\left(a-x\right)$.

1.4 Диференціювання складної функції

Нагадаємо, що коли $y = y(u)$ і $u = u(x)$ – диференційовані функції, то складна функція $y = y\left[u(x)\right]$ є також диференційованою, причому

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Це правило поширюється на ланцюжок із будь-якого скінченного числа диференційованих функцій: похідна складної функції дорівнює добутку похідних функцій, які її складають.

Розв'язання прикладів

Продиференціювати дані функції.

Приклад 1 $y = (x^2+1)^4$.

Розв'язання. Маємо окладну степеневу функцію з проміжним аргументом $u = x^2+1$. Тому функцію можна подати у вигляді $y = u^4$, де $u = x^2+1$. За формулою (11)

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \left(u^4\right)'_u \left(x^2+1\right)'_x = 4u^3 \cdot 2x = 8x\left(x^2+1\right)^3.$$

Приклад 2 $y = \sin 3x$.

Розв'язання. Аргументом синуса даної функції є не x, а $3x$ (функція від x). Отже, маємо складну функцію, яку можна подати у вигляді $y = \sin u$, де $u = 3x$.

Тоді за формулою (11)

$$y'_x = \left(\sin u\right)'_u \left(3x\right)'_x = \cos u \cdot 3 = 3\cos 3x.$$

Приклад 3 $y = \ln^2 x = \left(\ln x\right)^2$.

Розв'язання. Це складна степенева функція з проміжним аргументом $u = \ln x$. Функція може бути подана у вигляді $y = u^2$, де $u = \ln x$. Знаходячи похідні y'_u і u'_x та підставляючи одержані вирази до формули (11), матимемо

$$y'_u = 2u = 2\ln x, \; u'_x = \frac{1}{x}; \quad y'_x = \frac{2\ln x}{x}.$$

Приклад 4 $y = 3^{\sin x}$.

Розв'язання. Подавши дану функцію у вигляді $y = 3^u$, де $u = \sin x$, за правилом диференціювання складної функції маємо

$$y'_x = 3^u \ln 3 \cdot \cos x = 3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 3.$$

Приклад 5 $y = arctg\, x^2.$

Розв'язання. Покладемо $y = arctgu$, де $u = x^2$. Тоді

$$y'_x = \left(arctg\, u\right)'_u \left(x^2\right)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Приклад 6 $y = e^{\sqrt{\ln x}}.$

Розв'язання. Подавши функцію у вигляді $y = e^u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \ln x$ і скориставшись правилом диференціювання складної функції, дістанемо

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = \left(e^u\right)'_u \left(\sqrt{v}\right)'_v \left(\ln x\right)'_x = e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{x} = e^{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

Зауважимо, що при диференціюванні складної функції немає потреби робити такі докладні записи. Результат слід записувати відразу.

Приклад 7 $y = \left(1+\sin^2 x\right)^4.$

Розв'язання. Покладемо $y = u^4$, $u = 1+v$, $v = z^2$, $z = \sin x$. Тоді за правилом диференціювання складної функції

$$y'_x = y'_u u'_v v'_z z'_x = \left(u^4\right)'_u \left(1+v\right)'_v \left(z^2\right)'_z \left(\sin x\right)'_x = 4u^3(0+1)\cdot 2z\cdot\cos x =$$
$$= 4(1+\sin^2 x)^3 \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 4(1+\sin^2 x)^3 \sin 2x.$$

Розв'язання цього прикладу коротко можна записати так:

$$y'_x = 4\left(1+\sin^2 x\right)^3 \left(1+\sin^2 x\right)' = 4(1+\sin^2 x)^3 \left(0 + 2\sin x \left(\sin x\right)'\right) =$$
$$= 4(1+\sin^2 x)^3 \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 4(1+\sin^2 x)^3 \sin 2x,$$

або ще коротше: $y'_x = 4(1+\sin^2 x)^3(0+2\sin x\cdot\cos x) = 4(1+\sin^2 x)^3 \sin 2x.$

Приклад 8 $y = \log_3\left(x^2-1\right).$

Розв'язання. За формулою (22а) знаходимо

$$y' = \frac{1}{(x^2-1)\ln 3}\left(x^2-1\right)' = \frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}.$$

Приклад 9 $y = \ln^4 \sin x = \left(\ln\sin x\right)^4.$

Розв'язання. Застосовуючи послідовно формули (12а), (21а) і (15), матимемо

$$y' = 4\left(\ln\sin x\right)^3 \frac{1}{\sin x}\cos x = 4\ln^3 \sin x \cdot ctgx.$$

Приклад 10 $y=\sqrt[3]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}=\left(\ln\sin\frac{x+3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо

$$y'=\frac{1}{3}\left(\ln\sin\frac{x+3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x+3}{4}}\cdot\cos\frac{x+3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{ctg\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x+3}{4}}}.$$

Приклад 11 $y=ae^{-k^2x^2}$.

Розв'язання. Для знаходження похідної використаємо послідовно формули (9а), (20а), (9а) і (12). Тоді

$$y'=a\left(e^{-k^2x^2}\right)'=ae^{-k^2x^2}\left(-k^2x^2\right)'=-ak^2e^{-k^2x^2}\left(x^2\right)'=-2ak^2xe^{-k^2x^2}.$$

Приклад 12 $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.

Розв'язання. Згідно з формулами (19а), (10), (12) і (21) маємо

$$y'=2^{\frac{x}{\ln x}}\ln 2\cdot\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=2^{\frac{x}{\ln x}}\ln 2\cdot\frac{x'\cdot\ln x-x\left(\ln x\right)'}{\ln^2 x}=2^{\frac{x}{\ln x}}\ln 2\cdot\frac{1\cdot\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=$$
$$=2^{\frac{x}{\ln x}}\ln 2\,\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}.$$

Приклад 13 $y=3\sin^2 x-\sin^3 x.$

Розв'язання. Диференціюючи почленно, дістанемо

$$y'=\left(3\sin^2 x\right)'-\left(\sin^3 x\right)'=3\cdot 2\sin x\left(\sin x\right)'-3\sin^2 x\left(\sin x\right)'=$$
$$=3\cdot 2\sin x\cos x-3\sin^2 x\cos x=3\sin x\cos x(2-\sin x)=\frac{3}{2}(2-\sin x)\sin 2x.$$

Приклад 14 $y=a\,tg(\frac{x}{k}+b)$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно формули (9а), (17а), (8), (9а) і (12), знаходимо

$$y'=a\left(tg\left(\frac{x}{k}+b\right)\right)'=a\,\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{k}+b\right)}\left(\frac{x}{k}+b\right)'=\frac{a}{k\cos^2\left(\frac{x}{k}+b\right)}.$$

Приклад 15 $y = e^{-x^2}\ln x.$

Розв'язання. Задана функція є добутком двох функцій, одна із яких є складною. А тому, скориставшись формулами (9), (20а), (12) і (21), одержимо

$$y' = \left(e^{-x^2}\right)' \cdot \ln x + e^{-x^2} \cdot \left(\ln x\right)' = e^{-x^2} \cdot \left(-2x\right)\ln x + e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x} = e^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - 2x\ln x\right).$$

Приклад 16 $y = \log_3\left(x^2 - \sin x\right).$

Розв'язання. Маємо складну логарифмічну функцію с проміжним аргументом $x^2 - \sin x$. Продиференціювавши її, одержимо

$$y' = \frac{1}{\left(x^2 - \sin x\right)\ln 3}\left(2x - \cos x\right).$$

Приклад 17 $y = 5tg\frac{x}{5} + tg\frac{\pi}{8}.$

Розв'язання. $y' = \left(5tg\frac{x}{5}\right)' + \left(tg\frac{\pi}{8}\right)' = 5\left(tg\frac{x}{5}\right)' + 0 = 5\frac{1}{\cos^2\frac{x}{5}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{5}}.$

Приклад 18 $y = x^3\, arctgx^3.$

Розв'язання. Диференціюючи дану функцію як добуток і складну функцію, знаходимо

$$y' = \left(x^3\right)' arctgx^3 + x^3\left(arctgx^3\right)' = 3x^2 arctgx^3 + x^3\frac{1}{1+(x^3)^2}3x^2 =$$

$$= 3x^2\left(\frac{x^3}{1+x^6} + arctg\,x^3\right).$$

Приклад 19 $y = \ln\frac{1-e^x}{e^x}.$

Розв'язання. Вираз, який стоїть під знаком логарифма, піддається логарифмуванню. Тому доцільно спочатку виконати логарифмування, тобто записати функцію у вигляді $y = \ln\left(1-e^x\right) - \ln e^x = \ln\left(1-e^x\right) - x,$ а потім знати її похідну. Тоді

$$y' = \left(\ln\frac{1-e^x}{e^x}\right)' = \left(\ln\left(1-e^x\right) - x\right)' = \left(\ln\left(1-e^x\right)\right)' - (x)' = \frac{1}{1-e^x}\left(1-e^x\right)' - 1 =$$

$$= \frac{1}{1-e^x}\left(0-e^x\right) - 1 = \frac{-e^x}{1-e^x} - 1 = \frac{e^x}{e^x-1} - 1 = \frac{e^x - e^x + 1}{e^x-1} = \frac{1}{e^x-1}.$$

Отже, коли під знаком логарифмічної функції стоїть вираз, що піддається логарифмуванню (добуток, частка, степінь, корінь), то спочатку слід виконати логарифмування, бо в такому випадку знаходження похідної спрощується.

Приклад 20 $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}.$

Розв'язання. Використовуючи формули логарифмування, подамо спочатку задану функцію у вигляді $y = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+2x) - \ln((1-2x))\right).$

Тепер знайдемо похідну:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+2x}\cdot 2 - \frac{1}{1-2x}\cdot(-2)\right) = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1-2x} = \frac{1-2x+1+2x}{1-4x^2} = \frac{2}{1-4x^2}.$$

Знаходження в розглянутому прикладі похідної безпосередньо за формулами диференціювання привело б до значно складніших перетворень. Пропонуємо впевнитися а цьому самостійно.

Питання для самоперевірки

1 Яку функцію називають складною?

2 Згадайте правило диференціювання складної функції.

3 Напишіть таблицю похідних, враховуючи, що $y = f\left[\varphi(x)\right]$.

Вправи

Знайти похідну даних функцій.

1 $u(t) = \left(t^2 + t + 2\right)^{\frac{3}{2}}$. Відповідь: $\dfrac{3}{2}(2t+1)\sqrt{t^2+t+2.}$

2 $y = 3\sin(3x+5)$. Відповідь: $9\cos(3x+5)$.

3 $y = \cos^3 4x$. Відповідь: $-12\cos^2 4x \sin 4x$.

4 $y = \sin^2(\cos 3x)$. Відповідь: $-3\sin 3x \sin(2\cos 3x)$.

5 $y = \arcsin\dfrac{2}{x}$. Відповідь: $-\dfrac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$.

6 $y = arctg^2\dfrac{1}{x}$. Відповідь: $-\dfrac{2arctg\frac{1}{x}}{1+x^2}$.

7 $y = \sqrt{\ln x}$. Відповідь: $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

8 $y = \ln\left(x^2 - 4x\right)$. Відповідь: $\dfrac{2x-4}{x^2-4x}$.

9 $y = 10^{2x-3}$. Відповідь: $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$.

10 $y = \sin e^{x^2+3x-2}$. Відповідь: $\cos e^{x^2+3x-2}\cdot e^{x^2+3x-2}(2x+3)$.

11 $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$. Відповідь: $10^{\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$.

12 $y = \lg\left(x - \cos x\right)$. Відповідь: $\dfrac{1+\sin x}{\left(x-\cos x\right)\ln 10}$.

13 $y = \dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$. Відповідь: $\dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$.

14 $y = \ln\left(x\sin x\sqrt{1-x^2}\right)$. Відповідь: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1-x^2}+ctgx$.

15 $y = e^{\arcsin 2x}$. Відповідь: $\dfrac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$.

16 $y = \left(2x^2-7\right)^5$. Відповідь: $20x(2x^2-7)^4$.

17 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. Відповідь: $-\sin 4x$.

18 $y = \dfrac{1}{\left(1+\sin 2x\right)^3}$. Відповідь: $-\dfrac{6\cos 2x}{(1+\sin 2x)^4}$.

19 $y = -ctg^3 x + 3ctgx + 3x$. Відповідь: $3ctg^4 x$.

20 $y = \ln\dfrac{ae^x}{bx^2+c}$. Відповідь: $\dfrac{bx^2-2bx+c}{bx^2+c}$.

1.5 Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично. Логарифмічне диференціювання

1.5.1 Диференціювання функцій, заданих наявно

Якщо функція задана рівнянням виду $y = f(x)$, то кажуть, що функція задана в явному вигляді або є явною. Нагадаємо, що неявна функція y від аргументу x задається рівнянням $F(x, y) = 0$, не розв'язаним відносно залежної змінної y.

Щоб знайти похідну y' від неявної функції, слід продиференціювати по x обидві частини рівності $F(x, y) = 0$, розглядаючи y як функцію від x, і потім розв'язати здобуте рівняння відносно y

Розв'язання прикладів і задач

Приклад 1 Знайти похідну $y' = \dfrac{dy}{dx}$ від неявної функції $5x^3 + 3y - 2 = 0$.

Розв'язання. Маємо неявно задану функцію. Продиференціюємо обидві частини рівняння по x, враховуючи при цьому, що y є функцією від x:
$15x^2 + 3y' = 0$ або $5x^2 + y' = 0$.

Розв'язуючи здобуте рівняння відносно y', знаходимо $y' = -5x^2$.

Виражаючи із вихідного рівняння y через x і диференціюючи y як явну функцію, одержимо

$$y = \frac{2-5x^3}{3}; \quad y' = \frac{1}{3}\left(2-5x^3\right)' = \frac{1}{3}\left(-15x^2\right) = -5x^2.$$

Приклад 2 $y = \cos(x+y)$. Знайти $y' = \dfrac{dy}{dx}.$

Розв'язання. Скориставшись правилом диференціювання неявної функції, матимемо $y' = -\sin(x+y)(1+y')$ або $y' + y'\sin(x+y) = -\sin(x+y)$.

Звідси $y' = -\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}.$

Слід відзначити, що розв'язання рівняння $y = \cos(x+y)$. відносно y неможливо.

Приклад 3 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Знайти y'.

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини рівняння по x, враховуючи, що y є функцією від x. Одержимо

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a\left(y + xy'\right) = 0.$$

Для знаходження y' визначаємо такі перетворення:

$$x^2 + y^2y' - a\left(y + xy'\right) = 0;$$

$$x^2 + y^2y' - ay - axy' = 0;$$

$$\left(y^2 - ax\right)y' = ay - x^2, \text{ звідки } y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Приклад 4 Знайти y', якщо $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

Розв'язання. Діючи, як і в попередньому прикладі, будемо мати

$$4x^3 + 4y^3y' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy';$$

$$2x^3 + 2y^3y' = xy^2 + x^2yy';$$

$$\left(2y^3 - x^2y\right)y' = xy^2 - 2x^3;$$

$$y' = \frac{xy^2 - 2x^3}{2y^3 - x^2y}.$$

Приклад 5 $2y\ln y = x$. Знайти y'.

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівняння по x, одержимо

$$2\left(y' \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y'\right) = 1.$$

Після спрощення матимемо $y' \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2}$;

$$y'\left(\ln y + 1\right) = \frac{1}{2};$$

$$y' = \frac{1}{2\left(1 + \ln y\right)}.$$

Приклад 6 Знайти y' в точці $M\left(1;1\right)$, якщо $2y = 1 - xy^3$.

Розв'язання. За правилом диференціювання неявно заданої функції маємо $2y' = y^3 + 3xy^2 y'$. При $x = 1$ і $y = 1$ одержимо $2y' = 1 + 3y'$.
Звідси $y'\left(1;1\right) = -1$.

Задача 7 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точці $M\left(1;-1\right)$.

Розв'язання. Підставляючи значення координат даної точки до рівняння, переконаємося, що точка $M\left(1;-1\right)$ належить кривій: $1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \left(-1\right)^2 + 3 \cdot \left(-1\right)^4 = 6$.
Продиференціюємо рівняння кривої: $2x + 2\left(y^2 + 2xyy'\right) + 12y^3 y' = 0$.

Звідси $y' = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}$.

Обчислимо значення y' в точці *M*: $f'\left(x_0\right) = y_0' = y'\left(1;-1\right) = -\frac{1 + \left(-1\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot \left(-1\right) + 6 \cdot \left(-1\right)^3} = \frac{1}{4}$.

Тепер, згідно з рівняннями (4) і (5), дістанемо

$y + 1 = \frac{1}{4}\left(x - 1\right)$ або $x - 4y - 5 = 0$ – рівняння дотичної;

$y + 1 = -4\left(x - 1\right)$ або $4x + y - 3 = 0$ – рівняння нормалі.

1.5.2 Диференціювання функцій, заданих параметрично

Відомо, що коли функція y аргументу x задана параметричним рівняннями $x = \varphi\left(t\right)$, $y = \psi\left(t\right)$, то

$$y_x' = \frac{y_t'}{y_x'} \tag{27}$$

або в інших позначеннях $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\varphi'\left(t\right)}{\psi'\left(t\right)}$.

Розв’язання прикладів і задач

Приклад 1 Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

Розв’язання. Знаходимо $x'_t = \left(1 - t^2\right)' = -2t$ і $y'_t = \left(t - t^3\right)' = 1 - 3t^2$. Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули (27), дістанемо

$$y'_x = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = \frac{3t^2 - 1}{2t}.$$

Приклад 2 Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $\begin{cases} x = a\cos^3\varphi, \\ y = b\sin^3\varphi. \end{cases}$

Розв’язання. Параметром функції є змінна φ. Тому формула для знаходження похідної записується так: $y'_x = \dfrac{y'_\varphi}{x'_\varphi}$.

Знаходимо $x'_\varphi = a \cdot 3\cos^2\varphi \cdot (-\sin\varphi)$ і $y'_\varphi = b \cdot 3\sin^2\varphi\cos\varphi$.

Отже, $y'_x = -\dfrac{3b\sin^2\varphi\cos\varphi}{3a\cos^2\varphi\sin\varphi} = -\dfrac{b}{a}tg\varphi$.

Приклад 3 Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - arctg\, t. \end{cases}$

Розв’язання. Маємо $x'_t = \dfrac{1}{1 + t^2} \cdot 2t = \dfrac{2t}{1 + t^2}$; $y'_t = 1 - \dfrac{1}{1 + t^2} = \dfrac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2} = \dfrac{t^2}{1 + t^2}$.

Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули (27), дістанемо

$$y'_x = \frac{t^2}{1 + t^2} : \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{t^2\left(1 + t^2\right)}{\left(1 + t^2\right)2t} = \frac{t}{2}.$$

Приклад 4 Знайти похідну y'_x функції $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t \end{cases}$ при $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв’язання. Функції x і y мають такі похідні по t:

$x'_t = e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t)$; $y'_t = e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t)$.

Тому $y'_x = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$. При $t = \dfrac{\pi}{4}$ одержимо $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{0} = \infty$.

Отже, при $t = \dfrac{\pi}{4}$ похідна функції не існує.

Задача 5 Скласти рівняння дотичної і нормалі до астроїди $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ проведених в точці, для якої $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. При $t = \dfrac{\pi}{4}$ маємо $x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos^3\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin^3\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Отже, $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ – точка, яка належить астроїді, дотичної і нормалі.

За формулою (27) $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{(\sqrt{2}\sin^3 t)_t'}{(\sqrt{2}\cos^3 t)_t'} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 3\sin^2 t\cos t}{\sqrt{2\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)}} = -tg\, t.$

При $t = \dfrac{\pi}{4}$ $f'(x_0) = y_x'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -tg\dfrac{\pi}{4} = -1.$

Таким чином, згідно з (4) рівняння дотичної набуває вигляд

$$y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ або } x + y - 1 = 0,$$

а згідно з (5) рівнянням нормалі буде

$$y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} \text{ або } x - y = 0.$$

1.5.3 Логарифмічне диференціювання

Знаходження похідних від функцій, які припускають операцію логарифмування (добуток, частка, піднесення до степеня і добування кореня) значно спрощується, якщо ці функції попередньо прологарифмувати, а потім знайти похідні. Нагадаємо, що вираз $\dfrac{y'}{y} = \left(\ln y\right)'$, який є похідною по x від натурального логарифму функції $y = f(x)$, називається логарифмічною похідною, а її знаходження носить назву логарифмічного диференціювання.

Логарифмічну похідну будемо знаходити формально, маючи, однак, на увазі, що формула мав сенс лише при $y > 0$.

Слід відзначити, що логарифмічне диференціювання застосовується для знаходження похідної степенево-показникової (показниково-степеневої) функції, тобто функції виду $y = \left[u\left(x\right)\right]^{v(x)}$.

Формула для знаходження похідної степенево-показникової функції має вигляд

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v', \tag{28}$$

де $u(x)$ і $v(x)$ - диференційовані функції від x.

Не важко помітити, що права частина цієї формули є сумою похідної двох функцій: степеневої $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ і показникової $(a^n)' = a^n \ln a \cdot u'$.

Тут доречно нагадати формули логарифмування:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b;;$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b;$$

$$\ln\left(a^n\right) = n \cdot \ln a;$$

$$\ln\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n}\ln a.$$

Розв'язання прикладів

Продиференціювати дані функції, використовуючи правило логарифмічного диференціювання.

Приклад 1 $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.$

Розв'язання. Спочатку про логарифмуємо задану функцію по основі e:

$$\ln y = 3\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-2) - \frac{2}{5}\ln(x-3).$$

Потім продиференціюємо обидві частини рівності, враховуючи, що y – функція від x: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{4(x-2)} - \dfrac{2}{5(x-3)}.$

Знаходимо із одержаного рівняння y' і замінюємо y на його вираз через x:

$$y' = \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}\right).$$

Приклад 2 $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}.$

Розв'язання. Діючи, як і в попередньому прикладі, одержимо

$$\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln x + \ln\sin x + \frac{1}{2}\ln(1-e^x)\right); \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sin x}\cos x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-e^x}(-e^x)\right);$$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x} + ctgx - \frac{e^x}{2(1-e^x)}\right).$$

Приклад 3 $y = (x^2+1)^{\sin x}.$

Розв'язання. Задача функція є степенево-показниковою, бо і основа степеня (x^2+1), і показник степеня $\sin x$ є функціями від x. За формулою (28) маємо $y' = \sin x \cdot (x^2+1)^{\sin x - 1} \cdot 2x + (x^2+1)^{\sin x}\ln(x^2+1)\cdot\cos x =$

$$= (x^2+1)^{\sin x}\left(\frac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x\ln(x^2+1)\right).$$

Пропонуємо розв'язати цей приклад, використовуючи правило логарифмічного диференціювання.

Приклад 4 $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. За формулою (28) знаходимо

$$y' = \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{x}-1} \cdot 1 + x^{\frac{1}{x}} \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = x^{\frac{1}{x}-2} - x^{\frac{1}{x}-2} \ln x = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x).$$

Приклад 5 $y = \ln(x + \sin x^x)$.

Розв'язання. Маємо складну логарифмічну функцію з проміжним аргументом $x + \sin^x$. За формулою (21а)

$$y' = \frac{1}{x + \sin x^x} \left(x + \sin x^x \right)'.$$

Застосувавши послідовно формули (8), (12), (15а) і (28), одержимо

$$y' = \frac{1}{x + \sin x^x} \left(1 + \cos x^x \left(x \cdot x^{x-1} \cdot 1 + x^x \ln x \cdot 1 \right) \right) = \frac{1}{x + \sin x^x} \left(1 + x^x \left(1 + \ln x \right) \cos x^x \right).$$

Зауважимо, що $\sin x^x \neq (\sin x)^x = \sin^x x$.

Питання для самоперевірки

1 Яку функцію називають заданою неявно? Навести приклади.

2 У чому полягає правило диференціювання функції, заданої неявно?

3 Яка функція називається заданою параметрично?

4 Пригадайте формулу для знаходження похідної від функції, заданої параметрично.

5 Що назирають логарифмічною похідною?

6 Сформулюйте правило логарифмічного диференціювання.

7 Запишіть формулу для знаходження похідної степенево-показникової функції.

Вправи

Знайти похідні від заданих функцій.

1 $y^3 - 3y + 2ax = 0$. Відповідь: $\dfrac{2a}{3(1 - y^2)}$.

2 $\cos(xy) = x$. Відповідь: $-\dfrac{1 + y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

3 $y = 1 + xe^y$. Відповідь: $\dfrac{e^y}{2 - y}$.

4 $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ x = \dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$ Відповідь: -1.

Вказівка: $x = \dfrac{t+1}{t} = 1 + \dfrac{1}{t}; \quad y = \dfrac{t-1}{t} = 1 - \dfrac{1}{t}.$

5 $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1 - \cos\varphi). \end{cases}$ Відповідь: $ctg\dfrac{\varphi}{2}.$

Вказівки: $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}, \quad \sin\varphi = 2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}.$

6 $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}.$ Відповідь: $\dfrac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}.$

Вказівка:

$$\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{4x}{x^2-1} = \frac{x^4 - 1 + 2x^4 - 2x^2 - 4x^4 - 4x^2}{x(x^4-1)} = \frac{-x^4 - 6x^2 - 1}{x(x^4-1)} = \frac{x^4+6x^2+1}{x(1-x^4)}$$

7 $y = x^{\sin x}.$ Відповідь: $x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right).$

8 $y = 2x^{\sqrt{x}}.$ Відповідь: $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(2 + \ln x\right).$

9 Переконатися в тому, що функція, задана параметрично $x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}, \ y = \dfrac{3+2\ln t}{t}$, задовольняє рівняння $yy' = 2x\left(y'\right)^2 + 1$, де $y' = \dfrac{dy}{dx}.$

10 Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $x = 2\ln ctg\, t + 1, \ y = tg\, t + ctg\, t$ в точці, для якої $t = \dfrac{\pi}{4}.$ Відповідь: $y = 2, \ x = 1.$

11 Знайти кутовий коефіцієнт дотичної і нормалі до лінії $x = \sin t, \ y = \cos 2t$ в точці, для якої $t = \dfrac{\pi}{6}.$ Відповідь: $k_1 = -2, \ k_2 = \dfrac{1}{2}.$

12 Знайти кут, під яким перетинаються лінії $x^2 + y^2 = 8ax$ і $y^2 = \dfrac{x}{2a-x}.$

Відповідь: 45° і 90°.

13 Обчислити значення похідної неявної функції $\dfrac{y}{x} + xy = 2$ в точці $M(1;1).$

Відповідь: 0.

14 Знайти y' при $y = 0$, якщо $x\cos y - \sin y + \sin 2y = 1.$

Відповідь: -1.

15 Переконатися в тому, що наявно задана функція $y = e^{\frac{y}{x}}$ перетворює рівняння $y^2 + x^2 y' = xyy'$ в тотожність.

2 ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ТА ЇОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

2.1 Означення диференціала

Із означення похідної $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ і границі змінної випливає, що $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$ або $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Головна лінійна відносно приросту незалежної змінної Δx частина приросту диференційовної функції називається її диференціалом і позначається символом dy або $df(x)$.

Таким чином, за означенням $df(x) = f'(x)\Delta x$ або $dy = y'\Delta x$.
Оскільки $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, то

$$dy = y'dx = f'(x)dx, \tag{29}$$

звідки $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}$, тобто похідна функції в точці x дорівнює відношенню диференціала цієї функції в цій точці до диференціала аргументу.

Як бачимо, знаходження диференціала функції зводиться до знаходження її похідної.

Операція знаходження диференціала функції, як і операція знаходження похідної, називається диференціюванням цієї функції.

2.2 Геометрична тлумачення диференціала

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x. Тоді в точці $\left(x; f(x)\right)$ графік функції матиме дотичну (рис. 7), нахилену до додатного напрямку осі Ox під кутом α, $tg\alpha = f'(x)$. З рисунку 7 видно, що $AB = MA \cdot tg\alpha = f'(x)\Delta x = df(x)$,

тобто диференціал функції в точці x дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x, коли незалежне змінна дістає приріст Δx.

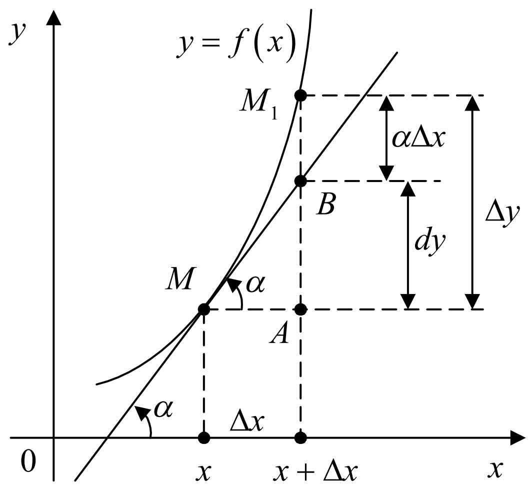


Рис.7

2.3 Інваріантність форми диференціала

Якщо x – незалежна змінна, а $f(x)$ – диференційована функція від x, то $df(x) = f'(x)dx$.

Припустимо, що $u = \varphi(x)$ – диференційовна функція від x. Тоді складна функція $y = f\left(u(x)\right)$ матиме похідну, яка дорівнює $f_u'(u)u_x'(x) = y_u'u_x'$.

Диференціал цієї складної функції запишемо у вигляді

$$dy = y'_x dx = f'_u(u)u'(x)dx = f'(u)\cdot u'_x dx = f'(u)du.$$

Отже, диференціал функції обчислюється за формулою

$$df(u) = f'(u)du$$

незалежно від того, буде u незалежною змінною чи деякою диференційованою функцією від x, тобто його форма залишається незмінною (інваріантною).

Слід зауважити, що коли $x-$ незалежна змінна, то $dx = \Delta x$. Якщо ж $x-$ функція від t, то $dx = x'(t)dt$ і отже, взагалі кажучи, $dx \neq \Delta x.$

2.4 Основні правила і формули диференціювання

З основних правил знаходження похідних випливають основні правила знаходження диференціалів, які мають такий вигляд:

$$d(C) = 0;$$

$$d(u + v - z) = du + dv - dz;$$

$$d(uv) = udv + vdu;$$

$$d(Cu) = Cdu;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},\ v \neq 0;$$

$$df(u) = f'(u)du.$$

Слід пам'ятати, що в наведених правилах $C = const$, а u, v і z – диференційовані функції.

Оскільки диференціал і похідна зв'язані рівністю (29), то з таблиці похідних основних елементарних функцій дістаємо таблицю диференціалів цих функцій. Наприклад,

$$dx^n = nx^{n-1}dx,$$

$$d\sin x = \cos x dx,$$

$$d\ln x = \frac{1}{x}dx,$$

$$de^x = e^x dx \quad \text{і т.д.}$$

Зрозуміло, що немає потреби виписувати всі формули. Пропонуємо скласти таблицю диференціалів основних елементарних функцій самостійно.

2.5 Наближені обчислення за допомогою диференціалів

При досить малих значеннях Δx

$$\Delta y \approx dy \text{ або } f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Оскільки в цій формулі точка x – фіксована, а Δx набуває будь-яких досить малих значень, то її можна переписати у вигляді

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \tag{30}$$

де $\Delta x = x - x_0$.

Формулою (30) зручно користуватися тоді, коли відомо значення функції $f(x)$ в точці x_0 і треба знайти її значення в точці $x_0 + \Delta x,$ де Δx досить мале.

Розв'язання прикладів і задач

Знайти диференціали даних функцій.

Приклад 1 $S = \frac{1}{1-t^2}$.

Розв'язання. За формулою (29) маємо:

$$dS = \left(\frac{1}{1-t^2}\right)' dt = -\frac{-2t}{\left(1-t^2\right)^2}dt = \frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

Приклад 2 $y = tg^2 x$.

Розв'язання. $dy = \left(tg^2 x\right)' dx = y = 2tgx\frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{2tgx}{\cos^2 x}dx$.

Приклад 3 $y = 5^{\ln tgx}$.

Розв'язання. $dy = \left(5^{\ln tgx}\right)' dx =$

$$= 5^{\ln tgx}\ln 5 \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx = 5^{\ln tgx}\ln 5 \cdot \frac{1}{\sin x \cos x}dx = 5^{\ln tgx}\frac{2\ln 5}{\sin 2x}dx.$$

Прилад 4 $y = \ln tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$.

Розв'язання. За формулами зведення $tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) = ctg\frac{x}{4}$. Отже, згідно з формулою (29) будемо мати

$$dy = \left(\ln tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)\right)' dx = \left(\ln ctg\frac{x}{4}\right)' dx = \frac{1}{ctg\frac{x}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{4}}\right) \cdot \frac{1}{4}dx = -\frac{dx}{4\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}} = -\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Приклад 5 $\rho = k\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Розв'язання. За означенням

$$d\rho = \rho' d\varphi = \left(k\sqrt{\cos 2\varphi}\right)' d\varphi = k\frac{1}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\left(-\sin 2\varphi\right)2d\varphi = -\frac{k\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi.$$

Приклад 6 Обчислити dy при $x = 1$ і $dx = 0,2$, якщо $y = 3^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2^{2x}} + 6^{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. За формулою (29) $dy = \left(3^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2^{2x}} + 6^{\sqrt{x}}\right)' dx =$

$$=\left(3^{\frac{1}{x}}\ln 3\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2^{-2x}\ln 2\cdot(-2)+6^{\sqrt{x}}\ln 6\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=\left(-\frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ln 3-2^{1-2x}\ln 2+\frac{6^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ln 6\right)dx..$$

При $x=1$ і $dx=0,2$ маємо $dy\Big|_{\substack{x=1\\dx=0,2}}=\left(-3\ln 3-\frac{1}{2}\ln 2+3\ln 6\right)\cdot 0,2=$

$$=\left(-3\ln 3-\frac{1}{2}\ln 2+3\ln 2+3\ln 3\right)\cdot 0,2=2,5\ln 2\cdot 0,2=0,5\ln 2\approx 0,5\cdot 0,6931\approx 0,3466.$$

Приклад 7 Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено знайти $arctg\,0,97$.

Розв'язання. Нехай $arctg\,0,97$ є частинне значення функції $f(x)=arctgx$ при $x=0,97$. Нехай $x_0=1$. Тоді $\Delta x=x-x_0=0,97-1=-0,03$;

$f(x_0)=f(1)=arctg1=\frac{\pi}{4}$.

Диференціюючи функцію $f(x)=arctgx$, знаходимо $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

При $x_0=1$ $f'(1)=\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{2}$. Застосовуючи формулу (30), одержимо

$arctg\,0,97\approx\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(-0,03)\approx 0,785-0,015=0,770$. Таким чином, $arctg\,0,97\approx 0,77$.

Приклад 8 Обчислити наближено $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$ є частинне значення функції

$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}$ при $x=2,037$. Поклавши $x_0=2$, $f(x_0)=f(2)=\sqrt{\frac{2^2-3}{2^2+5}}=\frac{1}{3}$;
$\Delta x=x-x_0=2,037-2=0,037$.

Знайдемо похідну функції $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}$, а також її значення при $x_0=2$:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}}\cdot\frac{2x\left(x^2+5\right)-2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+5\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}}\cdot\frac{8x}{\left(x^2+5\right)^2};\quad f'(x_0)=f'(2)=\frac{16}{27}.$$

Тоді за формулою (30) маємо $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}\approx\frac{1}{3}+\frac{16}{27}\cdot 0,037\approx 0,333+0,022=0,355.$

Приклад 9 Обчислити наближено приріст функції $y = x^2 + 2x + 3$, коли x змінюється від 2 до 1,98.

Розв'язання. Приріст функції наближено дорівнює її диференціалу, тобто $\Delta y \approx dy$. А тому спочатку обчислимо загальний вираз для диференціала даної функції: $dy = (2x + 2)dx$.

Підставляючи значення $x = 2$, $dx = \Delta x = 1{,}98 - 2 = -0{,}02$ в здобуту формулу, знаходимо значення диференціала: $dy = (2 \cdot 2 + 2) \cdot (-0{,}02) = -0{,}12$.

Отже, шуканий приріст функції наближено дорівнює - 0,12.

Приклад 10 Обчислити Δy і dy для функції $y = x^2 - 2x$ при $x = 3$ і $\Delta x = 0{,}01$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний вираз для Δy і dy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \left((x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)\right) - (x^2 - 2x) =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - x^2 + 2x = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x = (2x - 2)\Delta x + (\Delta x)^2;$$

$$dy = y'\Delta x = (x^2 - 2x)'\Delta x = (2x - 2)\Delta x.$$

При $x = 3$ і $\Delta x = 0{,}01$ маємо:

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=3\\ \Delta x=0{,}01}} = (2 \cdot 3 - 2) \cdot 0{,}01 + (0{,}01)^2 = 0{,}04 + 0{,}0001 = 0{,}0401;$$

$$dy\Big|_{\substack{x=3\\ \Delta x=0{,}01}} = (2 \cdot 3 - 2) \cdot 0{,}01 = 0{,}04.$$

Відзначимо, що різниця $\Delta y - dy = 0{,}0401 - 0{,}04 = 0{,}0001$ є нескінченно малою вищого порядку щодо $\Delta x = 0{,}01$.

Питання для самоперевірки

1 Що називається диференціалом функції?

2 Пригадайте формулу для знаходження диференціала функції.

3 В чому полягає геометричне тлумачення диференціала?

4 Що означає поняття інваріантності форми диференціала?

5 Сформулюйте основні правила знаходження диференціалів.

6 Запишіть формулу, яку використовують для наближених обчислень за допомогою диференціала.

Вправи

Знайти диференціали заданих функцій.

1 $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$. Відповідь: $-\dfrac{6x^2dx}{\left(x^3-1\right)^2}$.

2 $S=\dfrac{gt^2}{2}$. Відповідь: $gt\,dt$.

3 $y=2^{-\frac{1}{\cos x}}$. Відповідь: $-2^{-\frac{1}{\cos x}}\ln 2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

4 $y=3^{-\frac{1}{x^2}}+3x^3-4\sqrt{x}$. Відповідь: $\left(3^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{2}{x^3}\ln 3+9x^2-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

5 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{49-x^2}+\dfrac{49}{2}\arcsin\dfrac{x}{7}$. Відповідь: $\sqrt{49-x^2}\,dx$.

6 $y=\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$. Відповідь: $\dfrac{dx}{x^2-36}$.

7 $S=a\sin\left(\omega t+\varphi_0\right)$. Відповідь: $a\,\omega\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)dt$.

8 $r\left(\varphi\right)=\varphi\cos\varphi-\sin\varphi$. Відповідь: $-\varphi\sin\varphi\,d\varphi$.

9 $y=x^3;\ x=t^2-1$. Відповідь: $6t\left(t^2-1\right)^2dt$.

10 Знайти і порівняти приріст і диференціал функції $y=x^4+4x$ при $x=4$ і $\Delta x=0{,}1$.

Відповідь: $\Delta y=0{,}864;\quad dy=0{,}8$.

11 Обчислити значення диференціала функції $y=x^3+2x$, коли x змінюється від 1 до 0,01.

Відповідь: -0,5.

12 За допомогою диференціала обчислити наближено $f\left(1{,}05\right)$, якщо $f\left(x\right)=e^{0{,}1x\,(1-x)}$. Вказівка: $e^{0{,}1x\,(1-x)}=e^{0{,}1x}-e^{0{,}1x^2}$.

Відповідь: 0,995.

13 Знайти наближене значення $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Відповідь: 1,9938.

14 Знайти диференціал функції $y=\ln\left(x^2+1\right)+arctg\sqrt{x}$ в точці $x=1$, якщо $\Delta x=0{,}1$.

Відповідь: 0,125.

15 Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено знайти:
1) $arctg\,1{,}02$; 2) $\arcsin 0{,}4983$; 3) $e^{0{,}2}$; 4) $\ln 0{,}97$; 5) $\left(3{,}03\right)^5$.

Вказівка: $\arcsin 0{,}5=\dfrac{\pi}{6}\approx 0{,}52360$.

Відповідь: 1) 0,795; 2) 0,52164; 3) 1,2; 4) - 0,03; 5) 255,15.

3 ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩІХ ПОРЯДКІВ

Нагадаємо, що за означенням

$$(y')' = y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ - похідна другого порядку,}$$

$$(y'')' = y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} \text{ - похідна третього порядку,}$$

$$(y''')' = y^{IV} = f^{IV}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4} \text{ - похідна четвертого порядку.}$$

Взагалі похідна від похідної $(n-1)$-го порядку функції $y = f(x)$ називається похідною n-го порядку або n-ю похідною цієї функції і позначається $f^{(n)}(x)$ або $\dfrac{d^n x}{dx^n}$. Таким чином, за означенням

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n x}{dx^n} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Аналогічно

$$d(dy) = d^2 y = y'' dx^2 \text{ – диференціал другого порядку,}$$

$$d\left(d^2 y\right) = d^3 y = y''' dx^3 \text{ – диференціал третього порядку.}$$

Взагалі диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку функції $y = f(x)$ називається диференціалом n-го порядку цієї функції. Отже, за означенням

$$d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right) \text{ або } d^n y = d\left(d^{n-1} y\right).$$

Диференціал n-го порядку функції $y = f(x)$ існує тоді і тільки тоді, коли існує похідна n-го порядку, тобто коли функція $y = f(x)$ n разів диференційована. Зв'язок диференціала n-го порядку функції $y = f(x)$ з похідною того ж порядку цієї функції виражається формулою

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n \quad \text{або} \quad d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

Зауважимо, що знаходження похідної від похідної або диференціала від диференціала називається повторним диференціюванням функції.

Раніше було показано, що коли точка рухається прямолінійно по закону $S = f(t)$, де S – пройдений шлях за час t, то її швидкість v визначається формулою

$$v(t) = \frac{dS}{dt} = S'_t.$$

Аналогічні міркування приводять до того, що прискорення цієї точки в момент t

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'_t.$$

З іншого боку,

$$a = v_t' = \left(S_t\right)_t' = S_{tt}'' = \frac{d^2S}{dt^2}. \tag{31}$$

Це твердження виражає механічне тлумачення другої похідної.

Покажемо на прикладах, як виконується повторне диференціювання функції при різних способах її завдання.

Розв'язання прикладів і задач

Приклад 1 Знайти y'', якщо $y=\left(x^2+1\right)^3$.

Розв'язання. Маємо функцію, задану явно. Послідовно диференціюючи її, одержимо $y' = 3(x^2+1)^2\cdot 2x = 6x(x^2+1)^2$;

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(6x(x^2+1)^2\right)' = 6(x^2+1)^2 + 6x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x = 6(x^2+1)(x^2+1+4x^2) =$$
$$= 6(x^2+1)\left(5x^2+1\right) = 6(5x^4+6x^2+1).$$

Приклад 2 Знайти похідну третього порядку від функції $y=\cos^2 x$.

Розв'язання. Диференціюючи функцію послідовно три рази, знаходимо

$$y' = \left(\cos^2 x\right)' = 2\cos x\left(-\sin x\right) = -\sin 2x;$$
$$y'' = \left(y'\right)' = \left(-\sin 2x\right)' = -\cos 2x\cdot 2 = -2\cos 2x;$$
$$y''' = \left(y''\right)' = \left(-2\cos 2x\right)' = -2\left(-\sin 2x\right)\cdot 2 = 4\sin 2x.$$

Приклад 3 Обчислити $f''(0)$, якщо $f(x)=e^{2x-1}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо $f''(x)$, диференціюючи дану функцію двічі: $f'(x) = \left(e^{2x-1}\right)' = e^{2x-1}\cdot 2 = 2e^{2x-1}$; $f''(x) = \left(2e^{2x-1}\right)' = 2e^{2x-1}\cdot 2 = 4e^{2x-1}$.

При $x=0$ будемо мати $f''(0) = 4e^{2\cdot 0-1} = 4e^{-1} = \dfrac{4}{e}$.

Прилад 4 Знайти другу похідну від функції $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Розв'язання. Послідовно диференціюючи функцію, одержимо

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y'' = \left(\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$$

Приклад 5 $y^2 = 2px$. Знайти $\dfrac{d^2y}{dy^2}$.

Розв'язання. Треба знайти другу похідну функції, яка задана неявно. Спочатку знайдемо похідну першого порядку, диференціюючи обидві частини рівняння по x і вважаючи y функцією від x: $2y \cdot y' = 2p$ або $yy' = p$, звідки $y' = \dfrac{p}{y}$. Тепер за означенням маємо $y'' = (y')' = \left(\dfrac{p}{y}\right)'_x = p\left(-\dfrac{1}{y^2}\right) \cdot y' = -\dfrac{p}{y^2} y'$.

Підставляючи в останнє рівняння замість y' вираз $\dfrac{p}{y}$, остаточно одержимо $y'' = -\dfrac{p}{y^2} \cdot \dfrac{p}{y} = -\dfrac{p^2}{y^3}$.

Приклад 6 Знайти y'', якщо $y = x + arctg\, y$.

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини рівняння по x, вважаючи y функцією від x: $y' = 1 + \dfrac{1}{1+y^2} \cdot y'$.

Виконуючи перетворення $y' - \dfrac{1}{1+y^2} \cdot y' = 1$; $\left(1 - \dfrac{1}{1+y^2}\right) \cdot y' = 1$; $\dfrac{y^2}{1+y^2} \cdot y' = 1$, знаходимо $y' = \dfrac{1+y^2}{y^2} = \dfrac{1}{y^2} + 1 = y^{-2} + 1$.

Тоді $y'' = -2y^{-3}y' = -\dfrac{2}{y^3} \cdot \dfrac{1+y^2}{y^2} = -\dfrac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}$.

Приклад 7 Знайти значення похідної другого порядку в точці $(0;1)$, якщо $x^4 - xy + y^4 = 1$.

Розв'язання. Маємо неявно задану функцію. Спочатку знайдемо загальний вираз похідної другого порядку даної функції. Для цього продиференціюємо обидві частини даного рівняння: $4x^3 - \left(y + xy'\right) + 4y^3 \cdot y' = 0$;

$$12x^2 - \left(y' + y' + xy''\right) + 12y^2 \left(y'\right)^2 + 4y^3 \cdot y'' = 0.$$

При $x = 0$ і $y = 1$ із першого рівняння маємо $4 \cdot 0 - (1+0) + 4y' = 0$, звідки $y' = \dfrac{1}{4}$.

Підставляючи тепер в друге рівняння $x = 0$, $y = 1$ і $y' = \dfrac{1}{4}$, одержимо $12 \cdot 0 - \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 0\right) + 12 \cdot 1 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 4 \cdot 1 \cdot y'' = 0$, звідки $y'' = -\dfrac{1}{16}$. Отже, $y''(0;1) = -\dfrac{1}{16}$.

Якщо функція задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = f(t), \end{cases}$ то похідні

$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, … слід знаходити за формулами

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} \quad \text{і т.д.}$$

Похідну другого порядку можна знайти також за формулою

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\left(\dot{x}\right)^3}, \tag{32}$$

де $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = x'_t$; $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = y'_t$; $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$.

Приклад 8 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

Розв'язання. Перший спосіб. Продиференціюємо x і y по t:

$$x'_t = \frac{1}{t}, \quad y'_t = 2t.$$

Тоді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = 2t : \dfrac{1}{t} = 2t^2$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(2t^2\right)'_t}{\frac{1}{t}} = 4t \cdot t = 4t^2.$$

Другий спосіб. Продиференціюємо x і y по t двічі: $\dot{x} = \dfrac{1}{t}$; $\ddot{x} = -\dfrac{1}{t^2}$; $\dot{y} = 2t$; $\ddot{y} = 2$. Тоді за формулою (32) будемо мати

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot 2t}{\left(\frac{1}{t}\right)^3} = \frac{\frac{2}{t} + \frac{2}{t}}{\frac{1}{t^3}} = \frac{4t^3}{t} = 4t^2.$$

Приклад 9 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln\left(1-t^2\right). \end{cases}$

Розв'язання Діючи, як і в попередньому прикладі, маємо:

$$x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad y'_t = -\frac{2t}{1-t^2}.$$

Тоді за формулою (27) $y'_x = -\dfrac{2t}{1-t^2} : \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = -\dfrac{2t\sqrt{1-t^2}}{1-t^2} = -\dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Знаходимо

$$\left(y'_x\right)'_t = \left(-\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}\right)'_t = -2 \cdot \frac{\sqrt{1-t^2} - t \cdot \dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2} = -2 \cdot \frac{1-t^2+t^2}{\left(1-t^2\right)\sqrt{1-t^2}} = -\frac{2}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Отже, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2}{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}} : \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = -\dfrac{2}{1-t^2} = \dfrac{2}{t^2-1}$.

Пропонуємо самостійно переконатися в тому, що використання в даному випадку формули (32) привело б до значно складніших обчислень.

Приклад 10 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = a\left(\varphi - \sin\varphi\right), \\ y = a\left(1-\cos\varphi\right). \end{cases}$

Розв'язання. Параметром даної функції є змінна φ, тому

$$x'_\varphi = a\left(1-\cos\varphi\right), \quad y'_\varphi = a\sin\varphi.$$

Тоді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \dfrac{a\sin\varphi}{a\left(1-\cos\varphi\right)} = \dfrac{2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}} = ctg\dfrac{\varphi}{2}$.

Диференціюючи одержаний результат по φ, матимемо

$$\frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{d\varphi} = \left(y'_x\right)'_\varphi = -\frac{1}{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}.$$

Таким чином, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \cdot a\left(1-\cos\varphi\right)} = -\dfrac{1}{4a\sin^4\dfrac{\varphi}{2}}$.

Приклад 11 Знайти диференціал другого порядку функції $y=\sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання. Диференціюючи дану функцію двічі та враховуючи, що $d^2y=y''dx^2$, одержимо $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, $y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$, $d^2y=-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}dx^2$.

Приклад 12 Знайти d^3y, якщо $y=\sin^2 x$.

Розв'язання. Диференціюючи дану функцію тричі, знаходимо

$$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x,\quad y''=2\cos 2x,\quad y'''=-4\sin 2x.$$

Тоді $d^3y=y'''dx^3=-4\sin 2x dx^3$.

Приклад 13 Довести, що функція $y=f(x)$, задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\sin kt, \end{cases}$ задовольняє рівняння $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+k^2y=0$.

Розв'язання. Знайдемо $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{k\cos kt}{\cos t};\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\left(\frac{k\cos kt}{\cos t}\right)'_t:\cos t=\frac{k\left(-k\sin kt\cos t+\sin t\cos kt\right)}{\cos^{3t}}.$$

Підставляючи вирази для x, y, $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ в задане рівняння, одержимо тотожність

$$\left(1-\sin^2 t\right)\cdot\frac{k\left(-k\sin kt\cos t+\sin t\cos kt\right)}{\cos^3 t}-\frac{k\sin t\cos kt}{\cos t}+k^2\sin kt=0.$$

Дійсно, помноживши обидві частини здобутої рівності на $\cos t$, матимемо $-k^2\sin kt\cos t+k\sin t\cos kt-k\sin t\cos kt+k^2\sin kt\cos t=0$, тобто $0=0$. А це й означає, що задана функція задовольняє задане рівняння.

Задача 14 Точка рухається прямолінійно, причому $S=\frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2}+S_0$.

Знайти прискорення в кінці першої секунди, якщо S виражено в сантиметрах, t – в секундах.

Розв'язання. Знаходимо $v(t)=S'(t)=\left(\frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2}+S_0\right)'_t=\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi t}{2}$,

$$a(t)=v'(t)=\left(\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi t}{2}\right)'_t=-\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi t}{2}.$$

При $t=1c$ $a(1)=-\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{18}\left(см/c^2\right)$.

Задача 15 Точка рухається прямолінійно так, що її швидкість змінюється пропорційно кореню із пройденого шляху. Показати, що рух відбувається під дією сталої сили.

Розв'язання. Згідно з другим законом Ньютона $F = ma$, де m - маса рухомої точки. За умовою задачі $v(t) = k\sqrt{S(t)}$, тоді

$$a(t) = v'(t) = \left(k\sqrt{S(t)}\right)'_t = k \cdot \frac{1}{2\sqrt{S(t)}} \cdot S'(t).$$

Оскільки $v(t) = S'(t)$, а $\sqrt{S(t)} = \frac{v(t)}{k}$, то $a(t) = k \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{v(t)}{k}} \cdot v(t) = \frac{1}{2}k^2$.

Отже, $F = ma = \frac{1}{2}mk^2$ є величиною сталою.

Задача 16 Точка рухається прямолінійно, причому $S = \sqrt{t}$. Довести, що рух є сповільненим і що прискорення a пропорційне кубу швидкості v.

Розв'язання. За формулами (3) і (31) швидкість і прискоренні точки дорівнюють відповідно $v(t) = S'(t) = \left(\sqrt{t}\right)'_t = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ і $a(t) = v'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)'_t = -\frac{1}{4\sqrt{t^3}}$.

Оскільки $a(t) - \frac{1}{4\sqrt{t^3}} < 0$, то рух сповільнений.

Крім того, $a(t) - \frac{1}{4\sqrt{t^3}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^3 = -\frac{1}{4}(2v)^3 = -2v^3(t)$, а це й означає, що прискорення a пропорційне кубу швидкості v.

Питання для самоперевірки

1 Що називається другою похідною або похідною другого порядку функції $y = f(x)$?

2 У чому полягає механічне тлумачення похідної другого порядку?

3 Як знаходиться похідна n-го порядку функції $y = f(x)$?

4 Що називається диференціалом другого, третього , n-го порядку функції $y = f(x)$?

5 Пригадайте зв'язок між похідною і диференціалом одного і того ж порядку функції $y = f(x)$?

6 Сформулюйте правило повторного диференціювання для функції, заданої неявно.

7 Запишіть формули для знаходження похідних вищого порядку для функції, заданої параметрично.

Вправи

1 $f(x)=(x+10)^6$. Знайти $f'''(2)$. Відповідь: 207360.

2 Знайти $\dfrac{d^4\rho}{d\varphi^4}$, якщо $\rho = a\sin 2\varphi$. Відповідь: $16a\sin 2\varphi$.

Вказівка: знайдіть послідовно $\dfrac{d\rho}{d\varphi}$, $\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}$, $\dfrac{d^3\rho}{d\varphi^3}$ і $\dfrac{d^4\rho}{d\varphi^4}$.

3 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Відповідь: $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$.

4 $S=1+te^S$. Знайти $\dfrac{d^2S}{dt^2}$. Відповідь: $\dfrac{(1-S)e^{2s}}{(2-s)^3}$.

5 Знайти $y''(x)$ при $x=0$, якщо $e^y+xy=e$. Відповідь: e^{-2}.
Вказівка: спочатку знайдіть значення y при $x=0$, бо y'' є функцією x і y. далі про диференціюйте функцію двічі і обчисліть значення y'' в одержаній точці.

6 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = a\sin^2 t. \end{cases}$ Відповідь: 0.

Вказівка: виключивши параметр t із параметричних рівнянь, одержимо $x+y=a$. Після першого диференціювання $1+y'=0$, звідки $y'=-1$. Отже, $y''=0$.

7 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$ Відповідь: $\dfrac{2+t^2}{a(\cos t - t\sin t)^3}$.

8 Довести, що функція $y=\sqrt{2x-x^2}$ задовольняє рівняння $y^3y''+1=0$.

9 Довести, що функція $y=f(x)$, задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = e^t\sin t, \\ y = e^t\cos t, \end{cases}$ задовольняє рівняння $y''(x+y)^2 = 2(xy'-y)$.

10 Точка рухається прямолінійно, причому $S=\dfrac{4}{3}t^3-t+5$. Знайти прискорення в кінці другої секунди (S виражено в метрах, t - в секундах).

Відповідь: 16 $м/с^2$.

11 Сила, яка діє на матеріальну точку, обернено пропорційна до швидкості руху точки. Довести, що кінетична енергія точки є лінійною функцією часу.

12 Залежність шляху від часу при прямолінійному русі точки задана рівнянням $S=\dfrac{1}{5}t^5+\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi t}{8}$. Визначити швидкість і прискорення в кінці четвертої секунди, якщо S виражено в метрах, t - в секундах.

Відповідь: 256 $м/с$, 255,9 $м/с^2$.

13 По параболі $y = x(8 - x)$ рухається точка так, що її абсциса змінюється залежно від часу t по закону $x = t\sqrt{t}$ (x виражено в метрах, t - в секундах). Знайти швидкість і прискорення зміни ординати в точці $M(1;7)$.

Відповідь: $9\, м/с$, $0\, м/с^2$.

14 Залежність шляху від часу задана рівнянням $S = t\ln(t+1)$, де S виражено в метрах, t - в секундах. Знайти швидкість і прискорення в кінці другої секунди.

Відповідь: $1{,}76\, м/с$, $\frac{4}{9}\, м/с^2$.

15 По кубічній параболі $y = x^3$ рухається точка так, що її ордината змінюється залежно від часу t по закону $y = at^3$. Знайти швидкість і прискорення зміни абсциси залежно від часу.

Відповідь: $x'_t = \sqrt[3]{a}$, $x''_{tt} == 0$.

4 ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ЗА ПРАВИЛОМ ЛОПІТАЛЯ

Раніше розглядалися елементарні способи знаходження границь функції у випадках, коли аргумент функції наближено зростає або прямує до значення, яке не входить до області визначення функції.

Відзначимо, що крім елементарних способів надто ефективним способом знаходження границі функції в зазначених особливих випадках є правило Лопіталя: якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовані в околах точки x_0 і $\varphi(x) \neq 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$, тобто частка являє собою в точці $x = x_0$ невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

За умови, що існує (скінченна чи нескінченна) границя відношення похідних.

Суть цього правила полягає в тому, що границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих величин дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує (скінченна чи нескінченна).

Слід визначити, що це правило застосовується і у випадку, коли $x_0 = \infty$.

Корисно запам'ятати:

1 безпосередньо правило Лопіталя використовується лише для розкриття невизначеностей двох типів: $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$;

2 якщо відношення похідних $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ являє собою невизначеність того ж типу, то правило Лопіталя застосовують повторно, доки не усунуть невизначеність;

3 в існуванні потрібних похідних і границь переконуються в ході обчислень;

4 границя відношення функцій може існувати в той час, коли відношення похідних не прямує ні до якої границі.

Наприклад, треба знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ чисельник і знаменник дробу також прямують до нескінченності. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Але остання границя не існує, бо при $x\to\infty$ значення $\cos x$ весь час коливається між -1 і 1. Крім цього, похідна знаменника $\varphi'(x)=1+\cos x$ при $x=\pi(2k-1)$, де $k\in Z$, дорівнює нулю, що є також порушенням умови теореми, тому правило Лопіталя тут непридатне, однак зазначену границю можна знайти безпосередньо: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1.$.

Зауважимо, що в деяких випадках правило Лопіталя корисно комбінувати з елементарними способами, які використовують при знаходженні границь функцій.

Зауважимо також, що невизначеності вигляду $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$ можна звести до невизначеностей вигляду $\dfrac{0}{0}$ і $\dfrac{\infty}{\infty}$ за допомогою алгебраїчних перетворень, а невизначеності вигляду 1^{∞}, ∞^{0} і 0^{0} можна звести до попередніх за допомогою попереднього логарифмування або тотожності $\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$.

Розв'язання прикладів

Обчислити границі.

Приклад 1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

Розв'язання. При $x\to0$ чисельник і знаменник дробу прямує до нуля, тобто маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя,

знаходимо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1}=\frac{0}{1}=0.$

Приклад 2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}.$

Розв'язання. Переконуємося, що має місце невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Після застосування правила Лопіталя і алгебраїчних перетворень одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}.=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{3x^2\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}.$

Розв'язання. Після підстановки граничного значення x маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, знаходимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{-\sin x}=-2\lim_{x\to 0}e^{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=-2\cdot 1\cdot 1=-2.$$

Прилад 4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$

Розв'язання. Застосовуючи правило Лопіталя тричі, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Приклад 5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}.$

Розв'язання. Має місце невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$, до розкриття якої

можна застосувати правило Лопіталя: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2}{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x\sin x}{\cos x\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x\sin x}{\cos x\cdot 2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}-1.$$

Після застосування правила Лопіталя можна було б обчислення продовжити так: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x\sin x}{\cos x\sin 2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x\cdot x}{\cos x\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{\cos x}-1,$ бо при $x\to 0$ $\sin x\sim x,\ \sin 2x\sim 2x$, або повторно застосувати правило Лопіталя.

Однак слід підкреслити, що повторне застосування правила Лопіталя в даному випадку було б нераціональним. Пропонуємо переконатись у цьому самостійно.

Приклад 6 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right).$

Розв'язання. Переконуємося, що має місце невизначеність вигляду $\infty-\infty$. Правило Лопіталя застосовувати неможна. Тому виконаємо спочатку алгебраїчні перетворення: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}.$

Тепер після підстановки граничного значення x маємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. За правилом Лопіталя знаходимо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\dfrac{1}{2}.$

Приклад 7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{a}{x}\right).$

Розв'язання. Установивши, що має місце невизначеність вигляду $\infty\cdot 0$, перетворимо функцію до дробу, чисельник і знаменник якого одночасно прямують до нуля або до нескінченності, а потім використаємо правило Лопіталя. В даному випадку маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{a}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{a}{x}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=a\lim_{x\to\infty}\cos\frac{a}{x}=a\cdot 1=a.$$

Зауважимо, що дану границю простіше обчислити елементарним способом. Дійсно, вважаючи $\dfrac{a}{x}=t$ і враховуючи, що при $x\to\infty$ $t\to 0$, одержимо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{a}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{a}{t}\sin t\right)=a\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)=a\cdot 1=a.$

Приклад 8 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

Розв'язання. Діючи, як і в попередньому прикладі, знаходимо

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^{-2}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-2x3)}{-2x^{-3}}=e^{+\infty}=\infty.$$

Приклад 9 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Підставивши $x=1$ у вираз функції, встановимо, що має місце невизначеність вигляду 1^∞.

Перший спосіб. Логарифмуємо функцію та шукаємо границю її логарифма: $a=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$;

$$\ln a=\ln\lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x+x}\left(e^x+1\right)}{1}=2.$$ Таким чином, $\ln a=2$, отже, $a=e^2$.

Другий спосіб. Скористаємось тотожністю $\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(e^x+x\right)}$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}=2$ (див. перший спосіб), а показникова функція є неперервною, то $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}}=e^2$.

Приклад 10 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$.

Розв'язання. Переконуємося, що має місце невизначеність вигляду ∞^0. Позначимо $a=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$. Тоді $\ln a=\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}=\lim\limits_{x\to 0}\left(tgx\cdot\ln\frac{1}{x}\right)=$

$$=-\lim_{x\to 0}\left(tgx\cdot\ln x\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=$$

$=1\cdot 0=0$. Отже, $a=e^0=1$, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}=1$.

Приклад 11 $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$.

Розв'язання. Маємо справу з невизначеністю вигляду 0^0. Позначимо шукану границю через a і знайдемо її логарифм: $\ln a = \ln\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}} =$

$$= \lim_{x\to 0}\ln x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x-1}\cdot e^x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\cdot e^x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x} = \frac{1}{1} = 1.$$ Отже, $\ln a = 1$, тобто $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}} = e.$

Приклад 12 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2x-\pi}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду ∞^0. Діючи, як і в попередньому прикладі, одержимо $\ln a = \ln\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2x-\pi} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left(tgx\right)^{2x-\pi} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x-\pi\right)\cdot\ln\left(tgx\right) = \left(0\cdot\infty\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln tgx}{\left(2x-\pi\right)^{-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\left(2x-\pi\right)^{-2}\cdot 2} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(2x-\pi\right)^2}{\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\left(2x-\pi\right)\cdot 2}{2\cos 2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Отже, $\ln a = 0$, тобто $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2x-\pi} = e^0 = 1$.

Питання для самоперевірки

1 Сформулюйте правило Лопіталя.

2 Пригадайте, як розкриваються невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

3 Чи можна стверджувати, що коли не існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то не існує і $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$?

Вправи

Обчислити наведені границі.

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 3x}$. Відповідь: 1.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-\sin x}}{\cos x\cdot\sin x}$. Відповідь: 3.

3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$. Відповідь: 0,5.

4 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$. Відповідь: -1.

5 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. Відповідь: - 0,5.

6 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. Відповідь: 0.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$. Відповідь: 1.

8 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$. Відповідь: $\dfrac{3}{e}$.

9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\ln x}$. Відповідь: 1.

10 $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. Відповідь: e^{-1}.

11 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot ctg\pi x\right)$. Відповідь: $\dfrac{1}{\pi}$.

12 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$. Відповідь: ∞.

13 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\pi-2x\right)^{\cos x}$. Відповідь: 1.

14 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^2}}$. Відповідь: e^{-6}.

15 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$. Відповідь: 2.

5 АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Пряма називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань точки $M(x; f(x))$, яка лежить на кривій, до цієї прямої прямує до нуля при $x \to \infty$ (при $x \to -\infty$).

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то пряма $x = x_0$ (рис. 8) називається вертикальною асимптотою.

Отже, якщо крива має вертикальні асимптоти, то вона проходить через точки розриву функції.

Асимптоти, рівняння яких записуються у вигляді $y = kx + b$ (рис. 9), де $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - kx)$, називаються похилими асимптотами. При цьому обидві границі повинні існувати (бути нескінченними). Якщо хоча б одна із границь не існує, то крива похилих асимптот не має.

Зауважимо, що асимптота (наприклад, гіперболи) не має з нею спільних точок, тобто не перетинає гіперболи. В загальному випадку асимптота кривої $y = f(x)$ може перетинатися з цією кривою я к в скінченній, так і в нескінченній множині точок.

Відзначимо також, що при $k = 0$ одержимо горизонтальну асимптоту $y = b$ (рис.10).

Уміння знаходити асимптоти функції полегше побудову графіка функції.

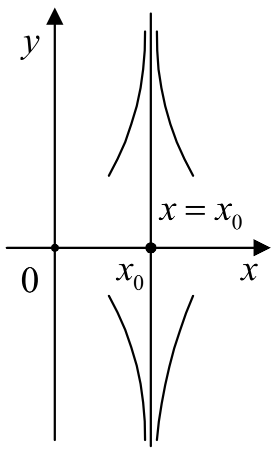


Рис. 8

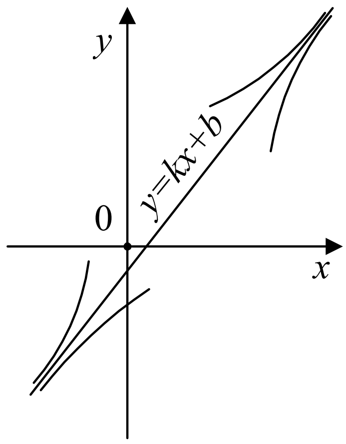


Рис. 9

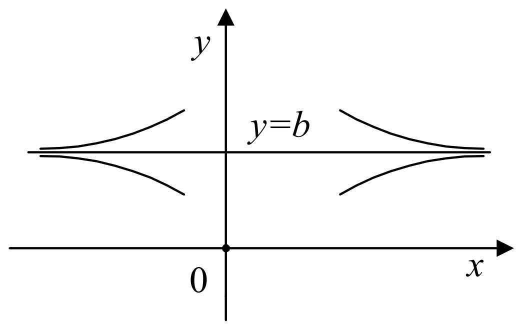


Рис. 10

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти асимптоти кривої $y = \dfrac{x^2 + 5x + 3}{x - 2}$.

Розв'язання. Задана функція не існує при $x = 2$. Оскільки $\lim\limits_{x \to 2} y = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 5x + 3}{x - 2} = \infty$, то пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою.

Для знаходження похилих асимптот обчислимо коефіцієнти k і b:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5x+3}{x(x-2)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=1,$$ бо степені многочленів чисельника і знаменника однакові;

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x-2}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5x+3-x^2+2x}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x+3}{x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=7.$$

Підставляючи значення $k=1$ і $b=7$ в рівняння $y=kx+b$, одержимо $y=x+7$. Таким чином, пряма $y=x+7$ – похила асимптота кривої.

Приклад 2 Знайти асимптоти кривої $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі, оскільки знаменник дробу не обертається в нуль, бо $D=b^2-4ac=16-20=-4<0$, а це означає, що функція неперервна. Тому вертикальних асимптот крива не має. Обчислимо значення k і b та підставимо їх в рівняння $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x\cdot\left(x^2-4x+5\right)}=\frac{1}{\infty}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2-4x+5}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2-4x+5}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Отже, $y-0$ (вісь Ox) – горизонтальна асимптота.

Приклад 3 Знайти асимптоти кривої $2y(x+1)^2=x^3$.

Розв'язання. Запишемо функцію у явному вигляді, тобто у вигляді $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$. При $x=-1$ знаменник дробу обертається в нуль, тому $x=-1$ є точкою розриву, причому $\lim\limits_{x\to-1}y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}=\dfrac{-1}{+0}=-\infty.$

Отже, $x=-1$ - вертикальна асимптота кривої.

Далі маємо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x\cdot2(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\dfrac{1}{2},$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=(\infty-\infty)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1.$$

Отже, $y=\dfrac{1}{2}x-1$ – похила асимптота кривої.

Прилад 4 Знайти асимптоти кривої $y = 2x + arctg\frac{x}{2}$.

Розв'язання. Задана функція визначена і неперервна на всій числовій осі, тому вертикальних асимптот крива не має. Шукатимемо похилі асимптоти кривої:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x + arctg\frac{x}{2}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2 + \frac{arctg\frac{x}{2}}{x}\right) = 2 + \frac{\pm\frac{\pi}{2}}{\infty} = 2 + 0 = 2;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(y - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2x + arctg\frac{x}{2} - 2\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} arctg\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{2}.$$ Тут враховано, що $arctg(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$, $arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, бо $arctg(-x) = -arctgx$.

Таким чином, крива має дві похилі асимптоти: $y = 2x + \frac{\pi}{2}$ і $y = 2x - \frac{\pi}{2}$.

Приклад 5 Знайти асимптоти кривої $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі, крім точки $x = 0$ (точка розриву): $\lim\limits_{x\to-0} y = \lim\limits_{x\to-0}\left(xe^{\frac{2}{x}} + 1\right) = 0\cdot e^{-\infty} + 1 = 0\cdot 0 + 1 = 1;$

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0}\left(xe^{\frac{2}{x}} + 1\right) = \lim_{x\to+0}\left[x\cdot\left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x}\right)\right] = \left(0\cdot\infty\right) = \lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x}}{x^{-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{2}{x}}\cdot\left(-2x^{-2}\right) - x^{-2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to+0}\left(2e^{\frac{2}{x}} + 1\right) = 2e^{+\infty} + 1 = +\infty.$$

Отже, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою лише при $x \to +0$.

Знайдемо похилі асимптоти кривої.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{xe^{\frac{2}{x}} + 1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x}\right) = 1 + 0 = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(y - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{\frac{2}{x}} + 1 - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x} - 1\right)\right] = \left(\infty\cdot 0\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x} - 1}{x^{-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}\cdot\left(-2x^{-2}\right) - x^{-2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2e^{\frac{2}{x}} + 1\right) = 2e^{0} + 1 = 3.$$

Таким чином, пряма $y = x + 3$ – похила асимптота.

Питання для самоперевірки

1 Що називається асимптотою кривої?

2 Які асимптоти може мати крива?

3 Яку прямую називають вертикальною асимптотою ?

4 Який вигляд має рівняння похилої асимптоти?

5 Запишіть формули для знаходження параметрів рівняння похилої асимптоти.

6 при якому значенні k рівняння похилої асимптоти перетворюється на рівняння горизонтальної прямої?

7 За яких умов існують похилі і горизонтальні асимптоти кривої?

Вправи

Знайти асимптоти заданих кривих.

1 $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$. Відповідь: $x=1$, $x=3$, $y=0$.

2 $y=e^{-x^2}+2$ Відповідь: $y=2$.

3 $y=\dfrac{3x^2}{x^2+5}$. Відповідь: $y=3$.

4 $y=\ln(x-1)$. Відповідь: $x=1$.

5 $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$. Відповідь: $x=0$, $y=-3x$.

6 $y=2x-\dfrac{\cos x}{x}$. Відповідь: $x=0$, $y=2x$.

7 $y=x^2e^{-x}$. Відповідь: $y=0$.

8 $y=\dfrac{1}{2}x+arctgx$. Відповідь: $y=\dfrac{1}{2}x$, $y=\dfrac{1}{2}x+\pi$.

9 $y=-xarctgx$. Відповідь: $y=\dfrac{\pi}{2}x+1$, $y=-\dfrac{\pi}{2}x+1$.

10 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$. Відповідь: $x=0$, $y=x$.

6 ІНТЕРВАЛИ МОНОТОННОСТІ І ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ. НАЙМЕНШЕ І НАЙБІЛЬШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ

6.1 Інтервали зростання і спадання функції

Кажуть, що функція $y = f(x)$ на інтервалі $(a;b) \subset D(y)$ зростає (спадає), якщо для двох будь-яких значень аргументу $x_1, x_2 \in (a;b)$ із умови $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Щоб знайти інтервали зростання та спадання функції, треба дослідити знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$ за умови, що $x_1 < x_2$. Якщо ця різниця на певному інтервалі додатна, то функція $y = f(x)$ на такому інтервалі зростає, якщо ж різниця $f(x_2) - f(x_1)$ від'ємна, то функція спадає.

Інтервали, на яких функція лише зростає або лише спадає, називають інтервалами монотонності функції.

Зрозуміло, що встановити безпосередньо знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$ не завжди легко, а тому при дослідженні функції на монотонність найчастіше використовують похідну функції.

Функції, з якими ми матимемо справу, мають ту властивість, зо їхню область визначення можна поділити на проміжки, в кожному з яких функція диференційована. Для таких функцій відшукання проміжків монотонності зводиться до дослідження на знак їхніх похідних.

Зауважимо, що відрізок $[a;b]$, інтервал $(a;b)$, півінтервали або піввідрізки $[a;b)$ і $(a;b]$ називають проміжками і позначають $\langle a;b \rangle$.

Для того, щоб неперервна на проміжку $\langle a;b \rangle$ і диференційована на інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ була зростаючою (спадною) на проміжку $\langle a;b \rangle$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ для всіх $x \in (a;b)$.

Зауважимо, що похідна зростаючої (спадної) функції може обертатись в нуль в деяких точках. Наприклад, функція $f(x) = x^3$ зростає на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, однак її похідна $f'(x) = 3x^2$ дорівнює нулю в точці $x = 0$.

Якщо ж $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ для всіх $x \in (a;b)$, то в інтервалі $(a;b)$ функція $y = f(x)$ зростає (спадає) .

6.2 Екстремуми функції

Вважають що функція $y = f(x)$ в точці x_0 має максимум (мінімум), якщо існує окіл $(x_0 + \delta;\, x_0 - \delta;)$ цієї точки такий, що для всіх $x \in (x_0 + \delta;\, x_0 - \delta;)$, $x \neq x_0$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$.

Максимум і мінімум функції в точці називають екстремумом цієї функції в цій точці. Екстремум функції в точці іноді називають локальним (місцевим) екстремумом цієї функції в цій точці. Слово «локальний» («місцевий») має на маті підкреслити, що значення функції в точці x_0 є найбільшим (найменшим) порівняно не з усіма значеннями цієї функції в області її існування, а за тими її значеннями, яких вона набуває в точках, що лежать у досить малому околі точки x_0 і відмінні від точки x_0.

Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 має екстремум (максимум або мінімум), то похідна функції в цій точці дорівнює нулю або не існує (необхідна умова існування екстремуму).

Точка x_0 називається критичною точкою першого роду, або просто критичною, якщо має місце одна із умов:

1 $f'(x_0)=0$;

2 $f'(x_0)=\infty$;

3 функція $f(x)$ в точці x_0 визначена, але $f'(x_0)$ не існує.

Геометрично ці умови означають, що в критичній точці дотична або паралельна осі *Ox*, якщо виконується умова 1, або паралельна осі *Oy*, якщо виконується умова 2, або дотичної зовсім не існує (рис. 11), якщо має місце умова 3. Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають стаціонарними.

Не кожна критична точка функції є точкою екстремуму цієї функції. Так, з рисунка 11 видно, що точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7 і x_9 є екстремальними, причому в точках x_1, x_3, x_6 і x_9 функція має максимум, а в точках x_2, x_4 і x_7 – мінімум. Що стосується точок x_0, x_5 і x_8, то жодна з цих точок не є точкою екстремуму.

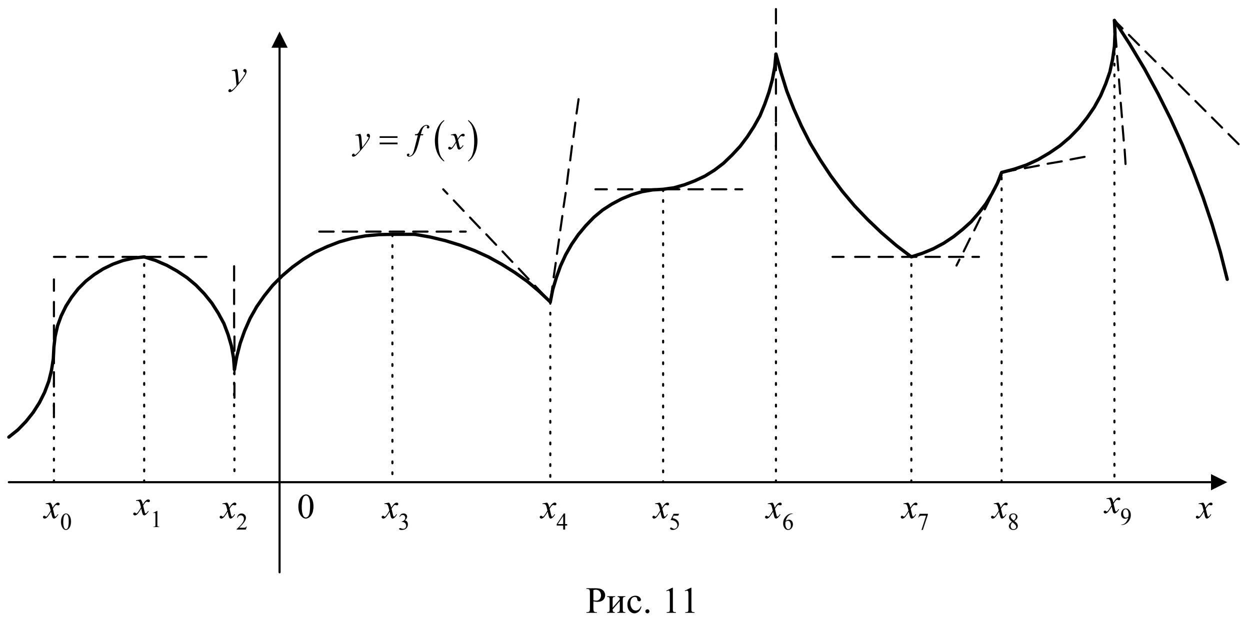


Рис. 11

Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 похідна функції $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то в точці x_0 функція $y=f(x)$ має максимум, а якщо з мінуса на плюс, то мінімум., якщо ж знак похідної не змінюється, то екстремуму в цій точці немає (достатня умова існування екстремуму).

При знаходженні інтервалів монотонності і екстремумів функції доцільно керуватися правилом, яке випливає із сказаного вище:

1 знаходимо область визначення функції;

2 знаходимо $f'(x)$;

3 знаходимо корені рівняння $f'(x)=0$ і точки, де $f'(x)$ не існує (критичні точки першого роду);

4 розставляємо одержані точки на числовій осі в порядку зростання;

5 визначаємо знак $f'(x)$ в кожному із одержаних інтервалів (для цього слід похідну розкласти на множники, якщо це можливо) і тим самим знаходимо інтервали зростання і спадання функції;

6 визначаємо, які із критичних точок є екстремальними (рис.12).

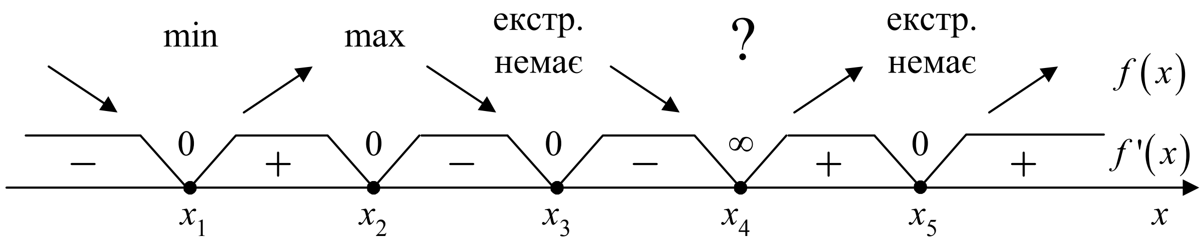


Рис. 12

Зауважимо, що в точці x_4 функція має мінімум, якщо функція $y=f(x)$ в цій точці визначена, або в точці x_4 екстремуму немає, якщо функція в цій точці не визначена;

7 обчислюємо значення функції в екстремальних точках, тобто знаходимо шукані екстремуми.

6.3 Дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної

При класифікації екстремальних точок функції $y=f(x)$ можне використовувати також її другу похідну.

Розв'язки системи $\begin{cases} f'(x)=0, \\ f''(x)<0 \end{cases}$ є точками максимуму,

а розв'язки системи $\begin{cases} f'(x)=0, \\ f''(x)>0 \end{cases}$ є точками мінімуму функції $y=f(x)$.

Таким чином, для знаходження екстремумів функції за допомогою другої похідної треба

1 знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких перша похідна дорівнює нулю;

2 обчислити значення другої похідної в одержаних точках;

3 якщо $f''(x_0)>0$, то в точці x_0 маємо мінімум, якщо $f''(x_0)<0$, то в точці x_0 маємо максимум, якщо функція якщо ж $f''(x_0)=0$, то відповіді немає

і тому слід скористатися першим правилом, тобто знайти екстремум в цій точці за першою похідною.

Відзначимо, що в сумнівному випадку, коли $f'(x_0)=0$ і $f''(x_0)=0$, можна також скористатися більш загальним твердженням: якщо функція $y=f(x)$ має в околі точки x_0 неперервні похідні до n-го порядку $(n>1)$ включно і якщо $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, в той час як $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то при n непарному функція не має екстремуму в точці x_0, при n парному функція має максимум, коли $f^{(n)}(x_0)<0$, і мінімум, коли $f^{(n)}(x_0)>0$.

6.4 Найменше і найбільше значення функції на відрізку

Відомо, що неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в усіх точках цього відрізка функція $f(x)$ досягає свого найбільшого і найменшого значення або в критичних точках, або на кінцях відрізка. Тому для знаходження найбільшого і найменшого значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ слід користуватися таким правилом:

1 знаходимо критичні точки першого роду (не вдаючись в дослідження, чи будуть в них екстремуми функції і якого виду);

2 обчислюємо значення функції в усіх критичних точках, які належать інтервалу $(a;b)$ і на кінцях відрізку $[a;b]$;

3 із одержаних значень обираємо найменше і найбільше. Вони і будуть шуканими.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти інтервали монотонності функції $y=x^2e^{-x}$.

Розв'язання. Функція визначена на всій числовій осі. Її похідна $y'(x)=2xe^{-x}+x^2e^{-x}\cdot(-1)=x(2-x)e^{-x}$. Знаходимо критичні точки першого роду: $y'(x)=0$, якщо $x=0$ і $x=2$; $y'(x)\neq\infty$. Точки $x=0$ і $x=2$ ділять числову вісь на три інтервали: $(-\infty;0)$, $(0;2)$ і $(2;+\infty)$.

Оскільки похідна $y'(x)=x(2-x)e^{-x}$ є неперервною в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, то вона зберігає знак в інтервалах $(-\infty;0)$, $(0;2)$ і $(2;+\infty)$. Значення похідної в точці $x=-1$ від'ємне, в точці $x=1$ додатне, в точці $x=3$ від'ємне. При визначені знака похідної слід враховувати, що $e^{-x}>0$ для будь-яких x. Тому $y'(x)<0$ для всіх $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ і $y'(x)>0$ для всіх $x\in(0;2)$.

Отже, функція $y=x^2e^{-x}$ монотонно спадає в інтервалах $(-\infty;0)$ і $(2;+\infty)$ та монотонно зростає в інтервалі $(0;2)$.

Приклад 2 Знайти інтервали монотонності функції $y = 2x^2 - \ln x$.

Розв'язання. Задана функція визначена для $x > 0$. Її похідна $y'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$. Знайдемо точки, в яких ця похідна дорівнює нулю або не існує: $y'(x) = 0$, якщо $4x^2 - 1 = 0$, звідки $x = \pm\frac{1}{2}$; $y'(x) = \infty$, якщо $x = 0$.

Оскільки задана функція визначена для $x > 0$, то знак її похідної треба визначати лише в інтервалах $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ і $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Значення $y'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, тому $y'(x) < 0$ для всіх $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, а це означає, що на цьому інтервалі функція $y = 2x^2 - \ln x$ монотонно спадає.

Оскільки $y'(1) > 0$, тому $y'(x) > 0$ для всіх $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, а це означає, що на цьому інтервалі функція $y = 2x^2 - \ln x$ монотонно зростає.

Приклад 3 Показати, що функція $y = arctgx - x$ всюди спадає.

Розв'язання. Задана функція визначена для всіх $x \in R$. Оскільки її похідна $y'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 = \frac{1 - 1 - x^2}{1 + x^2} = -\frac{x^2}{1 + x^2} \le 0$ для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$, то ця функція спадає в усій області визначення.

Прилад 4 Знайти екстремуми функції $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

Розв'язання. Задана функція визначена і диференційована в інтервалі $(-\infty; +\infty)$. $x > 0$. Її похідна $y'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6\left(x^2 - 2x - 3\right) = 6(x + 1)(x - 3)$.
Знайдемо критичні точки: $y'(x) = 0$, якщо $x = -1$ і $x = 3$; $y'(x) \ne \infty$.
В інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(3; +\infty)$ похідна $y'(x)$ додатна, бо $y'(-2) > 0$ і $y'(-4) > 0$, а в інтервалі $(-1; 3)$ вона від'ємна, бо $y'(0) < 0$.
Визначимо, які із критичних точок є екстремальними (рис. 13).

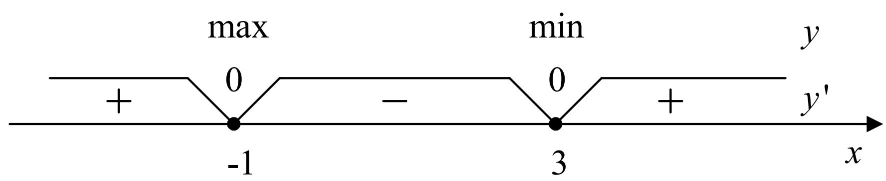


Рис.13

Обчислюємо значення функції в екстремальних точках, тобто знаходимо шукані екстремуми:
$y_{\max} = y(-1) = -2 - 6 + 18 + 7 = 17$,
$y_{\min} = y(3) = 54 - 54 - 54 + 7 = -47$.

Приклад 5 Знайти екстремум функції $y = x - \ln\left(1 + x^2\right)$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі, бо $1 + x^2 > 0$ для будь-яких x. $x > 0$. Її похідна $y'(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0$, отже, функція зростає, екстремумів немає.

Приклад 6 Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на відрізку $[-2;2]$.

Розв'язання. Знаходимо $y' = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right)$. Знаходимо критичні точки першого роду: $y'(x) = 0$, якщо $x = 0$, $x = 1$ і $x = -1$; $y'(x) \neq \infty$. Відзначимо, що всі знайдені точки належать відрізку $[-2;2]$.

Обчислимо значення функції в критичних точках і на кінцях відрізку: $y(-2) = 13$, $y(-1) = 4$, $y(0) = 5$, $y(1) = 4$, $y(2) = 13$. Із одержаних значень вибираємо найбільше і найменше: $y_{\text{нм}} = 4$, $y_{\text{нб}} = 13$.

Приклад 7 Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \sqrt{100 - x^2}$ на відрізку $[-6;8]$.

Розв'язання. Діючи, як і в попередньому прикладі, одержимо:

1 $y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}$;

2 $y'(x) = 0$ при $x = 0 \in [-6;8]$; $y'(x) = \infty$ при $x = \pm 10 \notin [-6;8]$;

3 $y(-6) = 8$, $y(0) = 10$, $y(8) = 6$.

Таким чином, $y_{\text{нм}} = 6$, $y_{\text{нб}} = 10$.

Приклад 8 Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ на відрізку $[-1;1]$.

Розв'язання. $y' = 3x^2 - 6x + 6 = 3\left(x^2 - 2x + 2\right) > 0$ для будь-яких x, оскільки $D = -4 < 0$, тому функція монотонно зростає. Отже, $y(-1) = -12$ – найменше значення функції, $y(1) = 2$ – найбільше значення функції .

Приклад 9 Знайти екстремуми функції $y = x^2 (a - x)^2$, користуючись другою похідною.

Розв'язання. Задана функція визначена для всіх $x \in R$. Диференціюючи її двічі, одержимо $y' = 2x(a - x)^2 + x^2 \cdot 2(a - x) \cdot (-1) = 2x(a - x)(a - x - x) =$ $= 2x(a - x)(a - 2x) = 2\left(a^2 x - 3ax^2 + 2x^3\right)$; $y'' = 2\left(a^2 - 6ax + 6x^2\right)$.

Знаходимо стаціонарні точки, тобто точки, в яких похідна $y'(x)=0$. Розв'язуючи рівняння $2x(a-x)(a-2x)=0$, матимемо $x=0$, $x=\frac{a}{2}$ і $x=a$.

Обчислимо значення другої похідної в одержаних точках:
$y''(0)=2a^2>0$, $y''\left(\frac{a}{2}\right)=-2a^2<0$, $y''(a)=2a^2>0$.

Таким чином, в точках $x=0$ і $x=a$ функція має мінімум, причому $y_{\min}=0$, а в точці $x=\frac{a}{2}$ – максимум, причому $y_{\max}=\frac{a^4}{16}$.

Приклад 10 За допомогою другої похідної знайти екстремуми функції $y=\frac{x}{\ln x}$.

Розв'язання. Задана функція визначена для всіх $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Діючи далі, як і в попередньому прикладі, знаходимо $y'=\dfrac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$;

$$y''=\frac{\frac{1}{x}\ln^2 x-2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln x-1)}{\left(\ln^2 x\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln x\cdot(\ln x-2\ln x+2)}{\ln^4 x}=\frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}.$$

$y'(x)=0$, якщо $\ln x-1=0$, звідки $x=e$ – стаціонарна точка. Обчислюючи значення другої похідної при $x=e$, маємо $y''(e)=e^{-1}>0$. Отже, $(e;e)$ - точка мінімуму.

Питання для самоперевірки

1 **Я**ка функція називається зростаючою (спадною)?

2 Сформулюйте необхідну і достатню умови зростання (спадання) функції.

3 Що називають максимумом (мінімумом) функції?

4 Як називають максимум і мінімум функції в точці?

5 В чому полягає необхідна умова існування екстремуму?

6 Сформулюйте достатню умову існування екстремуму.

7 Як називаються точки, в яких похідна дорівнює нулю?

8 Як називаються точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує?

9 Пригадайте правило, за яким знаходяться інтервали монотонності і екстремуми функції.

10 Як досліджується функція на екстремум за допомогою другої похідної?

11 Як знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку?

Вправи

1 Показати, що функція $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ зростає в будь-якому інтервалі, який не містить точку $x=0$.

2 Знайти інтервали монотонності функції $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Відповідь: в інтервалах $(0;1)$ і $(1;e)$ функція спадає, а в інтервалі $(e;+\infty)$ функція зростає.

3 Знайти інтервали зростання і спадання функції $y=x+\cos x$.

Відповідь: функція монотонно зростає.

4 Знайти екстремуми функції $y=2x^3-3x^2$.

Відповідь: $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(1)=-1$.

5 Знайти екстремуми функції $y=x-\ln(1-x)$.

Відповідь: $y_{\min}=y(0)=0$.

6 Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ на відрізку $[-1;2]$.

Відповідь: $y_{нм}=-10$, $y_{нб}=2$.

7 Знайти найбільше і найменше значення функції $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ на відрізку $[0;4]$.

Відповідь: : $y_{нм}=-1$, $y_{нб}=\dfrac{3}{5}$.

8 Показати, що функція $y=\sqrt{2x-x^2}$ зростає в інтервалі $[0;1]$ і спадає в інтервалі $[1;2]$.

9 Знайти екстремуми функції $y=x^3-2ax^2+a^2x$ $(a>0)$ за допомогою другої похідної.

Відповідь: $y_{\max}=y\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{4}{27}a^3$, $y_{\min}=y(a)=0$.

10 За допомогою другої похідної знайти екстремуми функції $y=x^2e^{-x}$.

Відповідь: $y_{\max}=y(2)=\dfrac{4}{e^2}$, $y_{\min}=y(0)=0$.

7 ОПУКЛІСТЬ І ВГНУТІСТЬ КРИВОЇ. ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ

Графік функції $y = f(x)$ називається опуклим (крива обернена опуклістю вгору) в інтервалі $(a;b)$, якщо він розміщений нижче дотичної, проведеної в будь-якій точці цього інтервалі (рис. 14).

Графік функції $y = f(x)$ називається вгнутим (крива обернена опуклістю вниз) в інтервалі $(a;b)$, якщо він розміщений вище дотичної, проведеної в будь-якій точці цього інтервалі (рис. 15).

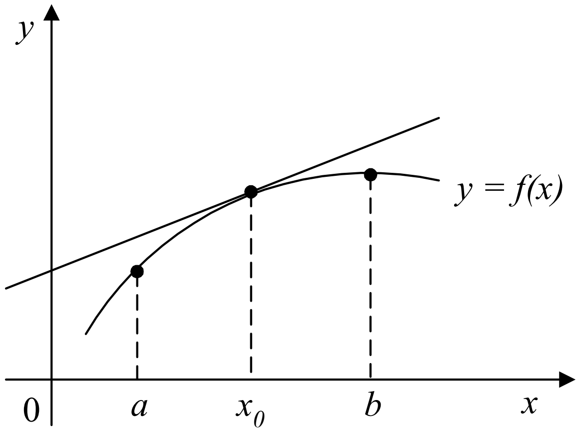


Рис. 14

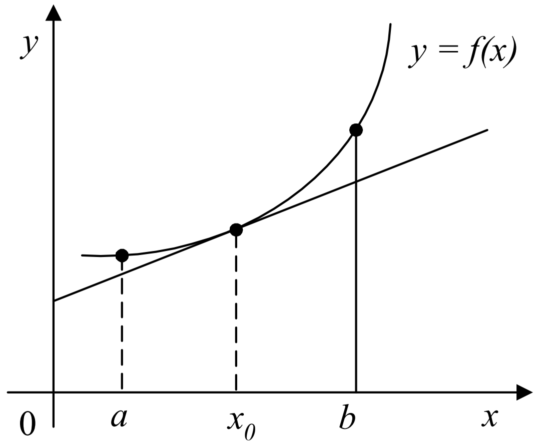


Рис. 15

Якщо $f''(x) < 0$ $\left(f''(x) > 0\right)$ в інтервалі $(a;b)$, то графік функції опуклий (вгнутий) в цьому інтервалі (достатня умова опуклості (вгнутості) графіка функції).

Точка $\left(x_0; f(x_0)\right)$ графіка функції, яка відділяє опуклу його частину від вгнутої, або навпаки, вгнуту його частину від опуклої, називається точкою перегину (рис. 16.1, 16.2).

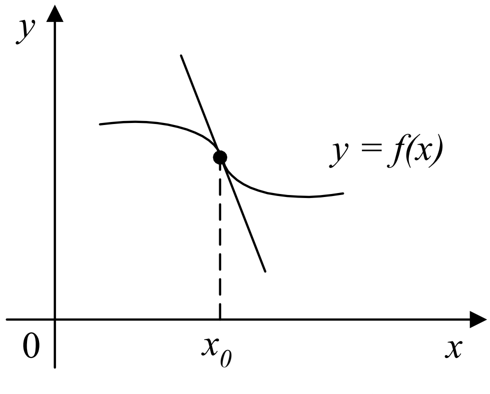


Рис. 16.1

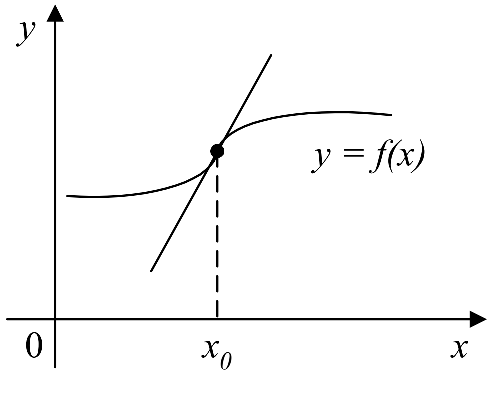


Рис. 16.2

Якщо $M(x_0; y_0)$ – точка перегину графіка функції $y = f(x)$, то друга похідна $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує (необхідна умова існування точки перегину).

Точки, в яких $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує, називаються критичним точками другого роду.

Якщо при переході через критичну точку x_0 друга похідна змінює знак, то точка $M(x_0; y_0)$ є точкою перегину кривої (достатня умова існування точки перегину).

Виходячи з цих умов, одержимо правило для знаходження інтервалів опуклості і вгнутості та точок перегину графіка функції:

1 знаходимо область визначення функції;

2 знаходимо $f'(x)$;

3 знаходимо $f''(x)$;

4 знаходимо корені рівняння $f''(x)=0$ і точки, де $f''(x)$ не існує (критичні точки другого роду);

5 визначаємо знак другої похідної $f''(x)$ в кожному інтервалі, на які знайдені критичні точки розбивають область визначення даної функції, і тим самим знаходимо інтервали опуклості і вгнутості кривої;

6 визначаємо, які з критичних точок є абсцисами точок перегину (рис. 17).

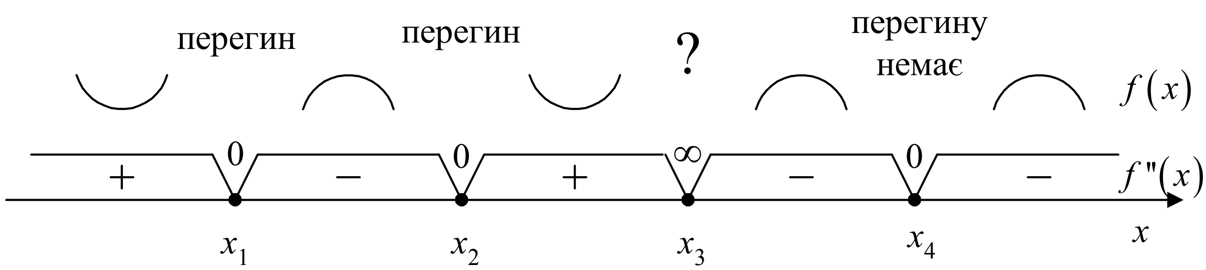


Рис. 17

Зауважимо, що в точці з абсцисою x_3 графік функції $y=f(x)$ має перегин, якщо в цій точці функція $f(x)$ визначена, або не має перегину, якщо функція $f(x)$ в цій точці не визначена;

7 обчислюємо значення функції $f(x)$ в знайдених точках, тобто знаходимо точки перегину графіка цієї функції.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Показати, що графік функції $y = xarctgx$ всюди вгнутий.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі. Знаходимо першу і другу похідні: $y'(x)=(xarctgx)' = arctgx + \dfrac{x}{1+x^2}$;

$$y''(x)=\left(arctgx+\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1+x^2+1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

При будь-яких x $y''(x)>0$, а це означає, що графік цієї функції всюди вгнутий.

Приклад 2 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.

Розв'язання. Діятимемо за запропонованою схемою:

1 задана функція визначена для всіх $x \in R$.

2 $y'(x) = 3x^2 - 10x + 3$;

3 $y''(x) = 6x - 10 = 2(3x - 5)$;

4 $y''(x) = 0$, якщо $3x - 5 = 0$, тобто $x = \frac{5}{3}$; $y''(x) \neq \infty$;

5 для $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$ $y''(x) < 0$, бо, наприклад, $y''(0) = -10 < 0$, а для $x \in \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$ $y''(x) > 0$, оскільки, наприклад, $y''(4) = 14 > 0$, отже, в інтервалі $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$ крива є опуклою, а в інтервалі $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$ – вгнутою;

6 в точці $x = \frac{5}{3}$ друга похідна даної функції дорівнює нулю і при переході через точку змінює знак, а це означає, що $x = \frac{5}{3}$ є абсцисою точки перегину кривої;

7 обчислюючи значення функції $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ при $x = \frac{5}{3}$, одержимо: $y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{250}{27}$. Таким чином, $M\left(\frac{5}{3}; -\frac{250}{27}\right)$ – точка перегину графіка даної функції.

Приклад 3 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції $y = \ln\left(1 + x^2\right)$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі, оскільки $1 + x^2 > 0$ для всіх $x \in R$. Диференціюючи її двічі, одержимо: $y'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$,

$y''(x) = 2\,\frac{1 + x^2 - 2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{2\left(1 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^2}$. Друга похідна існує на всій числовій осі і обертається в нуль при $x = -1$ і $x = 1$. Ці точки розділять числову вісь на три інтервали: $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ і $(1; +\infty)$ (рис.18), в кожному з яких похідна $y''(x)$ зберігає знак. Визначаючи знак другої похідної в довільно взятій точці кожного інтервалу, одержимо: $y''(-2) < 0$, $y''(0) > 0$, $y''(2) < 0$. При визначенні знака другої похідної слід враховувати, що знаменник $\left(1 + x^2\right)^2 > 0$ при всіх значеннях $x \in R$.

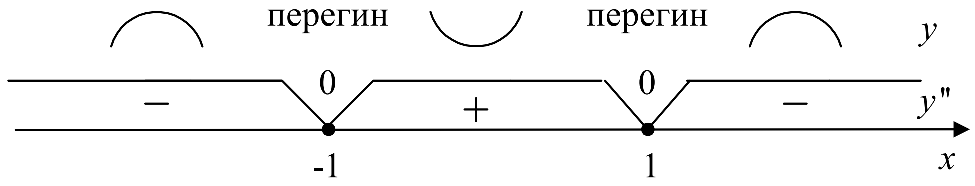


Рис. 18

Обчислюючи значення функції $y = \ln\left(1 + x^2\right)$ при $x = \pm 1$, знаходимо: $y(-1) = y(1) = \ln 2$. Таким чином, графік функції $y = \ln\left(1 + x^2\right)$ є опуклим в інтервалах $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$ і вгнутим в інтервалі $(-1; 1)$. Крива має дві точки перегину: $(-1; \ln 2)$ і $(1; \ln 2)$.

Питання для самоперевірки

1 **Я**ка крива називається опуклою (вгнутою)?

2 В чому полягає достатня умова опуклості (вгнутості) функції в заданому інтервалі?

3 Що називається точкою перегину графіка функції?

4 Сформулюйте необхідну і достатню умову існування точки перегину кривої.

Вправи

1 Показати, що графік функції $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$ всюди опуклий.

2 Знайти інтервали опуклості і вгнутості кривої $y = xe^x$.

Відповідь: в інтервалі $(-\infty; -2)$ крива опукла, а в інтервалі $(-2; +\infty)$ – вгнута.

3 Знайти точки перегину кривої $y = (x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$.

Відповідь: $M(1; 0)$.

4 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції $y = (x+1)^4 + e^x$.

Відповідь: точок перегину немає, графік функції вгнутий.

5 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої $y = x^4(12\ln x - 7)$.

Відповідь: в інтервалі $(0; 1)$ крива опукла, а в інтервалі $(1; +\infty)$ – вгнута. Точка перегину $(1; -7)$.

8 ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ І ПОБУДОВА ГРАФІКА

Повне дослідження функції рекомендується проводити за такою схемою:
1 Знайти область визначення функції
2 Встановити точки розриву та інтервали неперервності функції
3 Дослідити функцію на парність і непарність.
4 Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
5 Знайти інтервали знакосталості функції.
6 Знайти асимптоти. Дослідити поведінку функції поблизу точок розриву.
7 Знайти інтервали спадання і зростання функції та екстремуми.
8 Знайти інтервали опуклості і вгнутості графіка функції та точки перегину.
9 Побудувати графік функції за результатами дослідження.

Зробимо декілька зауважень щодо цієї схеми.

1 Якщо функції виявиться парною або непарною, то дослідження досить провести лише для невід‘ємних значень аргументу, а потім скористатися властивістю симетрії.

2 Якщо в результаті дослідження виявиться, що функція періодична, то наступне дослідження цієї функції досить провести на відрізку довжиною в період. З‘ясувавши всі особливості функції на цьому відрізку, встановимо (внаслідок періодичності) її особливості в усій області існування.

3 Доцільно наносити на рисунок характерні точки, асимптоти і т.п. паралельно з дослідженням. Це спростить роботу з накресленням графіка.

4 Щоб якомога точніше накреслити графік функції в тих інтервалах області її існування, в яких немає особливостей цієї функції і які великі за розмірами, треба взяти кілька точок і обчислити значення функції в цих точках.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Провести повне дослідження функції $y = e^{\frac{1}{x}} - x$ і побудувати її графік за результатами дослідження.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі, крім точки $x = 0$. Отже, в інтервалах $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$ функція неперервна, а $x = 0$ - точка розриву функції.

Функція не є ні парною, ні непарною, бо $y(-x) = e^{-\frac{1}{x}} + x \neq y(x)$ і $y(-x) \neq -y(x)$. Отже, вона не симетрична.

Функція не періодична.

Графік функції не перетинає вісь *Oy*, бо $x \neq 0$. Розв‘язуючи рівняння $e^{\frac{1}{x}} - x = 0$, знаходимо точки перетину графіка функції з віссю *Ox*: $e^{\frac{1}{x}} - x = 0$, $e^{\frac{1}{x}} = x$, $\frac{1}{x} = \ln x$, звідки $x \approx 1{,}5$ (рис. 19).

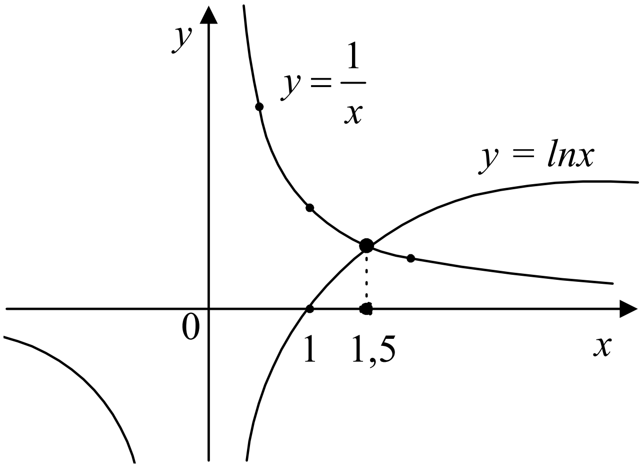


Рис. 19

Таким чином, графік функції проходить через точку $(1{,}5:0)$.

Знаходимо інтервали знакосталості функції (рис. 20): $y = 0$ при $x \approx 1{,}5$;

$y = \infty$ при $x = 0$; $y(-1) = e^{-1} + 1 > 0$; $y(1) = e - 1 > 0$; $y(2) = e^{\frac{1}{2}} - 2 < 0$.

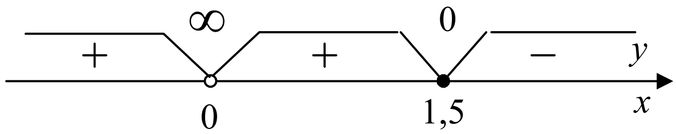


Рис. 20

Виходячи з дослідження, робимо висновок: для $x \in (-\infty;0) \cup (0;1{,}5)$ графік функції розміщений вище осі Ox, бо для цих x $y > 0$, а для $x \in (1{,}5;+\infty)$ графік функції розміщений нижче осі Ox, бо для цих x $y < 0$.

Далі досліджуємо функцію поблизу точок розриву і знаходимо асимптоти. Як відзначалося вище, $x = 0$ - точка розриву функції. Знаходимо

$$\lim_{x \to +0} y = \lim_{x \to +0}\left(e^{\frac{1}{x}} - x\right) = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to -0} y = \lim_{x \to -0}\left(e^{\frac{1}{x}} - x\right) = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = +0.$$

Отже, $x = 0$ - вертикальна асимптота функції при $x \to +0$.

Тепер знаходимо похилі асимптоти $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - 1\right) = \frac{e^0}{\infty} - 1 = \frac{1}{\infty} - 1 = 0 - 1 = -1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty}(y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} - x + x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Таким чином, пряма $y = -x + 1$ – похила асимптота.

Оскільки $y'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} - x \right)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) - 1 = -\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + 1 \right) < 0$ для всіх x із області визначення, то функція монотонно спадає, а тому екстремумів немає.

Знаходимо інтервали опуклості і вгнутості графіка функції та точки перегину: $y''(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot x^2 - 2x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (1 + 2x)}{x^4}$;

$y''(x) = 0$, якщо $1 + 2x = 0$, тобто $x = -\frac{1}{2}$;

$y''(x) = \infty$ при $x = 0$.

Зауважимо, що при визначенні знака $y''(x)$ (рис. 21) слід врахувати, що $e^{\frac{1}{x}} > 0$ для всіх x із області визначення функції:

$$y''(-1) < 0, \quad y''\left(-\frac{1}{4} \right) > 0, \quad y''(1) < 0.$$

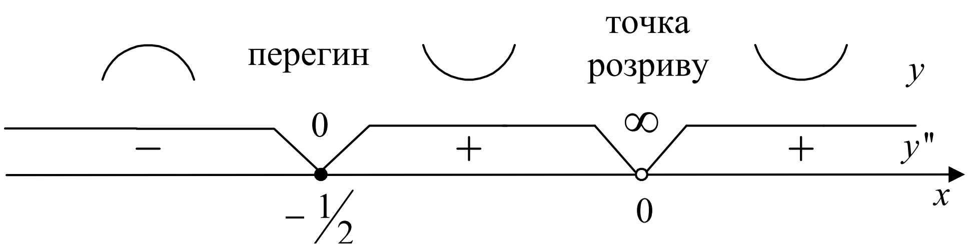
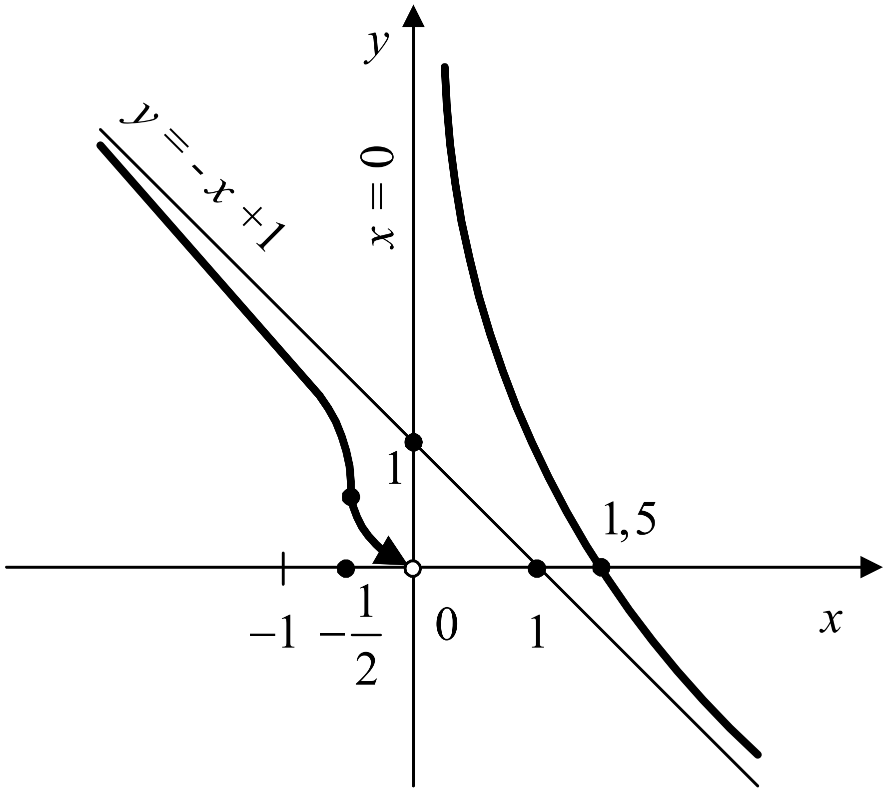


Рис. 21

Таким чином, при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right)$ крива є опуклою, а для $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0 \right) \cup (0; +\infty)$ – вгнутою.

$y_{перегину} = y\left(-\frac{1}{2} \right) = e^{-2} + \frac{1}{2} \approx 0,6.$

Відобразивши на площині всі характерні точки функції $y = e^{\frac{1}{x}} - x$ і використавши всі її згадані вище особливості, креслимо графік цієї функції (рис. 22).



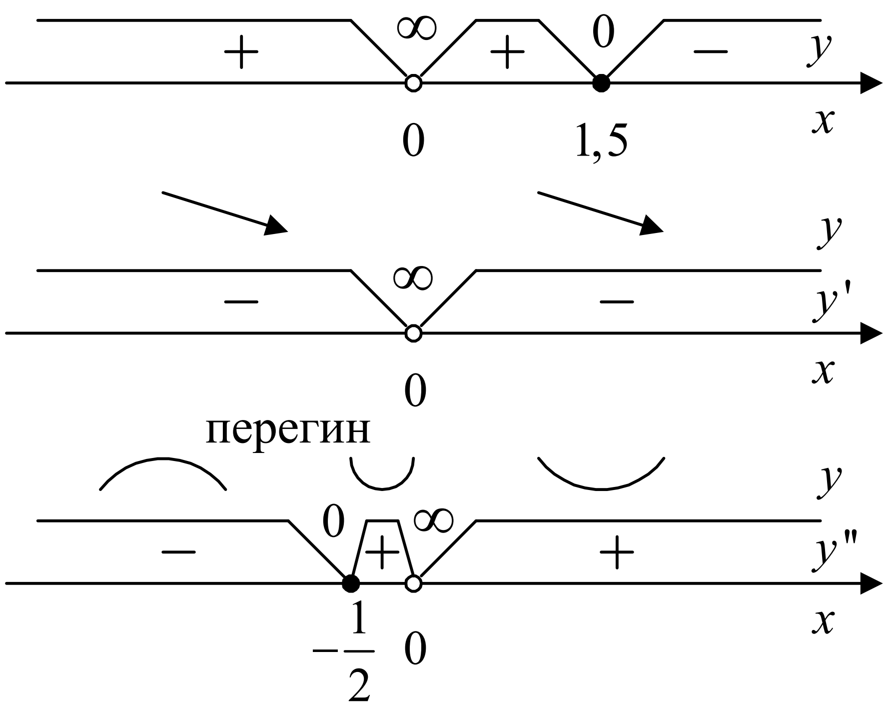


Рис. 22

Приклад 2 Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ і побудувати її графік за результатами дослідження.

Розв'язання. Слідуючи запропонованій схемі, маємо:

1 $3 - x^2 \neq 0, \quad x \neq \pm\sqrt{3}$; $\quad D(y) = \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$.

2 $x = -\sqrt{3}$ і $x = \sqrt{3}$ – точки розриву;

$\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$ і $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ – інтервали неперервності функції.

3 $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{3 - (-x)^2} = \dfrac{-x^3}{3 - x^2} = -y(x)$. Отже, задана функція є непарною. Її графік розташований симетрично відносно початку координат, тому подальші дослідження досить проводити лише для $x \geq 0$.

4 При $x = 0$ $y = 0$; при $y = 0$ $x = 0$, тобто графік функції проходить через точку $O(0;0)$ - початок координат.

5 $y = 0$ при $x = 0$; $y = \infty$ при $x = \pm\sqrt{3}$;

$y > 0$ в інтервалі $\left(0; \sqrt{3}\right)$ і $y < 0$ в інтервалі $\left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ (рис. 23).

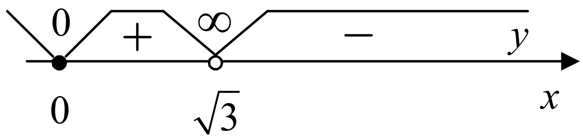


Рис. 23

6 $x = \sqrt{3}$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x \to \sqrt{3}+0} y = \lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = \frac{\left(\sqrt{3}+0\right)^3}{3 - \left(\sqrt{3}+0\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}-0} y = \lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = \lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}-0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}-0\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{+0} = +\infty.$$

Отже, $x = \sqrt{3}$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x \cdot \left(3 - x^2\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{3 - x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 3x - x^3}{3 - x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{3 - x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0,$$

оскільки степінь многочлена чисельника менша степеня многочлена знаменника.

Отже, пряма $y = -x$ – похила асимптота.

7 $y'=\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}\right)'=\dfrac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3(-2x)}{\left(3-x^2\right)^2}=\dfrac{x^2\left(9-3x^2+2x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\dfrac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}$;

$y'(x)=0$, якщо $x^2\left(9-x^2\right)=0$, звідки $x=0$, $x=\pm 3$;

$y'(x)=\infty$, якщо $3-x^2=0$, звідки $x=\pm\sqrt{3}$,

$y_{\max}=y(3)=\dfrac{27}{3-9}=-\dfrac{9}{2}$ (рис. 24).

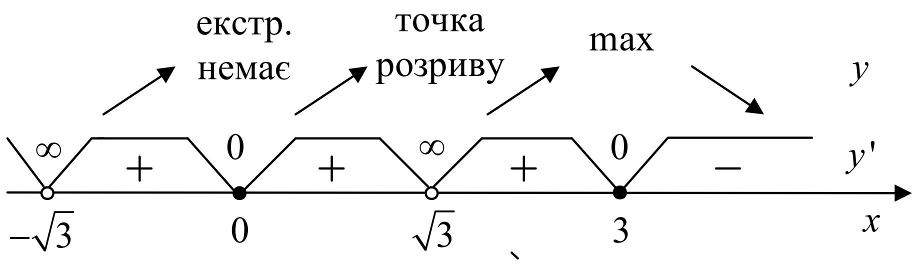


Рис. 24

8 $y''=\left(\dfrac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\dfrac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-2\left(3-x^2\right)(-2x)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$

$=\dfrac{2x\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)^2+4x\left(3-x^2\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=\dfrac{2x\left(3-x^2\right)\left(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$

$=\dfrac{2x\left(27+3x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\dfrac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}$.

$y''(x)=0$, якщо $x=0$;

$y''(x)=\infty$ якщо $x=\pm\sqrt{3}$.

$y_{перегину}=y(0)=0$ (рис. 25).

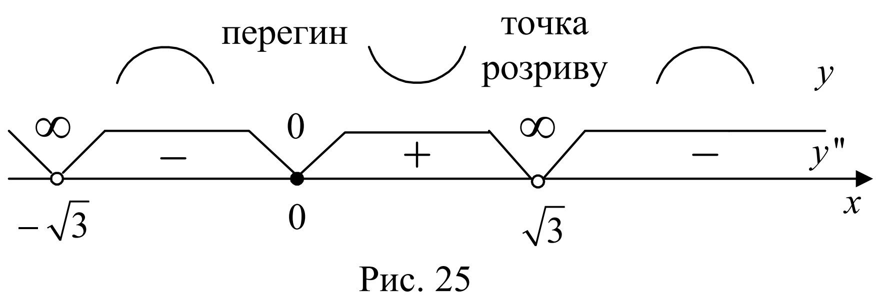


Рис. 25

Зауважимо, що у зв‘язку з тим, що точка $x=0$ знаходиться на межі півінтервалу $[0;+\infty)$, в якому досліджується функція, виникла необхідність дослідити знак $y'(x)$ і $y''(x)$ на півінтервалі $\left(-\sqrt{3};0\right]$.

9 Будуємо графік функції за результатами дослідження (рис. 26).

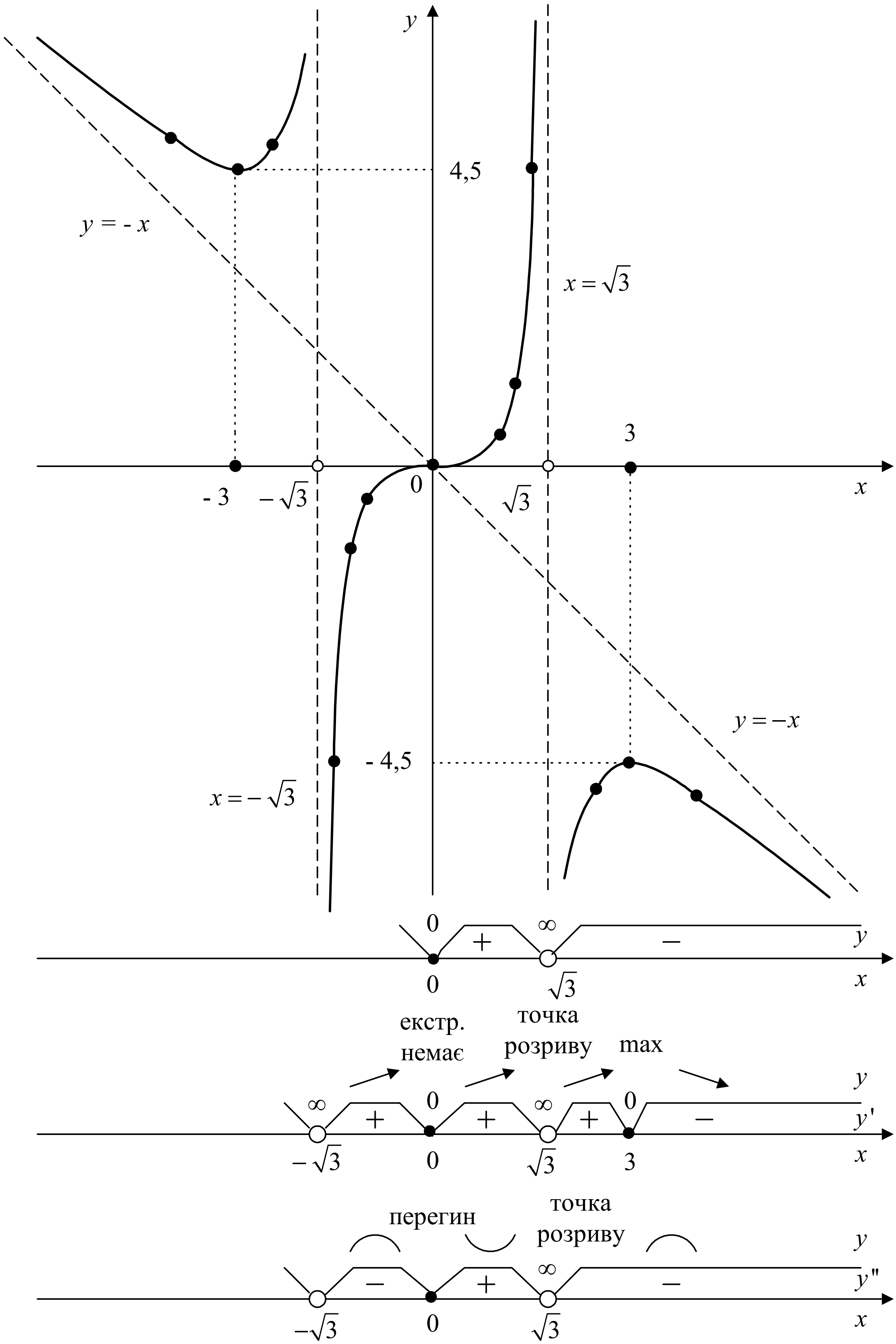

y
4,5
y = - x
x = √3
3
- 3
−√3
0
√3
x
y = −x
- 4,5
x = −√3
0
∞
+
−
y
0
√3
x
екстр.
немає
точка
розриву
max
y
∞
+
0
+
∞
+
0
−
y'
−√3
0
√3
3
x
перегин
точка
розриву
y
∞
−
+
−
y"
−√3
0
√3
x

Рис. 26

Приклад 3 Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ і побудувати її графік за результатами дослідження.

Розв'язання. 1 $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq \pm 1$; $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2 $x = -1$ і $x = 1$ – точки розриву;

$(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ і $(1; +\infty)$ – інтервали неперервності функції.

3 $y(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = y(x)$. Отже, задана функція є парною. Її графік розташований симетрично відносно осі Oy, тому подальші дослідження досить проводити лише для $x \geq 0$.

4 При $x = 0$ $y = 0$; при $y = 0$ $x = 0$, тобто графік функції проходить через точку початок координат.

5 $y = 0$ при $x = 0$; $y = \infty$ при $x = \pm 1$;

$y < 0$ в інтервалі $(0;1)$ і $y > 0$ в інтервалі $(1; +\infty)$ (рис. 27).

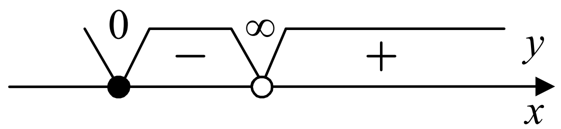


Рис. 27

6 $x = 1$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(1+0)^2}{(1+0-1)(1+0+1)} = \frac{1}{+0} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(1-0)^2}{(1-0-1)(1-0+1)} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Отже, $x = 1$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x \cdot (x^2 - 1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 0;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1.$$

Отже, пряма $y = 1$ – горизонтальна асимптота.

7 $y' = \left(\dfrac{x^2}{x^2 - 1} \right)' = \dfrac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2x(x^2 - 1 - x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$;

$y'(x) = 0$, якщо $x = 0$; $y'(x) = \infty$, якщо $x = \pm 1$,

$y_{\max} = y(0) = 0$ (рис. 28).

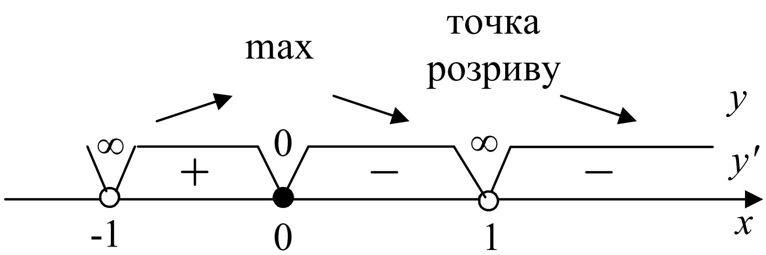


Рис. 28

8 $y''=\left(\dfrac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=-2\left(\dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=-2\,\dfrac{\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\cdot x}{\left(x^2-1\right)^4}=$

$=-2\,\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-1-4x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\dfrac{2\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$

$y''(x)\neq 0$; $y''(x)=\infty$ при $x=\pm 1$ (рис. 29).

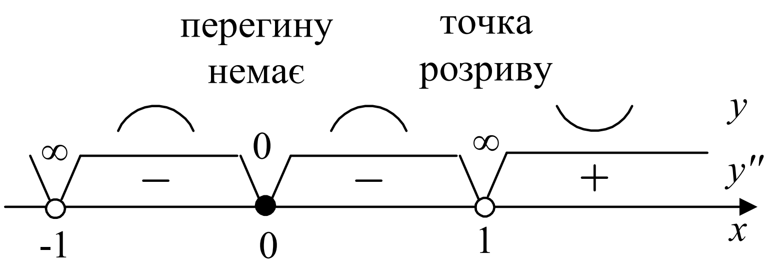


Рис. 29

9 Будуємо графік функції (рис. 26) за результатами дослідження і додатковими точками $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$, $y(1{,}5)=1{,}8$, $y(2)=\dfrac{4}{3}$.

8 ФУНКЦІЯ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

При дослідженні явищ при роди дуже часто виявляється, що одна змінна величина залежить від багатьох інших змінних. Наприклад, площа S прямокутника залежить від двох величин – його сторін x і y:

$$S=xy.$$

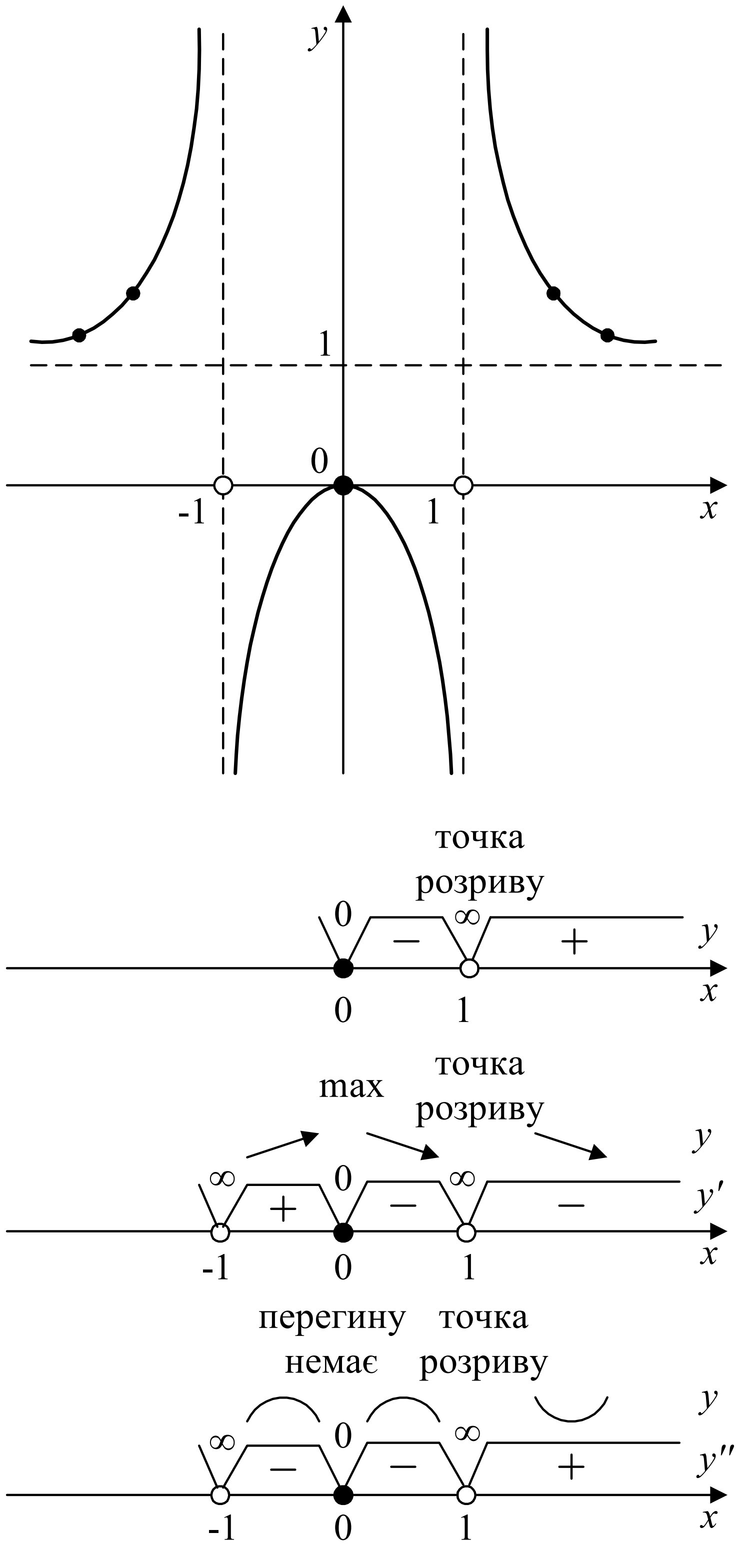
Об‘єм V прямокутного паралелепіпеда з ребрами, довжини яких x, y і z, виражається формулою

$$V=xyz.$$

Тут V є функцією трьох змінних x, y і z.

Сила струму I за законом Ома залежить від двох величин – напруги U і опору R:

$$I=\frac{U}{R}.$$



y
1
0
-1
1
x
точка
розриву
0
∞
−
+
y
x
0
1
max
точка
розриву
y
∞
0
∞
+
−
−
y′
x
-1
0
1
перегину
немає
точка
розриву
y
∞
0
∞
−
−
+
y″
x
-1
0
1

Рис. 30

Робота електричного струму A залежить від різниці потенціалів U на кінцях дільниці, сили струму I і часу t:

$$A = I\,U\,t.$$

Потенціальна енергія деформації пружного стержня

$$U = \frac{p^2 l}{2ES},$$

де p – сила, l – довжина стержня, S – площа поперечного перетину,

E – модуль пружності (стала величина, яка залежить від матеріалу) є функцією трьох змінних p, l, S.

Визначаючи фізичний стан будь-якого тіла, часто доводиться спостерігати зміну його властивостей від точки до точки: густина, температура, електричний потенціал тощо. Ці величини суть «функції точки» або функції від координат x, y, z точки. Якщо фізичний стан тіла змінюється з часом, то до цих незалежних змінних приєднується ще й час t. В цьому випадку ми маємо справу з функціями від чотирьох незалежних змінних.

Число подібних прикладів можна самостійно довільно збільшити. Для вивчення таких величин служить поняття функції кількох змінних.

Уточнення поняття функції у випадку кількох незалежних змінних почнемо з найпростішого випадку, коли цих змінних дві.

9.1 Функція двох змінних. Область визначення

Говорячи про зміну двох незалежних змінних x і y, ми повинні всякий раз визначати, яких пар значень x, y вони можуть набувати разом; множина D цих пар і буде областю зміни змінних x, y.

Змінна z називається функцією незалежних змінних x і y на множині D, якщо кожній парі (x, y) їх значень із D за деяким правилом або законом ставиться у відповідність одне цілком певне дійсне значення z. Незалежні змінні x і y у цьому випадку називають аргументами функції.

Функціональну залежність між z і x, y прийнято позначати так:

$$z = f(x, y).$$

Тут символ f визначає сукупність дій або правило для обчислення значення z, яке відповідає даним значенням x і y.

Для визначення окремих (частинних) значень такої функції треба задати значення незалежних змінних: $x = x_0$, $y = y_0$. Кожній такій парі значень x і y відповідає певна точка M_0 на координатній площині з координатами $(x_0; y_0)$ і, замість того, щоб говорити про значення функції при $x = x_0$, $y = y_0$, можна говорити про значення функції в точці $M_0(x_0; y_0)$ площини. При знаходженні частинного значення z_0 функції $z = f(x, y)$, якого вона набуває при заданих числових значеннях аргументів $x = x_0$ і $y = y_0$, пишуть $z_0 = z\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ або $z_0 = f\left(x_0; y_0\right)$.

Наприклад, якщо $z = f\left(x, y\right) = x + y^2$, то $z = z\Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = f\left(1;2\right) = 1 + 4 = 5$.

Кожна пара значень аргументів x, y геометрично визначає точку M_1 на площині xOy, а значення функції в цій точці є аплікатою z просторової точки $M\left(x; y; z\right)$. Геометричне місце всіх просторових точок M є поверхнею, яка взаємно однозначно проектується в область D на площині xOy. Ця поверхня є геометричним зображенням функції $z = f\left(x, y\right)$ в просторовій прямокутній системі координат. Її називають графіком функції $z = f\left(x, y\right)$.

Як і у випадку функції однієї змінної, функцію двох змінних можна задати таблицею, графіком або аналітично. Частіше її задають аналітично, тобто формулою.

Множина (сукупність) точок $\left(x, y\right)$ площини xOy, в яких задана функція $z = f\left(x, y\right)$ визначена, тобто набуває дійсних значень, називається областю визначення (існування) функції. Область визначення функції $z = f\left(x, y\right)$ являє собою або частину площини, обмежену замкнутою лінією, причому точки цієї лінії (межі області) можуть належати або не належати області визначення, або всю площину, або, нарешті, сукупність декількох частин площини xOy.

Точки області, які не лежать на межі, називають внутрішніми точками області. Область, яка складається із одних внутрішніх точок, називається відкритою або незамкненою. Якщо ж до області відносяться і точки межі, то область називається замкненою.

На рисунку межу, яка належить області визначення функції, будемо зображати суцільною лінією, в противному випадку – пунктирною.

Множина (сукупність) всіх значень, яких набуває сама функція, називається областю зміни функції. Зауважимо, що наперед вказати область зміни функції не завжди просто.

Аналогічно визначається функція n змінних x, y, z, …, t :

$$u = f\left(x, y, z, \ldots, t\right).$$

Сукупність значень x, y, z, …, t називають точкою $M\left(x, y, z, \ldots, t\right)$ n-мірного простору, а функцію n змінних - функцією точки, тобто $u = f\left(M\right)$.

Відзначимо, що зобразити геометрично функцію трьох, чотирьох і більшого числа змінних неможливо.

Розв'язання прикладів і задач

Приклад 1 Знайти частинне значення функції $f(x,y)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}$ при $x=5$, $y=3$.

Розв'язання. Маємо $f(5;3)=\dfrac{2\cdot 5}{\sqrt{5^2-3^2}}=\dfrac{10}{4}=2{,}5$.

Приклад 2 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

Розв'язання. Функція z набуває дійсних значень за умови $1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\ge 0$ або $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$.

Отже, областю визначення даної функції є частина площини, обмежена еліпсом, включаючи і межу, тобто сам еліпс (замкнена область) (рис. 31).

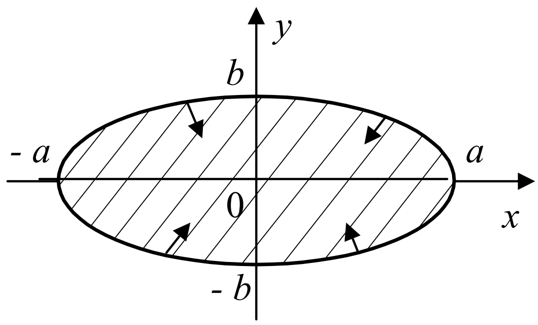


Рис. 31

Приклад 3 Знайти і зобразити геометрично область існування функції $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$.

Розв'язання. Логарифм визначений для додатних значень його аргументу, тому $y^2-4x+8>0$, звідки $y^2>4(x-2)$. Ніяких інших обмежень на змінні x і y не дано.

Щоб зобразити геометрично область визначення даної функції, побудуємо спочатку її межу, тобто графік функції $y^2=4(x-2)$.

Це рівняння визначає параболу з вершиною в точці $O(2;0)$ і віссю симетрії Ox (рис. 32).

Парабола поділила всю площину на дві частини – внутрішню і зовнішню по відношенню до параболи. Для точок однієї з цих частин виконується нерівність $y^2>4(x-2)$,

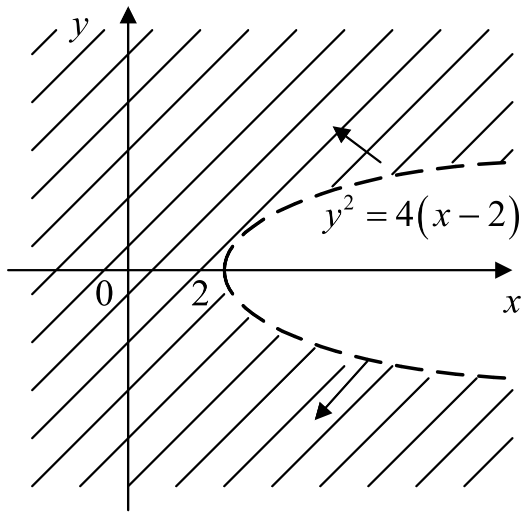


Рис. 32

а для другої - $y^2<4(x-2)$. На самій параболі $y^2=4(x-2)$. Щоб встановити, яка з цих двох частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умові $y^2>4(x-2)$, досить перевірити цю умову для якої-небудь однієї точки , яка не лежить на параболі. Наприклад, початок координат $O(0;0)$ знаходиться зовні від параболи і задовольняє потрібній умові $0 > 4(0-2)$.

Отже, областю існування даної функції є множина точок площини *x*O*y*, які знаходяться зовні від параболи. Сама парабола в область існування функції не входить, бо для точок параболи $y^2 - 4x + 8 = 0$, а логарифм нуля не визначений.

Прилад 4 Знайти і зобразити геометрично область визначення ф $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$.

Розв'язання. Функція визначена за умови $x \neq 0$ і $-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1$, що рівносильно розв‘язанню двох систем: $\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x \leq y \leq 1 + x \end{cases}$ і $\begin{cases} x < 0, \\ 1 - x \geq y \geq 1 + x. \end{cases}$

Зобразимо розв‘язки кожної із систем графічно (рис. 33).

Першій системі задовольняють точки, які розташовані всередині правого вертикального кута, утвореного прямими $y = 1 + x$ і $y = 1 - x$, але без точки $(0;1)$, другій - точки, які розташовані всередині лівого вертикального кута, утвореного цими самими прямими і також без точки $(0;1)$.

Отже, областю визначення даної функції є внутрішня частина правого і лівого вертикальних кутів, утворених прямими $y = 1 + x$ і $y = 1 - x$, включаючи ці прямі, але без точки їх перетину $(0;1)$, бо при $x = 0$ задана функція не визначена.

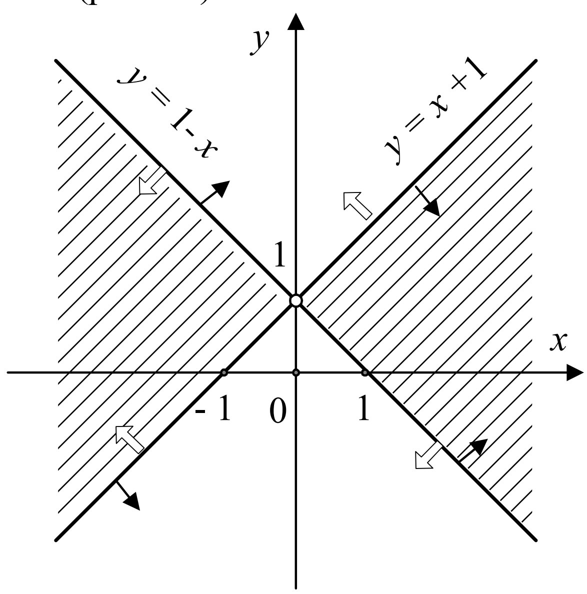


Рис. 33

Приклад 5 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = x + \arcsin y$.

Розв'язання. Дану функцію можна розглядати як суму двох функцій: x і $\arcsin y$. Перша з них не залежить від y і визначена для всіх дійсних значень. Отже, областю визначення даної функції є вся площина *x*O*y*. Друга функція не залежить від x і визначена для всіх значень $-1 \leq y \leq 1$. Отже, областю її визначення є смуга між прямими $y = -1$ і $y = 1$, включаючи самі прямі.

Таким чином, областю визначення даної функції є загальна частина знайдених областей визначення доданків, тобто смуга між прямими $y=-1$ і $y=1$, включаючи самі прямі (рис. 34).

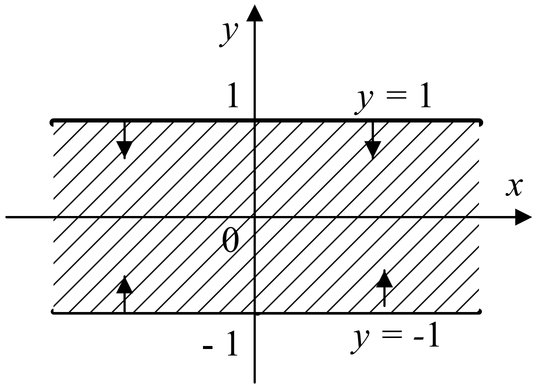


Рис. 34

Приклад 6 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$.

Розв'язання. Через те, що задана функція являє собою суму двох функцій, вона набуватиме дійсних значень лише тоді, коли існуватиме кожна із функцій – доданків. А це матиме місце за умов $\begin{cases} x+y>0, \\ x-y>0, \end{cases}$ або $\begin{cases} y>-x, \\ y<x. \end{cases}$

Щоб зобразити геометрично область визначення даної функції, побудуємо спочатку її межі $y=x$ і $y=-x$ (рис. 35). Першій нерівності системи відповідають точки, які розташовані вище прямої $y=-x$, а другій – точки, які розташовані нижче прямої $y=x$. Отже, системі задовольняють точки, які розташовані всередині правого вертикального кута, утвореного прямими $y=x$ і $y=-x$ за винятком самих прямих (рис. 35).

Таким чином, областю визначення даної функції є внутрішня частина правого вертикального кута, утвореного бісектрисами координатних кутів, але без меж.

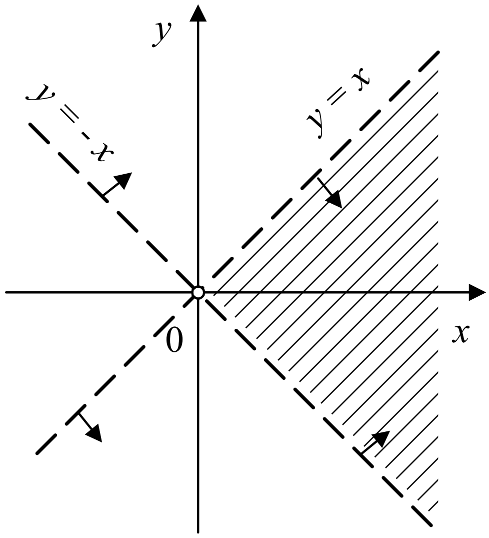


Рис. 35

Приклад 7 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln\left(4-x^2-y^2\right)$.

Розв'язання. Задана функція визначена і набуває дійсних значень за умов

$$\begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0, \\ 4-x^2-y^2>0. \end{cases}$$

Межа області визначення складається з двох концентричних кіл $x^2+y^2=1$

і $x^2 + y^2 = 4$ з центрами в початку координат і радіусами $R = 1$ і $R = 2$ (рис. 36).

Ці кола поділяють всю площину на три частини. При цьому для внутрішніх точок області визначення повинні одночасно виконуватися нерівності $x^2 + y^2 - 1 > 0$ і $4 - x^2 - y^2 > 0$.

Візьмемо три точки $O(0;0)$, $A\left(\frac{3}{2};0\right)$, $B(3;0)$, які розташовані в різних частинах площини, і перевіримо, чи виконуються для них нерівності. Точка $O(0;0)$ не задовольняє першій, а точка $B(3;0)$ – другій нерівності, бо $0+0-1=-1<0$, а $4-9-0=-5<0$. Для точки $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0 - 1 = \frac{5}{4} > 0$ і $4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 0 = \frac{7}{4} > 0$.

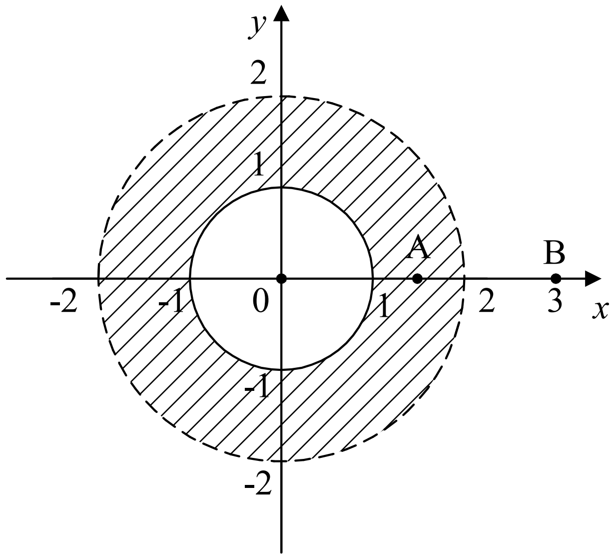


Рис. 36

Отже, шукана область визначення є кільцем, яке міститься між двома колами $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 4$. При цьому внутрішнє коло включається в область визначення, бо рівність $x^2 + y^2 - 1 = 0$ можлива, а зовнішнє коло в область визначення не входить.

Приклад 8 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$$z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln\left(1 - x^2 - y^2\right)}.$$

Розв'язання. Задана функція визначена і набуває дійсних значень, якщо

$$\begin{cases} 4x - y^2 \geq 0, \\ \ln\left(1 - x^2 - y^2\right) \neq 0, \\ 1 - x^2 - y^2 > 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y^2 \leq 4x, \\ x^2 + y^2 \neq 0, \\ x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

Зобразимо область визначення геометрично (рис. 37).

Таким чином, шукана область визначення являє собою частину площини, яка розташована всередині параболи $y^2 = 4x$, між параболою і колом $x^2 + y^2 = 1$, включаючи дугу параболи, крім її вершини, і виключаючи дугу кола.

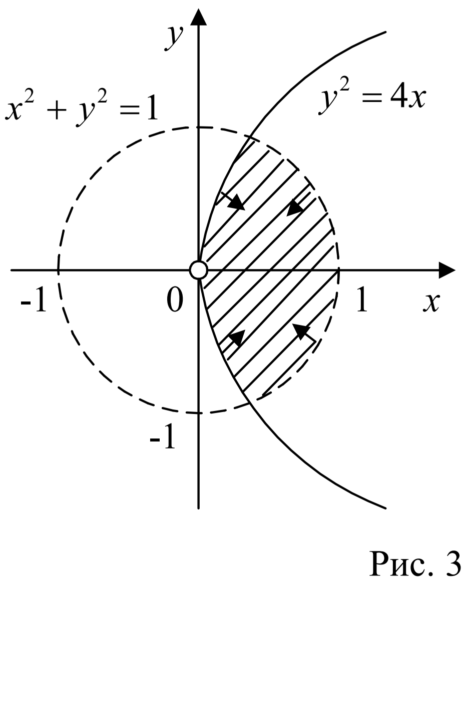


Рис. 37

9.2 Лінії і поверхні рівня

Лінією рівня функції $z = f\left(x,y\right)$ називається лінія $f\left(x,y\right) = C$ на площині xOy, в точках якої функція зберігає стале значення $z = C$.

Поверхнею рівня функції $u = f\left(x,y,z\right)$ називається поверхня $f\left(x,y,z\right) = C$ на площині xOy, в точках якої функція зберігає стале значення $u = C$.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти лінії рівня $z = 2x + y$.

Розв'язання. Рівняння сім‘ї ліній рівня має вигляд $2x + y = C$. Надаючи C різних дійсних значень, одержимо сім‘ю паралельних прямих.

Приклад 2 Знайти лінії рівня $z = \ln\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

Розв'язання. За означенням рівняння сім‘ї ліній рівня набуває вигляду $\ln\sqrt{\dfrac{y}{x}} = C$, звідки $\dfrac{y}{x} = e^{2C}$ або $y = x \cdot e^{2C}$. Оскільки $e^{2C} = C_1 > 0$ (C_1 = const), то остаточно маємо $y = C_1 x \ \left(C_1 > 0\right)$. Таким чином, лініями рівняння даної функції є сім‘я прямих, які проходять через початок координат.

Приклад 3 Знайти лінії рівня $z = e^{xy}$.

Розв'язання. За означенням маємо $e^{xy} = C$, а це можливо за умови $xy = C$. Отже, сім‘я шуканих ліній $xy = C$, при $C \neq 0$ - сім‘я рівнобічних гіпербол, а при $C = 0$ – осі координат Ox і Oy.

Прилад 4 Знайти поверхні рівня функції $u = x - 2y + 3z$.

Розв'язання. Оскільки поверхнею рівня функції трьох змінних є геометричне місце точок простору, для яких дана функція має одне й те саме значення, то рівняння $x - 2y + 3z = C$ і є шуканим. Воно визначає сім‘ю паралельних площин.

Приклад 5 Знайти поверхні рівня функції $u = x^2 + z^2 - y^2$.

Розв'язання. Рівняння сім‘ї поверхонь рівня має вигляд $x^2 + z^2 - y^2 = C$.

При $C = 0$ $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ - конус;

при $C > 0$ $x^2 + z^2 - y^2 = C$ - сім‘я однополих гіперболоїдів;

при $C < 0$ $x^2 + z^2 - y^2 = C$ - сім‘я двополих гіперболоїдів.

9.3 Границя і неперервність функції

Перед тим, як ввести поняття границі функції двох змінних $z = f(x;y) = f(M)$, введемо поняття околу точки $M_0(x_0;y_0)$ в площині xOy.

Околом точки $M_0(x_0;y_0)$ називають внутрішню частину круга з центром в цій точці. Якщо радіус цього круга дорівнює δ, то говорять про δ - окіл точки M_0 (рис. 38).

Очевидно, що будь-яка точка $M(x;y)$, яка належить околу точки $M_0(x_0;y_0)$, знаходиться від цієї точки на відстані, меншій δ.

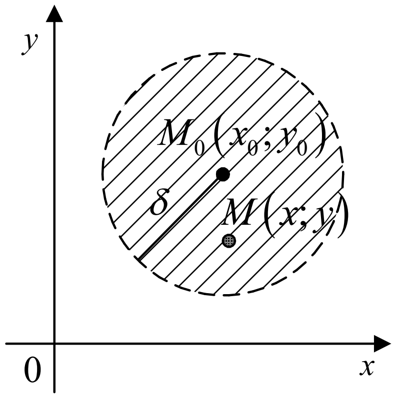


Рис. 38

Якщо $M_0(x_0;y_0)$ – деяка фіксована точка площини і $x \to x_0$, $y \to y_0$, тоді точка $M(x;y)$ прямує до точки $M_0(x_0;y_0)$, тобто $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$, що рівносильно прямуванні до нуля відстані $MM_0 = \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Число A називається границею функції двох змінних $z = f(x;y) = f(M)$ при $M \to M_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий δ - окіл точки $M_0(x_0;y_0)$, що для будь-якої точки $M(x;y)$ цього околу (за винятком можливо самої точки M_0) має місце нерівність

$$\left| f(M) - A \right| < \varepsilon, \text{ або } \left| f(x;y) - A \right| < \varepsilon .$$

Іншими словами, як тільки відстань змінної точки $M(x;y)$ від фіксованої точки $M_0(x_0;y_0)$ стане досить малою, значення функції в точці M буде відрізнятися від числа A менше ніж на ε, де ε може бути обрано як завгодно малим.

При цьому пишуть $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(M) = A$, бо при $M(x;y) \to M_0(x_0;y_0)$, очевидно, $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Означення границі функції можна інакше сформулювати так: Число A називається границею функції двох змінних $z = f(x;y) = f(M)$ при $M \to M_0$, якщо нескінченно малій відстані $MM_0 = \rho$ відповідає нескінченно мала різниця $f(M) - A$.

Важливо підкреслити, що за означенням границя функції не залежить від напряму руху точки $M(x;y)$ до точки $M_0(x_0;y_0)$. Тому, якщо виявиться, що при $M \to M_0$ з різних сторін $f(M)$ прямує до різних граничних значень, то функція $z = f(M)$ границі в точці $M_0(x_0;y_0)$ не має.

Зазначимо, що функцію двох змінних, границя якої дорівнює нулю, називають нескінченно малою. Зауважимо також, що для функцій двох змінних справедливі теореми про границю суми, різниці, добутку і частки, які формулюються і доводяться аналогічно відповідним теоремам для функцій, які залежать від одного аргументу.

Функція $z = f(M)$ називається неперервною в точці M_0, якщо:

1 $f(M)$ визначена як в самій точці M_0, так і в деякому її околі;

2 існує скінченна границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3 ця границя дорівнює значенню функції в граничній точці, тобто $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Інакше, функція $z = f(x;y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0;y_0)$, якщо виконується рівність

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0), \tag{33}$$

причому точка $M(x;y)$ прямує до точки $M_0(x_0;y_0)$ довільним способом, залишаючись в області визначення функції.

Якщо позначити $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то рівність (33) можна записати так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(x_0;y_0)$$

або

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0) \right] = 0.$$

Беручи до уваги формулу (33), останній рівності можна надати вигляду $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0$, де $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ - відстань між точками $M_0(x_0;y_0)$ і $M(x;y)$.

Таким чином, функція $z = f(M)$ буде неперервною в точці M_0, якщо нескінченно малій відстані $\rho = MM_0$ відповідатиме нескінченно малий приріст функції $\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0)$.

Звернемо увагу на один висновок, що випливає з означень неперервності функції. Якщо $f(x;y)$ неперервна у точці $(x_0;y_0)$ і якщо покласти $y = y_0$, то функція $f(x;y_0)$ однієї змінної x неперервна при $x = x_0$. Аналогічно $f(x_0;y)$ неперервна при $y = y_0$.

Функція, неперервна в кожній точці деякої області, називається неперервною в цій області.

Точка M_0 називається точкою розриву функції $z = f(M)$, якщо для неї не виконується принаймні одна з трьох умов неперервності. Точки розриву даної функції можуть розміщуватися як окремо (ізольовані точки розриву), так і заповнювати цілі лінії (лінії розриву).

Слід визначити, що як і для функцій однієї змінної, сума, різниця і добуток неперервних функцій двох змінних в точці M_0 будуть неперервними в тій самій точці; частка неперервних функцій в точці M буде також неперервною в точці M_0 функцією за умови, що знаменник не обертається в нуль в цій точці. Справедлива також теорема про неперервність складної функції.

Зауважимо, що аналогічно визначається границі я неперервність функції трьох і більшого числа змінних.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{\sqrt{x^2+(y-3)^2+4}-2}{x^2+(y-3)^2}$.

Розв'язання. Дана границя знаходиться за умови $M(x;y)\to(0;3)$.

Відстань між цими точками $\rho=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$, тому $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{\sqrt{x^2+(y-3)^2+4}-2}{x^2+(y-3)^2}=$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{\rho^2+4}-2}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\left(\rho^2+4\right)-4}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 2 Знайти границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{xy}$.

Розв'язання. В даному випадку $M(x;y)\to O(0;0)$, тому $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ і $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\rho^2\cdot\sin\dfrac{1}{xy}=0$, бо добуток нескінченно малої величини ρ^2 на обмежену величину $\left(\left|\sin\dfrac{1}{xy}\right|\le 1\right)$ є величиною нескінченно малою.

Приклад 3 Знайти границю $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}$.

Розв'язання. В точці $M_0(2;0)$ функція $z=\dfrac{\sin(xy)}{y}$. не визначена.

Помноживши і поділивши дану функцію на $x\neq 0$, матимемо

$$z=\frac{\sin(xy)}{y}=\frac{x\cdot\sin(xy)}{xy}=x\cdot\frac{\sin(xy)}{xy}.$$

Переходячи до границі в останній рівності, остаточно одержимо

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\left(x\cdot\frac{\sin(xy)}{xy}\right)=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}x\cdot\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}=2\cdot 1=2,\quad \text{бо } \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Отже, шукана границя дорівнює 2.

Приклад 4 Знайти границю $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} f(x;y)$, де

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}, & \textit{якщо } x\neq y;\\ 4, & \textit{якщо } x=y.\end{cases}$$

Розв'язання. При $x=y=2$ чисельник і знаменник дробу обертаються в нуль. При $x\neq y$ маємо $f(x;y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}=\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2+(x-y)}=$

$$=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x-y+1)}=\frac{x+y}{x-y+1}\quad \text{і}\quad \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x+y}{x-y+1}=4.$$

Оскільки за умовою при $x=y$ також маємо $f(x;y)=4$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} f(x;y)=4$.

Приклад 5 Чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$?

Розв'язання. Безпосередня підстановка граничних значень x і y дає невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$.

Припустимо, що змінна точка $M(x;y)$ наближається до початку координат не довільно, а по деякій прямій $y=kx$. Вздовж цієї прямої значення функції $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ є сталим, бо при $y=kx$ маємо $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$, тому і $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ ($\rho\to 0$ вздовж прямої $y=kx$).

Однак, якщо наближатися до початку координат з різних сторін, то функція $z(x;y)$ прямуватиме до різних граничних значень. Дійсно, величина $\dfrac{1-k^2}{1+k^2}$ набуває свого значення для кожного k. Наприклад, при $M\to 0$ вздовж осі Ox $(k=0)$ значення z прямує до 1, а при русі вздовж бісектриси $y=x$ $(k=1)$ значення z прямує до 0.

Отже, виходячи із означення границі, робимо висновок, що дана границя не існує.

Приклад 6 Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Має місце невизначеність вигляду $\dfrac{\infty}{\infty}$. В цьому випадку доцільно зробити заміну змінних. Покладемо $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, тоді $r = \sqrt{x^2+y^2}$ і коли $x\to\infty$, $y\to\infty$, то і $r\to\infty$ незалежно від значення φ.

Отже, шукана границя $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2} = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\cos\varphi+\sin\varphi}{r} = 0$,

бо $|\cos\varphi+\sin\varphi| \le 2$, а r необмежено зростає.

Приклад 7 Знайти точки розриву функції $f(x;y) = \dfrac{3}{4-x^2-y^2}$.

Розв'язання. Задана функція невизначена, а отже і розривна там, де її знаменник обертається в нуль, тобто в точках, для яких $4-x^2-y^2=0$. Таким чином, задана функція розривна в кожній точці кола $x^2+y^2=4$ (лінія розриву).

Приклад 8 Дослідити на неперервність функцію $z = \dfrac{x+y+1}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. В чисельнику і знаменнику дробу стоять многочлени, а многочлен визначений і неперервний в будь-якій точки площини. Тому функція z буде неперервною всюди, де знаменник не обертається в нуль. В початку координат функція не визначена і, отже, розривна.

При наближені точки $M(x;y)$ до початку координат знаменник наближається до нуля, а чисельник – до 1, тому функція z нескінченно зростає.

Приклад 9 Дослідити на неперервність функцію $z = \dfrac{x^2+2y+4}{y^2-2x}$.

Розв'язання. Функція z неперервна як відношення двох многочленів в усіх точках, де $y^2-2x \ne 0$. Точки розриву розташовані на параболі $y^2 = 2x$. При наближені точки $M(x;y)$ до будь-якої точки цієї параболи задана функція z нескінченно зростає.

Приклад 10 Знайти і дослідити точки розриву функції $z = \cos\dfrac{1}{x-y}$.

Розв'язання. Задана функція складна, бо $z = \cos u$, де $u = \dfrac{1}{x-y}$.

Функція $\cos u$ неперервна при будь-якому значенні аргументу.

Що стосується функції $u = \dfrac{1}{x-y}$, то вона зазнає розриву в точках прямої $y = x$, бо в точках цієї прямої знаменник $x - y$ обертається в нуль і функція u є нескінченно великою. Таким чином, складна функція z також буде розривною в точках прямої $y = x$.

При наближені точки $M(x;y)$ до однієї з точок прямої $y = x$ значення функції $z = \cos\dfrac{1}{x-y}$ коливаються в межах відрізка $[-1;1]$ і, отже, ніякої границі вона немає.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення функції двох (кількох) незалежних змінних.

2 Що називають областю визначення функції двох (кількох) змінних?

3 Якими способами можна задати функцію двох змінних?

4 Що називається графіком функції двох змінних?

5 Чи можна геометрично зобразити функцію трьох, чотирьох і більшої кількості змінних?

6 Що називають лінією рівня функції $z = f(x;y)$?

7 Що називають поверхнею рівня функції $u = f(x;y;z)$?

8 Дайте означення границі функції $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$.

9 Дайте означення неперервності функції двох незалежних змінних в точці і в області. Наведіть приклади розривних функцій.

Вправи

Знайти область визначення наведених функцій і зобразити її геометрично.

1 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Відповідь: $x^2 + y^2 \geq 1$ – частина площини зовні одиничного кола з центром в початку координат, включаючи і саме коло.

2 $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Відповідь: внутрішня частина кола $x^2 + y^2 < 1$ (без межі).

3 $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2}$.

Відповідь: частина площини між двома параболами $y^2 = x$ і $y^2 = -x$, включаючи межу за винятком точки $O(0;0)$.

4 $z = \arccos(x + y)$.

Відповідь: смуга між паралельними прямими $x + y \leq 1$ і $x + y \geq -1$.

5 $z=\ln\left[x\ln\left(y-x\right)\right]$.

Відповідь: $\begin{cases} y>x+1, & \textit{якщо } x>0; \\ x<y<x+1 & \textit{якщо } x<0. \end{cases}$

6 $z=\ln\left(y-x\right)$.

Відповідь: $y>x$ - півплощина, яка розташована вище бісектриси $y=x$ (без межі).

7 $z=\dfrac{\ln\left(x^2y\right)}{\sqrt{y-x}}$.

Відповідь: $y>x$, $y>0$, $x\neq 0$ – другий квадрант і точки, які лежать вище бісектриси першого координатного кута площини $x\mathrm{O}y$ (без межі).

8 $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin\left(1-y\right)$.

Відповідь: криволінійний трикутник, обмежений параболами $y^2=x$ і $y^2=-x$, і прямою $y=2$, разом з точками межі, крім точки $O\left(0;0\right)$.

9 $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

Відповідь: внутрішня частина правого вертикального кута, утвореного бісектрисами координатних кутів, включаючи самі бісектриси: $x-y\geq 0$, $x+y\geq 0$.

10 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

Відповідь: замкнена область, яка лежить між додатною піввіссю абсцис і параболою $y=x^2$ (включаючи межу): $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x^2\geq y$.

11 Знайти $f\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ і $f\left(2;-1\right)$, якщо $f\left(x;y\right)=\sqrt{xy^2+x+1}$.

Відповідь: $f\left(\dfrac{1}{2};1\right)=\sqrt{2}$, $f\left(2;-1\right)=\sqrt{5}$.

12 Знайти значення функції $f\left(x;y\right)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ в точці $M\left(2;-1\right)$.

Відповідь: $-0{,}8$.

13 За законом Ома опір R електричного кола визначається через силу струму I і напругу U на його кінцях за формулою $R=\dfrac{U}{I}$. Яким буде опір електричного кола, по якому проходить струм в $2{,}5\ A$ при напрузі $120\ B$?

Відповідь: 48 Ом.

14 Дано функцію $f\left(x;y\right)=\dfrac{2x+y}{x+2y}$. Довести, що $f\left(1;2\right)=\dfrac{1}{f\left(2;1\right)}$.

Знайти і побудувати лінії рівня наступних функцій.

15 $z = x + y$.

Відповідь: $x + y = C$ – прямі, паралельні до прямої $x + y = 0$.

16 $z = x^2 - y^2$.

Відповідь: $x^2 - y^2 = C$ $(C \neq 0)$ – рівнобічні гіперболи. При $C = 0$ гіперболи вироджуються в дві прямі $y = x$ і $y = -x$.

17 $z = \dfrac{y}{x^2}$.

Відповідь: $y = Cx^2$ $(C \neq 0)$ – параболи. При $C = 0$ – вісь Оx.

18 $z = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$.

Відповідь: $y = C\left(x^2 + y^2\right) = 2x$ $(C \neq 0)$ – кола. При $C = 0$ – вісь Оy.

Знайти поверхні рівня наступних функцій.

19 $u = x - 3y + z$.

Відповідь: сім‘я паралельних площин $x - 3y + z = C$.

20 $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$.

Відповідь: сім‘я сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C$ $(C > 0)$. Якщо $C = 0$, то сфера вироджується в точку $O(0;0;0)$.

Знайти границі наступних функцій.

21 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2x^3 + 3y^2}{x^2 + y^2}$. Відповідь: не існує.

22 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}$. Відповідь: $\dfrac{1}{2a}$.

23 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$. Відповідь: 0.

24 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2} - 2}$. Відповідь: -4.

25 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$. Відповідь: 0.

26 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin\left(x^3 + y^3\right)}{x^2 + y^2}$. Відповідь: 0.

27 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\cdot x^2 y^2}$. Відповідь: не існує.

28 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$. Відповідь: 0.

29 Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} f(x;y)$, де $f(x;y)=\begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2 y\right)}{x^2}, & \textit{якщо } x\neq 0;\\ 3, & \textit{якщо } x=0. \end{cases}$

Відповідь: 3.

30 Довести, що функція $f(x;y)=\dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$ не має границі, коли $x\to\infty$, $y\to\infty$.

31 Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$. Відповідь: 1.

32 Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$. Відповідь: e.

33 Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin\left(x^4 y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$. Відповідь: 0.

34 Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^y$, якщо точка $M(x;y)$ рухається по кривій $y=x^2$. Відповідь: e.

35 Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+y)}{y+x^2}$, якщо точка $M(x;y)$ рухається по кривій $y=x^2$. Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

36 Довести, що функція $f(x;y)=\dfrac{e^{x^2-y^2}}{1+\sin^4\left(x^2+3xy+y^2\right)}$ неперервна при всіх значеннях x і y.

37 Знайти точки розриву функції $z=\dfrac{x^2+y^2}{\left(x^2-y\right)(x+3y)}$.

Відповідь: $y=x^2$ і $y=-\dfrac{x}{3}$ – лінії розриву.

Дослідити наступні функції на неперервність і знайти точки розриву, якщо такі існують.

38 $z=\dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4}$. Відповідь: $x^2+y^2=4$.

39 $z=\ln\left(9-x^2-y^2\right)$.

Відповідь: функція неперервна в області визначення. Лінія розриву – коло $x^2+y^2=9$.

40 $z=\dfrac{3}{x^2+y^2}$. Відповідь: $O(0;0)$ - точка розриву.

41 $z=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2-4\right)\left(y^2-4x\right)}$.

Відповідь: лінії розриву $x^2+y^2=4$ і $y^2=4x$.

42 $z=\sin\dfrac{1}{xy}$. Відповідь: лінії розриву $x=0$ і $y=0$.

9.4 Частинні похідні першого порядку

Розглянемо функцію двох змінних $z=f\left(x;y\right)$. Зафіксуємо один з її аргументів, наприклад y, поклавши $y=y_0$. Тоді функція $z=f\left(x;y_0\right)$ буде функцією однієї змінної x. Нехай вона має похідну в точці x_0, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)}{\Delta x}$. Ця похідна називається частинною похідною (або частинною похідною першого порядку) функції $z=f\left(x;y\right)$ по x в точці $M_0\left(x_0;y_0\right)$ і позначається символом $f_x'\left(x_0;y_0\right)$.

Різниця $f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0)$ називається частинним приростом по x функції $z=f\left(x;y\right)$ в точці $M_0\left(x_0;y_0\right)$ і позначається символом $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x;y_0)-f(x_0;y_0).$$

Враховуючи це позначення, можна записати

$$f_x'\left(x_0;y_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Таким чином, частинною похідною функції $z=f\left(x;y\right)$ по x називають границю відношення частинного приросту по x цієї функції до приросту аргументу x при $\Delta x\to 0$ і за умови, що y залишається сталим.

Аналогічно визначається і позначається частинний приріст $\Delta_y z$ і частинна похідна $f_y'\left(x_0;y_0\right)$ від функції $z=f\left(x;y\right)$ по y в точці $M_0\left(x_0;y_0\right)$, обчислена з припущенням, що x не змінюється:

$$f_y'\left(x_0;y_0\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0;\,y_0+\Delta y)-f(x_0;\,y_0)}{\Delta y}.$$

Зауважимо, що повного приросту Δz функція $z=f\left(x;y\right)$ набуває при одночасній зміні як x, так і y. За означенням $\Delta z=f(x+\Delta x;\,y+\Delta y)-f(x;\,y)$.

Очевидно, що значення частинної похідної залежить від точки $M\left(x;y\right)$, в якій вона обчислюється. Тому частинна похідна функції двох змінних, взагалі кажучи, є функцією точки $M\left(x;y\right)$, тобто також являє собою функцію двох змінних x і y.

Частинні похідні, які розглядаються як функції двох змінних, позначають ще й так:

$$f_x'\left(x;y\right),\ \ f_y'\left(x;y\right),\ \ \text{або}\ \ \frac{\partial f\left(x;y\right)}{\partial x},\ \frac{\partial f\left(x;y\right)}{\partial y},\ \ \text{або}\ \ z_x',\ z_y',\ \ \text{або}\ \ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Якщо $M\left(x;y\right)-$ довільна точка і $z=f\left(x;y\right)$, то за означенням

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;\,y)-f(x;\,y)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;\,y+\Delta y)-f(x;\,y)}{\Delta y}$$

за умови, що кожна з границь існує і скінченна.

Зауважимо, що на відміну від функції однієї змінної вирази $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ не можна розглядати як дроби. Ці вирази є символами, якими позначають частинні похідні.

Слід відзначити, що частинні прирости і частинні похідні функції n змінних при $n>2$ визначаються і позначаються аналогічно. Наприклад, для функції трьох змінних $u=f\left(x;y;z\right)$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x;\,y;\,z)-f(x;\,y;\,z)}{\Delta x}$.

Отже, частинна похідна функції кількох змінних визначається як похідна функції однієї з цих змінних. Внаслідок цього всі правила і формули диференціювання, виведені для похідних функції однієї змінної, зберігаються і для частинних похідних функції кількох змінних. Слід лише пам‘ятати, що в усіх цих правилах і формулах при знаходженні частинної похідної по будь-якому аргументу всі інші аргументи вважаються сталими.

9.5 Геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних

Абсолютна величина частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x;y)$ або $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x;y)$ дає величину швидкості, з якою відбувається зміна функції $z = f(x;y)$ при зміні лише x або лише y, а знак частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ або $\frac{\partial z}{\partial y}$ показує характер цієї зміни (зростання, спадання).

Геометричний зміст частинних похідних від функції $z = f(x;y)$ полягає в тому, що $f_x'(x_0;y_0)$ є кутовий коефіцієнт відносно осі Оx дотичної в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до перерізу поверхні $z = f(x;y)$ площиною $y = y_0$, тобто $f_x'(x_0;y_0) = tg\alpha$ (рис 39,а). Звернемо увагу, що на рис 39,а $f_x'(x_0;y_0) < 0$.

Частинна похідна $f_y'(x_0;y_0)$ є кутовим коефіцієнтом відносно осі Оy дотичної в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до перерізу поверхні $z = f(x;y)$ площиною $x = x_0$, тобто $f_y'(x_0;y_0) = tg\beta$ (рис 39,б). На цьому рисунку видно, що $f_y'(x_0;y_0) > 0$.

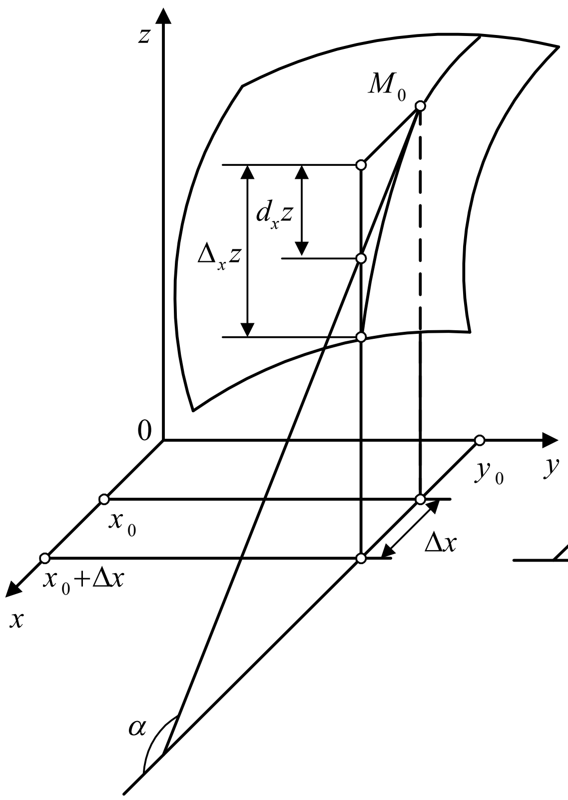


Рис. 39,а

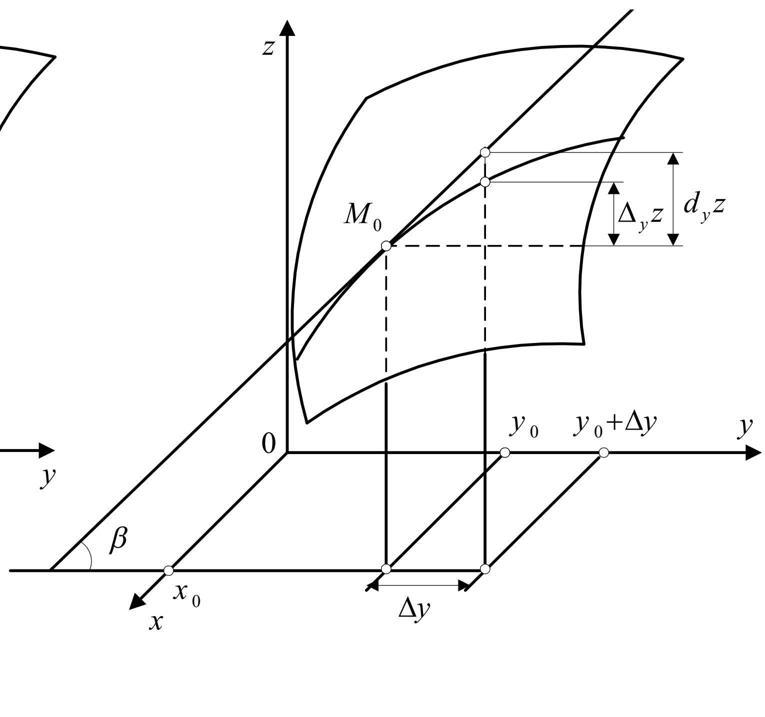


Рис. 39,б

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти частинні і повний прирости функції $z = x^2 + 3xy$.

Розв'язання. За означенням, якщо $z = f(x; y)$, то

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x; y); \qquad \Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x; y);$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y).$$

Отже, для заданої функції маємо

$$\Delta_x z = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)y - (x^2+3xy) =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3xy + 3\Delta xy - x^2 - 3xy = 2x\Delta x + 3\Delta xy + (\Delta x)^2;$$

$$\Delta_y z = x^2 + 3x(y+\Delta y) - (x^2+3xy) = x^2 + 3xy + 3x\Delta y - x^2 - 3xy = 3x\Delta y;$$

$$\Delta z = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)(y+\Delta y) - (x^2+3xy) =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3xy + 3(\Delta x)y + 3x(\Delta y) + 3(\Delta x)(\Delta y) - x^2 - 3xy =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3(\Delta x)y + 3x(\Delta y) + 3(\Delta x)(\Delta y).$$

На прикладі цієї функції бачимо, що $\Delta_x z + \Delta_y z \neq \Delta z$, тобто сума всіх частинних приростів функції не завжди дорівнює її повному приросту. Разом з цим, наприклад, для лінійної функції $z = ax + by + c$ маємо $\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z$.

Пропонуємо переконатися в цьому самостійно.

Приклад 2 Знайти частинні похідні функції $z = x^2 - 3xy + 4y^2$.

Розв'язання. Як уже визначалося, функцію кількох змінних можна диференціювати за будь-якою змінною, вважаючи всі інші сталими, і за тими самими правилами і формулами, що і функцію однієї змінної. Тому, припустивши, що y є сталим, знаходимо частинну похідну від даної функції по x: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 - 3xy + 4y^2\right)'_x = \left(x^2\right)'_x - \left(3xy\right)'_x + \left(4y^2\right)'_x = 2x - 3y(x)'_x + 0 =$
$= 2x - 3y \cdot 1 = 2x - 3y$.

Припускаючи тепер, що x залишається сталим, знаходимо частинну похідну від даної функції по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 - 3xy + 4y^2\right)'_y = \left(x^2\right)'_y - \left(3xy\right)'_y + \left(4y^2\right)'_y = 0 - 3x \cdot 1 + 8y = -3x + 8y.$$

Приклад 3 Знайти частинні похідні функції $z = x^{y^2-1}y^2$.

Розв'язання. Диференціюючи задану функцію спочатку по x, вважаючи y сталим, а потім по y, вважаючи x сталим, будемо мати

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^{y^2-1}y^2\right)'_x = y^2\left(x^{y^2-1}\right)'_x = y^2\left(y^2-1\right)x^{y^2-2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^{y^2-1}y^2\right)_y'=\left(x^{y^2-1}\right)_x'\cdot y^2+x^{y^2-1}\cdot\left(y^2\right)_x'=x^{y^2-1}\cdot\ln x\cdot 2y\cdot y^2+x^{y^2-1}\cdot 2y=$$
$$=2yx^{y^2-1}\cdot\left(y^2\ln x+1\right).$$

Прилад 4 Обчислити $f_x'(2;1)$ і $f_y'(2;1)$, якщо $f(x;y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні від даної функції в точці $(x;y)$: $f_x'(x;y)=\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}\underset{y=const}{=}\dfrac{1}{2\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}}\cdot\left(y+\dfrac{1}{y}\right)$;

$$f_y'(x;y)=\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\underset{x=const}{=}\frac{1}{2\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}}\cdot\left(x-\frac{x}{y^2}\right).$$

Обчислимо тепер їх значення в точці $(2;1)$, тобто при $x=2$, $y=1$:

$$f_x'(2;1)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\frac{1}{2\sqrt{2+2}}\cdot(1+1)=\frac{1}{2};\qquad f_y'(2;1)=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\frac{1}{2\sqrt{2+2}}\cdot(2-2)=0.$$

Отже, $f_x'(2;1)=\dfrac{1}{2}$ і $f_y'(2;1)=0$ – шукані значення частинних похідних заданої функції в заданій точці.

Приклад 5 Знайти $f_x'(3;4)$, якщо $f(x;y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Частинну похідну $f_x'(x;y)$ знаходимо як похідну функції $f(x;y)$ по аргументу x з припущенням, що $y=const$. Тому

$$f_x'(x;y)\underset{y=const}{=}1+0-\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2x+0)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тепер обчислимо частинне значення знайденої частинної похідної при $x=3$, $y=4$: $\quad f_x'(3;4)=\left.\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=1-\dfrac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$.

Приклад 6 Знайти частинні похідні першого порядку функції $r=t^4\cos^2\varphi$.

Розв'язання. Задана функція r залежить від двох змінних t і φ. Тому можна знайти дві її частинні похідні $\dfrac{\partial r}{\partial t}$ і $\dfrac{\partial r}{\partial\varphi}$.

Вважаючи спочатку φ сталим, знаходимо

$$\frac{\partial r}{\partial t}=\left(t^4\cos^2\varphi\right)'_t=\cos^2\varphi\left(t^4\right)'_t=\cos^2\varphi\cdot 4t^3=4t^3\cos^2\varphi .$$

При $t=const$ маємо

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi}=\left(t^4\cos^2\varphi\right)'_\varphi=t^4\left(\cos^2\varphi\right)'_\varphi=t^4\cdot 2\cos\varphi\cdot\left(-\sin\varphi\right)=-t^4\sin 2\varphi .$$

Приклад 7 Показати, що функція $z=y\ln\left(x^2-y^2\right)$ задовольняє рівнянню $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

Розв'язання. Знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x=\frac{2xy}{x^2-y^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln\left(x^2-y^2\right)+y\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot\left(-2y\right)=\ln\left(x^2-y^2\right)-\frac{2y^2}{x^2-y^2}.$$

Підставляючи вирази частинних похідних в ліву частину рівняння , отримаємо тотожність: $\frac{1}{x}\cdot\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{1}{y}\left(\ln\left(x^2-y^2\right)-\frac{2y^2}{x^2-y^2}\right)=$

$$=\frac{2y}{x^2-y^2}+\frac{\ln\left(x^2-y^2\right)}{y}-\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{1}{y}\ln\left(x^2-y^2\right)=\frac{z}{y^2}.$$

Отже, функція z задовольняє даному рівнянню.

Приклад 8 Знайти $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}$, якщо $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Розв'язання. Задані функції x і y залежать від двох змінних r і φ. Тому від кожної з них можна знайти по дві частинні похідні. Отже, маємо

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial x}{\partial \varphi}=-r\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi}=r\cos\varphi .$$

Складаючи з цих похідних визначник другого порядку і розкриваючи його, знаходимо

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\cos^2\varphi+r\sin^2\varphi=r\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=r .$$

Таким чином, шуканий визначник дорівнює r.

Приклад 9 Знайти частинні похідні першого порядку функції $u=(\sin x)^{yz}$.

Розв'язання. Маємо функцію u, яка залежить від трьох змінних x, y, z. Диференціюючи функцію u по кожній з цих змінних, знайдемо три частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$. При диференціюванні функції u по x будемо вважати y і z сталими. Тоді, скориставшись формулою $\left(v^n\right)'=n\cdot v^{n-1}\cdot v'$, де $v=v(x)$, $n=const$, матимемо $\frac{\partial u}{\partial x}=\left[(\sin x)^{yz}\right]'_x=yz(\sin x)^{yz-1}\cdot\cos x$.

Похідну $\frac{\partial u}{\partial y}$ шукаємо за умови, що x і z сталі. Тоді, скориставшись формулою $\left(a^v\right)'=a^v\ln a\cdot v'$, де $v=v(x)$, $a=const$, знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left[(\sin x)^{yz}\right]'_y=(\sin x)^{yz}\ln\sin x\cdot z=z(\sin x)^{yz}\ln\sin x.$$

Нарешті, вважаючи x і y сталими і скориставшись формулою $\left(a^v\right)'=a^v\ln a\cdot v'$, одержимо $\frac{\partial u}{\partial z}=\left[(\sin x)^{yz}\right]'_z=y(\sin x)^{yz}\ln\sin x$.

Приклад 10 $u=\ln\left(1+x+y^2+z^3\right)$. Знайти $u_x'+u_y'+u_z'$ при $x=y=z=1$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції $u=u(x;y;z)$ по кожній змінній, вважаючи при цьому, що дві інші змінні є сталими:

$$u_x'=\frac{1}{1+x+y^2+z^3}\cdot(0+1+0+0)=\frac{1}{1+x+y^2+z^3};$$

$$u_y'=\frac{1}{1+x+y^2+z^3}\cdot(0+0+2y+0)=\frac{2y}{1+x+y^2+z^3};$$

$$u_z'=\frac{1}{1+x+y^2+z^3}\cdot\left(0+0+0+3z^2\right)=\frac{3z^2}{1+x+y^2+z^3}.$$ Тоді

$$u_x'+u_y'+u_z'=\frac{1}{1+x+y^2+z^3}+\frac{2y}{1+x+y^2+z^3}+\frac{3z^2}{1+x+y^2+z^3}=\frac{1+2y+3z^2}{1+x+y^2+z^3}.$$

Обчислюючи значення одержаного виразу при $x=y=z=1$, тобто в точці $M(1;1;1)$, матимемо $\left(\frac{1+2y+3z^2}{1+x+y^2+z^3}\right)_M=\frac{1+2\cdot1+3\cdot1^2}{1+1+1^2+1^3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

Отже, при $x=y=z=1$ $u_x'+u_y'+u_z'=\frac{3}{2}$.

9.6 Повний диференціал першого порядку

Повний приріст функції $z=f\left(x;y\right)$ в точці $M\left(x;y\right)$

$$\Delta z=f\left(x+\Delta x;\ y+\Delta y\right)-f\left(x;y\right), \qquad (34)$$

де $\Delta x,\ \Delta y$ – довільні прирости аргументів функції.

Якщо функція $z=f\left(x;y\right)$ має в точці $M\left(x;y\right)$ неперервні частинні похідні, то її повний приріст можна подати у вигляді

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon\rho, \qquad (35)$$

де $\varepsilon\to 0$ при $\rho=\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}\to 0$.

Вираз $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ є головною частиною повного приросту Δz, лінійною відносно приростів аргументів Δx і Δy. Її називають повним диференціалом функції і позначають dz.

Отже, за означенням

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \qquad (36)$$

Покладаючи в формулі (36) z рівним спочатку x, а потім y, знаходимо

$$dx=\Delta x,\quad dy=\Delta y.$$

Тому

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (37)$$

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x}dx=d_x z$ і $\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=d_y z$, то $dz=d_x z+d_y z$, тобто повний диференціал функції двох незалежних змінних дорівнює сумі її частинних диференціалів.

Аналогічно визначаються частинні і повний диференціал функції кількох змінних.

Геометричний зміст повного диференціала полягає в тому, що повний диференціал функції $z=f\left(x;y\right)$ при $x=x_0$, $y=y_0$ зображується приростом аплікати точки дотичної площини, проведеної до поверхні $z=f\left(x;y\right)$ в її точці $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ (рис. 40).

Якщо $u=f\left(x;y;\ldots;t\right)$ то

$$du=d_x u+d_y u+\ldots+d_t u=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Функція $z=f\left(x;y\right)$ називається диференційовною в точці $M\left(x;y\right)$, якщо вона має в цій точці повний диференціал.

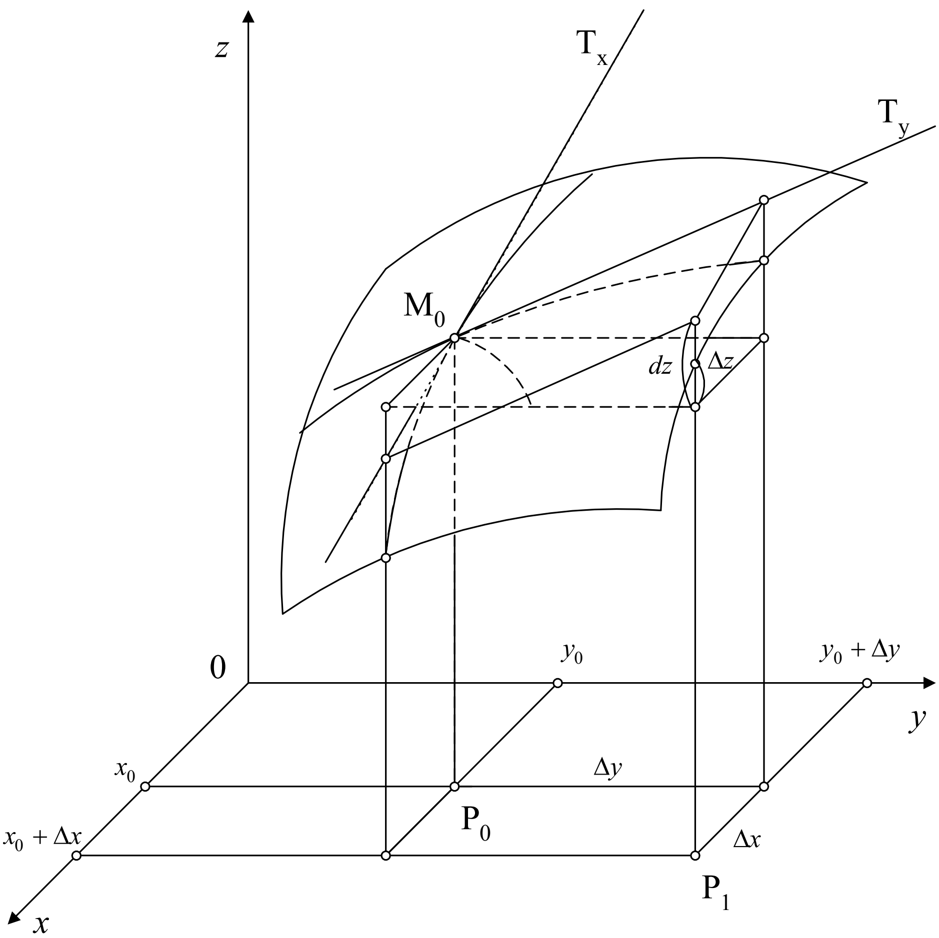


Рис. 40

Із рівності (35) випливає, що при досить малих Δx і Δy $\Delta z \approx dz$ або

$$f\left(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0; y_0\right) \approx f_x'\left(x_0; y_0\right)\Delta x+f_y'\left(x_0; y_0\right)\Delta y,$$

звідки $$f\left(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y\right) \approx f\left(x_0; y_0\right)+f_x'\left(x_0; y_0\right)\Delta x+f_y'\left(x_0; y_0\right)\Delta y. \qquad (38)$$

Формула (38) дає змогу за відомими значеннями $f\left(x_0;y_0\right)$; $f_x'\left(x_0;y_0\right)$; $f_y'\left(x_0;y_0\right)$ наближено обчислювати значення функції $f\left(x;y\right)$ за умови, що x мало відрізняється від x_0, а y від y_0.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти частинні диференціали функції $z = xy^3-3x^2y^2+2y^4$ по кожній із незалежних змінних.

Розв'язання. Задана функція z залежить від двох змінних x і y. Отже, можна знайти два її частинних диференціали $d_x z$ і $d_y z$. Згідно з означенням $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$, $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy^3-3x^2y^2+2y^4\right)_x' = y^3-6xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(xy^3-3x^2y^2+2y^4\right)_y' = 3xy^2-6x^2y+8y^3.$$

Підставляючи вирази частинних похідних у формули частинних диференціалів, остаточно дістанемо

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}dx=\left(y^3-6xy^2\right)dx; \qquad d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(3xy^2-6x^2y+8y^3\right)dy.$$

Приклад 2 $z=\sqrt[3]{x+y^2}$. Знайти $d_y z$ при $x=2,\ y=5,\ dy=0{,}01$.

Розв'язання. Маємо

$$d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\sqrt[3]{x+y^2}\right)'_y dy=\frac{1}{3}\left(x+y^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2ydy=\frac{2ydy}{3\sqrt[3]{\left(x+y^2\right)^2}}.$$

Підставляючи в цей вираз задані значення $x=2,\ y=5,\ dy=0{,}01$,

знаходимо $d_y z\Big|_{\substack{x=2\\ y=5\\ dy=0,01}}=\dfrac{2\cdot 5\cdot 0{,}01}{3\sqrt[3]{\left(2+25\right)^2}}=\dfrac{0{,}1}{27}=\dfrac{1}{270}.$

Приклад 3 Знайти повний диференціал функції $S=x^2\ln t$

Розв'язання. Задана функція S залежить від двох змінних x і t, тому

$$dS=\frac{\partial S}{\partial x}dx+\frac{\partial S}{\partial t}dt.$$

Враховуючи, що $\dfrac{\partial S}{\partial x}=\left(x^2\ln t\right)'_x=2x\ln t$; $\dfrac{\partial S}{\partial t}=\left(x^2\ln t\right)'_t=x^2\cdot\dfrac{1}{t}$, шуканий диференціал $dS=2x\ln t dx+\dfrac{x^2}{t}dt$.

Приклад 4 Обчислити значення повного диференціала функції $z=arctg\dfrac{x}{y}$ при $x=1,\ y=3,\ dx=0{,}01,\ dy=-0{,}05$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Тоді $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=-\dfrac{y}{x^2+y^2}dx+\dfrac{x}{x^2+y^2}dy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$

При $x=1,\ y=3,\ dx=0{,}01,\ dy=-0{,}05$

$$dz=\frac{1\cdot\left(-0{,}05\right)-3\cdot 0{,}01}{1^2+3^2}=\frac{-0{,}08}{10}=-0{,}008.$$

Приклад 5 Знайти du, якщо $u = x^{y^2 z}$

Розв'язання. Тут u – функція трьох змінних x, y, z.

Отже, $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$, де

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^{y^2 z}\right)'_x = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^{y^2 z}\right)'_y = x^{y^2 z}\ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^{y^2 z}\right)'_z = x^{y^2 z}\ln x \cdot y^2.$$

Таким чином, шуканий диференціал

$$du = y^2 z\, x^{y^2 z - 1}dx + 2yz\, x^{y^2 z}\ln x\, dy + y^2 x^{y^2 z}\ln x\, dz.$$

Приклад 6 Знайти повний приріст і повний диференціал функції $z = x^2 + xy$ при $x = 2,\ y = 1,\ \Delta x = 0{,}01,\ \Delta y = 0{,}02$

Розв'язання. Скористаємося формулою (34) і означенням повного диференціала функції $z = f(x;y)$. Тоді для заданої функції маємо

$$\Delta z = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - x^2 - xy =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y - x^2 - xy =$$

$$= 2x\Delta x + \Delta x^2 + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = (2x + y)\Delta x + x\Delta y + (\Delta x)^2 + \Delta x\Delta y.$$

Звідси $dz = (2x + y)\Delta x + x\Delta y$.

Підставляючи в ці вирази задані значення $x = 2,\ y = 1,\ \Delta x = 0{,}01,\ \Delta y = 0{,}02$, одержимо $\Delta z = (2 \cdot 2 + 1)0{,}01 + 2 \cdot 0{,}02 + (0{,}01)^2 + 0{,}01 \cdot 0{,}02 = 0{,}0903$;

$dz = (2 \cdot 2 + 1) \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}09$.

Приклад 7 Обчислити наближено $\sqrt{\sin^2 1{,}55 + 8 \cdot e^{0{,}015}}$, виходячи із значення функції $z = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$ при $x = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$, $y = 0$.

Розв'язання. Шукане число є новим значенням функції z при $\Delta x = 1{,}55 - 1{,}571 = -0{,}021$, $\Delta y = 0{,}015 - 0 = 0{,}015$.

Знаходимо значення z за умови, що $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$: $z\left(\frac{\pi}{2}; 0\right) = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{2} + 8e^0} = 3$.

Знаходимо приріст функції $\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y =$

$$= \left(\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}\right)'_x \cdot \Delta x + \left(\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}\right)'_y \cdot \Delta y =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}} \cdot 2\sin x\cos x\Delta x + \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}} \cdot 8e^y\Delta y = \frac{\sin 2x\Delta x + 8e^y\Delta y}{2\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}}.$$

При $x=\dfrac{\pi}{2}$, $y=0$, $\Delta x=-0{,}021$, $\Delta y=0{,}015$

$$dz=\frac{\sin\pi\left(-0{,}021\right)+8e^{0}0{,}015}{2\sqrt{\sin^{2}\frac{\pi}{2}+8e^{0}}}=\frac{0{,}12}{6}=0{,}02.$$

Отже, $\sqrt{\sin^{2}1{,}55+8\cdot e^{0{,}015}}\approx 3+0{,}02=3{,}02$.

Приклад 8 Обчислити наближено $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)$.

Розв'язання. $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)$ є частинним значенням функції $f\left(x;y\right)=\ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)$ при $x=1{,}03$ та $y=0{,}98$. Для знаходження цього значення скористаємося формулою (38), згідно з якою

$$f\left(x_{0}+\Delta x;y_{0}+\Delta y\right)\approx f\left(x_{0};y_{0}\right)+f'_{x}\left(x_{0};y_{0}\right)\Delta x+f'_{y}\left(x_{0};y_{0}\right)\Delta y.$$

Поклавши $x_0=1$, $y_0=1$, знаходимо $f\left(x_{0};y_{0}\right)=f\left(1;1\right)=\ln\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1\right)=0$, $\Delta x=x-x_0=1{,}03-1=0{,}03$, $\Delta y=y-y_0=0{,}98-1=-0{,}02$.

Знаходимо частинні похідні:

$$f'_{x}\left(x;y\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}};\qquad f'_{y}\left(x;y\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}.$$

Їх значення при $x_0=1$, $y_0=1$

$$f'_{x}\left(x_{0};y_{0}\right)=f'_{x}\left(1;1\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3},\quad f'_{y}\left(x_{0};y_{0}\right)=f'_{y}\left(1;1\right)=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Отже,

$$\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)\approx 0+\frac{1}{3}\cdot 0{,}03+\frac{1}{4}\cdot\left(-0{,}02\right)=0{,}01-0{,}005=0{,}005..$$

Приклад 9 Обчислити наближено $1{,}04^{2{,}02}$.

Розв'язання. $1{,}04^{2{,}02}$ можна розглядати як частинне значення функції $f\left(x;y\right)=x^{y}$ при $x=1{,}04$ та $y=2{,}02$.

Нехай $x_0=1$, $y_0=2$. Тоді $f\left(x_{0};y_{0}\right)=f\left(1;2\right)=1^{2}=1$; $\Delta x=x-x_0=1{,}04-1=0{,}04$, $\Delta y=y-y_0=2{,}02-2=0{,}02$.

Частинні похідні введеної функції по x і по y відповідно дорівнюють

$$f'_{x}\left(x;y\right)=\left(x^{y}\right)'_{x}=y\cdot x^{y-1};\quad f'_{y}\left(x;y\right)=\left(x^{y}\right)'_{y}=x^{y}\ln x,$$

а їх значення в точці $\left(1;2\right)$

$$f'_{x}\left(x_{0};y_{0}\right)=f'_{x}\left(1;2\right)=2\cdot 1^{2-1}=2,\quad f'_{y}\left(x_{0};y_{0}\right)=f'_{y}\left(1;2\right)=1^{2}\cdot\ln 1=0.$$

Підставляючи одержані значення $f\left(x_0;y_0\right)$, $f'_x\left(x_0;y_0\right)$, $f'_y\left(x_0;y_0\right)$, Δx та Δy у формулу (38), остаточно будемо мати: $1{,}04^{2,02} \approx 1+2\cdot 0{,}04+0\cdot 0{,}02=1{,}08$.

Приклад 10 Знайти за допомогою повного диференціала наближене значення повної поверхні закритої циліндричної цистерни з радіусом основи 2 м і висотою 10 м, якщо радіус основи збільшити на 1 см, а висоту - на 3 см.

Розв'язання. Шукане значення повної поверхні циліндра знайдемо обчисленням повного диференціала функції, яка визначається формулою $S=2\pi\left(r^2+rh\right)$. Її повний диференціал $dS=\dfrac{\partial S}{\partial r}\Delta r+\dfrac{\partial S}{\partial h}\Delta h$.

Отже, $\Delta S\approx 2\pi\left[\left(2r+h\right)\cdot\Delta r+r\cdot\Delta h\right]$.

Після підстановки значень $r=2$ м, $h=10$ м, $\Delta r=0{,}01$ м, $\Delta h=0{,}03$ м дістанемо: $\Delta S\approx 2\pi\left(14\cdot 0{,}01+2\cdot 0{,}03\right)=0{,}2\cdot 2\pi=0{,}4\pi$ (м^2).

Точний приріст повної поверхні циліндра $\Delta S=48{,}4008\pi-48\pi=0{,}4008\pi$ (м^2).

Звідси відносна похибка $\delta=\dfrac{0{,}4008\pi-0{,}4\pi}{0{,}4008\pi}\approx 0{,}2\%$.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення частинної похідної функції двох незалежних змінних по одній із них. Поширити це означення на функції багатьох змінних.

2 В чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції $z=f\left(x;y\right)$ в системі декартових координат?

3 Що називають частинним приростом і частинним диференціалом по x функції $z=f\left(x;y\right)$? Як виражається частинний диференціал функції через її частинну похідну?

4 В чому полягав геометричний зміст частинних диференціалів функції $z=f\left(x;y\right)$ в системі декартових координат?

5 Що називається повним приростом і повним диференціалом функції $z=f\left(x;y\right)$? Як виражається повний диференціал функції через її частинні похідні?

6 Яка функція кількох змінних називається диференційовною? Сформулюйте достатню умову диференційовності функції в точці.

7 В чому полягає геометричний зміст повного диференціала функції $z=f\left(x;y\right)$ в системі декартових координат?

8 Запишіть формулу для наближеного обчислення значень функції $z=f\left(x;y\right)$ за допомогою її повного диференціала. Чи завжди можна скористатися цією формулою?

Вправи

Знайти частинні похідні першого порядку наступних функцій.

1 $z = x^3 y - y^3 x$. Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2$.

2 $z = \left(5x^2 y - y^3 + 7\right)^3$.

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 30xy\left(5x^2 y - y^3 + 7\right)^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\left(5x^2 y - y^3 + 7\right)^2\left(5x^2 - 3y^2\right)$.

3 $z = \ln\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4 $\theta = axe^{-t} + bt$ (a, b - сталі). Відповідь: $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = ae^{-t}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial t} = -axe^{-t} + b$.

5 $z = \ln\left(x + \ln y\right)$. Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x + \ln y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{y\left(x + \ln y\right)}$.

6 $z = arctg\sqrt{x^y}$. Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y\sqrt{x^y}}{2x\left(1 + x^y\right)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\sqrt{x^y}\ln x}{2\left(1 + x^y\right)}$.

7 $z = \left(1 + \log_y x\right)^3$.

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3}{x\ln y}\left(1 + \dfrac{\ln x}{\ln y}\right)^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3\ln x}{y\ln^2 y}\left(1 + \dfrac{\ln x}{\ln y}\right)^2$.

8 $u = \left(\sin x\right)^{yz}$.

Відповідь: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yz\left(\sin x\right)^{yz-1}\cos x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = z\left(\sin x\right)^{yz}\ln\sin x$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = y\left(\sin x\right)^{yz}\ln\sin x$.

9 Знайти частинні значення похідних функції $z = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$ в точці $\left(1;2\right)$. Відповідь: $\left(0;4\right)$.

10 $u = \dfrac{\cos\left(\varphi - 2t\right)}{\cos\left(\varphi + 2t\right)}$. Знайти $\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{\substack{\varphi = \frac{\pi}{4} \\ t = \pi}}$. Відповідь: 4.

11 $u = \sqrt{az^3 - bt^3}$. Знайти $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ і $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ при $z = b$, $t = a$.

Відповідь: $\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{z=b \\ t=a}} = \dfrac{3b}{2}\sqrt{\dfrac{ab}{b^2 - a^2}}$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{\substack{z=b \\ t=a}} = -\dfrac{3a}{2}\sqrt{\dfrac{ab}{b^2 - a^2}}$.

12 Показати, що функція $z=\frac{x^2}{2y}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ задовольняє рівнянню $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$.

13 Перевірити, що функція $u=x+\frac{x-y}{y-z}$ задовольняє рівнянню $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$.

14 $P(x;y;z)=\sin^2(3x+2y-z)$. Обчислити $P'_x(1;-1;1)$, $P'_y(1;1;4)$, $P'_z(-0,5;0;-1)$. Відповідь: 0, $2\sin 2\approx 1,82$, $-\sin(-1)\approx 0,84$.

15 Показати, що функція $z=x\ln\frac{y}{x}$ задовольняє рівнянню $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

16 $f(x;y)=x^3y-y^3x$. Знайти $\left(\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}}\right)_{\substack{x=1\\y=2}}$. Відповідь: $-\frac{13}{22}$.

17 Обчислити визначник $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta}\end{vmatrix}$, якщо $\begin{array}{l} x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\\ z=\rho\cos\theta.\end{array}$

Відповідь: $\rho^2\sin\theta$.

18 Знайти частинні диференціали функції $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Відповідь: $d_xz=\frac{y\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx,\quad d_yz=\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy$.

19 Знайти частинні диференціали функції $u=\ln\left(x^3+2y^3-z^3\right)$.

Відповідь: $d_xu=\frac{3x^2dx}{x^3+2y^3-z^3},\quad d_yu=\frac{6y^2dy}{x^3+2y^3-z^3},\quad d_zu=\frac{-3z^2dz}{x^3+2y^3-z^3}$.

20 $z=\sqrt{\ln(xy)}$. Знайти d_xz при $x=1$, $y=1,2$ $\Delta x=0,016$.

Відповідь: $\approx 0,0187$.

Знайти повні диференціали наступних функцій:

21 $z = x^2 + \sin y$. Відповідь: $dz = 2xdx + \cos y dy$.

22 $z = x \cdot 2^y$. Відповідь: $dz = 2^y dx + x2^y \ln 2dy$.

23 $z = \arcsin\frac{x}{y}$. Відповідь: $dz = \frac{ydx - xdy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$.

24 $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$. Відповідь: $dz = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$.

25 Знайти повний диференціал функції $f(x;y) = \frac{x}{y}$ в точці $(1;2)$.

Відповідь: $df(1;2) = \frac{2dx - dy}{4}$.

26 Обчислити значення повного диференціала функції $z = x^3 + y^4$ при $x = 1,\ y = 2,\ dx = 0,03,\ dy = -0,01$. Відповідь: $-0,23$.

27 Обчислити наближено $\sqrt{5 \cdot e^{0,02} + 2,03^2}$, виходячи із значення функції $z = \sqrt{5 \cdot e^x + y^2}$ при $x = 0,\ y = 2$. Відповідь: $3,037$.

28 Обчислити наближено $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$, виходячи із значення функції $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1,\ y = 2,\ z = 1$. Відповідь: $1,05$.

29 Знайти наближене значення $1,94^2 \cdot e^{0,12}$, виходячи із значення функції $f(x;y) = x^2 \cdot e^y$ в точці $M_0(2;0)$ і замінюючи її повний приріст повним диференціалом. Відповідь: $4,24$.

30 Обчислити наближено $\ln\left(0,09^3 + 0,99^3\right)$. Відповідь: $-0,03$.

9.7 Диференціювання складних функцій

Нехай $z = f(x;y)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$ і функції $z = f(x;y)$, $x(t)$, $y(t)$ диференційовні.

Тоді похідна складної функції $z = f\left(x(t);y(t)\right)$ обчислюється за формулою:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\ . \tag{39}$$

Ця рівність виражає правило диференціювання складної функції однієї незалежної змінної.

Зокрема, якщо роль незалежної змінної t відіграє змінна x, тобто функція $z=f(x;y)$ залежить від незалежної змінної x як безпосередньо, так і через змінну y, яка є функцією від x, то беручи до уваги, що $\frac{dx}{dx}=1$ і на підставі рівності (39) дістанемо

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\ . \tag{40}$$

Похідна $\frac{dz}{dx}$ називається повною похідною від z по x на відміну від частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Так само для функції $u=f(x;y;z)$, де $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, її похідна:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\ . \tag{41}$$

Якщо $u=f(x;y;z)$, де $y=y(x)$, $z=z(x)$, то

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\ .$$

Якщо $z=f(x;y)$, де $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$ і функції $z=f(x;y)$, $x(u;v)$ та $y(u;v)$ диференційовні, то частинні похідні функції z виражаються так:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\quad \text{і}\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\ .$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти похідну функції $z=e^{x-2y}$, де $x=\sin t$, $y=t^3$.

Розв'язання. Оскільки задана функція z являє собою складну функцію однією незалежної змінної t, то на підставі формули (39) її похідна

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\ .$$

Диференціюючи функцію z по x і по y, а функції x і y по t, одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^{x-2y}\right)'_x=e^{x-2y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^{x-2y}\right)'_y=-2e^{x-2y};\quad \frac{dx}{dt}=\cos t;\quad \frac{dy}{dt}=3t^2.$$

Підставляючи здобуті вирази похідних до формули похідної $\frac{dz}{dt}$, остаточно матимемо $\frac{dz}{dt}=e^{x-2y}\cdot\cos t-2e^{x-2y}\cdot 3t^2=e^{x-2y}\cdot\left(\cos t-6t^2\right)=e^{\sin t-2t^3}\cdot\left(\cos t-6t^2\right)$.

Подібні приклади можна розв'язувати і іншим способом, який ґрунтується на інваріантності форми першого диференціала: повний диференціал функції $z = f(u;v)$ зберігає один і такий самий вигляд незалежно від того, чи є її аргументи u і v незалежними змінними, чи є вони функціями від незалежних змінних.

Якщо u і v – незалежні змінні, то повний диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Якщо $u = u(x;y)$ і $v = v(x;y)$, а отже, і $z = z(x;y)$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Як бачимо, і в цьому випадку $dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$, тобто не змінює своєї форми.

Зазначимо, що коли u і v – функції будь-якого числа незалежних змінних, то як і у разі функції однієї змінної:

1 $d(u+v) = du + dv$;

2 $d(uv) = vdu + udv$, зокрема $d(Cu) = C\cdot du$ $(C = const)$;

3 $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Покажемо, як скористатися властивістю інваріантності форми диференціала dz для знаходження повної похідної $\frac{dz}{dt}$ на розглянутому вище прикладі. Повний диференціал dz при змінних x і y виражається формулою $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$. Враховуючи, що $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2e^{x-2y}$, $dx = \cos t dt$, $dy = 3t^2 dt$, матимемо : $dz = e^{x-2y}\cdot\cos t dt - 2e^{x-2y}\cdot 3t^2 dt = e^{x-2y}\left(\cos t - 6t^2\right)dt =$ $= e^{\sin t - 2t^3}\left(\cos t - 6t^2\right)dt$. Розділивши обидві частини рівності на dt, знаходимо $\frac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3}\left(\cos t - 6t^2\right)$. Як бачимо, одержали такий самий результат.

Зауважимо також, що розглянутий приклад можна було б розв'язувати і без застосування формули диференціювання складної функції, бо за даними умовами $z = e^{\sin t - 2t^3}$, тобто z є функцією однієї незалежної змінної.

Її похідна: $\frac{dz}{dt} = \left(e^{\sin t - 2t^3}\right)'_t = e^{\sin t - 2t^3}\cdot\left(\sin t - 2t^3\right)'_t = e^{\sin t - 2t^3}\left(\cos t - 6t^2\right)$.

Приклад 2 Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = x^2 y^3 z$, де $x = t$, $y = t^2$, $z = \sin t$.

Розв'язання. На підставі формули (41) $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$.

Враховуючи, що $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3 z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 y^2 z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 y^3$, $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dz}{dt} = \cos t$,

маємо $\frac{du}{dt} = 2xy^3 z \cdot 1 + 3x^2 y^2 z \cdot 2t + x^2 y^3 \cdot \cos t =$

$= 2t \cdot t^6 \sin t + 3t^2 \cdot t^4 \sin t \cdot 2t + t^2 \cdot t^6 \cos t = t^7 \left(8 \sin t + t \cos t\right)$.

Приклад 3 Знайти $\frac{dz}{dx}$, якщо $z = arctg\left(xy\right)$, де $y = e^x$.

Розв'язання. Оскільки $z = f\left(x;y\right)$, де $y = y\left(x\right)$, то повна похідна від z по x знаходиться за формулою $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\left(xy\right)\right)_x' = \frac{y}{1 + \left(xy\right)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arctg\left(xy\right)\right)_y' = \frac{x}{1 + \left(xy\right)^2}$; $\frac{dy}{dx} = \left(e^x\right)_x' = e^x$.

Тоді $\frac{dz}{dx} = \frac{y}{1 + \left(xy\right)^2} + \frac{x}{1 + \left(xy\right)^2} \cdot e^x = \frac{y + xe^x}{1 + \left(xy\right)^2} = \frac{e^x + xe^x}{1 + \left(xe^x\right)^2} = \frac{\left(1 + x\right)e^x}{1 + x^2 e^{2x}}$.

Приклад 4 Продиференціювати функцію $z = tg\left(3t + 2x^2 - y\right)$,

де $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$.

Розв'язання. Маємо функцію z, яка залежить від трьох незалежних змінних t, x і y, які, в свою чергу, є функціями незалежної змінної t. Отже, в кінцевому результаті z є функцією від t і тому можна знайти лише одну її похідну $\frac{dz}{dt}$ (повна похідна). Виведемо правило для знаходження цієї похідної.

На підставі формули (41) і з урахуванням того, що $\frac{dt}{dt} = 1$, матимемо

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Знайдемо похідні, які входять до цієї формули: $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\cos^2\left(3t + 2x^2 - y\right)} \cdot 3$,

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2\left(3t + 2x^2 - y\right)} \cdot 4x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2\left(3t + 2x^2 - y\right)} \cdot \left(-1\right)$, $\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{t^2}$, $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Тоді $\frac{dz}{dt}=\frac{1}{\cos^2\left(3t+2x^2-y\right)}\cdot\left(3+4x\left(-\frac{1}{t^2}\right)-1\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)=$

$$=\frac{1}{\cos^2\left(3t+2x^2-y\right)}\cdot\left(3+4\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)-1\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)=\left(3-\frac{4}{t^3}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\cdot\sec^2\left(3t+2x^2-y\right)$$

Приклад 5 Продиференціювати функцію $z=x^2\ln y$, де $x=\frac{u}{v}$, $y=3u-2v$.

Розв'язання. Тут $z=f\left(x;y\right)$, де $x=x\left(u;v\right)$, $y=y\left(u;v\right)$. Тому можна знайти від z дві її частинні похідні: $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

Диференціюючи задані функції z, x і y як функції двох змінних, знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{y}$, $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}=3$, $\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}$, $\frac{\partial y}{\partial v}=-2$.

Тоді шукані похідні від z по u і по v відповідно дорівнюватимуть:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2x\ln y\cdot\frac{1}{v}+\frac{x^2}{y}\cdot 3=2\frac{u}{v}\ln\left(3u-2v\right)\cdot\frac{1}{v}+3\left(\frac{u}{v}\right)^2\cdot\frac{1}{3u-2v}=$$

$$=\frac{2u}{v^2}\ln\left(3u-2v\right)+\frac{3u^2}{\left(3u-2v\right)v^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=2x\ln y\left(-\frac{u}{v^2}\right)+\frac{x^2}{y}\cdot(-2)=2\frac{u}{v}\ln\left(3u-2v\right)\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)-2\left(\frac{u}{v}\right)^2\cdot\frac{1}{3u-2v}=$$

$$=-\frac{2u^2}{v^3}\ln\left(3u-2v\right)-\frac{2u^2}{\left(3u-2v\right)v^2}.$$

Приклад 6 Знайти $d\,arctg\frac{y}{x}$.

Розв'язання. Покладемо $\frac{y}{x}=u$. Тоді $d\,arctg\frac{y}{x}=d\,arctgu=\left(arctgu\right)_u'\,du=$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Зауважимо, що звідси зразу випливає:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(arctg\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(arctg\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Приклад 7 Показати, що функція $z = y\varphi$, де $\varphi = \varphi\left(x^2 - y^2\right)$, задовольняє рівнянню $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Розв’язання. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi' \cdot 2x = 2xy\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi + y\varphi' \cdot (-2y) = \varphi - 2y^2\varphi'.$$

Підставляючи їх в ліву частину рівняння, одержимо

$$\frac{1}{x} \cdot 2xy\varphi' + \frac{1}{y} \cdot \left(\varphi - 2y^2\varphi'\right) = 2y\varphi' + \frac{\varphi}{y} - 2y\varphi' = \frac{\varphi}{y} = \frac{\varphi y}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

Отже, задана функція задовольняє заданому рівнянню.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення складної функції кількох незалежних змінних.

2 Виведіть правило диференціювання складної функції у разі, коли
$z = f(x;y)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$;
$z = f(x;y)$, де $y = y(x)$;
$z = f(x;y)$, де $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$.

Поширити одержані правила на випадок, коли
$z = f(u;v;\ldots;w)$, де $u = u(x;y;\ldots;t)$, $v = v(x;y;\ldots;t)$, … , $w = w(x;y;\ldots;t)$;
$z = f(u;v;\ldots;w)$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$, … , $w = w(x)$.

3 Що називають повною похідною функції кількох змінних?

4 В чому полягає властивість інваріантності форм повного диференціала dz функції кількох змінних?

5 Сформулюйте основні правила для знаходження диференціала функції будь-якого числа незалежних змінних.

Вправи

1 $z = \arcsin(x - y)$, де $x = 3t$, $y = 4t^3$. Знайти $\frac{dz}{dt}$.

Відповідь: $\frac{3 - 12t^2}{\sqrt{1 - \left(3t - 4t^3\right)^2}}$.

2 Знайти $\frac{du}{dx}$, якщо $u = z^2 + y^2 + zy$, де $z = \sin x$, $y = e^x$.

Відповідь: $\sin 2x + 2e^{2x} + e^x(\sin x + \cos x)$.

3 $u=\ln\left(e^{x}+e^{y}\right)$. Знайти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ та $\dfrac{du}{dx}$, якщо $y=x^{3}$.

Відповідь: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+e^{y}}$, $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{e^{x}+3x^{2}e^{x^{3}}}{e^{x}+e^{x^{3}}}$.

4 Знайти $\dfrac{du}{dx}$, якщо $u=\arcsin\dfrac{x}{z}$, де $z=\sqrt{x^{2}+1}$. Відповідь: $\dfrac{1}{1+x^{2}}$.

5 Знайти похідні функції $z=x^{2}y-xy^{2}$, де $x=u\cos v$, $y=u\sin v$.

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial u}=3u^{3}\sin v\cos v\left(\cos v-\sin v\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=u^{3}\left(\sin v+\cos v\right)\left(1-3\sin v\cos v\right)$.

6 Знайти похідні складної функції $z=u^{v}$, де $u=\ln\left(x-y\right)$, $v=e^{\frac{x}{y}}$.

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=vu^{v-1}\cdot\dfrac{1}{x-y}+u^{v}\ln u\cdot\dfrac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=vu^{v-1}\cdot\dfrac{1}{y-x}+u^{v}\ln u\left(-\dfrac{x}{y^{2}}e^{\frac{x}{y}}\right)$,

де $u=\ln\left(x-y\right)$, $v=e^{\frac{x}{y}}$.

7 Знайти похідні складної функції $z=\dfrac{x^{2}-y}{x^{2}+y}$, де $y=3x+1$.

Відповідь: $\dfrac{2x\left(3x+2\right)}{\left(x^{2}+3x+1\right)^{2}}$.

8 Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z=x^{2}y$, де $y=\cos x$.

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\cos x$, $\dfrac{dz}{dx}=x\left(2\cos x-x\sin x\right)$.

9 $z=\ln\left(x^{2}+y^{2}\right)$, де $x=uv$, $y=\dfrac{u}{v}$. Знайти похідні функції z.

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{2}{u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{2\left(v^{4}-1\right)}{v\left(v^{4}+1\right)}$.

10 Знайти dz, якщо $z=x^{2}y-xy^{2}$, де $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Відповідь: $dz=r^{2}\left[\left(\sin 2\varphi-\sin^{2}\varphi\right)\cos\varphi+\left(\cos^{2}\varphi-\sin 2\varphi\sin\varphi\right)\right]dr+$

$+r^{3}\left[\left(\cos^{2}\varphi-\sin 2\varphi\right)\cos\varphi-\left(\sin 2\varphi-\sin^{2}\varphi\right)\sin\varphi\right]d\varphi$.

11 Знайти повний диференціал функції $z=e^{xy}\ln\left(x+y\right)$, де $x=t^{3}$, $y=1-t^{3}$. Відповідь 0.

12 $z=xy+xF\left(u\right)$, де $u=\dfrac{y}{x}$. Показати, що $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

9. 8 Повторне диференціювання

Як було показано вище, функцію багатьох аргументів $u = f\left(x; y; \ldots; t\right)$ можна диференціювати по кожному аргументу. Одержані частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial t}$ (першого порядку) також залежать від тих самих аргументів і кожну з них також можна диференціювати по кожному аргументу.

Нехай дано функцію $z = f\left(x; y\right)$, яка має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку називаються частинними похідними другого порядку, їх позначають $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Застосовують й інші позначення:

$$f_{xx}'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \qquad f_{xy}'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \qquad f_{yy}'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Аналогічно позначаються частинні похідні третього порядку та інших вищих порядків.

Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають мішаними.

Зазначимо, що коли мішані похідні f_{xy}'' і f_{yx}'' неперервні, то результат диференціювання не залежить від порядку диференціювання, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$ та ін.

Із сказаного випливав, що функція двох змінних $z = f\left(x; y\right)$ має три різних частинних похідних другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ та чотири різних частинних похідних другого порядку $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ і взагалі $n+1$ різних частинних похідних n-го порядку.

Зауважимо, що частинні похідні вищих порядків знаходяться шляхом послідовного диференціювання попередньої похідної за правилами диференціювання функції однієї змінної.

Повні диференціали другого, третього і більш високих порядків функції $z = f\left(x; y\right)$ визначаються за формулами

$$d^2 z = d\left(dz\right), \; d^3 z = d\left(d^2 z\right), \; \ldots, \; d^n z = d\left(d^{n-1} z\right).$$

Через те, що $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$,

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Беручи диференціал від dz, треба вважати, що dx і dy – сталі.

Отже, якщо x і y – незалежні змінні і функція $z = f(x;y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{42}$$

Проводячи аналогічні міркування, дістанемо

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \tag{43}$$

Символічно ці формули можна записати так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z; \quad d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Взагалі справедлива символічна формула $d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$.

Формально $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n$ розкривається за біноміальним законом:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m + \ldots + b^n.$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = (x^2+y)^5$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[(x^2+y)^5\right]'_x = 5(x^2+y)^4(x^2+y)'_x = 5(x^2+y)^4 2x = 10x(x^2+y)^4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left[(x^2+y)^5\right]'_y = 5(x^2+y)^4(x^2+y)'_y = 5(x^2+y)^4 \cdot 1 = 5(x^2+y)^4.$$

Диференціюючи кожну із одержаних похідних (функцій) по x і по y, знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left[10x\left(x^2+y\right)^4\right]_x'=10\left(\left(x^2+y\right)^4+4x\left(x^2+y\right)^3\cdot 2x\right)=10\left(x^2+y\right)^3\left(x^2+y+8x^2\right)=$$
$$=10\left(x^2+y\right)^3\left(9x^2+y\right);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left[10x\left(x^2+y\right)^4\right]_y'=10x\cdot 4\left(x^2+y\right)^3\cdot 1=40x\left(x^2+y\right)^3;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left[5\left(x^2+y\right)^4\right]_x'=5\cdot 4\left(x^2+y\right)^3\cdot 2x=40x\left(x^2+y\right)^3;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left[5\left(x^2+y\right)^4\right]_y'=5\cdot 4\left(x^2+y\right)^3\cdot 1=20x\left(x^2+y\right)^3.$$

Як і слід було чекати, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Приклад 2 Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $z=y\ln x$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y\ln x\right)_x'=y\cdot\frac{1}{x}=\frac{y}{x};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(y\ln x\right)_y'=\ln x\cdot 1=\ln x.$$

Тепер, проводячи повторне диференціювання, дістанемо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{y}{x}\right)_x'=y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{y}{x}\right)_y'=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\ln x\right)_y'=0.$$

Приклад 3 $z=\ln tg\dfrac{y}{x}$. Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln tg\frac{y}{x}\right)_x'=\frac{1}{tg\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}\cdot y\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}=-\frac{2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}}.$$

Тоді $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(-\dfrac{2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}}\right)_y'=-\dfrac{2}{x^2}\left(\dfrac{y}{\sin\frac{2y}{x}}\right)_y'=$

$$=-\frac{2}{x^2}\cdot\frac{\sin\frac{2y}{x}-y\cos\frac{2y}{x}\cdot\frac{2}{x}}{\sin^2\frac{2y}{x}}=\frac{2}{x^3\sin^2\frac{2y}{x}}\cdot\left(2y\cos\frac{2y}{x}-x\sin\frac{2y}{x}\right).$$

Приклад 4 $z=e^x\left(\cos y+x\sin y\right)$. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^x\left(\cos y+x\sin y\right)\right)_x'=e^x\left(\cos y+x\sin y\right)+e^x\left(0+\sin y\right)=e^x\left(\cos y+x\sin y+\sin y\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^x\left(\cos y+x\sin y\right)\right)_y'=e^x\left(-\sin y+x\cos y\right).$$

Тепер маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left[e^x\left(\cos y+x\sin y+\sin y\right)\right]_y'=e^x\left(-\sin y+x\cos y+\cos y\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left[e^x\left(-\sin y+x\cos y\right)\right]_x'=e^x\left(-\sin y+x\cos y\right)+e^x\left(0+\cos y\right)=$$

$$=e^x\left(-\sin y+x\cos y+\cos y\right).$$

Порівнюючи між собою результати для $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, бачимо, що вони однакові. Отже, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Приклад 5 $z=e^{xy^2}$. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.

Розв'язання. Диференціюючи послідовно z по x, z_x' по x і z_{xx}'' по y, матимемо $\frac{\partial z}{\partial x}=z_x'=\left(e^{xy^2}\right)_x'=e^{xy^2}\left(xy^2\right)_x'=e^{xy^2}y^2$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}''==\left(y^2e^{xy^2}\right)_x'=y^2\left(e^{xy^2}\right)_x'=y^2e^{xy^2}y^2=y^4e^{xy^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\left(z_{xx}''\right)_y'=\left(y^4e^{xy^2}\right)_y'=y^4\left(e^{xy^2}\right)_x'=4y^3e^{xy^2}+y^4e^{xy^2}\cdot 2xy=2y^3e^{xy^2}\left(2+xy^2\right).$$

Отже, шукана похідна $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=2y^3e^{xy^2}\left(2+xy^2\right)$.

Приклад 6 Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = \sin(xy)$.

Розв'язання. Треба знайти похідну третього порядку від функції двох змінних. Порядок диференціювання при цьому такий: беремо похідну від функції z по x, одержану похідну $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ диференціюємо по y і нарешті знаходимо похідну від $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, знову диференціюючи її по y.

Виконуючи зазначені дії, будемо мати

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[\sin(xy)\right]_x' = \cos(xy)\cdot(xy)_x' = y\cos(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[y\cos(xy)\right]_y' = \cos(xy) - y\sin(xy)\cdot x = \cos(xy) - xy\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \left[\cos(xy) - xy\sin(xy)\right]_y' = -\sin(xy)\cdot x - x\sin(xy) - xy\cos(xy)\cdot x =$$
$$= -x\left(2\sin(xy) + xy\cos(xy)\right).$$

Приклад 7 Довести, що функція $u = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}$ задовольняє рівнянню теплопровідності $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку похідні $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ і $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)_t' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\cdot\left(-\frac{x^2}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\left(-\frac{1}{2t\sqrt{t}} + \frac{x^2}{t^2\sqrt{t}}\right) = -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\left(1 - \frac{x^2}{2t}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)_x' = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\left(-\frac{1}{4t}\cdot 2x\right) = -\frac{x}{4t\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{x}{4t\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)_x' = -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}}\cdot\left(e^{-\frac{x^2}{4t}} + xe^{-\frac{x^2}{4t}}\left(-\frac{1}{4t}\right)\cdot 2x\right) = -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\left(1 - \frac{x^2}{2t}\right).$$

Підставляючи вирази похідних $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ у рівняння теплопровідності, одержимо тотожність. А це і означає, що задана функція задовольняє цьому рівнянню.

Приклад 8 $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Показати, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Розв'язання. Перетворимо задану функцію u у такий спосіб:

$$u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right).$$

Тепер знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = -\frac{x}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = -\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = -\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Підставляючи вирази похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ у задане рівняння, будемо мати $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2+y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{0}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0$.

Отже, якщо $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Приклад 9 Знайти $d^2 z$, якщо $z = e^x \cos y$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (42), згідно з якою

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Враховуючи, що $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^x \cos y\right)'_x = e^x \cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^x \cos y\right)'_y = e^x \sin y$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y$, будемо мати

$$d^2 z = e^x \cos y dx^2 - 2e^x \sin y dxdy - e^x \cos y dy^2.$$

Приклад 10 $z = x^3 + y^3 + 3xy$. Знайти повний диференціал третього порядку функції z.

Розв'язання. На підставі формули (43)

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Для даної функції $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 3x$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 6.$$

Отже, $d^3z = 6dx^3 + 6dy^3 = 6\left(dx^3 + dy^3\right)$.

Питання для самоперевірки

1 Що називається частинною похідною другого (n-го) порядку функції двох незалежних змінних?

2 Сформулюйте теорему про рівність мішаних похідних.

3 Поширити визначення частинної похідної n-го порядку і теорему про незалежність її від порядку диференціювання на функції багатьох незалежних змінних.

4 Дайте означення повного диференціала другого (n-го) порядку функції двох змінних і укажіть формулу для його знаходження.

Вправи

1 $z = x^y$. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2 $z = arctg\frac{y}{x}$. Показати, що $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

Знайти частинні похідні другого порядку наступних функцій.

3 $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^3 + \left(x^2 - y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2}}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

4 $z = \sin^2\left(ax + by\right)$.

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2\cos 2\left(ax + by\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ab\cos 2\left(ax + by\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2\cos 2\left(ax + by\right)$.

5 $z = \frac{x - y}{x + y}$. Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{\left(x + y\right)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2\left(x - y\right)}{\left(x + y\right)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{\left(x + y\right)^3}$.

6 $z=e^{xe^y}$. Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{xe^y+2y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+xe^y\right)e^{xe^y+y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\left(1+xe^y\right)e^{xe^y+y}$.

7 $z=y^{\ln x}$.

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\ln y(\ln y+1)}{x^2}e^{\ln x\ln y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\ln x\ln y+1}{xy}e^{\ln x\ln y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}e^{\ln x\ln y}$.

8 $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$. Відповідь: $\frac{4x\left(3y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$.

9 $u=x^2y^3z^4$. Знайти $\frac{\partial^6 u}{\partial x\partial y^3\partial z^2}$. Відповідь: $144xz^2$.

10 $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$. Довести, що $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ і що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$.

11 Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, якщо $z=\frac{x^4-8xy^3}{x-2y}$. Відповідь: 4.

12 Знайти повний диференціал другого порядку функції $z=x^2+y^2-xy-2x+y+7$. Відповідь: $2\left(dx^2-dxdy+dy^2\right)$.

13 Знайти частинні похідні третього порядку функції $z=\frac{y}{x}$.

Відповідь: $-\frac{6y}{x^4}$, $\frac{2}{x^3}$, 0, 0.

14 $S=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{t}\right)$. Перевірити, що $\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$.

15 $S=\sqrt[3]{ax+bt}$. Довести, що $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 S=-\frac{2S}{9}$.

16 $u=arctg\left(2x-t\right)$. Довести, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0$.

17 Знайти d^2z, якщо $z=x\ln\frac{y}{x}$. Відповідь: $-\frac{dx^2}{x}+2\frac{dxdy}{y}-x\frac{dy^2}{y^2}$.

18 Знайти d^2z, якщо $z=x\sin^2 y$. Відповідь: $2\sin 2ydxdy+2x\cos 2ydy^2$.

19 Знайти повний диференціал другого порядку функції $u=t\ln x$.

Відповідь: $\frac{2t}{x^3}dx^3-\frac{3}{x^2}dx^2dt$.

20 $t=\sin\left(2x+y\right)$. Знайти d^3z у точках $(0;\pi)$ і $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь: $-\cos\left(2x+y\right)\left(2dx+dy\right)^3$; $\left(2dx+dy\right)^3$; 0.

9.9 Неявна функція двох змінних і її диференціювання

Нагадаємо, що функція z називається неявною функцією від x і y, якщо вона визначена рівнянням $F(x;y;z)=0$, не розв'язаним відносно z. Це означає, що для кожної пари аргументів $x=x_0$, $y=y_0$ із області визначення неявної функції вона набував такого значення z_0, для якого $F(x_0;y_0;z_0)=0$.

Теорема існування неявної функції стверджує, що коли функція $F(x;y)=0$ і її частинні похідні $F_x'(x;y)$ і $F_y'(x;y)$ визначені та неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ і при цьому $F(x_0;y_0)=0$, а ,$F_y'(x_0;y_0)\neq 0$ то рівняння $F(x;y)=0$ визначає в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ єдину неявну функцію $y=y(x)$, неперервну і диференційовану в деякому інтервалі, який містить точку x_0, причому $y(x_0)=y_0$.

Так само формулюється і теорема про існування неявної функції $z=z(x;y)$, визначеної рівнянням $F(x;y;z)=0$.

Якщо $F(x;y;z)$ – диференційована функція трьох змінних x, y, z і $F_z'(x;y;z)\neq 0$, то визначена рівнянням $F(x;y;z)=0$ неявна функція $z=z(x;y)$ також диференційована, і її частинні похідні знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{44}$$

Зауважимо, що коли неявна функція $y=y(x)$ задана рівнянням $F(x;y)=0$, то її похідну по x можна знайти за аналогічною формулою за умов, що $F(x;y)$ – диференційована функція змінних x та y і $F_y'(x;y)\neq 0$.

У цьому випадку формула для знаходження похідної має такий вигляд:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{45}$$

Ця формула виражав похідну $\frac{dy}{dx}$ через x та y. Тому для знаходження частинного значення похідної $\frac{dy}{dx}$ треба знайти не лише значення аргументу $x=x_0$, але й відповідне йому значення неявної функції y_0. Цей факт має місце і для неявної функції двох (кількох) змінних. Наступні похідні неявної функції, заданої рівнянням $F(x;y;z)=0$, знаходять послідовним диференціюванням рівностей (44), при цьому враховують , що z є функція від x і у.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Функція $y(x)$ задана рівнянням $1+xy-\ln\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)=0$. Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Розв'язання. У даному випадку $F(x;y)=1+xy-\ln\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)$, тому

$$F_x'=\frac{\partial F}{\partial x}=y-\frac{1}{e^{xy}+e^{-xy}}\left(e^{xy}y-e^{-xy}y\right)=\frac{ye^{xy}+ye^{-xy}-ye^{xy}+ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}=\frac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}};$$

$$F_y'=\frac{\partial F}{\partial y}=x-\frac{1}{e^{xy}+e^{-xy}}\left(e^{xy}x-e^{-xy}x\right)=\frac{xe^{xy}+xe^{-xy}-xe^{xy}+xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}=\frac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}.$$

Отже, $$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}-\frac{\dfrac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}{\dfrac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}=-\frac{y}{x}.$$

Вважаючи в цій рівності y функцією від x і диференціюючи її, знайдемо другу похідну неявної функції. При цьому скористаємося уже знайдений виразом першої похідної $$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{y}{x}\right)_x'=-\frac{x\cdot\dfrac{dy}{dx}-y\cdot 1}{x^2}=-\frac{x\cdot\left(-\dfrac{y}{x}\right)-y}{x^2}=\frac{2y}{x^2}.$$

Похідну першого порядку від неявної функції $y(x)$, заданої рівнянням $1+xy-\ln\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)=0$, можна було б знайти і безпосереднім диференціюванням обох частин цього рівняння по x, вважаючи при цьому y функцією від x, як це робилося раніше.

Дійсно, беручи похідну по x від кожної частини рівняння, одержимо

$$1\cdot y+xy'-\frac{1}{e^{xy}+e^{-xy}}\cdot\left(e^{xy}\left(y+xy'\right)-e^{-xy}\left(y+xy'\right)\right)=0,$$ або

$$\left(y+xy'\right)\left(1-\frac{e^{xy}-e^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}\right)=0,$$ звідки $y+xy'=0$, а $y'=-\frac{y}{x}$.

Як бачимо, одержали такий самий результат.

Приклад 2 Знайти похідну функції $y(x)$, заданої рівнянням $x^2+y^2+2x-6y+2=0$, і обчислити її значення при $x=1$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину даного рівняння через $F(x;y)$ і знайдемо частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2$; $\frac{\partial F}{\partial y}=2y-6$.

На підставі формули (45) $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{2x+2}{2y-6}=-\frac{x+1}{y-3}=\frac{x+1}{3-y}$.

Підставляючи у вихідне рівняння $x=1$, знаходимо два відповідних значення функції: $y_1=1$ і $y_2=5$. Тому при $x=1$ і похідна має два значення: $y_1'(1)=1$ і $y_2'(1)=-1$.

Приклад 3 Знайти частинні похідні неявної функції, заданої рівнянням $x^2y-y^2z+zx=0$.

Розв'язання. 1 спосіб. Неявно задану функцію легко подати явно. Для цього треба розв'язати рівняння відносно z: $z=\frac{x^2y}{y^2-x}$.

Її частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x^2y}{y^2-x}\right)_x'=\frac{2xy\left(y^2-x\right)-x^2y(-1)}{\left(y^2-x\right)^2}=\frac{xy\left(2y^2-x\right)}{\left(y^2-x\right)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x^2y}{y^2-x}\right)_y'=\frac{x^2\left(y^2-x\right)-x^2y\cdot 2y}{\left(y^2-x\right)^2}=\frac{x^2\left(-x-y^2\right)}{\left(y^2-x\right)^2}=-\frac{x^2\left(x+y^2\right)}{\left(y^2-x\right)^2}.$$

2 спосіб.. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ можна знайти і за формулами диференціювання неявної функції. Поклавши $F(x;y;z)=x^2y-y^2z+zx$, знаходимо $\frac{\partial F}{\partial x}=2xy+z$, $\frac{\partial F}{\partial y}=x^2-2yz$, $\frac{\partial F}{\partial z}=-y^2+x$.

На підставі формули (44)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2xy+z}{-y^2+x}=\frac{2xy+z}{y^2-x};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{x^2-2yz}{-y^2+x}=\frac{x^2-2yz}{y^2-x}.$$

3 спосіб. Можна знайти частинні похідні безпосереднім диференціюванням даного рівняння по x і по y. Диференціюючи рівняння по x, вважаємо y сталою, а z функцією від x і y.

$2xy-y^2\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}+z=0$, звідки $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy+z}{y^2-x}$.

При диференціюванні рівняння по y вважаємо x сталою, а z функцією від x і y. Тоді $x^2-2yz-y^2\frac{\partial z}{\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, звідки $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-2yz}{y^2-x}$.

Відповіді в розв'язках другим та третім способами збігаються. Якщо в них підставити значення $z=\frac{x^2y}{y^2-x}$, то одержимо збіг і в розв'язку першим способом (пропонуємо переконатись в цьому самостійно).

Приклад 4 Знайти повний диференціал функції $z=z\left(x;y\right)$, заданої рівнянням $x^2+y^2+z^2-2y-1=0$.

Розв'язання. Згідно з формулою (37)

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Поклавши $F\left(x;y;z\right)=x^2+y^2+z^2-2y-1$, заходимо

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y-2,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z.$$

Тоді $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2y-2}{2z}=\frac{1-y}{z}$,

а шуканий диференціал $dz=-\frac{x}{z}dx+\frac{1-y}{z}dy$.

Приклад 5 Нехай z є функцією змінних x і y, яка визначається рівнянням $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$. Знайти d^2z для системи значень $x=2$, $y=0$, $z=1$.

Розв'язання. На підставі формули (42)

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Поклавши $F\left(x;y;z\right)=2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8$, знаходимо

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4x-8z,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=4y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z-8x-1.$$

Тепер за формулами (44) маємо $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4x-8z}{2z-8x-1}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y}{2z-8x-1}$.

Їх значення в точці $M\left(2;0;1\right)$ $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=-\frac{8-8}{2-16-1}=0$; $\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=-\frac{4\cdot 0}{2-16-1}=0$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку від функції $z = z(x;y)$.

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -4\left(\frac{x-2z}{2z-8x-1}\right)'_x = -4\frac{\left(1-2\frac{dz}{dx}\right)(2z-8x-1)-(x-2z)\left(2\frac{dz}{dx}-8-0\right)}{(2z-8x-1)^2};$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = -4\left(\frac{x-2z}{2z-8x-1}\right)'_y = -4\frac{\left(0-2\frac{dz}{dy}\right)(2z-8x-1)-(x-2z)\left(2\frac{dz}{dy}-0-0\right)}{(2z-8x-1)^2};$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = -4\left(\frac{y}{2z-8x-1}\right)'_y = -4\frac{1\cdot(2z-8x-1)-y\cdot\left(2\frac{dz}{dy}-0-0\right)}{(2z-8x-1)^2}.$$

Їх значення в точці $M(2;0;1)$

$$\left.\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right|_M = -4\frac{(1-2\cdot 0)(2-16-1)-(2-2)(2\cdot 0-8)}{(2-16-1)^2} = \frac{4\cdot 15}{15^2} = \frac{4}{15};$$

$$\left.\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)\right|_M = -4\frac{-2\cdot 0(2-16-1)-(2-2)2\cdot 0}{(2-16-1)^2} = \frac{0}{15^2} = 0;$$

$$\left.\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right|_M = -4\frac{2-16-1-0\cdot 2\cdot 0}{(2-16-1)^2} = \frac{4\cdot 15}{15^2} = \frac{4}{15}.$$

Таким чином, $\left. d^2z\right|_M = \frac{4}{15}dx^2 + \frac{4}{15}dy^2 = \frac{4}{15}\left(dx^2+dy^2\right)$.

Питання для самоперевірки

1 Яка функція називається неявною?

2 Сформулювати теорему існування неявної функції.

3 В чому полягає правило диференціювання неявно заданої функції?

4 Вивести формулу для знаходження похідної функції $y = y(x)$, заданої рівнянням $F(x;y) = 0$.

5 Вивести формули для знаходження частинних похідних неявної функції z, заданої рівнянням $F(x;y;z) = 0$.

Вправи:

1 Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо неявна функція задана рівнянням $\left(x^2+y^2\right)^3 - 3\left(x^2+y^2\right) + 1 = 0$. Відповідь: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3}$.

2 Функція y задана рівнянням $y = x + \ln y$. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Відповідь: $\frac{y}{(1-y)^3}$.

3 Знайти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=11}$ і $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$, якщо функція y визначена рівнянням $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$.

Відповідь: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=11} = 3$ або -1; $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1} = 8$ або -8.

4 Функція $z = z(x;y)$ задана рівнянням $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}$.

5 Функція z задана рівнянням $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для системи значень $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

6 Знайти dz і d^2z, якщо $\ln z = x + y + z - 1$.

Відповідь: $dz = \frac{z}{1-z}(dx + dy)$; $d^2z = \frac{z}{(1-z)^3}\left(dx^2 + 2dxdy + dy^2\right)$.

7 $xyz = a^3$. Довести, що $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -2z$.

8 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$. Показати, що $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

9 Функція z задана рівнянням $3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0$. Знайти d^2z в точці $(2;1;2)$.

Відповідь: $-31{,}5dx^2 + 206dxdy - 306dy^2$.

10 $z = arctg\frac{y}{z - x}$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$. Відповідь: 1.

9.8 Повторне диференціювання

Як було показано вище, функцію багатьох аргументів $u = f(x, y, ..., t)$ можна диференціювати по кожному аргументу. Одержані частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ... \frac{\partial u}{\partial t}$ (першого порядку) також залежать від тих самих аргументів і кожну з них також можна диференціювати по кожному аргументу.

Нехай дано функцію $z = f(x; y)$, яка має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$.

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку називаються частинними похідними другого порядку, їх позначають $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}: \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial z^2}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}: \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Застосовують й інші позначення:

$$f_{xx}'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad f_{xy}'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad f_{yy}'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Аналогічно позначаються частинні похідні третього порядку та інших вищих порядків.

Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають мішаними.

Зазначимо, що коли мішані похідні f_{xy}'' і f_{yx}'' неперервні, то результат диференціювання не залежить від порядку диференціювання, тобто $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial^3 x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$ та ін.

Із сказаного випливає, що функція двох змінних $z = f(x, y)$ має три різних частинних похідних другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

чотири різних частинних похідних третього порядку

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

і взагалі $n+1$ різних частинних похідних n-го порядку.

Зауважимо, що частинні похідні вищих порядків знаходяться шляхом послідовного диференціювання попередньої похідної за правилами диференціювання функції однієї змінної.

Повні диференціали другого, третього і більш високих порядків функції $z = f(x, y)$ визначаються за формулами

$$d^2 z = d(dz), \; d^3 z = d(d^2 z), \ldots, d^n z = d(d^{n-1} z).$$

Через те, що $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$,

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Беручи диференціал від dz, треба вважати, що dx і dy - сталі.

Отже, якщо x і y - незалежні змінні і функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{42}$$

Проводячи аналогічні міркування, дістаємо

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \tag{43}$$

Символічно ці формули можна записати так:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z;$$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z \, .$$

Взагалі справедлива символічна формула

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z \, .$$

Формально $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n$ розкривається за біноміальним законом:

$$\left(a+b\right)^m = a^m + mba^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} b^2 a^{m-2} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} b^n a^{m-n} + \ldots + b^n \, .$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = (x^2 + y)^5$.

Розв’язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[(x^2+y)^5 \right]'_x = 5(x^2+y)^4 (x^2+y)'_x = 5(x^2+y)^4 2x = 10x(x^2+y)^4 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[(x^2+y)^5 \right]'_y = 5(x^2+y)^4 (x^2+y)'_y = 5(x^2+y)^4 1 = 5(x^2+y)^4 \, .$$

Диференціюючи кожну із одержаних похідних (функцій) по x і по y, знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left[10x(x^2+e)^4 \right]'_x = 10((x^2+y)^4 + 4x(x^2+y)^3 2x) = 10(x^2+y)^3 (x^2+y+8x^2) =$$

$$= 10(x^2+y)^3 (9x^2+y) \, ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left[10x(x^2+y)^4 \right]'_y = 10x \cdot 4(x^2+y)^3 1 = 40x(x^2+y)^3 \, ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left[5(x^2+y)^4 \right]'_x = 5 \cdot 4(x^2+y)^3 2x = 40x(x^2+y)^3 \, ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left[5(x^2+y)^4 \right]'_y = 5 \cdot 4(x^2+y)^3 1 = 20(x^2+y)^3 \, .$$

Як і слід було чекати,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \, .$$

Приклад 2 Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ якщо $z = y \ln x$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (y\ln x)'_x = y\frac{1}{x} = \frac{y}{x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = (y\ln x)'_y = \ln x\cdot 1 = \ln x.$$

Тепер, проводячи повторне диференціювання, дістанемо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}1 = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (\ln x)'_y = 0.$$

Приклад 3 $z = \ln tg\frac{y}{x}$. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln tg\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\frac{1}{\cos^2\frac{y}{x}}y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}} = -\frac{2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}}$$

.

Тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(-\frac{2y}{x^2\sin\frac{2y}{x}}\right)'_y = -\frac{2}{x^2}\left(\frac{y}{\sin\frac{2y}{x}}\right)'_y = -\frac{2}{x^2}\frac{\sin\frac{2y}{x} - y\cos\frac{2y}{x}\frac{2}{x}}{\sin^2\frac{y}{x}} = \frac{2}{x^3\sin^2\frac{2y}{x}}\times$$

$$\times\left(2y\cos\frac{2y}{x} - x\sin\frac{2y}{x}\right).$$

Приклад 4 $z = e^x(\cos y + x\sin y)$. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[e^x(\cos y + x\sin y)\right]x = e^x(\cos y + \sin y) + e^x(0 + \sin y\cdot 1) = e^x(\cos y + x\sin y + \sin y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left[e^x(\cos y + x\sin y)\right]'_y = e^x(-\sin y + x\cdot\cos y).$$

Тепер маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left[e^x(\cos y + x\sin y + \sin y)\right]'_y = e^x(-\sin y + x\cos y + \cos y),$$

$$\frac{\partial\ z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left[e^x(-\sin y+x\cos y)\right]_x'=e^x(-\sin y+x\cos y)+e^x(0+\cos y\cdot 1)=$$

$$=e^x(-\sin y+x\cos y+\cos y).$$

Порівнюючи між собою одержані результати для $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, бачимо, що вони однакові. Отже, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Приклад5 $z=e^{xy^2}$.Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.

Розв'язання. Диференціюючи послідовно z по x, z_x' по x, z_{xx}'' по y , матимемо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_x'=(e^{xy^2})_x'=e^{xy^2}(xy^2)_x'=e^{xy^2}y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}''=(y^2e^{xy^2})_x'=y^2(e^{xy^2})_x'=y^2e^{xy^2}y^2=y^4e^{xy^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=(z_{xx}'')_y'=(y^4e^{xy^2})_y'=4y^3(e^{xy^2}+y^4e^{xy^2}\cdot 2xy=2y^3e^{xy^2}(2+xy^2).$$

Отже, шукана похідна

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}.$$

Приклад 6 Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, якщо $z=\sin(xy)$.

Розв'язання. Треба знайти похідну третього порядку від функції двох змінних. Порядок диференціювання при цьому такий: беремо похідну від функції z по x, одержану похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$ диференціюємо по y і нарешті знаходимо похідну від $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, знову диференціюючи її по y.

Виконуючи зазначені дії, будемо мати:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left[\sin(xy)\right]_x'=\cos(xy)\cdot(xy)_x'=\cos(xy)y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[y\cos(xy)\right]_y'=\cos(xy)-y\sin(xy)x;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \left[\cos(xy) - xy\sin(xy)\right]_y' = -\sin(xy)x - x\sin(xy) - xy\cos(xy)\cdot x =$$
$$-x\left[2\sin(xy) + xy\cos(xy)\right].$$

Приклад 7 Довести, що функція $u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ задовольняє рівнянню теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку похідні $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)_t' = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(-\frac{x^2}{4}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(-\frac{1}{2t\sqrt{t}} + \frac{x^2}{4t^2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(1 - \frac{x^2}{2t}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)_x' = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(-\frac{1}{4t}\right)\cdot 2x = -\frac{x}{4t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{x}{4t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)_x' = -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{x^2}{4t}} + x e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(-\frac{1}{4t}\right)\cdot 2x\right) = -\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(1 - \frac{x^2}{2t}\right)$$

.

Підставляючи вирази похідних $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ у рівняння теплопровідності, одержимо тотожність. А це і означає, що задана функція $u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ задовольняє цьому рівняню.

Приклад 8 $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Показати, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Розв'язання. Перетворимо задану функцію u у такий спосіб:

$$u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2).$$

Тепер знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + y^2} 2x = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}2y=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=-\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=-\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Підставляючи вирази похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ у задане рівняння, будемо мати

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{0}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

Отже, якщо $u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Приклад 9 Знайти $d^2 z$, якщо $z=e^x\cos y$.

Розв'язання. Скориставшись формулою (42), згідно з якою $d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$, и враховуючи, що $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-e^x\sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\cos y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^x\sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\cos y$, будемо мати $d^2 z=e^x\cos y dx^2-2e^x\sin y dxdy-e^x\cos y dy^2$.

Приклад 10 $z=x^3+y^3+3xy$. Знайти повний диференціал третього порядку функції z.

Розв'язання. На підставі формули (43)

$$d^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Для даної функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2+3x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=6.$$

Отже, $d^3z = 6dx^3 + 6dy^3 = 6(dx^3 + dy^3)$.

Питання для самоперевірки

1 Що називається частинною похідною другого (n - го) порядку функції двох незалежних змінних?

2 Сформулюйте теорему про рівність мішаних похідніх.

3 Поширити визначення частинної похідної n - го порядку і теорему про незалежність її від порядку диференціювання на функції багатьох незалежних змінних.

4 Дайте означення повного диференціала другого (n - го) порядку функції двох змінних і укажіть формулу для його знаходження.

Вправи

1 $z = x^y$. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2 $z = arctg\,\frac{y}{x}$. Показати, що $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2}$.

Знайти частинні похідні другого порядку наступних функцій:

3 $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^3 + (x^2 - y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

4 $z = \sin^2(ax + by)$.

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2 \cos 2(ax + by)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ab \cos 2(ax + by)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2 \cos 2(ax + by)$.

5 $z = \frac{x - y}{x + y}$.

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}$.

6 $z = e^{xe^y}$.

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xe^y + 2y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + xe^y)e^{xe^y + y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(1 + xe^y)e^{xe^y + y}$.

7 $z = y^{\ln x}$.

Відповідь: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y(\ln y + 1)}{x^2} e^{\ln x \ln y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy} e^{\ln x \ln y}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x(\ln x - 1)}{y^2} e^{\ln x \ln y}$.

8 $z = \ln(x^2 + y^2)$. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

Відповідь: $\frac{4x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$.

9 $u = x^2 y^3 z^4$. Знайти $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^3 dz^2}$.

Відповідь: $144xz^2$.

10 $z = \ln(e^x + e^y)$.Переконатися, що $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ і що

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$.

11 Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = \frac{x^4 - 8xy^3}{x - 2y}$.

Відповідь: 4.

12 Знайти повний диференціал другого порядку функції

$$z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 7.$$

Відповідь: $2(dx^2 - dxdy + dy^2)$.

13 Знайти частинні похідні третього порядку функції $z = \frac{y}{x}$.

Відповідь: $-\frac{6y}{x^4}; \frac{2}{x^3}; 0; 0$.

14 $S = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right)$. Перевірити, що $\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$.

15 $S = \sqrt[3]{ax + bt}$. Довести, що $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 S = -\frac{2S}{9}$.

16 $u = arctg(2x - t)$. Довести, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$.

17 Знайти $d^2 z$, якщо $z = x \ln \frac{y}{x}$;

Відповідь: $-\frac{dx^2}{x}+2\frac{dxdy}{y}-x\frac{dy^2}{y^2}$.

18 Знайти d^2z, якщо $z=x\sin^2 y$.

Відповідь: $2\sin 2ydxdy+2x\cos 2ydy^2$.

19 Знайти повний диференціал другого порядку функції $u=t\ln x$.

Відповідь: $\frac{2t}{x^3}dx^3-\frac{3}{x^2}dx^2dt$.

20 $t=\sin(2x+y)$. Знайти d^3z у точках $(0;\pi)$ і $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь: $-\cos(2x+y)(2dx+dy)^3$; $(2dx+dy)^3$; 0.

9.9 Неявна функція двох змінних і її диференціювання

Нагадаємо, що функція z називається неявною функцією від x і y, якщо вона визначена рівнянням $F(x;y;z)=0$, не розв'язаним відносно z. Це означає, що для кожної пари аргументів $x=x_0$ і $y=y_0$ із області визначення неявної функції вона набуває такого значення z_0, для якого $F(x_0;y_0;z_0)=0$.

Теорема існування неявної функції твердить, що коли функція $F(x,y)$ і її частинні похідні $F_x'(x,y)$ і $F_y'(x,y)$ визначені та неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ і при цьому $F(x_0;y_0)=0$, а $F_y'(x_0;y_0)\neq 0$, то рівняння $F(x;y)=0$ визначає в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0)$ єдину неявну функцію $y=y(x)$, неперервну і диференційовну в деякому інтервалі, який містить точку x_0, причому $y(x_0)=y_0$.

Так само формулюється і теорема про існування неявної функції $z=z(x;y)$, визначеної рівнянням $F(x;y;z)=0$.

Якщо $F(x;y;z)$ - диференційовна функція трьох змінних x,y,z і $F_z'(x;y;z)\neq 0$, то визначена рівнянням $F(x,y,z)=0$ неявна функція $Z=z(x;y)$ також диференційовна, і її частинні похідні знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{44}$$

Зауважимо, що коли неявна функція $y=y(x)$ задана рівнянням $F(x;y)=0$, то її похідну по x можна знайти за аналогічною формулою за умов, що $F(x;y)$ - диференційовна функція змінних x та y і $F_y{}'(x;y) \neq 0$.

У цьому випадку формула для знаходження похідної має такий вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}. \tag{45}$$

Ця формула виражає похідну $\dfrac{dy}{dx}$ через x і y. Тому для знаходження частинного значення похідної $\dfrac{dy}{dx}$ треба знайти не лише значення аргументу $x = x_0$, але й відповідно йому значення неявної функції y_0. Цей факт має місце і для неявної функції двох (кількох) змінних. Наступні похідні неявної функції, заданої рівнянням $F(x,y,z) = 0$, знаходять послідовним диференціюванням рівностей (44), при цьому враховують, що z є функція від x і y.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Функція $y(x)$ задана рівнянням $1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ і $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Розв'язання. У даному випадку $F(x,y) = 1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right)$, тому

$$F_x{}' = \frac{\partial F}{\partial x} = y - \frac{1}{e^{xy} + e^{-xy}}(e^{xy}y - e^{-xy}y) = \frac{ye^{xy} + ye^{-xy} - ye^{xy} + ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}};$$

$$F_y{}' = \frac{\partial F}{\partial y} = x - \frac{1}{e^{xy} + e^{-xy}}(xe^{xy} - xe^{-xy}) = \frac{xe^{xy} + xe^{-xy} - xe^{xy} + xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}} = \frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}.$$

Отже, $$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x{}'}{F_y{}'} = -\frac{\dfrac{2ye^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}}{\dfrac{2xe^{-xy}}{e^{xy} + e^{-xy}}} = -\frac{y}{x}.$$

Вважаючи в цій рівності y функцією від x і диференціюючи її, знайдемо другу похідну неявної функції. При цьому скористаємося уже знайденим виразом першої похідної:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{y}{x}\right)'_x=-\frac{x\cdot\frac{dy}{dx}-y\cdot 1}{x^2}=-\frac{x\left(-\frac{y}{x}\right)-y}{x^2}=\frac{2y}{x^2}.$$

Похідну першого порядку від неявної функції $y(x)$, заданої рівнянням $1+xy-\ln\left(e^{xy}+e^{-xy}\right)=0$, можна було б знайти і безпосереднім диференціюванням обох частин цього рівняння по x, вважаючи при цьому y функцією від x, як це робилося раніше.

Дійсно, беручи похідну по x від кожної частини рівняння, одержимо

$$1\cdot y+xy'-\frac{1}{e^{xy}+e^{-xy}}(e^{xy}(y+xy')-e^{-xy}(y+xy'))=0,$$

або $(y+xy')\left(1-\frac{e^{xy}-e^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}\right)=0$, звідки $y+xy'=0$, а $y'=-\frac{y}{x}$.

Як бачимо, одержали такий самий результат.

Приклад 2 Знайти похідну неявної функції $y(x)$, заданої рівнянням $x^2+y^2+2x-6y+2=0$, і обчислити її значення при $x=1$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину даного рівняння через $F(x,y)$ і знайдемо частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial x}$ і $\frac{\partial F}{\partial y}$:

$$F(x,y)=x^2+y^2+2x-6y+2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y-6.$$

На підставі формули (45)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+2}{2y-6}=-\frac{x+1}{y-3}=\frac{x+1}{3-y}.$$

Підставляючи у вихідне рівняння $x=1$, знаходимо два відповідних значення функції: $y_1=1$ і $y_2=5$. Тому при $x=1$ і похідна має два значення: $y_1'(1)=1$, $y_2'(1)=-1$.

Приклад 3 Знайти частинні похідні неявної функції, заданої рівнянням $x^2y-y^2z+zx=0$.

Розв'язання.

1. Неявно задану функцію легко подати явно. Для цього треба ров'язати рівняння відносно z: $z=\frac{x^2y}{y^2-x}$. Її частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x^2y}{y^2-x}\right)'_x=\frac{2xy(y^2-x)-x^2y(-1)}{(y^2-x)^2}=\frac{xy(2y^2-x)}{(y^2-x)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x^2 y}{y^2-x}\right)'_y=\frac{x^2(y^2-x)-x^2 y\cdot 2y}{(y^2-x)^2}=\frac{x^2(-x-y^2)}{(y^2-x)^2}=-\frac{x^2(x+y^2)}{(y^2-x)^2}.$$

2. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ можна знайти і за формулами диференціювання неявної функції. Поклавши $F(x,y,z)=x^2 y-y^2 z+zx$, знаходимо

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2xy+z;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=x^2-2yz;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-y^2+x.$$

На підставі формул (44)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2xy+z}{-y^2+x}=\frac{2xy+z}{y^2-x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{x^2-2yz}{-y^2+x}=\frac{x^2-2yz}{y^2-x}.$$

3. Можна знайти частинні похідні безпосереднім диференціюванням даного рівняння по x і y.

Диференціюючи рівняння по x, вважаємо y сталою, а z функцією від x і y.

Тоді

$$2xy-y^2\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial x}+z=0,$$

звідки

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy+z}{y^2-x}.$$

При диференціюванні рівняння по y вважаємо x сталою, а z функцією від x і y.Тоді

$$x^2-2yz-y^2\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

звідки

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-2yz}{y^2-x}.$$

Відповіді в розв'язках 2) і 3) збігаються. Якщо в них підставити значення $z=\dfrac{x^2y}{y^2-x}$, то одержимо збіг і з розв'язком 1) (пропонуємо переконатися в цьому самостійно).

Приклад 4 Знайти повний диференціал функції $z=z(x;y)$, заданої рівнянням $x^2+y^2+z^2-2y-1=0$.

Розв'язання. Згідно з формулою (37)

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Поклавши $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2y-1$, знаходимо

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-2;\quad \frac{\partial F}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2y-2}{2z}=-\frac{1-y}{z},$$

а шуканий диференціал

$$dz=-\frac{x}{2}dx+\frac{1-y}{z}dy.$$

Приклад 5 Нехай z є функцією змінних x і y, яка визначається рівнянням $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$.

Знайти d^2z для системи значень $x=2$, $y=0$, $z=1$.

Розв'язання. На підставі формули (42)

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Поклавши $F(x,y,z)=2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8$, знаходимо

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4x-8z;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=4y;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2z-8x-1.$$

Тепер за формулами (44) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{4x-8z}{2z-8x-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4y}{2z-8x-1}.$$

Їх позначення в точці $M(2;0;1)$ будуть:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -\frac{8-8}{2-16-1} = 0\,; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -\frac{4\cdot 0}{2-16-1} = 0\,.$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку від функції $z = z(x;y)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4\left(\frac{x-2z}{2z-8x-1}\right)'_x = -4\frac{\left(1-2\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(2z-8x-1\right)-\left(x-2z\right)\left(2\frac{\partial z}{\partial x}-8-0\right)}{(2z-8x-1)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -4\left(\frac{x-2z}{2z-8x-1}\right)'_y = -4\frac{\left(0-2\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(2z-8x-1\right)-\left(x-2z\right)\left(2\frac{\partial z}{\partial y}-0-0\right)}{(2z-8x-1)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4\left(\frac{y}{2z-8x-1}\right)'_y = -4\frac{1\cdot\left(2z-8x-1\right)-y\cdot\left(2\frac{\partial z}{\partial x}-0-0\right)}{(2z-8x-1)^2}.$$

Їх значення в точці $M(2;0;1)$ будуть:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_M = -4\frac{(1-2\cdot 0)(2-16-1)-(2-2)(2\cdot 0-8)}{(2-16-1)^2} = \frac{4\cdot 15}{15^2} = \frac{4}{15};$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_M = -4\frac{-2\cdot 0(2-16-1)-(2-2)2\cdot 0}{(2-16-1)^2} = \frac{0}{15^2} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_M = -4\frac{2-16-1-0\cdot 2\cdot 0}{(2-16-1)^2} = \frac{4\cdot 15}{15^2} = \frac{4}{15}.$$

Таким чином,

$$\left.d^2 z\right|_M = \frac{4}{15}dx^2 + \frac{4}{15}dy^2 = \frac{4}{15}(dx^2+dy^2).$$

Питання для самоперевірки

1 Яка функція називається неявною?

2 Сформулювати теорему існування неявної функції.

3 В чому полягає правило диференціювання заданої функції?

4 Вивести формулу для знаходження похідної функції $y = y(x)$, заданої рівнянням $F(x;y) = 0$.

5 Вивести формули для знаходження частинних похідних неявної функції z, заданої рівнянням $F(x;y;z) = 0$.

Вправи

1 Знайти $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо неявна функція задана рівнянням

$$(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)+1=0.$$

Відповідь: $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y^2+x^2}{y^3}$.

2 Функція y задана рівнянням $y=x+\ln y$. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Відповідь: $\frac{y}{(1-y)^3}$.

3 Знайти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ і $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$, якщо функція y визначена рівнянням $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$.

Відповідь: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=3$ або -1; $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}=8$ або -8.

4 Функція z змінних x і y задана рівнянням $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$. Знайти $\frac{dz}{dx}$ і $\frac{dz}{dy}$.

Відповідь: $\frac{dz}{dx}=\frac{x^2-yz}{xy-z^2}$; $\frac{dz}{dy}=\frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}$.

5 Функція z задана рівнянням $x^2+y^2-z^2-xy=0$. Знайти $\frac{dz}{dx}$ і $\frac{dz}{dy}$ для системи значень $x=-1$, $y=0$, $z=1$.

Відповідь: $\frac{dz}{dx}=-1$; $\frac{dz}{dy}=\frac{1}{2}$.

6 Знайти dz і d^2z, якщо $\ln z=x+y+z-1$.

Відповідь: $dz=\frac{z}{1-z}(dx+dy)$; $d^2z=\frac{z}{(1-z)^3}(dx^2+2dxdy+dy^2)$.

7 $xyz=a^3$. Довести, що $x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=-2z$.

8 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$. Показати, що $\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}=1$.

9 Функція z задана рівнянням $3x^2y^2+2z^2xy-2zx^3+4zy^3-4=0$. Знайти d^2z в точці (2;1;2).

Відповідь: $-31,5dx^2+206dxdy-306dy^2$.

10 $z=x+arctg\frac{y}{z-x}$. Знайти $\frac{dz}{dx}$.

Відповідь: 1.

9.10 Дотична площина і нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні у точці M_0 (точка дотику) називається площина, в якій лежать всі дотичні у точці M_0 до різних кривих, проведених на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається пряма, яка проходить через точку дотику M_0 і перпендикулярна до дотичної площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x;y;z)=0$, то рівняння дотичної площини у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ поверхні має вигляд

$$F_x'(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0, \quad (46)$$

де $F_x'(x_0;y_0;z_0)$, $F_y'(x_0;y_0;z_0)$, $F_z'(x_0;y_0;z_0)$ - значення частинних похідних у точці M_0, а x,y,z - поточні координати точки дотичної площини.

Рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0;y_0;z_0)}. \quad (47)$$

Тут x,y,z - поточні координати точки нормалі.

Якщо ж рівняння поверхні задано у явній формі, тобто рівнянням $z=f(x,y)$, то рівняння дотичної площини у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ має вигляд

$$z-z_0=f_x'(x_0;y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0;y_0)(y-y_0) \quad (48)$$

і рівняння нормалі

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \quad (49)$$

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x;y;z)=0$ і $M(x;y;z)$ - точка поверхні, то рівняння нормалі до поверхні в цій точці будуть

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

де X,Y,Z - поточні координати точки нормалі, а рівняння дотичної площини

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

де X, Y, Z - поточні координати точки дотичної площини.

Вектор $\vec{n}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y};\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ називається нормальним вектором поверхні.

Для поверхні, заданої рівнянням $z=f(x,y)$, рівняння нормалі до неї в точці $M(x;y;z)$ будуть

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1},$$

а рівняння дотичної площини у точці $M(x;y;z)$ має вигляд

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y).$$

Відзначимо, що коли на поверхні є точки, в яких $\frac{\partial F}{\partial x}=0$; $\frac{\partial F}{\partial y}=0$; $\frac{\partial F}{\partial z}=0$, то вони називаються особливими. В таких точках немає ні дотичної площини, ні нормалі до поверхні.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до еліптичного параболоїда $z=2x^2+y^2$ у точці $M_0(1;-1;3)$.

Розв'язання. Рівняння дотичної площини будемо шукати у вигляді $Z-z_0=f_x'(x_0;y_0)\cdot(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$, а рівняння нормалі

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1},$$

бо рівняння поверхні задано у явній формі, тобто рівнянням $z=f(x,y)$.

Оскільки

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)=(2x^2+y^2)_x'=4x+0=4x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)=(2x^2+y^2)_y'=0+2y=2y,$$

то в точці $M_0(1;-1;3)$ їх значення

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = f_x'(x_0, y_0) = f_x'(1;-1) = 4\cdot 1 = 4,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = f_y'(x_0; y_0) = f_y'(1;-1) = 2(-1) = -2.$$

Отже, шукане рівняння дотичної площини

$$z-3 = 4(x-1) - 2(y+1).$$

або

$$4x - 2y - z - 3 = 0,$$

а шукане рівняння нормалі

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Приклад 2 Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні еліпсоїда $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$ у точці $M_0(1;-1;1)$.

Розв'язання. Тут рівняння поверхні задано неявно, тобто рівнянням $F(x;y;z) = 0$.

Поклавши $F(x;y;z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$, знаходимо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x'(x,y,z) = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_y'(x,y,z) = 4y;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F_z'(x,y,z) = 6z.$$

їх значення у точці $M_0(1;-1;1)$ будуть:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0} = F_x'(M_0) = 2\cdot 1 = 2;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0} = F_y'(M_0) = 4(-1) = -4;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0} = F_z'(M_0) = 6\cdot 1 = 6.$$

Тоді, згідно з (46), рівняння шуканої дотичної площини буде

$$2(x-1) - 4(y+1) + 6(z-1) = 0,$$

або

$$2x - 4y + 6z - 12 = 0,$$

звідки остаточно маємо

$$x - 2y + 3z - 6 = 0,$$

а на підставі (47) рівняння шуканої нормалі будуть

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-1}{6},$$

або

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

Приклад 3 На сфері $x^2+y^2+z^2=676$ знайти точки, в яких дотична площина паралельна площині $3x-12y+4z-1=0$.

Розв'язання. На підставі (46) складемо рівняння дотичної площини до даної сфери у її точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Попередньо знайдемо частинні значення частинних похідних F_x', F_y', F_z' у точці M_0.

Оскільки $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-676$, то $\frac{\partial F}{\partial x}=F_x'(x,y,z)=2x$; $\frac{\partial F}{\partial y}=F_y'(x,y,z)=2y$; $\frac{\partial F}{\partial z}=F_z'(x,y,z)=2z$, а їх значення у точці M_0:

$$F_x'(M_0)=2x_0;\ F_y'(M_0)=2y_0;\ F_z'(M_0)=2z_0.$$

Отже, рівняння дотичної площини до даної сфери у точці M_0 набуде вигляду

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0,$$

або

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

Розкриваючи дужки, одержимо

$$x_0x+y_0y+z_0z-(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=0.$$

Оскільки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - точка сфери, то $x_0^2+y_0^2+z_0^2=676$. Таким чином, рівняння дотичної площини до сфери у точці M_0 остаточно набуде вигляду

$$x_0x+y_0y+z_0z=676.$$

За умовою задачі ця площина паралельна до даної площини

$$3x-12y+4z-1=0.$$

Тоді, згідно з умовою паралельності двох площин маємо:

$$\frac{x_0}{3}=\frac{y_0}{-12}=\frac{z_0}{4}=\lambda.$$

Звідси $x_0=3\lambda$, $y_0=-12$, $z_0=4\lambda$.

Підставляючи одержані значення x_0, y_0, z_0 у рівняння сфери, матимемо

$$(3\lambda)^2+(-12\lambda)^2+(4\lambda)^2=676;$$

$$9\lambda^2 + 144\lambda^2 + 16\lambda^2 = 676\,;$$
$$169\lambda^2 = 676\,;$$
$$\lambda^2 = 4\,.$$

Звідси $\lambda = \pm 2$.

Отже, одержали дві точки (6;-24;8) і (-6;24;-8), у яких дотична площина до сфери паралельна заданій площині.

Приклад 4 Скласти рівняння нормалі до поверхні $x^2 z + y^2 z = 4$ у точці (-2;0;1).

Розв'язання. Рівняння нормалі будемо шукати у вигляді

$$\frac{x - x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}\,.$$

Попередньо обчислимо значення F_x', F_y', F_z' у точці (-2;0;1).

Поклавши $F(x, y, z) = x^2 z + y^2 z - 4$, знаходимо:

$$F_x'(x;y;z) = 2xz\,; \quad F_y'(x;y;z) = 2yz\,; \quad F_z'(x;y;z) = x^2 + y^2\,.$$

Їх значення у точці (-2;0;1) будуть

$$F_x'(-2;0;1) = 2(-2)\cdot 1 = -4\,;$$
$$F_y'(-2;0;1) = 2\cdot 0\cdot 1 = 0\,;$$
$$F_z'(-2;0;1) = (-2)^2 + 0^2 = 4\,.$$

Таким чином, рівняння шуканої нормалі набуде вигляду

$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{4}\,,$$

або

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}\,.$$

Наявність нуля у знаменнику другого дробу говорить про те, що одержану пряму треба розглядати як пряму, що утворюється у результаті перетину двох площин $y = 0$ і $x + y + 1 = 0$.

Отже, остаточно рівняння шуканої нормалі записуємо у загальному вигляді, тобто перетином двох площин

$$\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{z-1}{1}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Приклад 5 Показати, що дотичні площини до поверхні $xyz = m^3$ утворюють з координатними площинами тетраедр сталого об"єму.

Розв'язання. Рівняння дотичної площини до даної поверхні у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ буде

$$y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 3x_0 y_0 z_0$$

(пропонуємо перевірити це самостійно).

Вона відтинає на осях координат відрізки $a = 3x_0$, $b = 3y_0$, $c = 3z_0$. Ці відрізки є взаємно перпендикулярними ребрами тетраедра, утвореного дотичною площиною і площинами координат. Приймаючи одне із цих ребер за висоту тетраедра, знаходимо, що його об'єм $V = \frac{1}{6}abc = \frac{9}{2}x_0 y_0 z_0 = \frac{9}{2}m^3$ (бо точка M_0 лежить на даній поверхні) не залежить від координат точки дотику M_0. Із цього випливає, що різні дотичні площини до даної поверхні утворюють з площинами координат тетраедр сталого (однакового) об'єму.

Питання для самоперевірки

1 Дати означення дотичної площини до поверхні у даній точці.

2 Що називають нормаллю до поверхні?

3 Запишіть рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$.

4 Якого вигляду набувають рівняння дотичної площини і нормалі, якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$?

5 Який вектор називається нормальним вектором поверхні? Запишіть його координати.

6 Які точки поверхні називаються особливими?

7 Чи можна провести дотичну площину і нормаль до поверхні в її особливій точці?

Вправи

1 Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до гіперболічного параболоїда $z = x^2 - y^2$ у точці $M_0(1;1)$.

Відповідь: $2x - 2y - z = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$.

2 Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 yz + 2x^2 z - 3xyz + 2 = 0$ у точці $M_0(1;0;-1)$.

Відповідь: $2x - y - z - 3 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$.

3 На поверхні $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ (однополий гіперболоїд) знайти точки, в яких дотична площина паралельна координатній площині $x0z$.

Відповідь: $M_1(1;1;0)$; $M_2(1;-1;0)$.

4 Показати, що конус $z^2 = x^2 + y^2$ і сфера $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$ дотикаються один до одного у точці $M_0(0;1;1)$.

Вказівка. Показати, що у цих поверхонь у точці M_0 спільна дотична площина.

5 До еліпсоїда $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести дотичні площини, які були б паралельні площині $x + 4y + 6z = 0$.

Відповідь: $x + 4y + 6z - 21 = 0$; $x + 4y + 6z + 21 = 0$.

6 Скласти рівняння дотичних площин до параболоїда $4z = x^2 + y^2$ у точках перетину його з прямою $x = y = z$.

Відповідь: $z = 0$; $x + y - z - 2 = 0$.

7 Перевірити, що поверхні $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ і $4 + x + 2y = \ln z$ дотикаються одна одної, тобто мають спільну дотичну площину у точці (2;-3;1).

8 Під яким кутом перетинаються циліндр $x^2 + y^2 = 4$ і сфера $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ у точці $M_0(1;\sqrt{3};0)$?

Вказівка. Кутом між двома поверхнями у точці їх перетину називається кут між дотичними площинами, проведеними до даних поверхонь у розглядуваній точці.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{3}$.

9 Показати, що дотична площина до поверхні $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ у точці на ній $(x_0; y_0; z_0)$ визначається рівнянням

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

10 Показати, що сума відрізків, які відтинає на осях координат площина, дотична до поверхні $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ дорівнює сталій величині a.

9.11 Екстремум функції кількох змінних. Найбільше і найменше значення функції у замкненій області

Функція $z = f(x;y)$ має у точці $M_0(x_0;y_0)$ області D максимум (мінімум), якщо існує такий окіл цієї точки, що для всіх точок $M(x;y)$ цього околу, відмінних від M_0, виконується нерівність $f(M_0) > f(M)$ $(f(M_0) < f(M))$.

Точка , в якій функція $f(M)$ має максимум (мінімум), називається точкою максимуму (мінімуму). Максимум і мінімум функції називають її екстремумом.

Аналогічно визначається екстремум функції трьох і більшого числа змінних.

Якщо диференційовна функція $z = f(x; y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0; y_0)$, то її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю у цій точці, тобто

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = 0 \tag{60}$$

(необхідні умови існування екстремуму).

Зауважимо, що функція може мати екстремум також в тих точках, де принаймні одна із частинних похідних першого порядку не існує.

Точки, в яких перші частинні похідні дорівнюють нулю, називаються стаціонарними.

Точки, в яких перші частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ функції $z = f(x; y)$ обертаються в нуль, або не існують, називаються критичними точками цієї функції.

Відзначимо, що не кожна критична точка є точкою екстремуму функції. Слід зауважити також, що система (50) еквівалентна одному рівнянню $\alpha f(x_0; y_0) = 0$. В загальному випадку у точці $M_0(x_0; y_0)$ екстремум функції $z = f(x; y)$ або $\alpha f(x_0; y_0) = 0$, або $\alpha f(x_0; y_0)$ не існує.

Нехай $M_0(x_0; y_0)$ - стаціонарна точка функції $f(x; y)$, тобто $\alpha f(x_0; y_0) = 0$.

Тоді: а) якщо $\alpha^2 f(x_0; y_0) < 0$ при $dx^2 + dy^2 > 0$, то $f(x_0; y_0)$ є максимумом функції $f(x; y)$;

б) якщо $\alpha^2 f(x_0; y_0) > 0$ при $dx^2 + dy^2 > 0$, то $f(x_0; y_0)$ є мінімумом функції $f(x; y)$;

в) якщо $\alpha^2 f(x_0; y_0)$ змінює знак, то $f(x_0; y_0)$ не є екстремумом функції $f(x; y)$.

Наведені умови еквівалентні таким:

нехай $f_x'(x_0; y_0) = f_y'(x_0; y_0) = 0$ і $A = f_{xx}''(x_0; y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0; y_0)$, $C = f_{yy}''(x_0; y_0)$.

Складемо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 .$$

Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці M_0, а саме максимум, якщо $A < 0$ (або $C < 0$), і мінімум, якщо $A > 0$ (або $C > 0$);

2) якщо $\Delta < 0$, то у точці M_0 екстремуму немає (1, 2 - достатні умови наявності або відсутності екстремуму);

3) якщо $\Delta = 0$, то питання про наявність екстремуму функції у точці $M_0(x_0; y_0)$ залишається відкритим (потрібні подальші дослідження, наприклад, за знаком приросту Δf поблизу цієї точки). В цьому разі ще говорять, що випадок сумнівний (екстремум може бути, а може і не бути).

Зауважимо, що для функції трьох і більшого числа змінних необхідні умови існування екстремуму, аналогічні умовам (50), а достатні умови аналогічні умовам а), б), в).

Розглянуті вище екстремуми функції за самим своїм означенням мали локальний характер: в точці екстремуму M_0 функція набуває максимальне або мінімальне значення серед всіх її значень в деякому (як завгодно малому) околі точки M_0. Однак в ряді задач ставиться вимога знайти глобальний екстремум, тобто найбільше і найменше значення функції $z = f(x; y)$ в деякій замкненій області D. Для цього треба знайти всі локальні мінімуми і максимуми цієї функції всередині області D, а також найбільше і найменше її значення на межі області, і потім обрати серед всіх цих значень найбільше і найменше.

Зауважимо, що при знаходженні локальних екстремумів треба розглядати лише ті стаціонарні точки, які розташовані всередині області D. Важливо також зазначити, що немає потреби обчислювати другі похідні і використовувати достатні умови екстремуму. Оскільки всі екстремуми функції $z = f(x; y)$ знаходяться серед її значень в стаціонарних точках, досить обчислити значення функції z в усіх стаціонарних точках і серед них обрати найбільше. Як правило, межа області D розбивається на ряд ділянок, кожна із яких визначається рівнянням виду $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$, або $x = \psi(y)$ $(c \le y \le d)$. Тому вздовж такої ділянки межі функція $z = f(x; y)$ перетворюється в функцію однієї змінної $z = f(x; \varphi(x))$, або $z = f(\psi(y); y)$. В загальному випадку межа області D може бути задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$.

У цьому випадку функція z перетворюється вздовж межі в функцію параметра t

$$z = f(\varphi(t); \psi(t)) \quad (\alpha \le t \le \beta).$$

Тому задача знаходження найбільшого і найменшого значення функції $z = f(x; y)$ на межі області D зводиться до відшукання найбільшого і найменшого значень функції однієї змінної.

Виходячи із сказаного, а також із того, що функція диференційовна в обмеженій замкненій області, досягає свого найбільшого (найменшого) значення, або у стаціонарних точках, або у точках межі області, приходимо до наступного правила знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних.

Для того, щоб знайти найбільше і найменше значення функції у замкненій області, треба:

1) знайти стаціонарні точки, які належать даній області, і обчислити значення функції у цих точках;

2) знайти найбільше і найменше значення функції на лініях, які утворюють межу області;

3) з усіх знайдених значень обрати найбільше і найменше.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти екстремуми функції $f(x;y)=x^3+3xy^2-30x-18y$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку даної функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-30=3(x^2+y^2-10);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=6xy-18=6(xy-3).$$

Прирівнюючи ці похідні до нуля, одержимо після елементарних перетворень систему

$$\begin{cases} x^2+y^2-10=0 \\ 2xy=6 \end{cases}.$$

Додаючи і віднімаючи почленно рівняння цієї системі, матимемо

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=16 \\ x^2-2xy+y^2=4 \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} (x+y)^2=16 \\ (x-y)^2=4 \end{cases},$$

звідки

$$\begin{cases} x+y=\pm 4 \\ x-y=\pm 2 \end{cases}.$$

Розв'язуючи останню систему, рівносильну даній, знаходимо стаціонарні точки: $M_1(3;1)$, $M_2(1;3)$, $M_3(-1;-3)$, $M_4(-3;-1)$.

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

і складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x \cdot 6y \\ 6y \cdot 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)\,.$$

Переконуємося, що

1) $\Delta(M_1) = 36(9-1) = 288 > 0$, $A_1 = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_1} = 6 \cdot 3 = 18 > 0$, отже $M_1(3;1)$ - точка мінімуму;

2) $\Delta(M_2) = 36(1-9) = -288 < 0$, отже у точці M_2 екстремуму немає;

3) $\Delta(M_3) = 36(1-9) = -288 < 0$, отже у точці M_3 екстремуму немає;

4) $\Delta(M_4) = 36(9-1) = 288 > 0$, $A_4 = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_4} = 6(-3) = -18 < 0$, отже M_4 - точка максимуму.

Таким чином, задана функція має два екстремуми: у точці $M_1(3;1)$ - мінімум, $z_{\min} = f(3;1) = -72$; у точці $M_4(-3;-1)$ максимум; $z_{\max} = f(-3;-1) = 72$.

Приклад 2. Знайти екстремуми функції $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Розв'язання. Знаходимо похідні першого порядку даної функції: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6$.

У точках екстремуму функції всі її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю (необхідні умови), тому

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases}$$

звідки $x = 0$, $y = 3$. Отже, $M_0(0;3)$ - стаціонарна точка.

Перевіримо, чи буде $M_0(0;3)$ точкою екстремуму даної функції. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\,.$$

Як бачимо, значення усіх частинних похідних другого порядку є сталими, тобто значення кожної з них є однаковими у будь-якій точці площини $x0y$, в тому числі і в точці $M_0(0;3)$, тому $A=2$, $B=1$, $C=2$ і

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3>0.$$

На основі одержаного результату робимо висновок, що у точці $M_0(0;3)$ є екстремум, причому мінімум, бо $A=2>0$. Величина цього мінімуму $z_{\min}=z(0;3)=-9$.

Приклад 3 Знайти екстремум функції

$$z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Розв'язання. Задана функція визначена і диференційовна скрізь, крім $x=0$ і $y=0$. Тому подальші дослідження будемо виконувати за умов $x \neq 0$ і $y \neq 0$.

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - \frac{1}{y^2}.$$

Прирівнюючи ці похідні до нуля, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y - \dfrac{1}{x^2} = 0, \\ x + 2y - \dfrac{1}{y^2} = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x^3 + x^2 y - 1 = 0, \\ xy^2 + 2y^3 - 1 = 0. \end{cases}$$

з якої знаходимо стаціонарні точки даної функції. Віднімаючи від першого рівняння системи друге, одержуємо:

$$2(x^3 - y^3) + xy(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\frac{x}{y} + 2\right) = 0, \quad \text{бо } y \neq 0.$$

З останньої рівності випливає, або $x - y = 0$, або $2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 3\dfrac{x}{y} + 2 = 0$. Але останнє рівняння дійсних розв'язків не має, бо $D = b^2 - 4ac = 9 - 16 < 0$. Отже, $x = y$. Тоді із першого рівняння системи маємо:

$$2x^3 + x^3 - 1 = 0,$$

звідки $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Таким чином, $x = y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, тобто $M\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}; \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ - стаціонарна точка.

Перевіримо, чи є екстремум у точці M з допомогою достатніх умов. Для цього знайдемо спочатку другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 + \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 + \frac{2}{y^3}.$$

Підставляючи сюди координати стаціонарної точки $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$, одержимо

$$A = 2 + 2\cdot 3 = 8, \quad B = 1, \quad C = 2 + 2\cdot 3 = 8.$$

Обчислюючи далі визначник

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 1 = 63 > 0$$

і враховуючи, що $A = 8 > 0$, робимо висновок: $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ - точка локального мінімуму, причому

$$z_{\min} = z\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \sqrt[3]{3}\cdot 3.$$

Приклад 4 Знайти екстремуми функції $z = x^{2/3} + y^{2/3}$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є сукупність всіх точок площини $x0y$.

Частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ не обертаються в нуль ні при яких значеннях x і y, але вони не існують (обертаються в нескінченність) в точці 0 (0;0). Оскільки точка 0 (0;0) належить області визначення функції z, то ця точка є критичною.

Досліджуючи знак різниці $z(M) - z(0) = z(x;y) - z(0;0) = x^{2/3} + y^{2/3}$ поблизу точки 0, переконуємося, що при будь-яких відмінних від нуля значеннях x і y вона зберігає додатний знак. Тому 0 (0;0) є точкою локального мінімуму, причому $z_{\min} = z(0;0) = 0$.

Приклад 5 Переконатися, що при $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ і при $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ функція $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ має мінімум.

Розв'язання. Задана функція визначена в усіх точках площини $x0y$. Її перші частинні похідні

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x - 4y$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 4x - 4y$ в точках $M_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$ і

$M_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ обертаються в нуль (пропонуємо переконатися в цьому самостійно), а частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$$

у цих точках відповідно дорівнюють $A = 20$, $B = -4$, $C = 20$.

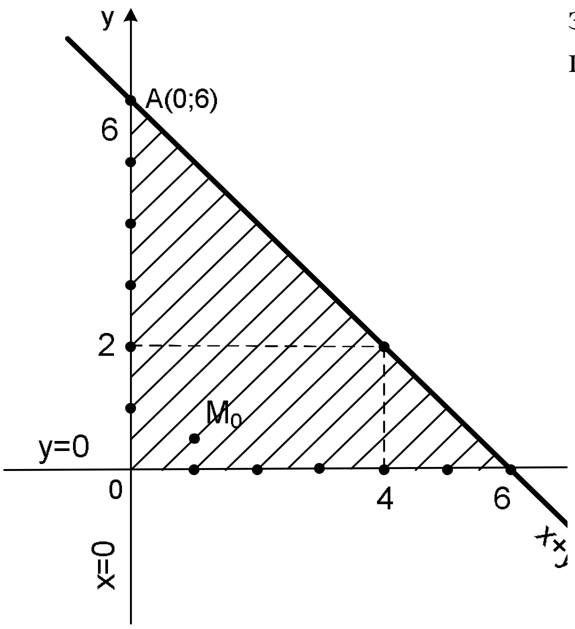
Тоді, оскільки

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{vmatrix} = 400 - 16 > 0 \quad \text{і} \quad A = 20 > 0$$

точки $M_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$ і $M_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ є точками мінімуму даної функції.

Приклад 6 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 y(2 - x - y)$ в трикутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$ (рис. 41).

Розв'язання. З'ясуємо, чи є критичні точки у функції z всередині області D (рис. 41). Для цього знаходимо частинні похідні першого порядку від даної функції:



$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy - 3x^2 y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y)\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - x^3 - 2x^2 y = x^2(2 - x - 2y)\,.$$

Із умов $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, маємо

$$\begin{cases} xy(4 - 3x - 4y) = 0, \\ x^2(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Оскільки всередині трикутника $x > 0$ і $y > 0$, одержимо систему

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0, \\ 2 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо одну критичну точку $M_0(1;\frac{1}{2})$, яка лежить всередині трикутника, тобто є внутрішньою точкою області D. Значення функції z в цій точці

$$z_0 = z\left(1;\frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{2}\left(2-1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Тепер знайдемо найбільше і найменше значення функції z на межі області D. На сторонах трикутника $0A$ і $0B$ (відповідно $x=0$ і $y=0$) значення функції z дорівнюють нулю. На стороні $ABx+y=6$, звідки $y=6-x$ $(0 \le x \le 6)$ і $z = z(x) = x^2(6-x)(2-x-6+x) = -4x^2(6-x) = -4(6x^2-x^3)$.

Стаціонарні точки цієї функції знаходимо із рівняння $z'(x)=0$:

$$z'(x) = -4(12x-3x^2) = -12x(4-x)$$

$$-12x(4-x)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=4.$$

$x_1=0$ - межова, а $x_2=4$ – внутрішня точка відрізка [0;6], тому обчислюємо далі $z(x)=-4x^2(6-x)$ значення при $x=0$, $x=4$ і $x=6$:

$$z(0)=0; \quad z(4) = -4\cdot 16(6-4) = -128, \quad z(6)=0.$$

Таким чином, найбільше і найменше значення функції z в даному трикутнику треба шукати серед наступних її значень:

$z=\frac{1}{4}$ - всередині трикутника, у точці $(1;\frac{1}{2})$;

$z=0$ - на сторонах $x=0$ і $y=0$ (у тому числі і у вершинах);

$z=-128$ - на стороні $x+y=6$, у точці (4;2).

Звідси видно, що найбільше значення $z=\frac{1}{4}$ задана функція набуває всередині трикутника у точці $M_0(1;\frac{1}{2})$, а найменше $z=-128$ – на його межі у точці (4;2).

Приклад 7 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x+y$ у колі $x^2+y^2 \le 1$.

Розв'язання. Стаціонарних точок функція z не має, оскільки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \ne 0,$$

тому найбільше і найменше значення вона може набувати лише на межі області, тобто на колі $x^2+y^2=1$, параметричними рівняннями якого є:

$$x=\cos t, \quad y=\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Отже, на колі z стає функцією однієї змінної t:

$$z = z(t) = \cos t + \sin t .$$

Шукаємо стаціонарні точки цієї функції: $z'(t) = -\sin t + \cos t = 0$, тобто $\sin t = \cos t$, звідки $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{5\pi}{4}$. В цих точках:

$$z_1 = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_2 = z\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}, \quad x_2 = y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

На кінцях відрізка $[0;2\pi]$

$$z(0) = z(2\pi) = 1 .$$

Таким чином, найбільшого $z = \sqrt{2}$ і найменшого $z = -\sqrt{2}$ значення задана функція набуває у межових точках $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Приклад 8. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ у колі $x^2 + y^2 \le 4$.

Розв'язання. Знаходимо перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0, \end{cases}$ знаходимо одну критичну точку O(0;0), в який значення функції дорівнює нулю.

Знайдемо найбільше і найменше значення функції z на межі, тобто на колі $x^2 + y^2 = 4$. Оскільки на колі змінні x і y зв'язані співвідношенням $x^2 + y^2 = 4$, то для точок кола функцію $z = x^2 - y^2$ можна подати як функцію однієї змінної x: $z = z(x) = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4$, причому $-2 \le x \le 2$.

Отже, знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних на колі $x^2 + y^2 = 4$ зведено до знаходження найбільшого і найменшого значень функції однієї змінної $z = 2x^2 - 4$ на відрізку (-2;2). Знаходимо критичні точки цієї функції на інтервалі (-2;2) і обчислюємо значення функції у цих точках і на кінцях відрізка:

$z' = 4x = 0$ при $x = 0$ (критична точка); $z(0) = -4$;
$z(-2) = z(2) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$. Таким чином, функція має найбільше значення, яке дорівнює 4, і найменше значення, яке дорівнює –4.

Отже, найбільшого значення функція $z = x^2 - y^2$ в колі $x^2 + y^2 \le 4$

набуває у точках $M_1(-2;0)$ і $M_2(2;0)$ кола $x^2+y^2=4$ і найменшого - у точках $M_3(0;2)$ і $M_4(0;-2)$ цього самого кола.

Зазначимо, що найбільше і найменше значення функції z на колі $x^2+y^2=4$ можна було б шукати так само, як і у попередній задачі.

Приклад 9 З усіх трикутників даного периметра $2p$ знайти той, який має найбільшу площу.

Розв'язання. Нехай a,b,c - сторони шуканого трикутника. Покладемо $a=x$, $b=y$, тоді $C=2p-x-y$. Згідно з формулою Герона, площа трикутника буде визначатися функцією $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$. Її частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{p(p-y)(-x-y+p+p-x)}{2\sqrt{(p-x)(p-y)(x+y-p)}}=\frac{p(p-y)(2p-2x-y)}{2\sqrt{(p-x)(p-y)(x+y-p)}};$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{p(p-x)(-x-y+p+p-y)}{2\sqrt{(p-x)(p-y)(x+y-p)}}=\frac{p(p-x)(2p-x-2y)}{2\sqrt{(p-x)(p-y)(x+y-p)}}.$$

Оскільки в трикутнику сторона не може перевищувати півпериметра, тобто $x<p$, $y<p$, то $p-x\neq 0$ і $p-y\neq 0$, тому рівності $\frac{\partial S}{\partial x}=0$ і $\frac{\partial S}{\partial y}=0$ зводяться до системи

$$\begin{cases}2p-2x-y=0,\\ 2p-x-2y=0.\end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо одну стаціонарну точку $x_0=y_0=\frac{2p}{3}$. Очевидно, що при цьому площа трикутника максимальна, оскільки найменшого значення площа трикутника з заданим периметром не має. Завжди можна побудувати трикутник даного периметра як завгодно малої площі (при $x\to p$, $y\to p$, $C\to 0$ площа $S\to 0$), але якщо дві сторони $a=b=\frac{2p}{3}$, то третя $C=2p-a-b=\frac{2p}{3}$ сторона . Отже, шуканий трикутник є рівностороннім.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення точки екстремуму (максимуму і мінімуму) функції двох змінних.

2 В чому полягає необхідна умова екстремуму функції двох незалежних змінних? Який її геометричний зміст?

3 Сформулюйте достатні умови екстремуму функції двох змінних.

4 Чи може функція $z=f(x;y)$ у критичних точках не мати

екстремуму?

5 Наведіть приклад функції $z = f(x;y)$, яка задовольняє у точці $M_0(x_0;y_0)$ умовам $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0$ і $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$, але не має у цій точці екстремуму.

6 Наведіть приклад функції $z = f(x;y)$, яка має у точці $M_0(x_0;y_0)$ екстремум, і такої, що $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0$, а $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}$ не існує.

7 В чому полягає різниця понять мінімуму (максимуму) функції і найменшого (найбільшого) значення функції?

8 Сформулюйте правило знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних у заданій замкненій області.

9 Чи завжди функція $z = f(x;y)$ має найменше і найбільше значення у замкненій області D?

10 Чи може функція $z = f(x;y)$ досягати свого найбільшого і найменшого значень лише всередині області D або лише на межі область D?

Вправи

1 Знайти стаціонарні точки функції $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

Відповідь: ($\frac{1}{2}$;-1).

2 Знайти стаціонарні точки функції

$$z = \sin x + \sin y + \cos(x+y) \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\right).$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$.

3 Знайти точки екстремуму функції $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$.

Відповідь: (2;-2)

4 Переконатися, що функція $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ має мінімум при $x = 5$, $y = 6$.

5 Знайти екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Відповідь: у точці (0;0) немає екстремуму. У точці (1;1) - мінімум.

6 Знайти стаціонарні точці функції $z = x^3y^2(12 - x - y)$, які задовольняють умові $x > 0$, $y > 0$, і дослідити їх характер.

Відповідь: (6;4) - точка максимуму.

7 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ у прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

Відповідь: $z_{нб}=17$ у точці (1;2); $z_{нм}=-3$ у точці (1;0); стаціонарна точка (-4;6) не належить області.

8 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$ у колі $x^2+y^2\le 4$.

Відповідь: $z_{нб}=\dfrac{3}{e}$ у точках (0;±1); $z_{нм}=0$ у точці (0;0).

9 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=2x^2+9y^2-12x$ у замкненій функції D, яка задана системою нерівностей

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}\le 1, \quad -1\le x\le 4, \quad y\ge -1.$$

Відповідь: $z_{нб}=154$ у точці $\left(-1;\dfrac{2}{3}\sqrt{35}\right)$; $z_{нм}=-18$ у точці (3;0).

10 Знайти розміри прямокутного відкритого басейну, який має найменшу поверхню, якщо його об'єм дорівнює V.

Відповідь: $x=y=\sqrt[3]{2V}$, $z=0,5\sqrt[3]{2V}$.

9.12 Скалярне поле. Похідна у даному напрямі. Градієнт

Скалярним полем називається плоска або просторова область, кожній точці якої відповідає числове значення деякої скалярної фізичної величини u. Наприклад, неоднорідне тіло, кожній точці якого відповідає певне значення густини, можна розглядати як скалярне поле. Іншими прикладами скалярних полів є поле розподілу температури у даному тілі, поле розподілу електричного потенціалу, поле тиску та ін. В усіх цих випадках вважають, що скалярна величина u не залежить від часу, а залежить лише від положення точки M у просторі (або на площині). Іншими словами, величина u розглядається як функція точки M: $u=u(M)$. Ця функція називається функцією поля. Якщо обрано деяку декартову систему координат, то задання скалярного поля еквівалентно заданню функції трьох змінних $u(M)=u(x,y,z)$ у просторі або заданню функції двох змінних $u(M)=u(x,y)$ на площині. В останньому випадку поле $u(M)$ називається плоским полем.

Скалярне поле зображається геометрично з допомогою поверхонь (або ліній) рівня (див. підрозд. 9.2).

Зазначимо, що за поверхнями (або лініями) рівня можна наочно уявити (реконструювати) вигляд поверхні.

Нехай задана диференційовна функція скалярного поля $u=F(x,y,z)$. Розглянемо точку $M(x;y,z)$ і промінь l, який виходить із точки M у напрямі одиничного вектора:

$$\vec{l^\circ}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k},$$

де α, β, γ - кути, які утворює вектор $\vec{l}$ з осями координат (рис. 42).

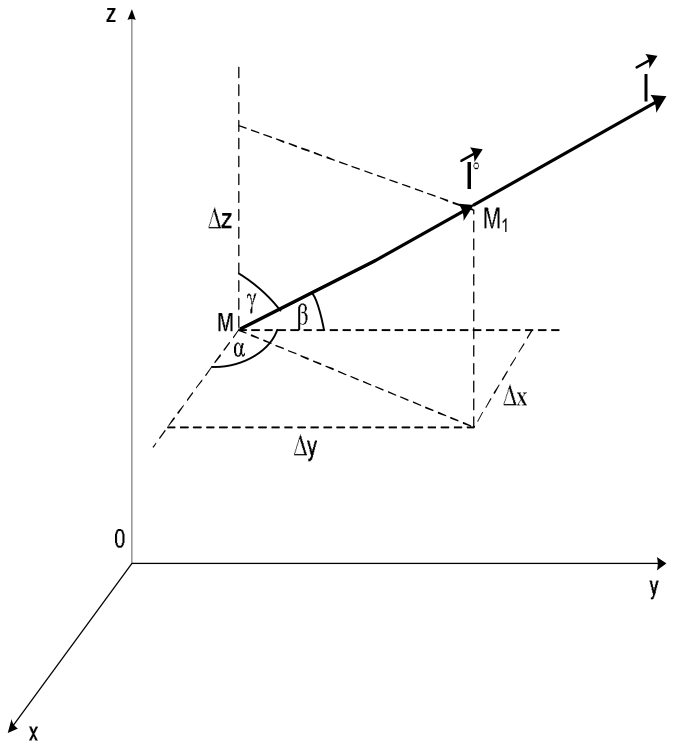


Рис.42

Похідною функції $u(M)$ у напрямі $\vec{l}$ називається границя відношення різниці $u(M_1)-u(M)$ до величини напрямленого відрізка MM_1, коли точка M_1 прямує до точки M, залишаючись на l.

Похідна функції u у заданому напрямі $\vec{l}$ позначається символом $\frac{\partial u}{\partial l}$ або u_l':

$$\frac{\partial u}{\partial l} = u_l' = \lim_{M_1 \to M} \frac{u(M_1)-u(M)}{MM_1}.$$

і обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \vec{n}\cdot\vec{l^\circ}, \qquad (51)$$

де $\vec{n} = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\}$ - нормальний вектор до поверхні рівня;

$\vec{l^\circ} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ - одиничний вектор напряму $\vec{l}$.

Похідна скалярного поля $u(M)$ у напрямі l, заданому вектором $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (52)$$

де $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}; \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}; \cos\alpha = \frac{a_z}{|\overline{a}|}; |\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Якщо скалярне поле - плоске, то функція поля z, як було сказано вище, залежить від двох змінних: $z = f(x;y)$. Вектор $\vec{l}$ у цьому випадку лежить у площині $x0y$ (тобто $\cos\gamma = 0$) і, отже, $\vec{l} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j}$, або $\vec{l} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \sin\alpha\cdot\vec{j}$, бо $\cos\beta = \sin\alpha$ (рис. 43).

Формула (51) для похідної у даному напрямі у випадку плоского скалярного поля набуде вигляду

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$

або

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha\,. \quad (53)$$

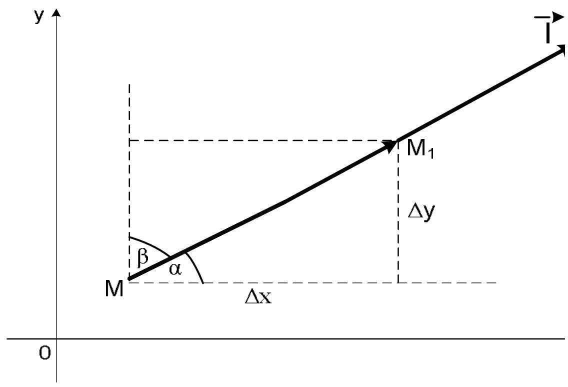


Рис.43

Зазначимо, що коли похідна функції u у точці $M(x;y;z)$ у заданому напрямі l додатна, $\frac{\partial u}{\partial l}>0$, то функція u у цьому напрямі зростає, якщо ж $\frac{\partial u}{\partial l}<0$, то функція u у напрямі l спадає.

Абсолютна величина $\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|$ визначає швидкість зміни скалярного поля у точці M, а її знак вказує на характер його зміни (зростання або спадання).

У кожній точці, де функція u диференційовна, вона має похідну будь-якого напряму.

Похідні функції $u(x;y;z)$ у додатних напрямах осей координат $0x, 0y, 0z$ дорівнюють її частинним похідним $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ і $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Похідні по прямо протилежним напрямам відрізняються лише знаком.

Похідна функція $u(x;y)$ за напрямом лінії рівня (дотичному до лінії рівня) і похідна функції $u(x;y;z)$ за напрямом будь-якої лінії, яка лежить на поверхні рівня (за будь-яким напрямом, дотичним до поверхні рівня), дорівнюють нулю.

Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ досягає свого найбільшого значення у напрямку нормалі до поверхні (лінії) рівня.

При вивченні скалярних полів поряд з функцією поля $u=F(x;y;z)$ розглядається деякий вектор, тісно зв'язаний з цією функцією - градієнт скалярного поля.

Градієнт скалярного поля $u(M)$ є вектором $\vec{g}=grad u$, який напрямлений по нормалі до поверхні рівня поля в бік зростання поля і чисельно рівний найбільший похідній у даному напрямі.

Градієнтом у точці $M(x;y;z)$ скалярного поля, заданого диференційовною функцією $u = u(M) = F(x; y; z)$, називається вектор

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} . \qquad (54)$$

Якщо поле задано функцією $z = f(x, y)$, то

$$grad z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} . \qquad (55)$$

Модуль градієнта функції u обчислюється за формулою

$$|grad u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} , \qquad (56)$$

а його напрям визначається косинусами кутів, утворених цим вектором з осями координат,

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{|grad u|}, \cos\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{|grad u|}, \cos\gamma = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{|grad u|} . \qquad (57)$$

Якщо $\vec{l^\circ}$ - одиничний вектор напряму $\vec{l}$, то похідна за цим напрямом зв'язана з градієнтом формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = grad u \cdot \vec{l^\circ} = np_l grad u . \qquad (58)$$

Напрям вектора $grad u$ у кожній точці M збігається з напрямом нормалі до поверхні (лінії) рівня, яка проходить через цю точку.

З усіх похідних функції $u(M)$, узятих по різним напрямам, найбільше значення завжди має похідна у напрямі градієнта функції:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{gr}} = |grad u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} .$$

Градієнт є вектором швидкості найбільшого зростання функції.

Роз'вязання прикладів

Приклад 1 Знайти похідну функції $z = x^3 - y^3$ у точці $M(1;1)$ у напрямі $\vec{l}$, який утворює з віссю $0x$ кут $\alpha = 60°$.

Розв'язання. За формулою (50)

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha .$$

Враховуючи,що

$$\cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2}, \sin\alpha = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = (3x^2)\big|_M = 3 ,$$

$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = (-3y^2)\big|_M = -3$, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 3\frac{1}{2} - 3\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3(1-\sqrt{3})}{2}.$$

Приклад 2 Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ у точці $M_1(1;2;-1)$ у напрямі від M_1 до $M_2(2;4;-3)$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (52), згідно з якою $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$. Оскільки вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (2-1)\bar{i} + (4-2)\bar{j} + (-3+1)\bar{k} = i + 2\bar{j} - 2\bar{k}$, а відповідний йому одиничний вектор

$$\vec{l}^\circ = \frac{\overline{M_1M_2}}{\left|\overline{M_1M_2}\right|} = \frac{\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k},$$

то $\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

Тепер знайдемо частинні похідні функції $u = x^2 - 2xz + y^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - 2xz + y^2)_x' = 2x - 2z; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 - 2xz + y^2)_y' = 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 - 2xz + y^2)_z' = -2x.$$

Їх значення у точці $M_1(1;2;-1)$ відповідно дорівнюють:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} = (2x - 2z)\big|_{\substack{x=1\\ z=-1}} = 4; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} = (2y)\big|_{y=2} = 4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} = (-2x)\big|_{x=1} = -2.$$

Підставляючи у формулу (52) знайдені значення частинних похідних і напрямних косинусів, одержимо шукану похідну

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 4\frac{1}{3} + 4\frac{2}{3} + (-2)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Приклад 3 Знайти похідну від функції $z = \ln(x + 2y)$ у точці $M_1(1;\frac{1}{2})$, яка належить параболі $y = \frac{1}{2}x^2$, у напрямі дотичної до цієї параболи.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції $z = f(x; y) = \ln(x + 2y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x; y) = \frac{1}{x + 2y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x; y) = \frac{2}{x + 2y}.$$

Їх значення у точці $M_1(1; \frac{1}{2})$ відповідно дорівнюють:

$$f_x'\left(1; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 + 2\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}; \quad f_y'\left(1; \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1 + 2\frac{1}{2}} = 1.$$

Знаходимо кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = \frac{x^2}{2}$ у точці $M_1\left(1; \frac{1}{2}\right)$:

$$K = tg\alpha = y'\big|_{M_1} = \left(\frac{x^2}{2}\right)'\Bigg|_{x=1} = x\big|_{x=1} = 1.$$

Таким чином, $tg\alpha = 1$, звідки одержуємо два значення α: $\alpha = 45°$ і $\alpha = 225°$, які відповідають двом взаємно протилежним напрямам дотичної.

Враховуючи далі, що при $\alpha_1 = 45° \cos\alpha_1 = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin\alpha_1 = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, за формулою (53) маємо $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Аналогічно при $\alpha_2 = 225°$ одержимо $\frac{\partial z}{\partial l} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Приклад 4 Знайти градієнт функції $z = 3x^2 - 6xy + y^2$ у точці $M_1\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$, його модуль та напрямні косинуси.

Розв'язання. За формулою (55) $gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = 3x^2 - 6xy + y^2$ у точці $M_1\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ відповідно дорівнюють:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_1} = (6x-6y)\Big|_{\substack{x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{2}}} = 6\left(-\frac{1}{3}\right)-6\left(-\frac{1}{2}\right)=1;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_1} = (-6x+2y)\Big|_{\substack{x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{2}}} = -6\left(-\frac{1}{3}\right)+2\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Отже, $gradz\big|_{M_1} = \vec{i} + \vec{j}$.

Модуль градієнта і його напрямні косинуси, згідно з формулами (56) і (57), у точці M_1 відповідно дорівнюють:

$$|gradz|\big|_{M_1} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що градієнт даної функції у точці M_1 напрямлений вздовж бісектриси першого координатного кута.

Приклад 5 Знайти градієнт функції $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ у точці $M_0(2;-1;1)$.

Розв'язання. Задана функція $u = f(x;y;z)$. Її частинні похідні: $\frac{\partial u}{\partial x} = f_x'(x;y;z) = 2x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = f_y'(x;y;z) = 4y$; $\frac{\partial u}{\partial z} = f_z'(x;y;z) = -2z$, а їх значення у точці $M_0(2;-1;1)$ відповідно дорівнюють:

$$f_x'(2;-1;1) = (2x)\big|_{x=2} = 4; \quad f_y'(2;-1;1) = 4y\big|_{y=-1} = -4;$$

$$f_z'(2;-1;1) = (-2z)\big|_{z=1} = -2.$$

Отже, згідно з формулою (54)

$$gradu(M_0) = 4\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Приклад 6 З якою найбільшою швидкістю може зростати функція $u(M) = \frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$ при переході точки $M(x;y;z)$ через точку $M_1(-1;2;-2)$?

В якому напрямі повинна рухатися точка M при переході через точку $M_2(2;0;1)$, щоб функція $u(M)$ спадала з найбільшою швидкістю?

Розв'язання. Найбільша за абсолютною величиною швидкість зміни (зростання або спадання) функції $u(M)$ при переході точки M через точку

P чисельно дорівнює модулю градієнта функції у точці P. При цьому функція буде зростати або спадати з найбільшою швидкістю, дивлячись по тому, чи буде точка M при переході через точку P рухатися у напрямі градієнта функції у точці P або у прямо протилежному напрямі.

Керуючись цими положеннями, знаходимо:

$$gradu(M) = -\frac{20}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}(x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k});$$

$$gradu(M_1) = -\frac{20}{(1+4+4+1)^2}(-\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}) = \frac{1}{2}(\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k});$$

його модуль

$$\left|gradu(M_1)\right| = \frac{1}{5}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = \frac{3}{5}$$

чисельно дорівнює шуканій найбільшій швидкості зростання функції $u(M)$ при переході M через M_1;

$$gradu(M_2) = -\frac{20}{(4+0+1+1)^2}(2\overline{i}+0\overline{j}+1\overline{k}) = -\frac{5}{9}(2\overline{i}+\overline{k}) = -\frac{10}{9}\overline{i}-\frac{5}{9}\overline{k}$$

шуканим вектором, який має прямо протилежний напрям, буде

$$-gradu(M_2) = \frac{10}{9}\overline{i}+\frac{5}{9}\overline{k}.$$

Для того, щоб функція $u(M)$ спадала з найбільшою швидкістю, при переході через точку M_2 точка M повинна рухатися у напрямі вектора $-gradu(M_2)$.

Приклад 7 Дано скалярне поле $\ln(5x-4y+z)+z-1=0$ і точки поля $M_0(0;0)$ і $M_1(2;3)$. Знайти:

1) градієнт скалярного поля у точці M_0: $gradz|_{M_0}$;

2) похідні у напрямі вектора $gradz|_{M_0}$ і йому перпендикулярному у точці M_0;

3) похідну у напрямі вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ у точці і похідну у цьому самому напрямі у точці M_1. З'ясувати характер зміни поля у точках M_0 і M_1.

Розв'язання. 1) Для обчислення $gradz$ у точці M_0 необхідно знати частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ від функції $z=f(x;y)$, заданої неявно. Для цього позначимо ліву частину заданого рівняння

$$F(x;y;z) = \ln(5x-4y+z)+z-1,$$

тоді

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{5}{5x-4y+z};\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{-4}{5x-4y+z};\quad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{5x-4y+z}+1,$$

а

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}=-\frac{\dfrac{5}{5x-4y+z}}{\dfrac{1}{5x-4y+z}+1}=-\frac{5}{1+5x-4y+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}=-\frac{\dfrac{-4}{5x-4y+z}}{\dfrac{1}{5x-4y+z}+1}=-\frac{4}{1+5x-4y+z}.$$

Знайдемо значення функції z, а також значення її частинних похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ у точці M_0. Підставляючи координати точки $M_0(0;0)$ в дане рівняння поля, одержимо $\ln z+z-1=0$, звідки $z=1$ (пропонуємо переконатися в цьому самостійно, розв'язавши це рівняння геометрично). Отже, $z_0=z\big|_{M_0}=1$.

Тепер обчислюємо значення частинних похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ у точці M_0, враховуючи, що у цій точці $x=0, y=0$ і $z=1$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=-\frac{5}{2};\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=\frac{4}{2}=2.$$

Тоді, згідно з формулою (55)

$$gradz\big|_{M_0}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\overline{i}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{F}\overline{j}=-\frac{5}{2}\overline{i}+2\overline{j}.$$

Для обчислення $\frac{\partial z}{\partial l}$ у точці M_0 у напрямі $gradz\big|_{M_0}$ і йому перпендикулярному скористаємося формулою $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=\left|gradz\right|\big|_{M_0}\cos\varphi$, де $\varphi=\left(\widehat{\overline{l}, gradz\big|_{M_0}}\right)$.

Через те що напрям l збігається з напрямом $gradz\big|_{M_0}$, то $\varphi=0$. Тому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=\left|gradz\right|\big|_{M_0}\cos 0=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+2^2}=\frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Оскільки напрям l_0 перпендикулярний до напряму $\overline{l}=gradz\big|_{M_0}$, то $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$. Тому $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l_0}\right|_{M_0}=\left|gradz\right|\big|_{M_0}\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

Знайдемо тепер похідну поля у напрямі вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ у точці M_0. Для цього введемо в розгляд вектор $\overline{l_1}=\overline{M_0M_1}=\{2;3\}$. Тоді за формулою (53) з урахуванням, що $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=-\dfrac{5}{2}$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=2,\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+9}}=\frac{2}{\sqrt{3}},\quad \cos\beta=\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{4+9}}=\frac{3}{\sqrt{13}},$$

одержимо $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l_1}\right|_{M_0}=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\sin\alpha=-\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{13}}+2\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Значення $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l_1}\right|_{M_0}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ і є значенням похідної поля у напрямі вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ у точці M_0.

Обчислимо $\dfrac{\partial z}{\partial l_1}$ у точці M_1. Для цього знайдемо спочатку значення поля z, а також $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ у точці M_1. Підставляючи координати точки $M_1(2;3)$ у рівняння поля, одержимо

$$\ln(z-2)+z-1=0,$$

звідки $z_1=z\big|_{M_1}\approx 2,3$.

Частинні похідні

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_1}\approx-\frac{5}{1+10-12+2,3}\approx-0,4$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_1}\approx\frac{4}{1+10-12+2,3}\approx 0,3.$$

Враховуючи також, що $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta=\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, за формулою (53) будемо мати

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l_1}\right|_{M_1}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_1}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_1}\sin\alpha\approx-0,4\frac{2}{\sqrt{13}}+0,3\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{0,1}{\sqrt{13}}=\frac{1}{10\sqrt{13}}.$$

Значення $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l_1}\right|_{M_1} = \dfrac{1}{10\sqrt{13}}$ і є значенням похідної поля у напрямі вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ у точці M_1.

З'ясуємо характер зміни поля у точках M_0 і M_1:

1) найбільша швидкість зростання поля у точці M_0 у напрямі вектора $\left. gradz\right|_{M_0}$. Найменша швидкість спадання поля у точці M_0 у напрямі, протилежному вектору $\left. gradz\right|_{M_0}$. Похідна поля у напрямі, перпендикулярному до напряму вектора $\left. gradz\right|_{M_0}$, дорівнює нулю;

2) скалярне поле у напрямі вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ у точках M_0 і M_1 зростає, бо $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l_1}\right|_{M_0} = \dfrac{1}{\sqrt{13}} > 0$ і $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l_1}\right|_{M_1} = \dfrac{1}{10\sqrt{13}} > 0$.

Оскільки абсолютна величина похідної поля у напрямі вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ у точці M_0 в десять разів більша похідної поля у цьому самому напрямі у точці M_1, то поле змінюється у точці M_0 у напрямі $\overrightarrow{M_0M_1}$ в десять разів швидше, ніж у точці M_1.

Приклад 8 Знайти точки, в яких функція $z = e^x(x - y^3 + 3y)$ стаціонарна (тобто точки, в яких похідна у будь-якому напрямі дорівнює нулю).

Розв'язання. Для того щоб в деякий точці M похідна функції у будь-якому напрямі дорівнювала нулю, необхідно і достатньо, щоб у цій точці всі частинні похідні першого порядку функції одночасно оберталися в нуль. Це твердження випливає з формули (51), згідно з якою

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma .$$

Тому, знайшовши частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^x(x - y^3 + 3y))_x' = e^x(x - y^3 + 3y) + e^x(1 - 0 + 0) = e^x(x - y^3 + 3y + 1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (e^x(x - y^3 + 3y))_y' = e^x(x - y^3 + 3y)_y' = e^x(-3y^2 + 3) = 3e^x(1 - y^2)$$

та розв'язавши систему рівнянь $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, тобто систему рівнянь

$$\begin{cases} e^x\left(x-y^3+3y+1\right)=0, \\ 3e^x\left(1-y^2\right)=0, \end{cases}$$

одержимо дві точки (-3;1) і (1;-1), в яких задана функція є стаціонарною.

Питання для самоперевірки

1 Що називають скалярним полем?

2 Дайте означення похідної у заданому напрямі в даній точці для функції двох (трьох) змінних.

3 В яких точках скалярного поля похідна у будь-якому напрямі дорівнює нулю?

4 Чому дорівнюють похідні функції $u=F(x;y;z)$ в довільній точці $M(x;y;z)$ у напрямі координатних осей $0x, 0y, 0z$?

5 Дайте означення градієнта скалярного поля.

6 За яких умов $gradz$, де $z=f(x;y)$, може дорівнювати нульовому вектору?

7 Нехай $z=3ax+4ay+b$, де a,b - сталі, $a>0$.

Знайдіть $|gradz|$. Що характеризує ця величина?

8 Як виражається похідна у напрямі в даній точці через градієнт і одиничний вектор цього напряму?

9 Виразити похідну поля у точці $M(x;y)$ у будь-якому напрямі $\vec{l}$ з допомогою $gradz$.

10 Запищіть формули для обчислення довжини та напряму градієнта.

11 У якому напрямі похідна функції досягає найбільшого значення?

12 Яка формула зв'язує похідну у даному напрямі та градієнт функції?

13 Як напрямлений градієнт?

14 Що показує градієнт?

Вправи

1 Знайти похідну функції $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ у точці $M_0(1;1)$ у напрямі бісектриси першого координатного кута.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2 Знайти похідну функції $u=xy^2+z^3-xyz$ у точці $M_1(1;1;2)$ у напрямі вектора $\vec{S}$, який утворює з осями координат гострі кути α, β, γ, причому $\alpha=60°, \beta=45°$, і $\gamma=60°$. З'ясувати характер зміни поля у даному напрямі.

Відповідь: 5, скалярне поле $u(M_1)$ зростає у заданому напрямі.

3 З'ясувати характер зміни скалярного поля $u(M)=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ у точці $M_0(1;1;1)$ у напрямі вектора $\vec{a}=8\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$; знайти швидкість зміни даного поля.

Відповідь: 12, зростає.

4 Знайти точки, в яких функція $\varphi(x,y)=x^3+y^3+3xy$ є стаціонарною.

Відповідь: (0;0); (-1;-1).

5 Показати, що у точці $A(4;-12)$ похідна функції $z=x^3+3x^2+6xy+y^2$ у будь-якому напрямі дорівнює нулю (функція стаціонарна).

6 Знайти похідну функції $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$ у напрямі вектора $\vec{l}=3\vec{i}+4\vec{j}$ у будь-якій точці та в точках $M_1(1;3)$ і $M_2(2;1)$.

Відповідь: $\dfrac{4x-3y}{5(x^2+y^2)^2}$; $-\dfrac{1}{100}$; $\dfrac{1}{25}$.

7 Знайти найбільшу швидкість зростання функції $z=x^2y-5y^3$ у точці $M_0(2;1)$.

Відповідь: $\sqrt{137}$.

8 Знайти градієнт скалярного поля $u=3x^2y-3xy^3+y^4$ у точці $M(1;2;0)$.

Відповідь: $-12\overline{i}-\overline{j}$.

9 Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u=x^2+y^2-z^2$ і $v=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$ у точці $M(1;1;\sqrt{7})$.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2}$.

10 Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля $u=x^2+y^2+z^2-2xyz$ у точці $M_0(1;-1;2)$. Визначити, в яких точках градієнт перпендикулярний до осі $0x$, в яких точках він дорівнює нулю.

Відповідь: $\sqrt{108}$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, для всіх точок поверхні $x=yz$ градієнт u перпендикулярний до осі $0x$; $grad\,u=0$ у точках $M_1(1;1;1)$, $M_2(-1;-1;1)$, $M_3(1;-1;-1)$, $M_4(-1;1;-1)$, $M_5(0;0;0)$.

11 Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u(M)=x^y-z$ у точці $M_0(2;2;4)$.

Відповідь: $\sqrt{17+16\ln^2 2}$.

12 Знайти похідну поля $u(M) = y^2 z - 2xyz + z^2$ у точці $M_0(3;1;1)$ у напрямі вектора $\vec{S}$, якщо $\vec{S}$ утворює з координатними осями гострі кути α, β, γ, причому $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$. З'ясувати характер зміни поля у даному напрямі.

Відповідь: $-\frac{5+4\sqrt{2}}{2}$, спадає.

13. Знайти швидкість зміни скалярного поля $u = xyz$ у точці $M_0(5;1;-8)$ у напрямі $\overrightarrow{M_0 M_1}$, якщо $M_1(9;4;4)$.

Відповідь: $-\frac{92}{13}$.

14 Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u = \ln(x^2 + 4y^2)$ у точці $M_0(6;4;0)$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{73}}{25}$.

15 Обчислити за допомогою градієнта похідну поля $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ у точці $M_0(1;1;1)$ у напрямі вектора $\vec{l} = 2\vec{j} - \vec{k}$.

Відповідь: $\frac{3}{5}\sqrt{15}$.

Вказівка. Скористатися формулою (58).

16 В якому напрямі повинна рухатися точка $M_0(x;y;z)$ при переході через точку $M_0(-1;1;-1)$, щоб функція $F(M) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ зростала з найбільшою швидкістю?

Відповідь: $\vec{l} = \{1;0;-1\}$.

17 З якою найбільшою швидкістю може спадати функція $u(M) = \ln(x^2 - y^2 + z^2)$ при переході точки $M(x;y;z)$ через точку $M_0(1;1;1)$?

Відповідь: $2\sqrt{3}$.

18 Знайти точку, в який градієнт функції $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ дорівнює $\bar{i} - \frac{16}{9}\bar{j}$.

Відповідь: $\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right), \left(\frac{7}{3};-\frac{3}{4}\right)$, .

19 Знайти точки, в яких модуль градієнта функції $z=(x^2+y^2)^{3/2}$ дорівнює 2.

Відповідь: точки, які лежать на колі $x^2+y^2=\frac{2}{3}$.

20 Який напрям найбільшої зміни функції $\varphi(x;y;z)=x\sin z-y\cos z$ в початку координат?

Відповідь: від'ємна піввісь y.

21 Знайти похідну функції $u=\frac{1}{z}$, де $z^2=x^2+y^2+z^2$ у напрямі її градієнта.

Відповідь: $\frac{1}{r^2}$.

22 Знайти похідну функції $z=\ln(x+y)$ у точці (1;2), яка належить параболі $y^2=4x$, у напрямі цієї параболи.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

23 Довести, що похідна функції $z=\frac{y^2}{x}$ у будь-якій точці еліпса $2x^2+y^2=1$ у напрямі нормалі до еліпса дорівнює нулю.

24 Знайти найбільшу крутість поверхні $z^2=xy$ у точці (4;2).

Відповідь: $|gradz|=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

25 Горизонтальні височини визначаються рівнянням $h=20-\frac{x^2}{4}-y^2$. Знайти $gradh$ (напрям лінії найбільшого схилу) і $|gradh|$ (крутість цього схилу височини).

Відповідь: $gradh=-\frac{x}{2}\bar{i}-2y\bar{j}$, $|gradh|=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+16y^2}$.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Завдання Знайти похідну від заданих функцій.

Варіант 1

1 $S=5t^3-t^2$.

2 $r(\varphi)=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$.

3 $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

4 $y=arctg\sqrt{4x-1}$.

5 $y=\cos^2 x^2$.

6 $y=3^{ctg\frac{1}{x}}$.

7 $y=\arcsin(1-x)+\sqrt{2x-x^2}$.

8 $y=\ln\ln(3-2x^2)$.

9 $y=x^4(1-2x^3)^2$.

10 $f(t)=t\sin 2^t$.

Варіант 2

1 $y=\arccos x^3$.

2 $y=e^{\sin 2x}$.

3 $y=4^x+x^4$.

4 $y=\ln(x^2+5x+5)$.

5 $y=\cos^2 x^2$.

6 $y=5\lg^3(4x+1)$.

7 $y=e^{-x^2}\ln x$.

8 $S(t)=\sqrt{1+e^{4t}}$.

9 $y=3\sin^2 x-\sin^3 x$.

10 $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$.

Варіант 3

1 $y=x^2\ln x$.

2 $y=3^{\sin\frac{x}{4}}$.

3 $y=\cos(3-4x)$.

4 $y=(2x^2-7)^3$.

5 $y=\sqrt{x^4+2x+3}$.

6 $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$.

7 $y=(x^2-2x+2)e^{3x}$.

8 $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln(\sqrt{x+1})$

9 $y=\dfrac{1}{arctgx}$.

10 $S(t)=3\sin^3 t^3$.

Варіант 4

1 $y=e^{\cos^2 x}$.

2 $y=\ln\ln(x^2+1)$.

3 $y=(3-2\sin x)^5$.

4 $y=\dfrac{\pi}{x}+\ln 2$.

6 $f(t)=\dfrac{1}{3\cos^2 t}-\dfrac{1}{\cos t}$.

7 $y=\dfrac{x^5}{x^3-2}$.

8 $z(t)=(\sqrt{t^3}+1)t$.

5 $y=\sqrt{arctgx}-(\arcsin x)^3$.

9 $y=10^{xtgx}$.

10 $y=5ctg\dfrac{x}{5}+ctg\dfrac{\pi}{8}$.

Варіант 5

1 $s(t)=\dfrac{t^3}{(1-t)^2}$.

2 $y=3\sin(3x+5)$.

3 $y=(1+\cos^2 x)^4$.

4 $y=\sqrt{tg\dfrac{x}{2}}$.

5 $y=x^2\log_3 x$.

6 $y=5^{2x-3}$.

7 $y=e^{\arcsin 2x}$.

8 $y=\ln(x^2-4x)$.

9 $y=\sin^2 x\sin x^2$.

10 $y=5(arctgx+\ln(1+x^2))$.

Варіант 6

1 $y=5(tgx-x^2)$.

2 $y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

3 $y=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$.

4 $y=(2x^3+5)^7$.

5 $y=arctg\dfrac{\ln x}{3}$.

6 $y=\dfrac{\sin x}{1+\ln\sin x}$.

7 $y=\sqrt{\cos(3x-2)}$.

8 $s(t)=\ln(2t^3+3t^2)$.

9 $y=ctg^3\dfrac{x}{2}$.

10 $y=e^{\sqrt{x}}-2^{\arcsin 3x}$.

Варіант 7

1 $r(\varphi)=2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$.

2 $y=ctg\sqrt{x}$.

3 $z=\sqrt[4]{1+\cos x^4}$.

4 $s(t)=\sin 3t\cos\dfrac{t}{3}$.

5 $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

6 $y=5^{3x+2}$.

7 $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$.

8 $y=3(2x^3+3)^5$.

9 $y=(x^4+1)e^{6x}$.

10 $y=arctg^4(2x-1)$.

Варіант 8

1 $s(t)=\left(\dfrac{t}{2t+1}\right)^{10}$.

2 $y=\sqrt[3]{2+x^5}$.

6 $y=2^{\cos x^2}$.

7 $y=5\sin(2-3x)$.

8 $y=\arcsin\sqrt{x}$.

3 $y=x^3e^{2x}$.

4 $y=\ln(11e^x+2)$.

5 $y=arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

9 $r(\varphi)=tg(\varphi+tg\varphi)$.

10 $y=5\log_5(3x-4)$.

Варіант 9

1 $r(\varphi)=\sin^3 2\varphi-\cos^3 2\varphi$.

2 $y=\dfrac{3+2x}{3-2x}$.

3 $y=\ln\sqrt{10x-x^2}$.

4 $y=e^x(x^3+3x^2)$.

5 $y=(7^{2x}-3)^5$.

6 $y=ctg(x+e^{\frac{x}{2}})$.

7 $y=5\log_5(x^3-1)$.

8 $y=6^{\arccos 3x}$.

9 $y=\cos(3^x+3^{-x})$.

10 $y=tg(3x+1)^3$.

Варіант 10

1 $y=\cos(6x-\dfrac{1}{x})$.

2 $y=\cos^2 x+\ln tg\dfrac{x}{2}$.

3 $y=7^{\sin^3 x}$.

4 $y=ctg(x\sin x)$.

5 $z(t)=\dfrac{e^t}{1-e^t}$.

6 $y=(1+2x)^8$.

7 $y=tg\sqrt{\cos x}$.

8 $y=\log_2(1-2x)$.

9 $y=3e^{4x-1}$.

10 $y=arcctg^3\dfrac{1}{x}$.

Варіант 11

1 $y=e^x\ln\sin x$.

2 $f(x)=5ctg(3-4x)$.

3 $y=2^{tg^2 x}$.

4 $y=\log_5(x^2-4x)$.

5 $s(t)=\dfrac{t^2}{3t+1}$.

6 $y=\sqrt{1+3tg^2 x}$.

7 $y=\cos(x^3+3^x)$.

8 $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.

9 $y=3\arcsin 4x$.

10 $y=\arccos\sqrt{1-3x}$.

Варіант 12

1 $y=\cos^2(6x+7)$.

2 $y=xe^{1-\cos x}$.

3 $y=\dfrac{1}{tg^8 2x}$.

6 $y=\sin^3 x\cos 3x$.

7 $y=\dfrac{1}{4}ctg^4 x$.

4 $f(t)=\lg(t-\cos t)$.

5 $r(\varphi)=\dfrac{\varphi}{1-\varphi^2}$.

8 $y=\arcsin\dfrac{3}{x}$.

9 $y=ctg\sqrt[3]{1+x^2}$.

10 $y=\sqrt{x}arctg\sqrt{x}$.

Варіант 13

1 $s(t)=\sqrt[3]{1+2tgt}$.

2 $y=arctg\sqrt{6x-1}$.

3 $y=\log_3^5\cos x$.

4 $y=\ln(x^3\sin 2x)$.

5 $y=\dfrac{x^2}{1+5x}$.

6 $y=\dfrac{1}{2}\arcsin\sqrt{2x}$.

7 $y=2^{\cos x^3}$.

8 $y=\sin^4\left(\dfrac{x^2}{4}-1\right)$.

9 $y=3+5e^{2x}$.

10 $y=\sqrt[12]{(x^3-6)^5}$.

Варіант 14

1 $s(t)=\dfrac{1}{4}tg^4t-\dfrac{1}{2}tg^2t$.

2 $y=\ln(e^{2x}+1)-2arctge^x$.

3 $y=\log_4^3(\sin 3x+1)$.

4 $y=x^2ctg\dfrac{x}{4}$.

5 $y=(5x^4+3)^7$.

6 $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

7 $y=\sqrt{1-7^{tgx}}$.

8 $r(\varphi)=2\cos\varphi+\cos 2\varphi$.

9 $y=2^{tg\frac{1}{x}}$.

10 $y=3e^{ctg\sqrt{x}}$.

Варіант 15

1 $y=\ln(e^{-2x}+xe^{-3x})$.

2 $y=6\cos^2x+7$.

3 $y=arctg\sqrt[3]{x^2}$.

4 $y=tg^3(7x+1)$.

5 $r(\varphi)=\varphi^2\sqrt{\varphi^2-3}$.

6 $s(t)=\dfrac{2t}{t+1}$.

7 $y=\lg(x^3+3^{\ln x})$.

8 $y=\dfrac{1}{\sin^2 5x}$.

9 $y=3^{tg5x}$.

10 $y=\arcsin(x^3+5)$.

Варіант 16

1 $y=(1+x^2)arctgx$.

2 $y=(5^{\sin 3x}+ctg\dfrac{x}{3})^4$.

6 $y=x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

7 $y=\sqrt{ctg(3x+2)}$.

3 $y=\arccos^2 5x$.

4 $s(t)=\ln tg7t$.

5 $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

8 $y=e^{\cos^5\frac{x}{2}}$.

9 $f(t)=\sqrt[5]{(1-t^2)^3}$.

10 $y=x^{\sqrt{2}}+tg\dfrac{\pi}{4}$.

Варіант 17

1 $y=3^{\ln x}+3\ln x$.

2 $s(t)=e^t(1-t)$.

3 $y=\ln(\sin^3 4x+arctg\dfrac{x}{4})$.

4 $y=7e^{-x^3}$.

5 $y=\sqrt{\lg\dfrac{e}{x}}$.

6 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

7 $f(x)=(1+\cos^5 3x)^3$.

8 $y=\cos\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{\pi}{2}$.

9 $r(\varphi)=\dfrac{1}{4}\varphi^4+\dfrac{1}{3}\varphi^3$.

10 $y=\sin 2^x$.

Варіант 18

1 $y=x^3\ln(x^2+5)$.

2 $y=3^{tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$.

3 $y=3\lg^2 4x$.

4 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{3x+5}$.

5 $y=\sqrt{x^2(4-x)}$.

6 $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

7 $s(t)=\dfrac{t^3}{t+2}$.

8 $y=2\sin\dfrac{x^2}{4}$.

9 $y=(6\cos 7x+5)^3$.

10 $y=\sqrt[4]{e^{4x-5}+2}$.

Варіант 19

1 $y=\ln\sqrt{4x^2+1}$.

2 $y=\dfrac{1}{2}arctg5x$.

3 $y=e^{\sin^2\frac{x}{2}}$.

4 $y=(5x^2-3x)^4$.

5 $y=3\log_4(2x-1)$.

6 $r(\varphi)=\dfrac{2\varphi}{1-\varphi^2}$.

7 $y=3^{ctg\sqrt{x}}$.

8 $s(t)=e^{2t}\sin 3t$.

9 $y=5tge^{\sqrt{5x}}$.

10 $y=9\arcsin\dfrac{x}{3}$.

Варіант 20

1 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2 $f(x)=x\arcsin\dfrac{x}{3}$.

3 $y=2^{tgx^2}$.

4 $r(\varphi)=\dfrac{1+3\cos\varphi}{\sin 2\varphi}$.

5 $y=4x+arctg^3 x$.

6 $y=\ln(1+\log_3 x)$.

7 $y=\sqrt{2ctg(8x+1)}$.

8 $y=5e^{1+3x}$.

9 $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

10 $s(t)=\sin^3(2t-t^2)$.

Варіант 21

1 $y=\sqrt{1+x^2}\,arctgx$.

2 $y=\sin(3\ln^2 x)$.

3 $y=\dfrac{2}{3}tg^3x+\dfrac{1}{5}tg^5x$.

4 $y=7^{\ln(1-3x)}$.

5 $s(t)=\sin t-t\cos t$.

6 $y=\dfrac{2x}{1-x}$.

7 $y=(\sqrt[3]{4x^2}+1)^2$.

8 $f(x)=e^{1+3x^2}$.

9 $y=x^2\cos\dfrac{x}{5}$.

10 $y=2\log_3\cos x$.

Варіант 22

1 $r(\varphi)=\varphi\sqrt{9-\varphi^2}$.

2 $y=\dfrac{3x^2}{1-x^3}$.

3 $y=\ln tg\sqrt{2x-1}$.

4 $y=3\arccos e^x$.

5 $s(t)=\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi t}{8}$.

6 $y=3^{ctg\frac{1}{x^2}}$.

7 $f(x)=2arctg\sqrt{x}+\ln 3$.

8 $y=\ln(1+e^{4x})$.

9 $y=(5^{\sin 3x}+2)^8$.

10 $y=\cos\sqrt{4x+1}$.

Варіант 23

1 $y=e^x(\sin 2x+\cos 2x)$.

2 $s(t)=\dfrac{3t}{1-t^3}$.

3 $y=\sqrt{\dfrac{x}{2}-tg\dfrac{x}{2}}$.

4 $z=\ln(1+e^{10x})$.

5 $y=\sqrt[5]{ctg\dfrac{x}{3}}$.

6 $y=10^{5x-4}$.

7 $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.

8 $r(\varphi)=3\cos^2\varphi-\cos^3\varphi$.

9 $y=\sqrt[5]{(1+3x^2)^4}$.

10 $y=arctg\sqrt{1+\ln(2x+3)}$.

Варіант 24

1 $s(t)=\sqrt{1+\cos^2 t^2}$.

2 $y=\ln(3^{\frac{1}{x}}+2)$.

3 $y=x\cdot 7^{\sqrt{x}}$.

4 $y=7tg\left(\frac{x}{2}-3\right)$.

5 $f(x)=\log_3 ctg\frac{x}{2}$.

6 $y=\frac{x}{1+8x^2}$.

7 $y=arcctgx\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$.

8 $y=\sqrt{e^{2x}+4e^x}$.

9 $y=6\arcsin 2x$.

10 $y=(2+\sin^5 x)^6$.

Варіант 25

1 $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}$.

2 $y=\frac{3x^2-1}{x^3}$.

3 $y=\ln(2e^{\sin x}+1)$.

4 $s(t)=5tg\frac{t}{5}+tg\frac{\pi}{16}$.

5 $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

6 $f(t)=(t^3+1)e^{2t}$.

7 $y=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

8 $y=ctg(7x^2-\frac{4}{x})$.

9 $y=2+\lg(4-\frac{\ln x}{x})$.

10 $y=arctg^3(3^x+2)$.

Варіант 26

1 $y=\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})$.

2 $y=e^{2x}\cos(2^x+2)$.

3 $y=(2^{\sqrt{3}}-ctg3x)^5$.

4 $s(t)=\frac{\sin^2 t}{\cos 2x}$.

5 $y=x^2\sqrt{1+\ln x}$.

6 $f(t)=te^{\frac{2}{t}}$.

7 $y=\lg^4(1-2x)$.

8 $r(\varphi)=\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$.

9 $y=arctg^5\sqrt{\sin x}$.

10 $y=3tg\frac{x}{2}+e^{1-x^3}$.

Варіант 27

1 $y=\left(e^{tg2x}-\sin 2x\right)^3$.

2 $y=\ln tg\sqrt{x^3+1}$.

3 $y=e^{3x}\sqrt{1+e^{2x}}$.

6 $y=\arccos 7x^2+3$.

7 $r(\varphi)=\ln\cos 2\varphi+\sin\frac{\pi}{4}$.

8 $y=2xarctg^3\frac{x}{5}$.

4 $s(t)=\sqrt[3]{(2t\sin t+1)^2}$.

5 $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

9 $y=\sqrt[5]{ctg\dfrac{x}{2}+3}$.

10 $f(t)=\ln(1+a^{-2t})$.

Варіант 28

1 $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3x^2-1}{3x^2+1}}$.

2 $y=\arcsin\sqrt{1-9x^2}$.

3 $s(t)=t^2e^{-2t}$.

4 $y=(3^{\cos x}-2)^3$.

5 $r(\varphi)=\ln\sin\varphi-\dfrac{1}{2}\sin^2\varphi$.

6 $y=\dfrac{1}{2}tg\left(\dfrac{1}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)$.

7 $f(t)=\dfrac{2t^3}{t^2-4}$.

8 $y=e^{x^3}+\sqrt{17x-1}$.

9 $y=arctg\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

10 $y=\log_2^5(3x^2+7)$.

Варіант 29

1 $y=4^{\cos 2x}-\sqrt[3]{x^2}$.

2 $y=arctg\sqrt{4x+5}$.

3 $y=\ln x\cos^3 x$.

4 $y=(1+4x^2)arctg2x$.

5 $s(t)=\left(\dfrac{1}{\sin t}+1\right)^{\sqrt{3}}$.

6 $y=ctg\sqrt[5]{(1-x)^4}$.

7 $y=\dfrac{1+x^3}{2-x^2}$.

8 $r(\varphi)=\cos^2\varphi+\dfrac{\varphi}{\sin\varphi}$.

9 $f(t)=(t^2+2t+2)e^{-2t}$.

10 $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Варіант 30

1 $y=\left(3^{\cos 3x}+tg\dfrac{\pi}{3}\right)^4$.

2 $y=e^{\sqrt{\ln tg2x}}$.

3 $s(t)=\ln(e^{-t}+te^{-t})$.

4 $y=\cos tgx-\sin 3^{\ln x}$.

5 $r(\varphi)=\varphi\left(1-\sin\dfrac{\varphi}{5}\right)$.

6 $y=\log_3^4(x^2+4x)$.

7 $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$.

8 $y=e^{3x}(2\cos 5x-3\sin 5x)$.

9 $f(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin^5\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

10 $y=x^3(e^{\pi}-tg2x)$.

Варіант 31

1 $y = x^5 \cdot 5^{\cos 3x}$.

2 $y = tg \ln^4 x + 10\sqrt{\cos \frac{x}{10}}$.

3 $y = \sqrt[5]{(1 + xe^{\sqrt{x}})^3}$.

4 $y = \frac{e^{2x}}{x^2 + 3}$.

5 $y = \arcsin^3 \sin 7x$.

6 $y = e^{\frac{x}{2}} arctg^2 x$.

7 $s(t) = \cos(t - ctg\sqrt{t})$.

8 $y = x \log_5 (x^2 + 4)$.

9 $y = \frac{x}{(x^3 + 1)^2}$.

10 $y = \log_2^2 (5^x + 5)$.

Варіант 32

1 $y = (x^7 + x)^5$.

2 $y = arctg\sqrt{x} + \sin^3 5x$.

3 $y = 5\cos 3^{\ln(x+2)}$.

4 $y = (\ln 2)^{\sin \frac{x}{3}}$.

5 $s(t) = t^2 \sin 4t$.

6 $y = \frac{x^5}{\ln(x^2 + 1)}$.

7 $y = \arcsin \sqrt{ctgx}$.

8 $y = 2^{\sqrt{\cos(3x+5)}}$.

9 $y = \sqrt{\sin 10x} \cdot e^{\sqrt[6]{x}}$.

10 $f(x) = \sqrt{x \ln \sin \frac{x}{2}}$.

Варіант 33

1 $y = \sqrt[3]{arctg 4x}$.

2 $y = (\ln 5 + 2)^{tgx}$.

3 $y = x^3 + \cos\sqrt{\frac{x}{\sin x}}$.

4 $f(x) = xe^{7x}$.

5 $y = 5\arccos^3 \frac{x}{3}$.

6 $s(t) = \log_3 (3^t - t^3)$.

7 $y = e^{-x^2} + \frac{5^{\sqrt{tgx}}}{x^3 + 3}$.

8 $y = \sqrt[7]{1 + \cos(x + \sin\frac{x}{2})}$.

9 $y = \frac{3ctgx}{\sin 5x} + \left(x^3 + e^{\frac{x}{4}}\right)^7$.

10 $y = (tg 7x - x^7)^9$.

Додаток 2

Завдання. Знайти похідні першого порядку даних функцій.

Варіант 1

1 $y = 5^{x^2 \sin^3 x} + (\sin\frac{x}{4})^{\sqrt{2}}$.

2 $y = \sqrt[4]{3x + x\sqrt[5]{x^2}}$.

4 $y = (x^3 + 1)^{tg^2 \frac{x}{2}}$.

5 $y \sin x - \cos(x - y) = 0$.

3 $y=\ln arctg\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

6 $\begin{cases} x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1} \\ y=\dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$.

Варіант 2

1 $y=\dfrac{e^{-3\sqrt{x}}}{1+e^{4x^2}}$.

2 $y=\ln x\sin 3x+x^2\arcsin^5 2x$.

3 $y=\sqrt[5]{(1-x^2)^2}$.

4 $y=\left(\sin\dfrac{x}{4}\right)^{tg^3\frac{2}{x}}$.

5 $arctgy=x+y^2$.

6 $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t \end{cases}$.

Варіант 3

1 $y=\dfrac{\sqrt{5x^3+1}}{4+5x^3}$.

2 $y=(1+ctg^3 5x)e^{\frac{x}{3}}$.

3 $y=\ln^2\cos\dfrac{2}{x^2+1}$.

4 $y=\cos^x(3x+1)$.

5 $x^2\sin y-\cos y+\cos 2y=0$.

6 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-arctgt \end{cases}$.

Варіант 4

1 $y=\dfrac{\sqrt{1-\sin^3 2x}}{1+\cos 4x}$.

2 $y=e^{tg^5\frac{x}{3}}-2arctg\sqrt{x}$.

3 $y=\dfrac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}$.

4 $y=(\ln tgx)^{\sin^2 x}$.

5 $x-y=\arcsin x-\arcsin y$.

6 $\begin{cases} x=\ln(t^3+2) \\ y=\dfrac{t}{t^3+2} \end{cases}$.

Варіант 5

1 $y=x^2tg^5 3x+\arcsin^2\dfrac{x}{5}$.

2 $y=\ln\dfrac{ctg^3\dfrac{x}{3}}{1+\cos^2 x}$.

3 $y=10^{1-\sin^4 3x}$.

4 $y=(arctg\sqrt{3x+1})^{x^3+1}$.

5 $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

6 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$.

Варіант 6

1 $y=\ln(x^3+\sqrt[3]{x^5+1})$.

2 $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}+\ln tg^3\dfrac{x}{7}$.

3 $y=(1+\sin^3 3x)e^{arctg^2 5x}$.

4 $y=(x^3-1)^{\cos\sqrt{x}}$.

5 $x^2\ln(1+y^3)+y\ln(1+x^3)=0$.

6 $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$.

Варіант 7

1 $y=\sin^4(3x-1)e^{-x^3}$.

2 $y=\sqrt[4]{(1+\cos^5 7x)^3}$.

3 $y=3tg\dfrac{x}{5}+3^{tg^5 x}$.

4 $y=(arctg\sqrt{x})^{\ln(x^2+1)}$.

5 $(y^3-x^3)^2-x^2y+y-x=0$.

6 $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases}$.

Варіант 8

1 $y=\ln(\sin^3 4x+arctg\dfrac{x}{4})$.

2 $y=\sqrt[5]{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

3 $y=e^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}\arcsin^2\ln x$.

4 $y=\left(\dfrac{x^3}{1+x^2}\right)^x$.

5 $(x^2+1)^2+(y^2+1)^2-xy=5$.

6 $\begin{cases} x=\dfrac{4-t}{1+t} \\ y=\dfrac{t^3}{2-t^3} \end{cases}$.

Варіант 9

1 $y=\sqrt[7]{\dfrac{3x+2}{1-4x}}$.

2 $y=ctg^5 x\cdot ctg5x$.

3 $y=\ln\dfrac{1-e^{2x}}{e^{2x}}$.

4 $y=\left(\ln^2 x\right)^{\cos 3x}$.

5 $x^2+y^2+\arcsin y+yarctg2x=0$.

6 $\begin{cases} x=3t-\sin 3t^2 \\ y=\sin^2 3t \end{cases}$.

Варіант 10

1 $y=\ln^5(2x+7)-\sqrt[3]{\sin^2 3x}$.

2 $y=\sqrt{xe^{2x}+2x^3}$.

3 $y=3^{ctg\frac{1}{x}}-\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4 $y=(x^3+2)^{\sqrt{tgx}}$.

5 $e^{-\frac{y}{x}}+\ln y=2$.

6 $\begin{cases} x=\ln(t^5+3) \\ y=\dfrac{t^2}{t^5+3} \end{cases}$.

Варіант 11

1 $y=tg^5 3x-e^{-\frac{1}{x^2}}$.

2 $y=\arcsin(x^3+5)$.

3 $y=x^3\ln(x^2+5)+\dfrac{1}{\cos^4\frac{x}{5}}$.

4 $y=(x^5+5)^{\cos 2x}$.

5 $x^3y^2+\sin y+(x-y)^2=0$.

6 $\begin{cases} x=te^t \\ y=te^{-t} \end{cases}$.

Варіант 12

1 $y=\ln\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{x^2}$.

2 $y=x^3e^{-\frac{1}{x^2}}+e^{\sin^3 x}$.

3 $y=\dfrac{2x^3-1}{\sqrt{\cos\frac{x}{3}}}$.

4 $y=\sin^2 x^{x^2-1}$.

5 $(y^2+x)^3+(x^2-3y)^3=0$.

6 $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{2}\cos 2t \\ y=\sin^3 2t \end{cases}$.

Варіант 13

1 $y=5^{ctg^2(5x+3)}$.

2 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}e^{-3x}$.

3 $y=\sqrt{3}arctg^2x+\dfrac{1}{x}+tg\sqrt{x}$.

4 $y=(\ln 3x)^{arctg\frac{3}{x}}$.

5 $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{2}}=5$.

6 $\begin{cases} x=t^3-3\pi \\ y=t^3-6arctgt \end{cases}$.

Варіант 14

1 $y=\left(\dfrac{4}{3x^2}-\dfrac{1}{9x}\right)\sqrt{4x+x^2}$.

2 $y=x^2e^{-x^2}-5^{1-\ln^2 3x}$.

3 $y=3arctg\ln^3\dfrac{1}{x}$.

4 $y=\ln\cos(7x)^{\sin\frac{x}{2}}$.

5 $y-\cos^3 x+\sin^3 x=0$.

6 $\begin{cases} x=\arccos(t^3+1) \\ y=\arcsin 5t \end{cases}$.

Варіант 15

1 $y = 2^{\arcsin 2x} + (1 - \arccos\frac{x}{3})^3$.

2 $y = e^x \cos 3x + \sqrt[7]{2x + \sqrt[5]{x^3}}$.

3 $y = \frac{\sin^4 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

4 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\ln^5 x}$.

5 $\ln y + \frac{x^2}{y} = 3$.

6 $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$.

Варіант 16

1 $y = 5\sin^2\frac{x}{3}ctgx$.

2 $y = \ln\frac{\cos^4 x}{\sqrt{\sin 2x}}$.

3 $y = 5^{\arcsin\sqrt{x}} - 2arctg\frac{x}{2}$.

4 $y = (x^2 + e^x)^{tg^3 x}$.

5 $xe^y + y^2 = 10$.

6 $\begin{cases} x = \frac{1}{t} - t \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$.

Варіант 17

1 $y = \sqrt[5]{(3 - \sqrt{x\sin x})^3}$.

2 $y = 3\cos^2\frac{x^2}{\ln x} + ctge^{x^2+4}$.

3 $y = 5arctg(x^2 \ln x)$.

4 $y = (1 - \sqrt{x})^{\cos\frac{1}{x}}$.

5 $y^3 + \sqrt[3]{x} = \arcsin y$.

6 $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \sqrt{tgt} \end{cases}$.

Варіант 18

1 $y = \frac{1}{3}\arcsin(\cos^3\frac{x}{5})$.

2 $y = 5^{tg\frac{x}{2}} \cdot \ln x$.

3 $y = \frac{e^{5x}}{1 + e^{3x}}$.

4 $y = \ln^3 x^{x^7}$.

5 $\sin(x + \sqrt{y}) = y^2 + 1$.

6 $\begin{cases} x = t\sin t \\ y = \frac{t}{\cos t} \end{cases}$.

Варіант 19

1 $y = 2^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} + 3tg^3\frac{x}{5}$.

2 $y = e^{5x}\cos^2 3x + 7$.

3 $y = arctg^4(x\ln x)$.

4 $y = (1 + 2^x)^{x^2+2}$.

5 $2^{x+y} = x + 10y$.

6 $\begin{cases} y = 3e^{5t} \\ x = 5\ln t \end{cases}$.

Варіант 20

1 $y = 5\sin 3^{\ln x} + 2$.

2 $y = (2x+3)e^{5x} + \dfrac{\ln x}{x}$.

3 $y = (\ln 2)^{\sin x} - ctg^3 \dfrac{x}{2}$.

4 $y = (3 + \ln^2 x)^{\sin^5 x}$.

5 $4x - y^4 = \cos(xy^2)$.

6 $\begin{cases} x = 3t^2 + 1 \\ y = arctg\sqrt{t} \end{cases}$.

Варіант 21

1 $y = 2^{\sqrt{\cos(3x+5)}} + \ln ctg\sqrt[3]{x}$.

2 $y = \dfrac{x^5}{\cos^2 7x} - (\cos 5^{\sqrt{tgx}})^3$.

3 $y = \sqrt[5]{\sin 10x e^{arctg\frac{1}{x}}}$.

4 $y = (x^7 + x)^{\sqrt{\ln x}}$.

5 $x + tgy = 2^x + y^2$.

6 $\begin{cases} x = \sqrt{1+3t} \\ y = t^2 \sin t \end{cases}$.

Варіант 22

1 $y = \dfrac{x}{\ln^2 x} + x^5 \cdot 5^{\cos\frac{x}{2}}$.

2 $y = (arctg\sqrt{\ln x})^{\sqrt{3}}$.

3 $y = 3\arcsin^4 3x + \sqrt[3]{\ln^2 tg\dfrac{x}{7}}$.

4 $y = (2x + \cos 3x)^{\frac{1}{x}}$.

5 $\arccos y + xy^2 = 1$.

6 $\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = t^2 + ctg\sqrt{t} \end{cases}$.

Варіант 23

1 $y = \sqrt[5]{1 + xe^{\sqrt{x}}}$.

2 $y = (2x+3)^5 + 5^{2x+3}$.

3 $y = \dfrac{2^x}{tg^3 x} + 1$.

4 $y = (e^{5x} + \cos\sqrt{x})^{\log_5 x}$.

5 $arctg\dfrac{x}{y} + \sin(xy) = y^3$.

6 $\begin{cases} x = te^t \\ y = \arcsin t + \sin t \end{cases}$.

Варіант 24

1 $y = \ln(x - \sqrt[3]{x}) - x^3 \ln x$.

2 $y = \cos 3^{x^2} + (x^3 + \dfrac{3}{x})^5$.

3 $y = tg\dfrac{x^2}{x^3+1} + 5$.

4 $y = (1 + \sin^8 7x)^{\frac{2}{x}}$.

5 $arctgy = 2x + \sqrt{y}$.

6 $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{\sin t} \\ y = t^2 \cos t \end{cases}$.

Варіант 25

1 $y = e^{\frac{x}{2}} arctg^2 x$.

2 $y = tg \ln^4 x + 10\sqrt{\cos\frac{x}{5}}$.

3 $y = \dfrac{3^{ctgx}}{\sqrt{2x^3+1}} + (x^3 + e^{3x})^7$.

4 $y = (3^x + \ln x)^{\sqrt[3]{x^2}}$.

5 $arcctgy = x \sin y$.

6 $\begin{cases} x = 2t \sin t \\ y = 3\cos^2 t \end{cases}$.

Варіант 26

1 $y = x^2 (\arcsin 3x)^3$.

2 $y = 7\log_2(e^{\frac{x}{2}} + 1) + 7^{\ln x}$.

3 $y = \dfrac{arctg 3x}{1+9x^2} - 3\sqrt{\cos 2x}$.

4 $y = (tg 7x - x^7)^{\ln^5 x}$.

5 $y^3 + xy = 1$.

6 $\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = tgt + ctgt \end{cases}$.

Варіант 27

1 $y = \sqrt[6]{x + (\sin \ln x)^3}$.

2 $y = \dfrac{e^{3x}}{2x+5} - x\ln(1+x^2)$.

3 $y = 3\arcsin^4(\sqrt{x} - 2)^5$.

4 $y = ctg(x+1)^{\sqrt{3x^2+2}}$.

5 $\sqrt{x - y^3} = 2\sin^3 x$.

6 $\begin{cases} x = 5\cos^2 t + 1 \\ y = 2tgt - 3 \end{cases}$.

Варіант 28

1 $y = \sin(x + \sqrt[3]{\cos 2x})$.

2 $y = 3\log_7(3^{\ln x} + 5) + \dfrac{3x}{\ln x}$.

3 $y = x^2 arctgx^2 - 2^x$.

4 $y = (3x+1)^{\sqrt{\sin x}}$.

5 $tg(xy) = 3\cos(x\sqrt{y})$.

6 $\begin{cases} x = \sqrt{1+2t} \\ y = 3t^2 \cos^2 \sqrt{t} \end{cases}$.

Варіант 29

1 $y = (2 + \ln 5)^{tgx} + \sqrt{\dfrac{x}{\sin x}}$.

2 $y = \sqrt[3]{arctg\dfrac{x}{2}} - \log_2(5^x - 1)$.

3 $y = xe^{7x} + (x + e^{7x})^3$.

4 $y = (1 + \sin\dfrac{2}{x})^{e^{2x}}$.

5 $(x+y)^2 + \cos\dfrac{x+y}{x} = 5$.

6 $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = 3t^3 \ln t \end{cases}$.

Варіант 30

1 $y = x\log_5(x^3+1) + (\ln 3)^{\cos 2x}$.

4 $y = (3 + \cos\sqrt{x})^{\ln^2 x + 1}$.

2 $y=\dfrac{x}{(x^3+1)^2}-arctg^3\sin 7x$.

3 $y=2^{\ln(1+tg^3\frac{x}{4})}$.

5 $\sqrt{\sin y}+\cos^2(xy^2)=0$.

6 $\begin{cases} x=t^3+5\sin t \\ y=t\cos 3t \end{cases}$.

Додаток 3

Завдання. Знайти похідні другого порядку від даних функцій.

Варіант 1

1 $y=x\sqrt{1+x^2}$.

2 $e^{xy}=xy$.

3 $\begin{cases} x=\arcsin(t^2-1) \\ y=\arccos 2t \end{cases}$.

Варіант 2

1 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2 $\ln(x+y)-arctg\dfrac{x}{y}=0$.

3 $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=4\sin^2 t \end{cases}$.

Варіант 3

1 $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

2 $(x+y)^2+(x-3y)^3=0$.

3 $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases}$.

Варіант 4

1 $y=xe^{-x}$.

2 $\ln\dfrac{x}{y}-x+2y=0$.

3 $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases}$.

Варіант 5

1 $y=(1+x^2)arctgx$.

2 $y\sin(x+y)-x=0$.

3 $\begin{cases} x=2t^3+t \\ y=\ln t \end{cases}$.

Варіант 6

1 $y=x^3e^{-x^2}$.

2 $arcctgx(x+y)-x-2y=0$.

3 $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$.

Варіант 7

1 $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

2 $tg(x+2y)-3x+y=0$.

Варіант 8

1 $y=x^2\ln x$.

2 $y=x+arctgy$.

3 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$.

3 $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}.$

Варіант 9

1 $y = xe^{-\frac{1}{x}}$.

2 $\sin(2x+y)+2x-3y=0$.

3 $\begin{cases} x = 2\ln ctgt \\ y = tgt + ctgt \end{cases}.$

Варіант 10

1 $y = x\sin^2 x$.

2 $e^{xy}-(x+3y)=0$.

3 $\begin{cases} x = ctgt \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}.$

Варіант 11

1 $y = e^{-x}\sin x$.

2 $tg(x+y)-xy=0$.

3 $\begin{cases} x = t^2+2 \\ y = \dfrac{t^3}{3-t} \end{cases}.$

Варіант 12

1 $y = \arcsin^2 x$.

2 $e^x - e^y = y - x$.

3 $\begin{cases} x = \varphi(1-\sin\varphi) \\ y = \varphi\cos\varphi \end{cases}.$

Варіант 13

1 $y = (5x^2-1)\sin 2x$.

2 $x+y=e^{x-y}$.

3 $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}.$

Варіант 14

1 $y = \ln(1-2x\cos\alpha + x^2)$.

2 $x^2+y^2-xy=0$.

3 $\begin{cases} x = a\cos t\sqrt{2\cos 2t} \\ y = a\sin t\sqrt{2\cos 2t} \end{cases}.$

Варіант 15

1 $y = x^2e^{2x}$.

2 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

3 $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}.$

Варіант 16

1 $y = \dfrac{x^2}{1-x}$.

2 $x\ln y - y\ln x = 1$.

3 $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}.$

Варіант 17

Варіант 18

1 $y=\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x$.

2 $y+\sqrt{x}=\arcsin y$.

3 $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=4\ln t \end{cases}$.

1 $y=\frac{x^2}{4}(2\ln x+3)$.

2 $x-y^2=\cos(xy)$.

3 $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=arctg\sqrt{t} \end{cases}$.

Варіант 19

1 $y=-\frac{1}{9}x\sin 3x-\frac{2}{27}\cos 3x$.

2 $xe^y+x^2=10$.

3 $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{t} \\ y=\sqrt{t-t^2} \end{cases}$.

Варіант 20

1 $y=e^{-x}\cos 3x$.

2 $\ln y+\frac{y}{x}=0$.

3 $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2} \\ y=\dfrac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$.

Варіант 21

1 $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$.

2 $xy=ctgy$.

3 $\begin{cases} x=1+e^{3\varphi} \\ y=3\varphi+e^{-3\varphi} \end{cases}$.

Варіант 22

1 $f(x)=arctg\ln x$.

2 $x^2-2xy^2+1=0$.

3 $\begin{cases} x=t\ln t \\ y=\dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$.

Варіант 23

1 $f(x)=(3x^2+4)e^x$.

2 $y=\cos(x+y)$.

3 $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\dfrac{1}{1-t} \end{cases}$.

Варіант 24

1 $f(x)=\ln(2x^2+7)$.

2 $y^3+x^3-3xy=0$.

3 $\begin{cases} x=e^{-t^2} \\ y=arctg(2t+1) \end{cases}$.

Варіант 25

1 $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

2 $e^y+xy=e$.

Варіант 26

1 $y=\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

2 $y^2-2xy+3=0$.

3 $\begin{cases} x = 2\ln ctg\dfrac{t}{2} - 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$.

3 $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$.

Варіант 27

1 $y = (arctgx)^2$.

2 $y = x + \ln y$.

3 $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$.

Варіант 28

1 $y = \dfrac{1}{1+x^3}$.

2 $\cos(xy) = x$.

3 $\begin{cases} x = 4tg^2\dfrac{t}{2} \\ y = 2\sin t + 3\cos t \end{cases}$.

Варіант 29

1 $f(x) = e^{2x}\sin 5x$.

2 $y^3 - 3y + 3x = 1$.

3 $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$.

Варіант 30

1 $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$.

2 $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$.

3 $\begin{cases} x = \dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \\ y = \dfrac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \end{cases}$.

Додаток 4

Варіант 1

1 Прямолінійний рух точки задано рівнянням $x = t^3 + 2t^2$, де x виражено в метрах, t - в секундах. Знайти швидкість і прискорення в кінці третьої секунди.

2 Знайти диференціал функції $y = \sin^3 3x + 2^{\sqrt{x}} - \ln 2$.

3 Знайти x_t' при $t = 1$, якщо $t\ln x - x\ln t = 1$.

4 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кола $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках перетину його з віссю $0x$.

5 Знайти $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, якщо $x = \ln\ln(5+t^3)$.

6 Знайти y_{xx}'', якщо $\begin{cases} y = \cos^4 3t \\ x = 3\sin^4 3t \end{cases}$.

7 Продиференціювати функцію

$$f(x)=tg^5 3x-e^{-\frac{1}{x^2}}+x^2 arctg\frac{3x+2}{4}.$$

Варіант 2

1 Знайти похідну неявної функції $y(x)$, заданої рівнянням $xy^2+x^2y=2$.
2 Тіло масою 100 кг рухається прямолінійно за законом $s=5t^2-2$. Знайти кінетичну енергію тіла $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через 2 с після початку руху.

3 $f(x)=\sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}$. Знайти $f'(4)$.
4 Скласти рівняння дотичної і нормалі до циклоїди

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}, \qquad \text{у точці, де } t=\frac{\pi}{2}.$$

5 Продиференціювати функцію

$$y(x)=(1+\sin^3 3x)e^{arctg^2 5x}+\ln(x^3+\sqrt[3]{1+x^5}).$$

6 Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} y=\frac{t^3}{2-t^3} \\ x=\frac{4-t}{2-t^3} \end{cases}$.

7 Знайти похідну першого порядку функції $r(\varphi)=tg^5\frac{\varphi}{3}+\arccos^2 5\varphi$.

Варіант 3

1 Під яким кутом перетинаються пряма $x+y-4=0$ і $2y=8-x^2$ парабола
.
2 Знайти похідну першого порядку функції $y=\sin^4(3x+1)e^{-x^3}$.

3 Знайти y' в точці $M(1;1)$, якщо $\frac{y}{x}+xy=2$.

4 Точка рухається вздовж прямої $0x$ за законом $x=t^3-9t^2+24t$. Знайти швидкість і прискорення руху. В які моменти часу точка змінює напрям руху?
5 Продиференціювати функцію $r(\varphi)=3^{tg5\varphi}-\arcsin(\varphi^3+5)+\ln tg7\varphi$.

6 Знайти похідну функції $f(x)=\ln\left(\sin^3 4x+arctg\frac{x}{4}\right)$.

7 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = tg 2t \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 2t} \end{cases}$.

Варіант 4

1 Знайти y' при $y = 0$, якщо $x\cos y - \sin y + \sin 2y = 1$.
2 Залежність між кількістю x речовини, яку отримують в результаті хімічної реакції, і часом t виражається рівнянням $x = A(1 - e^{-kt})$. Знайти бистроту реакції.
3 $f(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 1}$. Знайти $f'(\sqrt{3})$.
4 В яких точках кривої $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^3 - 12t + 1 \end{cases}$ дотична паралельна осі $0x$.
5 Знайти похідну другого порядку функції, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\cos 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}.$$

6 Продиференціювати функцію

$$y(x) = x^3 \ln(x^2 + 5) - \left(\arccos\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)^5 - 5^{ctg^5(2x+3)}.$$

7 Знайти $\dfrac{dx}{dt}$, якщо $x = \dfrac{e^{-3\sqrt{t}}}{1 + e^{4t^2}} + \sqrt[4]{3t + t\sqrt[5]{t^2}}$.

Варіант 5

1 Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^3 + y^3 - 3xy - 13 = 0$ в точці $M(-1;2)$.
2 $f(z) = \dfrac{9z}{\sqrt{1 + z^2}}$. Знайти $f'(2\sqrt{2})$.
3 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} y = \arcsin 3t \\ x = \arccos(t^3 + 1) \end{cases}$.
4 Знайти похідну функції $f(x) = \sqrt[5]{(1 - x^2)^2} + \dfrac{x^8 + 1}{1 - x^2} e^{-3x}$.
5 Продиференціювати функцію $r(\varphi) = e^{tg^3 3\varphi} - \cos^5 6\varphi \sin^4 2\varphi + 5^{\varphi^2 \sin^3 \varphi}$.
6 Знайти $y'(x)$, якщо $y(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^3 2x}}{1 + \cos 4x} + \ln ctg^3 \dfrac{x}{3}$.

7 Точка рухається по кубічній параболі $12y = x^3$. Яка із її координат змінюється швидше?

Варіант 6

1 Зміна сили струму I залежно від часу t задана рівнянням $I = 2t^2 - 5t$ (I - в амперах, t - в секундах). Знайти швидкість зміни сили струму в кінці 10 с.

2 $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{8 + x^3}}$. Знайти $f'(1)$.

3 Знайти y', якщо $y = e^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}} \arcsin^2 5x$.

4 Продиференціювати функцію $r(\varphi) = \sqrt[5]{\dfrac{1 + \cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}} - ctg^5 \varphi ctg 5\varphi + 5^{\ln \sin \frac{\varphi}{5}}$.

5 Продиференціювати функцію, задану рівнянням
$y \sin x - x \cos y = \ln(x^2 y)$.

6 Скласти рівняння дотичної і нормалі до гіперболи $y^2 - 2x^2 = 1$ у точках, де $x = 2$.

7 Знайти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} y = \cos^2 t \\ x = 3t - \cos 3t \end{cases}$.

Варіант 7

1 Знайти швидкість точки, яка рухається прямолінійно за законом $s = 4 \sin 3t$ в момент часу $t = \dfrac{\pi}{9}$ (s - в метрах, t - в секундах).

2 Знайти y_x', якщо функція задана рівнянням
$x^2 + y^2 + \arcsin y + yarctg 2x = 0$.

3 Продиференціювати

$$f(x) = \left(2 + \sqrt[3]{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}} \right)^5 - \sqrt[4]{(1 + \cos^5 3x)^3}.$$

4 Знайти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = t + \ln ctgt \\ y = t - \ln tgt \end{cases}$.

5 Скласти рівняння дотичної і нормалі до еліпса $\begin{cases} x = 2\sqrt{3} \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$, у точці, де $t = \dfrac{\pi}{6}$.

6 Знайти похідну першого порядку функції

$$y=\sqrt{\lg\frac{e}{x}}+\sqrt[3]{\lg 4}+3\lg^2 4x+x^{\sqrt{2}}-\sin x^2-tg\frac{\pi}{7}.$$

7 Знайти $y'(\pi)$, якщо $y(x)=\ln\sqrt{4x^2+1}+\frac{1}{2}arctg2x-e^{\ln\sin^2\frac{x}{2}}$.

Варіант 8

1 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\sin\frac{x}{3}$ в точці $M(\pi;\frac{\sqrt{3}}{2})$.

2 Знайти y' функції $y(x)=\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\sin^3(2x^2-x^3)$.

3 Знайти похідну першого порядку функції

$$r(\varphi)=5^{\cos^2\sqrt{\varphi}}-2^{\sin\frac{\varphi}{\ln 2}}+\varphi^2 e^{\sin\frac{1}{\varphi}}-\sin 2\varphi.$$

4 Швидкість тіла, яке рухається прямолінійно, прямо пропорціональна квадратному кореню із пройденого шляху. Довести, що цей рух відбувається під дією сталої сили.

5 Знайти $y'(x)$, якщо $(x+y^2)^3+(x^2-3y)^3=0$.

6 Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} y=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{t} \\ x=\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3 \end{cases}$.

7 Продиференціювати функцію $y=xarctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{x^3-x^2}{\sqrt{2-x}}$ і обчислити значення похідної при $x=1$.

Варіант 9

1 Знайти швидкість і прискорення точки в момент часу $t=1$ с, якщо вона рухається прямолінійно за законом $s=2\sin\frac{\pi t}{3}$.

2 Знайти похідну першого порядку функції, заданої рівнянням

$$x^3y^2+\sin y+(x-y)^2=0.$$

3 Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$.

4 Знайти z' при $t=\frac{\pi}{2}$, якщо $z(t)=\frac{\sin t}{t}+\frac{t}{\sin t}$.

5 Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $y = \ln(e^{-2x} + xe^{-3x}) + \dfrac{1}{3}\sin^3 x(6\cos^2 x + 7)$.

6 Знайти вершину параболи $y = 1 + 8x - 2x^2$, якщо відомо, що дотична до параболи в її вершині паралельна осі $0x$.

7 Продиференціювати функцію $y = \cos(1-\pi x)\sqrt{1-7^{tgx}} - 12arctg^3\sqrt[3]{x^2}$.

Варіант 10

1 Матеріальна точка маси m здійснює просте гармонічне коливання за законом $s = 5\sin\left(\dfrac{\pi}{3}t + \dfrac{\pi}{6}\right)$. Знайти силу F, під дією якої точка здійснює цей рух в момент $t = 0$.

2 Знайти y_x', якщо функція задана рівнянням $(x^2+1)^2 + (y^2+1)^2 - xy = 5$.

3 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = t^4 + 3t \\ y = t^3 + 5t - 1 \end{cases}.$$

4 Знайти похідну функції

$$y = 2^{x^2-x}\cdot tg\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) + x\arcsin\frac{x}{3} + \sqrt{9-x^2}.$$

5 Продиференціювати функцію

$$r(\varphi) = 2\ln tg\varphi - \frac{1}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{3}\sin^3\varphi(6\cos^2\varphi + 7).$$

6 Знайти $f'(x)$, якщо

$$f(x) = \frac{\arcsin x^2}{2-3x} + \frac{8}{arctge^{4x}} - x\sin(3\ln^2 x).$$

7 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \ln(x-2)$ у точці з абсцисою $x = 3$.

Варіант 11

1 Тверде тіло коливається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$.

Знайти кутову швидкість і кутове прискорення тіла як функції часу.

2 Продиференціювати двічі функцію, задану параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^t \sin t \end{cases}.$$

3 Знайти $f'(x)$, якщо $f(x) = arctg\frac{2x}{1-x^2} + \ln\cos\frac{x}{2} - 2\sin 2x\cos^2 x$.

4 Скласти рівняння нормалі до параболи $y = x^2 + 4x + 1$, перпендикулярної до прямої, яка з'єднує початок координат з вершиною параболи.

5 Знайти похідну першого порядку функції

$$r(\varphi) = 12^{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)} - \frac{1}{2}(tg 2\varphi + \ln\cos^2 2\varphi) + 3^{ctg\sqrt{\varphi}} .$$

6 Показати, що функція $s(t) = \arcsin t$ задовольняє рівнянню

$$(t^2 - 1)\frac{d^2s}{dt^2} + t\frac{ds}{dt} = 0 .$$

7 Знайти y_x', якщо $x^3 - y^3 = x^2 y^2$.

Варіант 12

1 Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $\begin{cases} x = \frac{1-t}{1+t} \\ y = \frac{2t}{1+t} \end{cases}$.

2 Продиференціювати $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x$.

3 Показати, що функція $s = \frac{1}{t\ln ct}$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$t\frac{ds}{dt} + s = -ts^2 .$$

4 $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$. Знайти $\frac{dy}{dx}$ при $x = 0$.

5 Обчислити $r'(2)$, якщо $r(\varphi) = \varphi^2 \arccos\frac{\sqrt{3}}{\varphi} - 2\sqrt{\varphi^2 - 3}$.

6 До кривої $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ провести дотичні, паралельні прямій $3x - y + 1 = 0$.

7 Точка масою m коливається навколо осі $0x$ так, що в момент часу t її відхилення x від положення рівноваги визначається рівнянням $x = Ae^{-at}\cos(at + b)$. Знайти швидкість руху точки і силу, що діє на неї.

Варіант 13

1 Скласти рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = e^{\frac{x}{2}}$ у точці перетину з віссю $0y$.

2 $F(x)=\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x$, $f(x)=\sin\ln x$. Показати, що $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'(1)$.

3 Продиференціювати функцію

$$f(t)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-3t\right)-\sqrt{\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)}+7^{e^{-t^2}}.$$

4 Знайти похідну першого порядку функції

$$y=\ln arctg\sqrt{x}+\frac{\arcsin 7x}{1-7x}-x\cos 5x.$$

5 Знайти $y'(1)$ для функції $y=y(x)$, заданої рівнянням $5^x-\sin y=5x+y^2$, якщо $y(1)=0$.

6 $\begin{cases} x=3\cos\frac{t}{5} \\ y=3\sin\frac{t}{5} \end{cases}$, Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$.

7 Показати, що коли тіло рухається за законом $s=ae^t+be^{-t}$, то його прискорення чисельно дорівнює пройденому шляху.

Варіант 14

1 Колесо обертається так, що кут повороту пропорціональний квадрату часу. Перший поворот було зроблено колесом за 8 с. Знайти кутову швидкість колеса через 32 с після початку обертання.
2 Продиференціювати функцію

$$r(\varphi)=tg^2\varphi+2\ln\cos\varphi+\varphi\sqrt{9-\varphi^2}+9\arcsin\frac{\varphi}{3}.$$

3 Обчислити значення диференціала функції $y=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ при зміні незалежної змінної від 4 до 4,01
4 Знайти другу похідну функції, заданої рівнянням $y=2x+arctgy$.
5 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=arctgt \end{cases}$. Обчислити $\frac{dy}{dx}$ при $t=-\frac{1}{6}$.
6 Знайти похідну функції

$$y=\frac{2}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x+\sin^2x^3-2^{3x^2-5x+1}.$$

7 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^5+y^5-2xy=0$ у точці $M(1;1)$.

Варіант 15

1 Тіло рухається прямолінійно за законом $s = ae^{-kt}$. Знайти швидкість і прискорення руху в момент $t = 0$.
2 Знайти за допомогою диференціала наближене значення приросту функції $y = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ при зміні x від π до $\pi + 0.01$.
3 $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t) \\ y = a(\cos t + t\sin t) \end{cases}$. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ при $t = \dfrac{\pi}{4}$.
4 Знайти кут між дотичними до гіперболи $xy = 4$ у точках з абсцисами $x_1 = 1$ і $x_2 = -4$.
5 Знайти y_x' функції, заданої рівнянням $arctg\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.
6 Знайти частинні значення похідної функції $f(x) = e^{-x}\cos 3x$ при $x = 0$.
7 Продиференціювати функцію

$$r(\varphi) = \sqrt{2\varphi + \cos^2\left(2\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} - a\ln^2\frac{\varphi}{a} + \frac{1+\sin 2\varphi}{1-\sin 2\varphi}.$$

Варіант 16

1 Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю 15 м/с. Через скільки секунд тіло досягне найвищої точки і на якій висоті, якщо рівняння руху тіла, кинутого вертикально угору: $h = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$, де h - висота підняття; v_0 - початкова швидкість; t - час.
2 Обчислити значення диференціала функції $y = (\sin x + \cos x)e^x$ при $x = 0$ і $dx = 0.2$.
3 $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$ при $t = 1$.
4 Скласти рівняння дотичної до кривої $y^2 = (4+x)^3$ в точках перетину її з віссю $0y$.
5 Знайти y_x' функції, заданої рівнянням $e^x\sin y - e^{-y}\cos x = 0$.
6 Продиференціювати функцію $r(\varphi) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{\dfrac{\varphi}{2} - \sin\dfrac{\varphi}{2}} + \ln tg\sqrt{\varphi}$.
7 $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2+\sqrt{x}) + 2^{\frac{x}{\ln x}}$. Знайти y_x'.

Варіант 17

1 Штучні супутники Землі (ШЗС) рухаються навколо Землі по еліптичним орбітам. Відстань r супутника від центра Землі може бути наближено виражена в залежності від часу t рівнянням

$$r = a\left\{1-\varepsilon\cos\frac{2\pi}{p}(t-t_n)-\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\cos\frac{4\pi}{p}(t-t_n)-1\right]\right\}.$$

Тут a, ε, p і t_n - сталі.

Знайти швидкість зміни відстані ШСЗ від центра Землі (тобто радіальну швидкість ШСЗ).

2 Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $x+y=e^{x-y}$.

3 Знайти похідну першого порядку функції $y(x)$, заданої параметричними рівняннями $\begin{cases} x = k\sin t - \sin kt \\ y = k\cos t + \cos kt \end{cases}$.

4 $f(t)=\sqrt{1+\cos^2 t^2}$. Знайти $f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2})$.

5 Продиференціювати функцію $x = e^{-2t}\left(C_1\sin\frac{t}{3}+C_2\cos\frac{t}{3}\right)$.

6 Знайти відстань вершини параболи $y = x^2-4x+5$ від дотичної до неї в точці перетину параболи з віссю $0y$.

7 Знайти y' функції $y=\ln\left(3^{\frac{1}{x}}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}\right)+\frac{\arcsin 6x}{\sqrt{tg 3x}}$.

Варіант 18

1 Обчислити $f'(0)$, якщо $f(z)=(z+1)arctge^{-2z}$.

2 Продиференціювати функцію $e^y - e^{-x} + xy = 0$.

3 Знайти похідну першого порядку функції

$$y=\frac{5^{2x}}{2+\sqrt{4+5^{2x}}}+\ln tg\frac{x}{2}-\cos^4\left(\frac{x^2}{4}-1\right).$$

4 Рух точки вздовж осі $0x$ визначається за формулою $x=(t-2)^2e^{-t}$. Знайти швидкість та прискорення руху і ті моменти часу, коли точка змінює напрям руху.

5 $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$. Знайти $\frac{dy}{dx}$.

6 Знайти y', якщо $y=\sqrt{e^{\sin 4x}(x^2-6)^5}$.

7 Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8 \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$ у точці $M(2;-1)$.

Варіант 19

1 Знайти похідну першого порядку функції $y = x\,arctg\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{2}\ln(x^2 + a^2)$.

2 $F(z) = \dfrac{\cos^2 z}{1 + \sin^2 z}$; показати, що $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 3F'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$.

3 Продиференціювати функцію $y = e^{tg\sqrt{x}}(\sqrt[3]{4x^2} + 1)^2$.

4 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $x = y + arctgy$.

5 Знайти похідну функції $y(x)$, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}.$$

6 Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 = 32$, перпендикулярних до прямої $x + y + 4 = 0$.

7 Залежність шляху від часу при прямолінійному русі точки задана рівнянням $s = \dfrac{1}{5}t^5 + \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi t}{8}$ (t - в секундах, s - в метрах). Знайти швидкість руху в кінці другої секунди.

Варіант 20

1 Знайти y_x', якщо $\begin{cases} y = tgt + ctgt \\ x = 2\ln ctgt \end{cases}$.

2 $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$. Знайти y'' у точці $M(1;1)$.

3 Продиференціювати функцію $s = \sqrt{4t - t^2} + 4\arcsin\dfrac{\sqrt{t}}{2}$.

4 Показати, що функція $x = \dfrac{t - e^{-t^2}}{2t^2}$ задовольняє диференціальному рівнянню $t \cdot \dfrac{dx}{dt} + 2x = e^{-t^2}$.

5 Зенітний снаряд летить вертикально угору ($x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$) з початковою швидкістю v_0 м/с. Знайти швидкість v і прискорення a руху снаряда. Через скільки секунд снаряд досягне найвищої точки і на якій відстані від Землі?

6 Скласти рівняння дотичної і нормалі до гіперболи $y = \frac{x+1}{x-1}$ у точці $M(2;3)$.

7 Знайти похідну першого порядку функції $y = (x^3 - 2)^2 \sqrt[3]{(x^3+6)^2 e^{\cos 3x}}$.

Варіант 21

1 $\varphi(u) = e^{-\frac{u}{a}} \cos\frac{u}{a}$. Показати, що $\varphi(0) + a\varphi'(0) = 0$.

2 Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $y = tg(x+y)$.

3 $z = \ln\left(1 + e^{10x}\right) + arcctge^{5x}$. Обчислити при $x = 0$ і $dx = 0.1$.

4 Знайти першу похідну функції $y(x)$, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \dfrac{3a - 2t}{at} \\ y = \dfrac{4(a-t)^3}{a^2 t^2} \end{cases}.$$

5 Знайти y_x' функції, заданої рівнянням
$\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$.

6 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ у точці $M(-2;5)$.

7 По параболі $y = x(8-x)$ рухається точка так, що її абсциса змінюється залежно від часу за законом $x = t\sqrt{t}$ (t - в секундах, x - в метрах). Якою буде швидкість зміни ординати у точці $M(1;7)$?

Варіант 22

1 $f(x) = arctg\frac{x}{a} - \ln\sqrt[4]{x^4 - a^4}$. Знайти $f'(2a)$.

2 Функція задана рівнянням $e^{\varphi - 2} + 2\varphi - 3r - 2 = 0$. Знайти $\frac{dr}{d\varphi}$.

3 Знайти $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, якщо $y = 15\ln tg\frac{x}{2} + \frac{\cos x}{\sin^4 x}(8\cos^4 x - 25\cos^2 x + 15)$.

4 Знайти першу похідну функції $y(x)$, заданої параметричними рівняннями $\begin{cases} y = \left(\frac{2}{3}\sqrt{t} + 1\right)t \\ x = \sqrt{t}e^{\sqrt{t}} \end{cases}$.

5 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці $M(1;-1)$.

6 $z = 3\ln\left(1 + e^{5x}\right) - \sin 3x + 6e^{3x}$. Обчислити dz при $x = 0$ і $dx = 0.1$.

7 Точка здійснює прямолінійний коливальний рух за законом $x = A\sin\omega t$. Знайти швидкість і прискорення руху в момент часу $t = \frac{2\pi}{\omega}$. Показати, що прискорення руху пропорціональне відхиленню x.

Варіант 23

1 $t\ln x - x\ln t = 1$. Знайти $\frac{dx}{dt}$ при $t = 1$.

2 Знайти похідну першого порядку функції

$$y = \frac{1}{2}\ln tg\frac{x^2}{2} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}.$$

3 Знайти точки кривої $\begin{cases} x = 2t^3 - 9t^2 + 12t \\ y = t^2 - t + 1 \end{cases}$, в яких дотична паралельна осі $0y$.

4 .Тіло масою 25 кг рухається прямолінійно за законом $s = \ln(1 + t^2)$. Знайти кінетичну енергію тіла $\frac{mv^2}{2}$ через 2 с після початку руху (s виражено в метрах).

5 Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases}$.

6 Знайти першу похідну функції $y(x)$ заданої рівнянням $y\sin(x + y) - x = 0$.

7 Продиференціювати функцію $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right) + \arcsin(tg 2^x)$.

Варіант 24

1 Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = t + arctgt \\ y = \dfrac{1}{3}t^3 + t \end{cases}$.

2 Куля вилітає із пістолета угору зі швидкістю 300 м/с. Знайти швидкість кулі в момент $t = 10$ с і визначити, скільки часу куля піднімається угору, якщо висота h (в метрах), якої досягає за t секунд тіло, кинуте вертикально угору зі швидкістю v_0 м/с, визначається за формулою $h = v_0 t - 4.9t^2$. Опір повітря не враховується.

3 Знайти похідну функції
$f(t) = a\arcsin\dfrac{a}{t} + \sqrt{a^2 - t^2} + tarctg\dfrac{t}{a} - \dfrac{a}{2}\ln(a^2 + t^2)$.

4 Обчислити $y'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ для функції, заданої рівнянням $yarctgy - \arcsin x = 0$, якщо $y\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$.

5 Під яким кутом перетинаються криві $2y = x^2$ і $2y = 8 - x^2$?

6 Продиференціювати функцію

$$y = \ln\sin\frac{x+2}{x} - 4^{arctg\,3x} + \cos(x\sqrt[3]{1 - x^3}).$$

7 Знайти похідну функції

$$y = \frac{1 + \sin\ln^2 x}{\sin 2x} - 5tge^{\sqrt{5x}} + 2^{tgx^2}.$$

Варіант 25

1 $x^2\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$. Знайти y' при $y = \dfrac{\pi}{2}$.

2 Обчислити $x'(1)$, якщо $x = \varphi arctg\varphi - \ln\sqrt{1 + \varphi^2}$.

3 Знайти похідну першого порядку функції $y = \sqrt[3]{\dfrac{e^{\sin x + \cos x}}{(4x^3 + 2)^5}}$.

4 Скласти рівняння нормалі до лінії $y = 2\sqrt{x}$ у точці її перетину з бісектрисою першого координатного кута.

5 Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $y = \dfrac{x^2\ln^2 tgx}{\ln\sin^2 2x}$.

6 Продиференціювати функцію $\begin{cases} x = ctgt \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$.

7 Знайти швидкість і прискорення гармонічного коливального руху, якщо $s = 2\sin\dfrac{t}{3}$ (t - виражено в метрах, s - в секундах).

Варіант 26

1 Знайти похідну функції $y(x)$, заданої рівнянням $5x^2 + y^2 - x^2y^3 + 7 = 0$.

2 Знайти похідну функції $y = x\arcsin(x-1)$.

3 Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $\begin{cases} x = b\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

4 Знайти частинне значення похідної при $x = \dfrac{\pi}{4}$, якщо $y = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}$.

5 Тіло рухається за законом $s = \dfrac{t^3}{3} + 2t$ (s - шлях в метрах, t - час в секундах). Знайти швидкість руху в момент часу $t = 2$ с.

6 Знайти диференціал функції $y = \sqrt{tg2^{x^3}}$.

7 Довести, що дотичні до лінії $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, проведені у точках, для яких $y = 1$, перетинаються в початку координат.

Варіант 27

1 Продиференціювати функцію $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

2 Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $x^2 + 2y^2 + xy = 0$.

3 Функція $y = y(x)$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{cases}$.

Знайти її похідну.

4 Знайти другу похідну функції $y = \sin^2(3x+1)$.

5 Точка рухається за законом $s = -\dfrac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 8t + 1$. Знайти моменти часу t, коли прискорення точки буде дорівнювати 6 м/с^2

6 Показати, що гіперболи $xy = \sqrt{2}$ і $x^2 - y^2 = 1$ перетинаються під прямим кутом.

7 Знайти частинне значення похідної функції $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$ при $x = e$.

Варіант 28

1 Знайти похідну функції $y = y(x)$, заданої рівнянням
$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$.

2 Продиференціювати функцію $y = e^{arctg \ln^2 (3x-1)}$.

3 Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $\begin{cases} x = arctgt \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$.

4 Точка рухається за законом $s = 5\ln t + 3$. Знайти швидкість руху в момент часу $t = 5$ с.

5 Знайти диференціал функції $y = \ln^5 tg3x - x^2 \cos\dfrac{x}{3}$.

6 Знайти другу похідну функції $y = \ln(1+x^2) - 2x$.

7 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = e^{1-x^2}$ у точках перетину її з прямою $y = 1$.

Варіант 29

1 Знайти похідну першого порядку функції $y = (5^{\sin 3x} + ctg3x)^4$.

2 Знайти диференціал функції $r(\varphi) = 2\sin\dfrac{\varphi}{2} + \sqrt{\varphi^2 + 3} - \ln tg\varphi$.

3 Продиференціювати функцію $y = y(x)$, задану параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}.$$

4 Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $\cos(\dfrac{x}{y}) - xy = 0$.

5 Тіло масою 6 г рухається прямолінійно за законом
$s = -1 + \ln(t+1) + (t+1)^3$ (s - виражено в сантиметрах, t - в секундах). Знайти кінетичну енергію тіла через 1 с після початку руху.

6 Обчислити $f'(0)$, якщо $f(x) = 3xe^x + \ln\cos x + \sqrt{3}$.

7 Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{7} = 1$, перпендикулярних до прямої $2x + 4y - 3 = 0$.

Варіант 30

1 Висота польоту тіла, кинутого вертикально угору, визначається

рівнянням $h = v_0 t - 4.9t^2$, де t - час (в секундах), за який тіло досягає висоти h (в метрах), v_0 - початкова швидкість (в м/с). Знайти швидкість і прискорення руху тіла в момент часу $t = 5$ с, якщо $v_0 = 100$ м/с (опір повітря не враховується). Через скільки секунд тіло досягне найвищої точки і на якій відстані від Землі?

2 Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $(y^3 - x^3) - x^2 y + y - x = 0$.

3 Знайти похідну другого порядку функції $y = y(x)$, заданої параметричними рівняннями $\begin{cases} x = e^{t^2} \\ y = \sin t \end{cases}$.

4 Обчислити $f'(\frac{\pi}{3})$, якщо $f(t) = \ln tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{t}{2}\right) - \arcsin\dfrac{3t-1}{\sqrt{3}}$.

5 Скласти рівняння дотичних до кривої $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ у точках її перетину з гіперболою $y = \dfrac{1}{x+1}$.

6 Знайти диференціал функції $y = \sqrt{1+x^2}\, arctgx - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

7 Продиференціювати функцію $y = (5x^2 - 3x)^3 - \sqrt[4]{e^{4x-5} + 2} + \dfrac{\ln(2x-1)}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$.

Додаток 5

Завдання. Обчислити границі даних функцій за правилом Лопіталя.

Варіант 1

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{\sin(x-2)}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi}{4x} - \dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi} arctgx\right)^x$.

Варіант 2

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

2 $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{x}{ctgx} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$.

Варіант 3

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$.

Варіант 4

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}$.

2 $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}\right]$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$.

2 $\lim\limits_{x\to \pi/2}(tgx-\dfrac{1}{1-\sin x})$.

3 $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

Варіант 5

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$.

2 $\lim\limits_{x\to 1/2}\left[\sin(2x-1)tg\pi x\right]$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Варіант 6

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{x^3}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

Варіант 7

1 $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left[ctgx\ln(x+e^x)\right]$.

3 $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\dfrac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

Варіант 8

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x^2)}{x^2\sin x^2}$.

2 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4x}{x-2}-\dfrac{1}{4-x^2}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Варіант 9

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$.

2 $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left[\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tgx\right]$.

3 $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\frac{3}{\ln(2x-2)}}$.

Варіант 10

1 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x(e^{\frac{3}{x}}-1)\right]$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

Варіант 11

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{\ln(1+\frac{1}{x^2})}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\dfrac{3}{x^4}\right)$.

Варіант 12

1 $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-ctgx\right)\right]$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)\dfrac{1}{\ln x}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln^2 x}}$.

Варіант 13

1 $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}tgx}{1+\cos 4x}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{3x}}$.

Варіант 14

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi x-1}{2x^2}+\dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}$.

Варіант 15

1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

Варіант 16

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$.

2 $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)tg\dfrac{x}{2}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^{3x}-1)}}$.

Варіант 17

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

2 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1}-\dfrac{7}{x^7-1}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to +0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

Варіант 18

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$.

2 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{1}{\ln\dfrac{x}{2}}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{\sin 2x}}$.

Варіант 19

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x-\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}(xctg3x)$.

3 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

Варіант 20

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-e^{2x})ctgx\right]$.

3 $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{\sin\frac{x-1}{2}}$.

Варіант 21

Варіант 22

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\pi}$.

2 $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x+e)\right]^{\frac{1}{x}}$.

3 $\lim\limits_{x\to0}\left[(1-\cos x)ctgx\right]$.

1 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2}$.

2 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

Варіант 23

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)}$.

2 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{4x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{tg^2x}}$.

Варіант 24

1 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2x}$.

2 $\lim\limits_{x\to1+0}\left[\ln x\ln(x-1)\right]$.

3 $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^x$.

Варіант 25

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin\dfrac{1}{x})$.

3 $\lim\limits_{x\to0}(e^{3x}+x^2)^{\frac{1}{2}x}$.

Варіант 26

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+xtgx}-2}{x^2-x}$.

2 $\lim\limits_{x\to+0}(x^2\ln x)$.

3 $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{2}{x^2-1}}$.

Варіант 27

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

2 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\ln^2 x}$.

Варіант 28

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x-x^3}$.

2 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to2}\left(tg\dfrac{\pi}{2x}\right)^{\frac{3}{x-2}}$.

Варіант 29

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln 4x}{\ln\sin 5x}$.

2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\pi-2arctgx)\ln x\right]$.

Варіант 30

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x-\ln(1+2x)}{x^2}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{2}{1+5\ln x}}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2xtgx}\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x^2-4}}$.

Додаток 6

Завдання. Провести повне дослідження функції і побудувати її графіки за результатами дослідження.

№ п/п	Задача 1	Задача 2	№ п/п	Задача 1	Задача 2
1	$y=\frac{x}{x^2+1}$	$y=\frac{e^x}{x}$	16	$y=\frac{1}{2x+x^2}$	$y=(x+4)e^{2x}$
2	$y=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$	$y=\ln(2x^2+3)$	17	$y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$	$y=\ln(x^2+2x+2)$
3	$y=\frac{x}{(x-1)^2}$	$y=x^3e^{-x}$	18	$y=\frac{x^3}{x^2+9}$	$y=xarctgx$
4	$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$y=x+2arcctgx$	19	$y=\frac{4x^3+5}{x}$	$y=\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert$
5	$y=\frac{x^2}{x^2-1}$	$y=x-\ln(x+1)$	20	$y=3\sqrt[3]{x^2}+2x$	$y=e^{\frac{1}{2-x}}$
6	$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$	$y=x-2arctgx$	21	$y=\frac{x^2+1}{x}$	$y=x+e^{-x}$
7	$y=\frac{x^3+16}{x}$	$y=\frac{1}{e^{2x}-1}$	22	$y=3\sqrt[3]{x}-x$	$y=x\ln x$
8	$y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$	$y=x^2\ln x$	23	$y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$	$y=\ln\cos x$
9	$y=\frac{x^3-1}{4x^2}$	$y=\ln\frac{x+1}{x+2}$	24	$y=\frac{x^2}{x^2+4}$	$y=\ln(1+e^{-x})$
10	$y=\frac{2}{x^2+x+1}$	$y=x-2\ln x$	25	$y=\frac{8}{x^2(x-4)}$	$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
11	$y=\frac{x^3}{x^2+2x+3}$	$y=x+\ln(x^2-4)$	26	$y=\frac{x^2-5}{x-3}$	$y=\frac{e^x}{e^x-1}$

12	$y=x+\frac{x}{3x-1}$	$y=(x^2+1)e^x$	27	$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$	$y=(x^2+4)e^{-x^2}$
13	$y=\frac{x^3-8}{2x^2}$	$y=x^2e^{-x}$	28	$y=\frac{x^2+1}{x^2}$	$y=x\ln^2 x$
14	$y=\frac{4x}{4+x^2}$	$y=\ln\frac{x}{x-1}$	29	$y=\frac{x-1}{x^2-2x}$	$y=\frac{1+\ln x}{x}$
15	$y=\sqrt[3]{1-x^3}$	$y=xe^{-x^2}$	30	$y=\frac{x^4+3}{x}$	$y=\ln(e+\frac{1}{x})$

Додаток 7

Завдання 1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції.
Завдання 2 Знайти частинні похідні другого порядку даних функції.
Завдання 3 Обчислити значення частинних похідних першого порядку даної функції в даній точці.
Завдання 4 Знайти повний диференціал першого порядку даної функції.

Варіант 1

1 $z=\frac{1}{(x-1)(y-2)}$.

2 а) $z=\cos\frac{y}{x}\sin\frac{x}{y}$;

б) $z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$.

3 $z=e^{tg(x^3-2y)}$, $M(1;\frac{1}{2})$.

4 $z=arctg\frac{x+y}{1-xy}$.

Варіант 2

1 $z=\ln(4+4x-y^2)$.

2 а) $u=r^2\cos^2\varphi$;

б) $z=\frac{2x+3y}{x-y}$.

3 $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$, $M(1;0)$.

4 $z=\sqrt{x^2-3y^3}$.

Варіант 3

1 $z=\frac{1}{x-2}-\ln(xy)$.

2 а) $z=\frac{xy-1}{x^2}$;

б) $u=arctg(x-t^2)$.

3 $z=xtg(y+1)$, $M(1;-1)$.

4 $z=\frac{1}{3}\sin^3(3x-2y)$.

Варіант 4

1 $z=\frac{3xy^2}{y^2-2x+4}$.

2 а) $z=\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^2}$;

б) $z=\ln(x^2+2y)$.

3 $z=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$, $M(2;1)$.

4 $z = \sin 3x - \cos^3 y$.

Варіант 5

1 $z = \ln x + \sqrt{y}$.

2 а) $z = (5x^3 y^2 - e^{\sin 2x})^7$;

б) $s = arctg \dfrac{\varphi t}{\varphi + t}$.

3 $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $M(3;4)$.

4 $z = e^x (\cos y + x \sin y)$.

Варіант 6

1 $z = \ln(2y + x)$.

2 а) $u = \dfrac{2x - t}{x + 2t}$;

б) $z = \arcsin(x\sqrt{y})$.

3 $z = e^{\sqrt{3y + \sin 2x}}$, $M(\dfrac{\pi}{4};0)$.

4 $z = \ln(1 + x\cos\sqrt{3}y)$.

Варіант 7

1 $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$.

2 а) $z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2}$;

б) $s = 3\cos(e^t - r)$.

3 $z = (1 + \ln \sin(xy^2))^3$, $M(\dfrac{\pi}{2};1)$.

4 $z = \sqrt[3]{2y^2 - x^3}$.

Варіант 8

1 $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(25 - x^2 - y^2)}$.

2 а) $z = y\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt{y}}$;

б) $s = \ln(\sin 3t - te^{t\varphi})$.

3 $z = \arcsin \dfrac{x+y}{xy}$, $M(3;3)$.

4 $u = r^2 \cos 2\varphi$.

Варіант 9

1 $z = \sqrt{1 - x^2 + \sqrt{1 - y^2}}$.

2 а) $z = \sin^3(2x + \dfrac{y}{x})$;

б) $s = e^{x\sqrt{t}}$.

3 $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, $M(1;0)$.

4 $z = tg^8(2x - 3y^2)$.

Варіант 10

1 $z = \arccos \dfrac{x^2 + y^2}{9}$.

2 а) $z = xe^{-xy}$;

б) $u = \ln \sin(x - 2t)$.

3 $z = \dfrac{x^2 y}{x - y}$, $M(2;1)$.

4 $z = \sqrt{\sin(xy^2)}$.

Варіант 11

1 $z = \ln(x^2 + y)$.

2 а) $z = \sqrt{x} \sin \dfrac{y}{x}$;

б) $s = e^{-\frac{3t}{x^2}}$.

Варіант 12

1 $z = \dfrac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$.

2 а) $z = \sin^2 y + \cos^3 x$;

б) $u = e^{\frac{x}{t}} \ln t$.

3 $z=\dfrac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}$, $M(\dfrac{\pi}{4};\pi)$.

4 $p=\arcsin\dfrac{\varphi}{t}$.

3 $z=\ln\left(y+\dfrac{x}{2y}\right)$, $M(2;1)$.

4 $z=arctg(\sqrt{x+2y})$.

Варіант 13

1 $z=\sqrt{3x}-\dfrac{5}{\sqrt{y}}$.

2 а) $z=xytg(\sin 2x+e^{y})$;

б) $z=\sqrt{arctg(x^3y^2)}$.

3 $u=\dfrac{t\cos\varphi-\varphi\cos t}{1+\sin t+\sin\varphi}$, $M(0;0)$.

4 $z=\ln(e^{x^3}-\sin^3 y)$.

Варіант 14

1 $z=\ln(\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}-1)$.

2 а) $z=\sin^2(x+y)+\sin 3x-\cos^3 2y$;

б) $z=\dfrac{x^3y}{x-y}$.

3 $z=e^{\sin x-2y^3}$, $M(\pi;0)$.

4 $z=tg(xy-\ln x)$.

Варіант 15

1 $z=y+\arcsin(x+2)$.

2 а) $z=(1+x\sin 2y)^2$;

б) $s=\dfrac{\cos(x\sqrt{t})}{1-xt}$.

3 $z=\sqrt[3]{x+y^2}$, $M(4;2)$.

4 $z=\ln tg\dfrac{y}{x}$.

Варіант 16

1 $z=\sqrt{x^2+y^2-4}+\ln(9-x^2-y^2)$.

2 а) $z=\dfrac{x}{y}e^{xy}$;

б) $s=\dfrac{t}{\varphi}+t\cos 3\varphi$.

3 $z=arctg\dfrac{x}{y}$, $M(2;1)$.

4 $v=\ln(x+\sqrt{x^2+t^2})$.

Варіант 17

1 $z=\sqrt{x-2y}$.

2 а) $z=arctg\sqrt{xy}$;

б) $z=t^3\ln\cos(\varphi t)$.

3 $z=\sin^2(3x+2y)$, $M(2;-3)$.

4 $z=\dfrac{4x-5y}{xy^2}$.

Варіант 18

1 $z=\dfrac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$.

2 а) $z=e^{\sin\sqrt{x}}(y^3+1)$;

б) $z=\dfrac{\ln(2+x)}{x^2y}$.

3 $u(t;\varphi)=arctg(t-3\varphi)$, $M(3;1)$.

4 $z=2\cos^2(y-\dfrac{x}{2})$.

Варіант 19

1 $z=\ln(y-1)+\sqrt{x}$.

Варіант 20

1 $z=x^2arccos\dfrac{2y}{x}$.

2 а) $z = e^{\frac{x}{y^2}}$;

б) $z = \ln\sin(x-2y)$.

3 $z = 2tg(x-\frac{y}{2})$, $M(\pi;0)$.

4 $z = x^2\cos\frac{y}{x} - 3^{xy^2}$.

Варіант 21

1 $z = \frac{3xy^2}{x^2-2y+4}$.

2 а) $z = \frac{x}{3y-2x}$;

б) $z = e^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2})$.

3 $z = \ln(x+\frac{y}{2x})$, $M(1;2)$.

4 $u = \arccos(3t-\sqrt[3]{\varphi})$.

Варіант 23

1 $z = \frac{x^3y}{(x+3)(y-1)}$.

2 а) $z = \ln(y\sqrt{x}+e^y)$;

б) $z = y\arcsin(y^3+5x^2)$.

3 $z = \frac{x\cos y - y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$, $M(1;2)$.

4 $z = \sqrt[3]{\cos(x^2y^3)}$.

Варіант 25

1 $z = \frac{4}{2x+y}$.

2 а) $z = e^{\frac{x^2}{y}} + x^2y^3$;

б) $z = \frac{x^2y}{x-\cos y}$.

2 а) $z = \frac{xy}{x^2-y}$;

б) $z = \sqrt{x}\sin\frac{x}{y}$.

3 $z = e^{\sqrt{\cos 2x+3y}}$, $M(\frac{\pi}{4};0)$.

4 $r = tg(2^{\varphi}+t\arcsin\varphi)$.

Варіант 22

1 $z = \sqrt{4+8y-x^2}$.

2 а) $z = e^{\frac{x}{y}}\ln y$;

б) $z = \sin^2(x+y^2)-\cos^3 y$.

3 $z = tg(x^2y-\ln x)$, $M(1;\pi)$.

4 $r = ctg\ln(1+\frac{\varphi}{t})$.

Варіант 24

1 $z = x+\sqrt{x^2-y^2}$.

2 а) $z = \sqrt{y}\cos\frac{x}{y}$;

б) $z = \frac{x^3}{x-y^2} + arctg\frac{2}{x}$.

3 $z = x^2y + ye^{\frac{x}{y}}$, $M(0;1)$.

4 $z = \sqrt{x-5y^3}$.

Варіант 26

1 $z = \sqrt{x-1}+\sqrt{y}$.

2 а) $z = \ln(y-2x^3)$;

б) $z = \frac{xy^2-2}{y^3}$.

3 $z = e^{tg(y^3-2x)}$, $M(\frac{1}{2};1)$.

3 $z=\sqrt{\frac{y}{x}+xy}$, $M(1;2)$.

4 $r=\cos 5\varphi-\sin^4 t$.

4 $z=\arcsin\frac{2x+y}{3-xy^2}$.

Варіант 27

1 $z=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+\ln(y-x^2)$.

2 а) $z=(5x^2y^5-e^x)^3$;

б) $z=tg\frac{xy}{x+y}$.

3 $z=(\ln\sin(x^2y)+1)^5$, $M(1;\frac{\pi}{2})$.

4 $v=\sqrt[7]{2t^3\varphi-\sqrt{\varphi}}$.

Варіант 28

1 $z=\sqrt{xy}+\ln(x^2-y)$.

2 а) $z=\log_3(\cos\frac{x}{2}-ye^{xy})$;

б) $u=t\sqrt{\varphi}-\frac{\varphi^2}{t}$.

3 $z=ytg(x+1)$, $M(-1;1)$.

4 $z=\frac{1}{4}\cos^4(5x-3y^2)$.

Варіант 29

1 $z=\sqrt{4-2x^2-4y^2}$.

2 а) $z=x\sin^3(5y-3x)$;

б) $z=\frac{x}{x^2-y^3+3}$.

3 $z=\ln\cos\frac{x}{y}$, $M(1;\frac{\pi}{4})$.

4 $z=(5x^3y^2+1)^3$.

Варіант 30

1 $z=\sqrt{\frac{y}{x+1}}$.

2 а) $z=\ln\cos\frac{y}{\sqrt{x}}$;

б) $u=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$.

3 $z=tg\frac{x^2}{y}+y$, $M(0;1)$.

4 $r=\varphi(\ln t-\ln\varphi)$.

Додаток 8

Варіант 1

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$$z=\frac{\sqrt{xy}}{y-x}+\frac{1}{x+2}.$$

2 Продиференціювати складну функцію $z=e^{xy}\ln(x+y)$, де $x=t^3$, $y=1-t^3$.

3 Показати, що функція $s=\ln(\frac{1}{x}-\frac{1}{t})$ задовольняє рівнянню $\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^2-y^2-4x+2y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=(x-y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ в замкненій області $D\{y^2\le x\le 2\}$.

Варіант 2

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z = \ln(9 - 3x - y^2)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = arctg\dfrac{x+1}{y}$, де $y = e^{(1+x)^2}$.

3 Показати, що функція $z = 2\cos^2(x - \dfrac{t}{2})$ задовольняє рівнянню

$2\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = \dfrac{xy}{2} - \dfrac{x^2 y}{6} - \dfrac{xy^2}{8}$ в замкненій області $D\{x \ge 0, y \le 0, \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} \le 1\}$.

Варіант 3

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2)$.

2 Продиференціювати складну функцію $u = y^2 + \sqrt{xz} + \dfrac{1}{\cos z}$, де $x = t + v$, $y = \dfrac{t}{v}$, $z = tv$.

3 Показати, що функція $u = arctg(2x - t)$ задовольняє рівнянню
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$.

4 Знайти екстремуми функції $z = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^4$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в замкненій області $D\{0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4\}$.

Варіант 4

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z = \dfrac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = u^2 \ln v$, де $u = \dfrac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$.

3 Показати, що функція $u = xe^{-\frac{y}{x}}$ задовольняє рівнянню

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

4 Знайти екстремуми функції $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=2x^3-4x^2-y^2-2xy$ в замкненій області $D\{y\ge x^2, y\le 4\}$.

Варіант 5

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=\dfrac{y}{x}$, де $x=e^t$, $y=\ln t$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $u=te^{-\varphi t}$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^3+xy^2+6xy$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2-y^2+18$ в замкненій області $D\{x^2+y^2\le 9\}$.

Варіант 6

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\sqrt{x+y}\ln(y^2-x^2)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=arctg\dfrac{y}{x}$, де $y=x^2$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\ln\sin(x-2t)$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2+2xy-3y^2+y$ в замкненій області $D\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le x+y\le 1\}$.

Варіант 7

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\sqrt{(x^2+y^2-4)(25-x^2-y^2)}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=u+v^2$, де $u=x^2+\sin y$, $v=\ln(x+y)$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\dfrac{2x-t}{x+2t}$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x,y)=x^3+y^2-3x-3$ в замкненій області $D\{y\le x, y\ge 0, x\le 1\}$.

Варіант 8

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\dfrac{x+y}{2x-y}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=\dfrac{x}{y}$, де $x=e^{3t}$, $y=\ln(1+t^3)$.

3 Перевірити, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, якщо $z=\ln tg\dfrac{x}{y}$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^3-7x^2+xy-y^2+9x+3y+12$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=2x^2+y^2-x$ в замкненій області $D\{\dfrac{y^2}{3}+x^2\le 1\}$.

Варіант 9

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\ln\dfrac{x+1}{y-2}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$, де $y=\sqrt{1+x^2}$.

3 Перевірити, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, якщо $z=\ln(x^2-2y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^2+xy+y^2-2x-3y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=(x^2-4)y-12x$ в замкненій області D, обмеженій лівою віткою параболи $y=(x-1)^2$ і прямими $y=x-1$ і $y=4$.

Варіант 10

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\dfrac{\sqrt{2x-y^2}}{\ln(4-x^2-y^2)}$.

2 Продиференціювати складну функцію $u=tg(3x+2y^2-z)$, де $y=\dfrac{1}{x}$, $z=\sqrt{x}$.

3 Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $z=e^x\ln y+\sin y\ln x$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ в замкненій області $D\{x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 3\}$.

Варіант 11

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z = \ln(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, де $x = \frac{1}{t}$,
$y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$.

3 Показати, що функція $z = arctg\frac{y}{x}$ задовольняє рівнянню $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

4 Знайти екстремуми функції $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy(4 - x - y)$ в області D, яка являє собою трикутник, обмежений прямими $x = 1$, $y = 0$ і $x + y = 6$.

Варіант 12

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z = \sqrt{x(2 - y)} + \ln(4 - x^2) - 3y$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = x^2 \ln y$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$.

3 Знайти $\partial^2 z$, якщо $z = x\sin^2(3y - 5)$.

4 Знайти екстремуми функції $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 + 6xy$ в замкненій області D, яка являє собою прямокутник з вершинами у точках $A(-3;-3)$, $B(-3;2)$, $C(1;2)$, $D(1;-3)$.

Варіант 13

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$, де $x = 3t^2$,
$y = \sqrt{t^2 + 1}$.

3 Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = arctg\frac{y}{x}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в замкненій області $D\{0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\}$.

Варіант 14

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=e^{2x^2-2y^2}$, де $x=\cos t$, $y=\sin t$.

3 Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, якщо $z=\ln(x^2+y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=1+3x^2+2y^3$ в замкненій області $D\{x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\}$.

Варіант 15

1 Знайти і зобразити область визначення функції
$z=\arcsin\dfrac{y}{x^2}+\arccos(1-x)$.

2 Продиференціювати складну функцію $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=3$.

3 Знайти мішану похідну другого порядку функції $z=\ln(e^x+e^y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в замкненій області $D\{x\le 0, y\le 0, x+y\ge -3\}$.

Варіант 16

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z=\ln\sqrt{x-y^2}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=\ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, де $x=2t^3$, $y=3t-1$.

3 Знайти диференціал другого порядку функції $z=e^{xy}$.

4 Знайти екстремуми функції $z=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x,y)=2x^2-2y^2$ в замкненій області $D\{x^2+y^2\le 9\}$.

Варіант 17

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$z = \arcsin(x^2 + y^2 - 16)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = u^v$, де $u = \sin x$, $v = 2x$.

3 Обчислити значення диференціала другого порядку функції $z = arctg\dfrac{y}{x}$ у точці $M(1;2)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = xy(1 - x - y)$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в замкненій області $D\{0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4\}$.

Варіант 18

1 Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = xy + \sqrt{\ln\frac{9}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}.$$

2 Продиференціювати складну функцію $z = arctg\dfrac{x}{y}$, де $x = u\sin v$, $y = u\cos v$.

3 Показати, що функція $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ задовольняє рівнянню $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 3xy$ в замкненій області $D\{x^2 + y^2 \le 2\}$.

Варіант 19

1 Знайти і зобразити область визначення функції $z = \dfrac{1}{x - 2} - \ln(xy)$.

2 Продиференціювати складну функцію $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$, де $y = x^2$.

3 Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = \sin(2x + y)$.

4 Знайти екстремуми функції $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 1 + x^2 + 2y^2$ в замкненій області $D\{x \ge 0, y \le 0, x - y \le 1\}$.

Варіант 20

1 Знайти і зобразити область визначення функції $z = y + \arcsin(x + 2)$.

2 Продиференціювати складну функцію $u = e^{z - 2y}$, де $y = x^2$, $z = \sin x$.

3 Показати, що функція $z = x^3 - 3xy^2$ задовольняє рівнянню $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^2 - 2xy + 2y^3 - y^4$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 + 3y^2 - x - 7y$ в замкненій області $D\{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

Варіант 21

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \ln(x+2) + \sqrt{y-1}$.

2 Продиференціювати складну функцію $u = v^2\omega^3 + \dfrac{\omega^2}{v^2}$, де $v = \cos y$, $\omega = \sin x$.

3 Показати, що функція $z = 2\cos^2(y - \dfrac{x}{2})$ задовольняє рівнянню

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

4 Знайти екстремуми функції $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 1 - x + 24y - 6x^2 + y^2$ в замкненій області $D\{x \le 1, x \le y^2\}$.

Варіант 22

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \dfrac{1}{(x-1)(y-2)}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = x^2 y - xy^2$, де $x = p\cos\varphi$, $y = p\sin\varphi$.

3 Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, якщо $z = x^2 \ln(3x + y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ в замкненій області $D\{y \ge x, y \le 1, x \ge 0\}$.

Варіант 23

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \dfrac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y - x}}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \dfrac{y}{x}$, де $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$.

3 Перевірити, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, якщо $z = ye^x + yx^2$.

4 Знайти екстремуми функції $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + 8y^2 - 6xy + 5$ в замкненій області $D(x \le 0, y \ge 0, x - y + 1 \ge 0\}$.

Варіант 24

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \ln(y^2 - 2x + 4)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = xe^y$, де $y = \sin 5x$.

3 Знайти диференціал другого порядку функції $z = x\cos^2(3y^2 - 5)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$ в замкненій області $D(y \le 1, x \le 1, x + y \ge 1\}$.

Варіант 25

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$$z = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{9 - y^2} .$$

2 Продиференціювати складну функцію $z = \dfrac{x^2}{y}$, де $x = u - 2v$, $y = 2u + v$.

3 Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = \sin(x + \cos y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = (x - y)^2 + (y - 1)^3$ в замкненій області $D(y \ge x, y \le 2, x \ge 1\}$.

Варіант 26

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$$z = \frac{1}{\sqrt{y - 2x}} + \frac{1}{\sqrt{y + 2x}} .$$

2 Продиференціювати складну функцію $z = e^{u-2v}$, де $u = \sin x$, $v = x^3 + y^2$.

3 Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = \dfrac{x^4 - 8xy^3}{x - 2y}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ в замкненій області $D(x - y \ge 0, x \ge 0, 1 \le y \le 2\}$.

Варіант 27

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $x = 2\sin t$,
$y = \cos 2t$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = y^{\ln x}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = 2xy - 4x - 2y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ в замкненій області $D(-1 \le x \le 0, 0 \le y \le 2\}$.

Варіант 28

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{y}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = xe^y$, де $y = 2\cos^3 x$.

3 Показати, що функція $z = \frac{xy}{x-y}$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}.$$

4 Знайти екстремуми функції $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 4y + 4$ в замкненій області $D(x + y \ge 0, y \le 1, x \le 0\}$.

Варіант 29

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \ln(x + y) + \frac{1}{y-2}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = x^2 y + 3$, де $x = uv^2$, $y = u^2 + v$.

3 Показати, що функція $z = xe^y + ye^x$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y\frac{d^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$$

4 Знайти екстремуми функції $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ в замкненій області $D(-1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\}$.

Варіант 30

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x-2}}}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=uv+tg\frac{u}{v}$, де $u=x+2y$, $v=x-y$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=e^{x}(\cos y+x\sin y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^{3}y^{2}(6-x-y)$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=(x-1)^{2}-2y^{2}$ в замкненій області $D(y\leq x, y\geq 0, x\leq 1\}$.

Варіант 31

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z=\sqrt{(x^{2}-1)(y^{2}-9)}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=u^{2}e^{uv}$, де $u=\sqrt{xy}$, $v=x+y$.

3 Знайти $\frac{\partial^{3}z}{\partial x\partial y^{2}}$, якщо $z=\sin^{2}(x+3y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^{2}+y^{2}-2x-4\sqrt{xy}-2y+8$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^{3}+y^{2}-3x-3$ в замкненій області $D(y\leq x, y\geq 0, x\leq 1\}$.

Варіант 32

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z=\frac{1}{3x-y}+\sqrt{xy-4}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=\sqrt{\frac{x+1}{y+1}}$, де $x=-\cos t$, $y=\cos t$.

3 Знайти диференціал другого порядку функції $u=x\ln\frac{y}{x}$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^{4}+y^{4}-2x^{2}+4xy-2x^{2}$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=(x-1)^{2}+2y^{2}$ в замкненій області D, яка являє собою трикутник ABC з вершинами в точках $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$.

Варіант 33

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$z = \sqrt{y(x-2)} + \ln(x+1)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \dfrac{x}{y^2}$, де $x = 2u - v$, $y = 3v + u$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \dfrac{x^2}{1-2y}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 y$ в замкненій області $D(x^2 + y^2 \leq 1\}$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: Наука, 1975.

2 Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.

3 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. Шк., 2001.

4 Мелентьєв Б.В., Оранська А.І., Харченко А.П.. Вища математика у прикладах і задачах. – Київ УМК ВО, І ч., 1992.

5 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 2т. – М.: Наука, 1985. – Т. 1.

6 Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.- М.: Наука, 1987.

7 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1970.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ХАРЧЕНКО Анатолій Петрович
ГАЄВСЬКА Вікторія Олексіївна
ЛИСЯНСЬКА Ганна Володимирівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАХ І ЗАДАЧАХ
Частина ІІ

Навчальний посібник

Роботу до видання рекомендував Іохвідович Н.Ю.

Комп'ютерне верстання Гаєвська В.О.

Підп. до друку 27.02.13 Формат А5 297х420 .
Умов. друк. арк. 14,6
Тираж 300 прим.

Видавництво "НТМТ"
Свідоцтво про Державну реєстрацію ДК № 1748 від 15.04.2004 р.
61072, м. Харків, пр. Леніна, 58 к. 106.
Тел. 763-03-80, 763-03-72

Віддруковано в друкарні ТОВ «Цифра принт»
на цифровому лазерному комплексі Xerox DocuTech 6135.
Свідоцтво про Державну реєстрацію А01 №432705 від 3.08.2009р.
Адреса: м. Харків, вул. Культури, 22–Б. Телефон: (057) 7861860.