РОЗДІЛ III. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Пряма на площині

Теоретичні відомості

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами. Відповідно різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

а) *Загальне рівняння прямої на площині*

$$Ax + By + C = 0.$$

В прямокутній декартовій системі координат дана пряма перпендикулярна вектору $\vec{n}(A, B)$, який називається *нормальним вектором* прямої.

б) *Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_o, y_o)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}(A, B)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

в) *Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_o, y_o)$ *паралельно напрямному вектору* $\vec{s}(m, n)$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

г) *Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки* $M_1(x_1, y_1)$ *та* $M_2(x_2, y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

д) *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

$$y = kx + b,$$

де $k = tg\alpha -$ *кутовий коефіцієнт*.

е) *Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_o, y_o)$ *і має кутовий коефіцієнт* k

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

є) *Рівняння прямої, що проходить через точки* $A(a, 0), B(0, b)$,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Кут φ, який відраховується проти годинникової стрілки від прямої l_1 до прямої l_2, заданих рівняннями $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, визначається

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

Якщо прямі паралельні, то $\varphi = 0, tg\varphi = 0$. Тоді $k_1 = k_2$.

Якщо прямі перпендикулярні, то $\varphi = 90^o, tg\varphi$ не існує. Тому умова перпендикулярності має вигляд

$$1 + k_1k_2 = 0 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Нехай прямі l_1, l_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$,

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

Тоді кут $\varphi = (\overrightarrow{n_1}\hat{;}\overrightarrow{n_2})$. Отже,

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Якщо прямі l_1, l_2 паралельні, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Якщо прямі l_1, l_2 перпендикулярні, то $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначають

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; -3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (4; 5)$.

Розв'язання. Використаємо рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Маємо

$$4(x - 2) + 5\big(y - (-3)\big) = 0,$$

$$4x - 8 + 5y + 15 = 0,$$

$$4x + 5y + 7 = 0.$$

Приклад 2. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1; -4)$ паралельно вектору $\vec{s} = (-3; 2)$.

Розв'язання. Використаємо рівняння $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$. Отримаємо

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y—4}{2}, \qquad \frac{x-1}{-3}-\frac{y+4}{2}=0,$$

$$\frac{2(x-1)—(-3)(y+4)}{-6}=0, \qquad 2(x-1)+3(y+4)=0,$$

$$2x-2+3y+12=0, \qquad 2x+3y+10=0.$$

Приклад 3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(-3;4)$ і $M_2(1;2)$.

Розв'язання. Рівняння прямої запишеться

$$\frac{x-(-3)}{1-(-3)}=\frac{y-4}{2-4}, \qquad \frac{x+3}{4}=\frac{y-4}{-2},$$

$$\frac{x+3}{4}-\frac{y-4}{-2}=0, \quad x+2y-5=0.$$

Приклад 4. Знайти точку перетину даних прямих $4x-3y+9=0,\ 3x+2y-23=0.$

Розв'язання. Координати шуканої точки задовольняють обидва рівняння прямих і тому знаходяться із системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x-3y+9=0 \\ 3x+2y-23=0. \end{cases}$$

Розвяжемо наступну систему за формулами Крамера

$$\begin{cases} 4x-3y=-9 \\ 3x+2y=23. \end{cases}$$

В результаті матимемо $\Delta=17,\ \Delta_1=51,\ \Delta_2=119.$ Звідси

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{51}{17}=3, \qquad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{119}{17}=7.$$

Отже, точка перетину прямих – $(3;7)$.

Приклад 5. Знайти рівняння прямої, яка відтинає від осі Oy відрізок $b=4$ і утворює кут $\alpha=60^{\circ}$ з додатнім напрямом осі Ox.

Розв'язання. Використаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом. Так як $k=tg\alpha=tg60^{\circ}=\sqrt{3}$, то шукане рівняння $y=\sqrt{3}x+4$.

Приклад 6. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-3;2)$ і паралельна до прямої $2x+5y+7=0$.

Розв'язання. Шукана пряма перпендикулярна до нормального вектора заданої прямої $\vec{n} = (2; 5)$. Звідси матимемо:

$$2(x-3)+5(y-2)=0,$$

$$2x+6+5y-10=0,$$

$$2x+5y-4=0.$$

Приклад 7. Вершини трикутника мають координати $A(4;3), B(1;8)$, $C(8,4)$. Знайти рівняння висоти цього трикутника, проведеної з вершини A до сторони BC.

Розв'язання. Висота AK проходить перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (8-1; 4-8) = (7; -4)$.

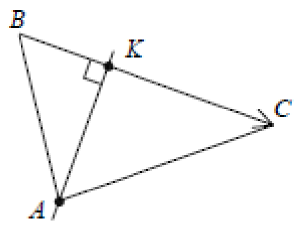

Рис.7

Складемо і розв'яжемо рівняння:

$$7(x-4)-4(y-3)=0,$$

$$7x-28-4y+12=0,$$

$$7x-4y-16=0.$$

Приклад 8. Перевірити, чи перпендикулярні прямі:

а) $3x-2y+4=0$ і $4x+6y-3=0$;

б) $y=2x-7$ і $y=-\frac{2}{3}x+3$.

Розв'язання.

а) В даній задачі $A_1 = 3, B_1 = -2, A_2 = 4, B_2 = 6$.

Так як $3 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 = 0$, то прямі перпендикулярні.

б) В даній задачі $k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{2}{3}$. Так як $k_1 \cdot k_2 \neq -1$, то прямі перпендикулярні.

Питання для самоперевірки

1. Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?

2. Запишіть рівняння прямої: а) яка проходить через задану точку у заданому напрямі; б) через дві задані точки; в) загальне рівняння прямої; г) рівняння прямої у відрізках на осях.

3. Як знайти кутовий коефіцієнт прямої, заданої загальним рівнянням?

4. Сформулюйте умову паралельності та перпендикулярності двох прямих.

5. Як записати рівняння прямої , яка проходить через початок координат?

6. За якою формулою обчисляється відстань від точки до прямої?

Вправи

1. Визначити, які з точок $M_1(3;5), M_2(-1;4), M_3(4;-2)$, лежать на прямій $7x + y - 26 = 0$.

Відповідь: M_1 і M_3.

2. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(-3;4)$.

Відповідь: $-3x + 4y + 13 = 0$.

3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;2)$ паралельно вектору $\vec{s}(2;5)$.

Відповідь: $5x - 2y - 11 = 0$.

4. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(3;-1)$ і $M_2(2;4)$.

Відповідь: $5x + y - 14 = 0$.

5. Знайти рівняння прямої, яка відтинає від осі Oy відрізок $b = -2$ і утворює кут $\alpha = 45^{\mathrm{o}}$ з додатнім напрямом осі Ox.

Відповідь: $y = x - 2$.

6. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;2)$ перпендикулярно до прямої $2x + 5y + 7 = 0$.

Відповідь: $5x - 2y - 11 = 0$.

7. Відомі координати вершин трикутника $A(2;3), B(8;7), C(-2;9)$. Знайти рівняння середньої лінії цього трикутника, яка параельна до сторони AC.

Відповідь: $3x+2y-25=0$.

8. Перевірити, чи паралельні прямі:

а) $6x-4y+7=0$ і $3x+2y+1=0$;

б) $y=2x+3; y=2x-1$.

Відповідь: а) ні; б) так.

Пряма і площина в просторі

Теоретичні відомості

Є кілька типів рівнянь площини у просторі.

а) *Загальне рівняння площини* $Ax + By + Cz + D = 0$, де $\vec{n} = (A, B, C) -$ *вектор нормалі.*

б) *Рівняння площини, що проходить через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *і має вектор нормалі* $\vec{n} = (A, B, C)$ має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

в) *Рівняння площини у відрізках на осях* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

г) *Рівняння площини, що проходить через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Кут між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ обчислюють

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

де $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2) -$ нормальні вектори даних площин.

Умова перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умова паралельності

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини збігаються, якщо виконується умова

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Є декілька типів рівнянь прямої у просторі.

а) *Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_o, y_o, z_0)$ *паралельно напрямному вектору* $\vec{s}(m, n, p)$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \text{ (}\textit{канонічне рівняння}\text{)}$$

У *параметричній формі* ці рівняння мають вигляд

$$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt,\ t\epsilon R.$$

б) *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$ записується у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

в) Дві площини, що перетинаються $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$ де $\overrightarrow{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$, $\overrightarrow{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$, $\overrightarrow{n_1}$ не паралельний до $\overrightarrow{n_2}$, однозначно задають пряму. Таке рівняння називається *загальним рівнянням прямої в просторі*.

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою

$$|cos(\widehat{\vec{n},\vec{s}})|=sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-1;2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(2;4;-3)$.

Розв'язання. Рівняння площини має вигляд

$$2(x-3)+4(y+1)+(-3)(z-2)=0,$$

$$2x-6+4y+4-3z+6=0,$$

$$2x+4y-3z+4=0.$$

Приклад 2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;4;-3)$ паралельно векторам $\overrightarrow{s_1}=(2;-3;-1)$, $\overrightarrow{s_2}=(-3;2;0)$.

Розв'язання. Рівняння площини запишеться

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-4 & z-(-3)\\ 2 & -3 & -1\\ -3 & 2 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Безпосереднім обчисленням матимемо шукане рівняння площини

$$2x + 3y - 5z - 29 = 0.$$

Приклад 3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3; -2; 2)$ паралельно площині $2x - 2y + 5z + 4 = 0$.

Розв'язання. Задана площина перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (2; -2; 5)$. Тому, внаслідок паралельності площин, шукана площина також перпендикулярна до цього вектора. Її рівняння буде мати вигляд

$$2(x - 3) - 2\big(y - (-2)\big) + 5(z - 2) = 0.$$

Після спрощення $2x - 2y + 5z - 20 = 0$.

Приклад 4. Знайти відстань між двома паралельними площинами $2x - y + 2z + 9 = 0$ і $-4x + 2y - 4z + 21 = 0$.

Розв'язання. На одній із площин, наприклад, першій, виберемо довільну точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і обчислимо відстань від цієї точки до другої площини. Нехай $x_0 = z_0 = 0$. З першого рівняння знаходимо $2 \cdot 0 - y_0 + 2 \cdot 0 + 9 = 0$. Звідси $y_0 = 9$. Знаходимо відстань від точки $M_0(0; y_0; 0)$ до другої площини:

$$d = \frac{|-4 \cdot 0 + 2 \cdot 9 - 4 \cdot 0 + 21|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = 6{,}5.$$

Приклад 5. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; -3; 1)$ паралельно вектору $\vec{s}(4; 3; -2)$.

Розв'язання. Канонічне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 3}{3} = \frac{z - 1}{-2}.$$

Знайдемо параметричні рівняння:

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 3}{3} = \frac{z - 1}{-2} = t;$$

$$\begin{cases} \dfrac{x - 2}{4} = t, \\ \dfrac{y + 3}{3} = t, \\ \dfrac{z - 1}{-2} = t. \end{cases}$$

Звідки маємо рівняння прямої у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 + 3t, \\ z = 1 - 2t, t\epsilon R. \end{cases}$$

Приклад 6. Пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 11 = 0, \\ 3x = 2y + z - 17 = 0. \end{cases}$$

Знайти напрямний вектор цієї прямої.

Розв'язання. За напрямний вектор прямої можна взяти векторний добуток нормальних векторів даних площин $\overrightarrow{n_1} = (2; 1; -3), \overrightarrow{n_2} = (3; 2; 1)$:

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$(1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2)\vec{i} - (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3)\vec{j} + (2 \cdot 1 - 1 \cdot 3)\vec{k} = 7\vec{i} - 11\vec{j} + \vec{k}.$$

Отже, напрямний вектор $\vec{s} = (7; -11; 1)$.

Питання для самоперевірки

1. Який вектор називається нормальним вектором площини?

2. Виведіть рівняння площини, що проходить через дану точку і має даний нормальний вектор.

3. Отримайте загальне рівняння площини і проведіть його аналіз.

4. Як знайти кут між двома площинами?

5. Запишіть умову паралельності й умову перпендикулярності двох площин.

6. Запишіть рівняння прямої: параметричне, загальне, через дві дані точки.

7. Як перейти від загального рівняння прямої до канонічного?

8. Як знайти кут між двома прямими?

9. Як знайти кут між прямою і площиною?

10. Запишіть умову паралельності та перпендикулярності прямої і площини.

Вправи

1. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;5;-2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(-2;1;4)$.

Відповідь: $-2x + y + 4z + 9 = 0$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1;-2;4)$ паралельно векторам векторам $\vec{s}_1 = (3;1;-2)$; $\vec{s}_2 = (2;2;1)$.

Відповідь: $5x - 7y + 4z - 25 = 0$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1;-3;2)$, $M_2(2;0;3)$, $M_3(-1;-3;2)$.

Відповідь: $20x - 17y - 9z - 13 = 0$.

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;1;-4)$ паралельно площині $2x - 2y + 5z - 7 = 0$.

Відповідь: $2x - 2y + 5z + 16 = 0$.

5. Знайти кут між площинами $x - 2y + 2z - 3 = 0$ і $3x + 4y - 7 = 0$.

Відповідь: $arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

6. Чи паралельні площини $2x - 3y + 5z + 8 = 0$, $-4x + 5y - 10z + 7 = 0$?

Відповідь: ні.

7. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1;7)$ паралельно вектору $\vec{s} = (4;-1;3)$.

Відповідь: $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-7}{-3}$, $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = 1 - t, \\ z = 7 - 3t. \end{cases}$

8. Пряма задана загальними рівняннями $\begin{cases} 3x - y - 2z + 5 = 0 \\ x + 2y - 2z + 2 = 0. \end{cases}$ Знайти її канонічне рівняння.

Відповідь: $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{7}$.

9. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ і площини $2x - 3y + +z - 14 = 0$.

Відповідь: $M(-1;-5;1)$.