РОЗДІЛ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 4. Вектори та операції над ними

Теоретичні відомості

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано початок A і кінець B. Позначення вектора: $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Довжиною (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка, яким він зображається. Позначення: $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$.

Вектор $\vec{a}$ називається *одиничним*, якщо $|\vec{a}| = 1$.

Вектор, початок та кінець якого співпадають, називається *нульовим* вектором. Позначення: $\vec{0}$.

Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *рівними*, якщо вони однаково напрямлені та мають рівні модулі.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число t називають вектор $\vec{c}$, що:

1) $|\vec{c}| = |t||\vec{a}|$;

2) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $t > 0$ та $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $t < 0$.

Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, проведений з початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, при умові, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$ (правило трикутника).

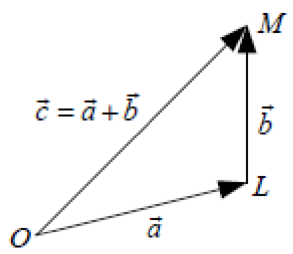

Рис. 1

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, то суму $\vec{a} + \vec{b}$ можна знайти за правилом паралелограма, яке ілюструється наступним рисунком:

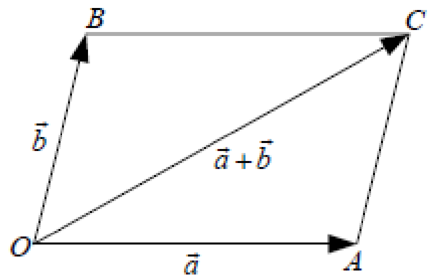

Рис. 2

Різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають суму векторів $\vec{a}$ та $(-1)\vec{b}$, тобто

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\,\vec{b}.$$

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається *ортонормованим базисом.* Позначають ортонормований базис через вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, що за напрямом збігаються з осями *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Довільний вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \text{ або } \vec{a} = \left(a_x;\ a_y;\ a_z\right).$$

Якщо точка $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ – початок вектора, а точка $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ – його кінець, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$

Довжину вектора $\vec{a} = \left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$ шукають

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}.$$

Вектори $\vec{a} = \left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$ і $\vec{b} = \left(b_x;\ b_y;\ b_z\right)$ колінеарні тоді і лише тоді, коли їх відповідні координати пропорційні.

Три вектори, що лежать в одній площині або у паралельних площинах, називаються *компланарними.*

Вектори $\vec{a} = \left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x;\ b_y;\ b_z\right)$, $\vec{c} = \left(c_x;\ c_y;\ c_z\right)$ компланарні тоді і лише тоді, коли

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Для векторів $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z), \vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ та $\alpha = const$ виконується:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z);$$

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha a_x;\ \alpha a_y;\ \alpha a_z).$$

Напрямними косинусами вектора $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ називають косинуси кутів α, β, γ, які вектор $\vec{a}$ утворює з додатними напрямами осей координат:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}};\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}.$$

Виконується співвідношення

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ортом $\overrightarrow{a_0}$ *вектора* $\vec{a}$ називають одиничний вектор, координатами якого є напрямні косинуси: $\overrightarrow{a_0} = (\cos\alpha;\ \cos\beta; \cos\gamma)$. Виконується $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Нехай задано вектори $\vec{a}$ і $\overrightarrow{AB}$. *Проекцію вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вектор* $\vec{a}$ (позначення $\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}$) обчислюють

$$\text{пр}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi,$$

де φ – кут між $\vec{a}$ і $\overrightarrow{AB}$.

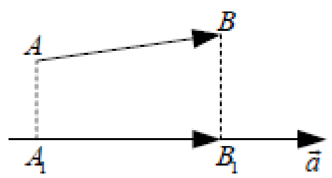

Рис. 3

Приклади розв’язування вправ

Приклад 1. Дано $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19$ і $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Обчислити $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Розв’язання. Зобразимо на рисунку $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$:

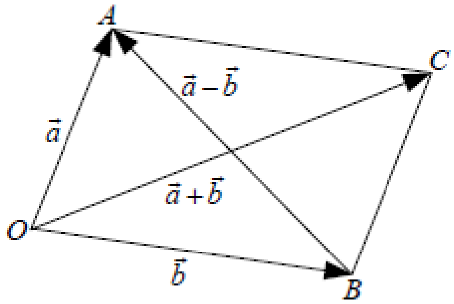

Рис. 4

Вектори $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$ є діагоналями паралелограма. Для знаходження довжини діагоналі скористаємось наступною властивістю паралелограма:

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=2\left(\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\right).$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left(|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right),\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2|\vec{a}|^2+2\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2;$$

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{2\cdot 13^2+2\cdot 19^2-24^2}=\sqrt{484}=22.$$

Приклад 2. Обчислити довжину вектора $\vec{a}=(6;3;\ -2)$ і його напрямні косинуси.

Розв'язання. Довжина вектора $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=7$;

$$\cos\alpha=\frac{6}{7};\cos\beta=\frac{3}{7};\cos\gamma=\frac{-2}{7}.$$

Приклад 3. Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями Ox, Oy кути $\alpha=60^0, \beta=120^0$. Обчислити його координати, якщо $|\vec{a}|=2$.

Розв'язання. За формулами $a_x=|\vec{a}|\cos\alpha=2\cdot\cos 60^0=2\cdot\frac{1}{2}=1$ $a_y=2\cdot\cos 120^0=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$. Далі $4=1+1+a_z{}^2$; звідки $a_z=\pm\sqrt{2}$. Таким чином, $\vec{a}=\{1;\ -1;\ \sqrt{2}\}$ або $\vec{a}=\{1;\ -1;\ -\sqrt{2}\}$.

Приклад 4. Знайти координати точки M, якщо її радіус-вектор утворює з координатними осями однакові кути, а модуль радіуса-вектора дорівнює 3.

Розв'язання. За умовою $\left|\overrightarrow{OM}\right|=|\vec{r}|=3$ і $\alpha=\beta=\gamma$. Тому $3cos^2\alpha=1$, звідки $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким чином

$$r_x=r_y=r_z=3\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pm\sqrt{3}.$$

Отже, умові задачі задовольняють дві точки: $M_1 = \left(-\sqrt{3};\ -\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right)$, $M_2 = \left(\sqrt{3};\ \sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$.

Приклад 5. Знайти точку N, з якою збігається кінець вектора $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$, якщо його початок є точка $M(1; 2;\ -3)$.

Розв'язання. Нехай точка N має координати x, y, z. Тоді $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = \{x_N - 1;\ y_N - 2;\ z_N + 3\}$, а за умовою $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$.

Тоді $x_N - 1 = 3$, $y_N - 2 = -1$, $z_N + 3 = 4$. Звідки $x_N = 4$, $y_N = 1$, $z_N = 1$. Шукана точка $N(4; 1; 1)$.

Приклад 6. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}\,|$.

Розв'язання. Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, то перпендикуляр, побудований на них, вироджується в прямокутник. На основі властивостей діагоналей паралелограма, зокрема прямокутника, одержимо $2\left|\vec{a} + \vec{b}\,\right|^2 = 2(25 + 144)$. Звідки $\vec{a} + \vec{b} = 13$.

Приклад 7. Обчислити модулі суми і різниці векторів $\vec{a} = \{3;\ -5;\ 8\}$ і $\vec{b} = \{-1;\ 1;\ -4\}$.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$. Маємо

$\vec{a} + \vec{b} = \{3 - 1;\ -5 + 1;\ 8 - 4\} = \{2;\ -4; 4\}, \vec{a} - \vec{b} = \{3 + 1;\ -5 - 1; 8 + 4\} = \{4;\ -6; 12\}$. Далі знайдемо довжини векторів:

$\left|\vec{a} + \vec{b}\,\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6, \left|\vec{a} - \vec{b}\,\right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = 14.$

Приклад 8. Дано точки $A(1;\ -2; 2), B(3; 1; 7)$. Знайти проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ на осі координат.

Розв'язання. Координати вектора в прямокутній системі координат є проекціями цього вектора на осі, тобто $\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$, $\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1 = 1 - (-2) = 3$, $\text{пр}_{Oz}\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1 = 7 - 2 = 5$.

Приклад 9. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (3; 2; -4), \vec{b} = (-6; -4; 8)$.

Розв'язання. Вектори колінеарні, якщо їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}=\frac{-4}{8};\ -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Отже, вектори колінеарні.

Приклад 9. Написати розклад вектора $\vec{x}(2;5;0)$у базисі $\overrightarrow{e_1}=(1;2;-1)$, $\overrightarrow{e_2}=(3;6;1)$, $\overrightarrow{e_3}=(3;9;3)$.

Розв'язання. Використаємо формулу розкладу вектора за базисом

$$\vec{x}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}.$$

Підставимо координати

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\9\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}.$$

Розв'язком цієї системи є $x_1=1, x_2=0, x_3=\frac{1}{3}$. Тоді $\vec{x}=\overrightarrow{e_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{e_3}$ – розклад вектора $\vec{x}$ в базисі $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$.

Питання для самоперевірки

1. Що називається вектором і довжиною вектора?

2. Які вектори називаються колінеарними, компланарними, рівними між собою?

3. Які дії над векторами називають лінійними? Сформулюйте їх властивості.

4. Що називається базисом на площині, у просторі?

5. Як знайти координати вектора, якщо відомі координати його початкової та кінцевої точок?

6. Дайте означення напрямних косинусів вектора. Сформулюйте їх властивості.

7. Чому дорівнює проекція вектора на вісь?

8. Що називають ортом вектора і як він знаходиться?

9. Як розкласти вектор по координатному базису?

10. Як виконати додавання, віднімання та множення вектора на число, якщо відомі координати векторів?

11. Як знайти модуль вектора, заданого координатами?

Вправи

1. Відомі дві координати вектора: $a_x = 4$, $a_y = -12$. Знайти a_z, якщо $|\vec{a}| = 13$.

Відповідь: $a_z = \pm 3$.

2. Знайти початок вектора $\vec{a} = \{2;\ -3; -1\}$, якщо його кінець точка $M(1; -1; 2)$.

Відповідь: $(-1; 2; 3)$.

3. Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями Ox, Oy кути $\alpha = 40^0, \beta = 80^0$. Знайти кут який утворює цей вектор з віссю Oz.

Відповідь: 128^0

4. Відомі три послідовні вершини паралелограма $A(1; -2; 3), B(3; 2; 1)$, $C(6; 4; 4)$. Знайди четверту вершину.

Відповідь: $D(4; 0; 6)$.

5. Побудувати вектор $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$. Знайти його довжину та напрям.

Відповідь: $|\vec{a}| = 7, \cos\alpha = \frac{2}{7},\ \cos\beta = \frac{3}{7},\ \cos\gamma = \frac{6}{7}$.

Добутки векторів

Теоретичні відомості

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ називається число (скаляр), що обчислюється за формулою $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|cos\varphi,$ де φ — кут між цими векторами.

Якщо $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ є

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Кут між двома векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$;

3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$;

4. $(\vec{a}\vec{a}) = |\vec{a}|^2$; $\sqrt{(\vec{a})^2} = |\vec{a}|$;

5. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0,$ якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, і навпаки $(\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0)$.

6. $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0,$ то кут φ − гострий, $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0,$ то кут φ − тупий.

7. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ *на* $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ такий, що:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot sin\varphi,$ де φ — кут між двома векторами;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Позначення: $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$.

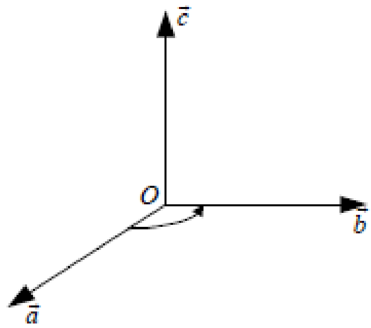

Рис. 5

Якщо $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, то

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}||\vec{b}$.

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

3. $(\alpha\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$.

4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

5. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{паралелограма}}$.

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Позначення: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Властивості мішаного добутку:

1. $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = V_{\text{паралелепіпеда}}$.

2. Умова компланарності трьох векторів заданих в координатах:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Дано три точки $A(1;1;1), B(2;2;1), C(2;1;2)$. Знайти кут BAC.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB} = \{1;1;0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1;0;1\}$. Згідно з формулою кута між векторами маємо:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, кут $BAC = 60^{\circ}$.

Приклад 2. Дано вершини чотирикутника $A(1;-2;2), B(1;4;0)$, $C(-4;1;1), D(-5;-5;3)$. Довести, що діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори діагоналей $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{AC} = \{-5;3;-1\}$, $\overrightarrow{BD} = \{-6;-9;3\}$. Обчислимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (-5)\cdot(-6) + 3\cdot(-9) + (-1)\cdot 3 = 0.$$

Оскільки скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони взаємно перпендикулярні. Отже, взаємно перпендикулярні і діагоналі чотирикутника.

Приклад 3. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - \vec{k}, \vec{b} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} -$ $-\overline{12k}$. Обчислити проекцію $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Розв'язання. За формулою $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \frac{\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{c}|}$.

Знайдемо $\vec{a}+\vec{b} = \{4;-2;-6\}$. Скориставшись формулою проекції та скалярного добутку, отримаємо

$$\text{Пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \frac{3\cdot 4 + (-4)\cdot(-2) + (-12)\cdot(-6)}{\sqrt{9+16+144}} = 4.$$

Приклад 4. Дано вершини трикутника $A(-1;-1;2), B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Розв'язання. З елементарної математики відомо, що $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BD$. Звідки шукана висота

$$BD = \frac{2S}{AC}.$$

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB} = \{4; -5; 0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{0; 4; -3\}$.

Тоді $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+9} = 5$, а $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Оскільки

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}.$$

Тоді $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 25$. Отже, $2S_{\Delta ABC} = 25$, $BD = \frac{2S}{AC} = \frac{25}{5} = 5$.

Приклад 5. Установити чи компланарні вектори $\vec{a} = \{2; 3; 1\}, \vec{b} = \{1; -1; 3\}, \vec{c} = \{1; 9; -11\}$.

Розв'язання.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 22 + 9 + 9 + 1 + 33 - 54 = 20.$$

Отже, вектори не компланарні.

Приклад 6. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1), D(4; 1; 3)$.

Розв'язання. Відомо, що $V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6}V_{\text{піраміди}}$.

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB} = \{3; 6; 3\}, \overrightarrow{AC} = \{1; 3; -2\}, \overrightarrow{AD} = \{2; 2; 2\}$. Таким чином, їх мішаний добуток

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Звідки, $V_{\text{піраміди}} = |-18| = 18, V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$ куб. од.

Питання для самоперевірки

1. Що називається скалярним добутком двох векторів?

2. Які властивості має скалярний добуток векторів?

3. Як виражається скалярний добуток двох векторів через їх координати?

4. Що називається векторним добутком двох векторів? Сформулюйте його властивості.

5. Як виражається векторний добуток двох векторів через їх координати?

6. Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності векторів.

7. Що називається мішаним добутком трьох векторів? Сформулюйте його властивості.

8. Як знайти мішаний добуток трьох векторів, якщо відомі їхні координати?

9. У чому полягає умова компланарності трьох векторів?

Вправи

1. За якого значення α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \overrightarrow{2k}$ будуть перпендикулярні?

Відповідь: $\alpha = 4$.

2. Дано вектори $\vec{a} = \{1; -3; 4\}, \vec{b} = \{3; -4; 2\}, \vec{c} = \{-1; 1; 4\}$. Обчислити $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

Відповідь: 5.

3. Дано вектори $\vec{a} = \{3; -1; -2\}, \vec{b} = \{1; 2; -1\}$. Знайти координати вектора $\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{b}$.

Відповідь: $\{10; 2; 14\}$.

4. Дано три послідовні вершини паралелограма $A(-3; -2; 0), B(3; -3; 1)$, $C(5; 0; 2)$. Знайти його четверту вершину D та кут між векторами $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

Відповідь: $D(-1; 1; 1)$; $\left(\overrightarrow{AC}\,\hat{}\,\overrightarrow{BD}\right) = 120^0$.

5. Установити, чи компланарні вектори $\vec{a} = \{2; -1; 2\}, \vec{b} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = \{3; -4; 7\}$.

Відповідь: компланарні.

6. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1), D(4; 1; 3)$.

Відповідь: 3 куб. од.