РОЗДІЛ IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Обчислення границь

Теоретичні відомості

Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число N_0, що для $n > N_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. При цьому кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *збігається* до числа a. Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \to a$.

Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Число A називають *границею функції* $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $|x| > \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

При обчисленні границь зручно використовувати ряд їх властивостей:

I (арифметичні властивості границь)

Якщо існують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

а) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} [\mathrm{c} \cdot g(x)] = \mathrm{c} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

г) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

II (границя суперпозиції функцій)

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ та $\lim\limits_{x\to a} f(t) = A$, то існує границя складної функції $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = A$.

Використовуються також границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (перша визначна границя)};$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ (друга визначна границя)}.$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Показати, що послідовність $\frac{3}{4}; \frac{5}{7}; \frac{7}{10}; \dots; \frac{2n+1}{3n+1}; \dots$ має границю число $\frac{2}{3}$.

Розв'язання. Загальний член послідовності $x_n = \frac{2n+1}{3n+1}$. Тому

$$x_n - \frac{2}{3} = \frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3} = \frac{3(2n+1) - 2(3n+1)}{3(3n+1)} = \frac{1}{3(3n+1)}.$$

Задамо додатнє число ε. Розглянемо нерівність $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, тобто $\frac{1}{3(3n+1)} < \varepsilon$. Помножимо обидві частини останньої нерівності на $\frac{3n+1}{\varepsilon}$: $\frac{1}{3\varepsilon} < 3n+1$, звідки $n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$.

Якщо за N_0 в означенні границі послідовності взяти число $N_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 1\right)$, то для всіх $n > N_0$ виконуватиметься умова $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$. Це означає, що $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$.

Приклад 2. Обчислити $\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 2)$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ($D(f) = (-\infty; +\infty)$) є елементарною, то для обчислення її границі підставимо в аналітичний вираз функції замість аргументу його граничне значення. Одержимо,

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 2) = 4 - 6 + 2 = 0.$$

Приклад 3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{1^3-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$$

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\frac{2\cdot 1^2+1-3}{1^2+5\cdot 1-6}=\frac{0}{0}.$$

Розкладемо чисельник та знаменник дробу на множники. Розглянемо рівняння $2x^2+x-3=0$. Його корені $x_1=1, x_2=-\frac{3}{2}$.

Отже, $2x^2+x-3=2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x-1)(2x+3)$.

Аналогічно, розв'язавши рівняння $x^2+5x-6=0$, одержимо

$x_1=1,\ x_2=-6$. Тому $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$. Отже,

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+3)}{(x+6)}=\frac{5}{7}.$$

Приклад 5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

Розв'язання. При $x=2$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю. Скористаємось основною властивістю дробу і помножимо чисельник і знаменник на вираз, який є спряжений до чисельника.Одержимо,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{2+7}+3}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{4x^2-x}$.

Розв'язання. В даному прикладі маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Щоб розкрити дану невизначеність, поділимо чисельник і знаменник на x у найвищому степені, тобто на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{4x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}=$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Використаємо першу визначну границю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3.$$

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg\ 2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg\ 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5x}{2x}\cdot\cos 2x\right] =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x = \frac{5}{2}.$$

Приклад 8. $\lim\limits_{x\to 1} 2^{\frac{3x}{x+2}}$.

Розв'язання. Використаємо другу визначну границю

$$\lim_{x\to 1} 2^{\frac{3x}{x+2}} = 2^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x}{x+2}} = 2^{\frac{3\cdot 1}{1+2}} = 2.$$

Приклад 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x+1}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{2}{1}} = 4.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ та $x \to \infty$?

2. Сформулюйте правила граничного переходу у випадку арифметичних дій.

3. Чому дорівнює границя сталої величини?

4. Які існують типи невизначеностей?

5. Сформулюйте першу і другу визначну границю.

Вправи

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

Відповідь: а) 9, б) $-\frac{2}{5}$, в) $\frac{1}{2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

Відповідь: а) 0, б) $-\frac{1}{56}$, в) 0.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Відповідь: а) $\frac{2}{3}$, б) 0, в) e^6.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$.

Відповідь: а) -2, б) $\frac{5}{3}$, в) $-\frac{1}{2}$.

Неперервність функції

Теоретичні відомості

Згідно з означенням, *функція* $f(x)$ *неперервна в точці* x_0, якщо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = 0.$$

Це означення рівносильне такому: *функція* $f(x)$ *неперервна в точці* x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Для неперервності функції в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0),$$

де $f(x_0-0)-$ ліва границя функції, $f(x_0+0)-$ права границя, $f(x_0)-$ значення функції в точці x_0.

Класифікація точок розриву

1. $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$, x_0- усувна точка розриву першого роду.

2. $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, x_0- не усувна точка розриву першого роду. Різниця $f(x_0-0)-f(x_0+0)-$ стрибок функції.

3. Якщо хоча б одна з границь $f(x_0-0), f(x_0+0)$ не існує або рівна нескінченності, то x_0- точка розриву другого роду.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Довести, що при $x=3$ функція $y=\frac{x+1}{x-3}$ має розрив та встановити його характер.

Розв'язання. При $x=3$ функція має розрив, оскільки це значення належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Обчислимо:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x+1}{x-3} = -\infty,\ \lim_{x\to 3+0}\frac{x+1}{x-3} = +\infty.$$

Отже, функція при $x\to 3$ не має скінченних односторонніх границь (і не визначена у цій точці). Тому $x=3$ є точкою розриву другого роду.

Приклад 2. Дослідити функцію $y = arctg\ \frac{1}{x-2}$ на неперервність.

Розв'язання. Функція $y = arctg\ t$ є основною елементарною функцією з областю визначення $t\epsilon(-\infty, +\infty)$. Функція $t = \frac{1}{z} = z^{-1}$ також елементарна і визначена при $z\epsilon(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, тобто $z \neq 0$. Але функція $z = x - 2$ також елементарна і визначена при $x\epsilon(-\infty, +\infty)$. Тобто єдиною точкою, що не належить області визначення функції $y = arctg\ \frac{1}{x-2}$, є точка $x = 2$. Тому $x = 2$ є точкою розриву.

З'ясуємо характер цього розриву. При $x \to 2 - 0$ маємо $\frac{1}{x-2} \to -\infty$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2-0} arctg\ \frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}$. При $x \to 2 + 0$ маємо $\frac{1}{x-2} \to +\infty$. Звідси $\lim\limits_{x\to 2+0} arctg\ \frac{1}{x-2} = +\frac{\pi}{2}$. Односторонні границі скінченні, але не рівні. Тому $x = 2$ є точкою неусувного розриву першого роду зі стрибком

$$f(2+0) - -f(2-0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Приклад 3. З'ясувати характер розриву функції $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ і точці $x = 2$.

Розв'язання. При $x = 2$ функція не визначена. Оскільки

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

Тому функція y в точці $x = 2$ має усувний розрив.

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$.

Розв'язання. При $x = 1$ функція має розрив, оскільки це значення не належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Для цього знайдемо односторонні границі при $x \to 1$.

Якщо $x \to 1 - 0$, то $\frac{1}{x-1} \to -\infty$ і $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0$.

Якщо $x \to 1 + 0$, то $\frac{1}{x-1} \to +\infty$ і $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$.

Оскільки права границя не є скінченною, то функція у точці $x = 1$ має розрив другого роду.

Приклад 5. Дослідити на неперервність функцію

$$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{якщо } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 2, & \text{якщо } x \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана функція не є елементарною. Тому з того, що вона визначена при $x\epsilon(-\infty, +\infty)$, висновок про відсутність точок розриву зробити не можна. Але функції $y = x, y = \sin x,\ y = 2$ елементарні. Тому у внутрішніх точках відповідних проміжків їх задання $(-\infty, 0], \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ розривів не існує. Отже, розриви функція може мати у точках $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розглянемо $x_1 = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} x = 0,$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \sin x = 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Оскільки $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$, то функція неперервна у точці $x_1 = 0$.

Розглянемо $x_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} 2 = 2,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Оскільки $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)$, то функція $f(x)$ має в точці $x_2 = \frac{\pi}{2}$ неусувний розрив першого роду зі стрибком $f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2 - 1 = 1.$

Питання для самоперевірки

1. Дати різні означення неперервності функції $f(x)$ в точці x_0.
2. Записати необхідну і достатню умову неперервності функції в точці.
3. Які точки називають точками розриву функції?
4. Що являють собою односторонні границі функції?

5. Які точки можуть бути точками розриву елементарної функції?
6. Дати класифікацію точок розриву.

Вправи

1. Довести, що при $x = 5$ функція $y = \frac{x}{5-x}$ має розрив.

2. З'ясувати характер розриву функції $y = \frac{1}{1+2^{1/1-x}}$ при $x = 1$.

Відповідь: 1-го роду, неусувний.

3. З'ясувати характер розриву функції $y = \frac{\sin x}{x}$ у точці $x = 0$.

Відповідь: 1-го роду, усувний.

4. Дослідити функцію $y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$ на неперервність.

Відповідь: x_1=1, $x_2 = 3$ − точки розриву 2-го роду.

5. Дослідити функцію $y = \frac{x^3-8}{x-2}$ на неперервність.

Відповідь: $x_2 = 2$ − точка усувного розриву.

6. Дослідити функцію на неперервність

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x_2 = 0$ − точка розриву 2-го роду.

7. Дослідити функцію на неперервність

$$f(x) = \begin{cases} 1 + tg\, x, -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ \cos x, \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}$ − точка неусувного розриву.