Застосування похідної

План

1. Розкриття невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ ***та*** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

2. Перетворення невизначеностей виду

$(\mathbf{0}\cdot\infty); (\mathbf{0^0});\ (\infty^{\mathbf{0}});\ (\mathbf{1}^\infty); (\infty-\infty)$ ***до виду*** $\left(\frac{0}{0}\right)$ ***або*** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

3. Формула Тейлора для многочлена

4. Формула Тейлора для функції. Різні форми залишкового члена

5. Розклад за формулою Маклорена функцій $\boldsymbol{e^x}; \boldsymbol{sinx}; \boldsymbol{cosx}; \boldsymbol{ln(1+x)}$.

1. Розкриття невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ *та* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Теорема 1(Перше правило Лопіталя). *Нехай функції* $f(x),\varphi(x)$ *є неперервними і диференційованими в деякому околі точки* x_0*, за винятком, можливо, самої точки* x_0*, причому*

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim_{x\to x_0}\varphi\left(x\right)=0,\ \varphi'(x)\neq 0.$$

Тоді, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\mathrm{k}$*, то обов'язково* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\mathrm{k}$.

Теорема 2. *Нехай функції* $f(x),\varphi(x)$ *визначені при* $x>a$ *є диференційованими на цій множині і* $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi\left(x\right)=0$*. Тоді, якщо існує* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$*, то обов'язково* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Теорема 2 (Друге правило Лопіталя). *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *визначені і диференційовні в околі точки* x_0 *і в цьому околі*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty,\quad \varphi'(x)\neq 0.$$

Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$*, то існує границя* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *і*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left(\mathbf{\frac{0}{0}}\right)$. Застосовуємо перше правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos x}{2}=\frac{7}{2}.$$

2. Перетворення невизначеностей виду

$(\mathbf{0}\cdot\infty)$; $(\mathbf{0^0})$; $(\infty^{\mathbf{0}})$; $(\mathbf{1}^{\infty})$; $(\infty-\infty)$ ***до виду*** $\left(\mathbf{\frac{0}{0}}\right)$ ***або*** $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

Невизначеність виду $(\mathbf{0}\cdot\infty)$. Нехай $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty$.

Потрібно знайти $\lim\limits_{x\to a}\big(u(x)\cdot v\cdot(x)\big)$. Це невизначеність типу $(0\cdot\infty)$. Якщо даний вираз записати у вигляді

$$\lim_{x\to a}u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{u}{\frac{1}{v}} \text{ або } \lim_{x\to a}u\cdot v=\lim_{x\to a}\frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то при $x\to a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду

Невизначеність виду $(\mathbf{0^0})$; $(\infty^{\mathbf{0}})$; $(\mathbf{1}^{\infty})$. Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$. При $x\to a$ (*a* — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а) $u\to 0,\ \ v\to 0$ маємо невизначеність виду (0^0);

б) $u\to\infty,\ \ v\to 0$ дістанемо невизначеність (∞^0);

в) $u\to 1,\ \ v\to\infty$ маємо невизначеність виду (1^∞).

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $(0\cdot\infty)$. Справді, позначимо дану функцію через *y*, тобто візьмемо $y = u^v$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $\ln y = v \cdot \ln u \left(u > 0\right)$.

Легко перевірити, що при $x \to a$ добуток $v \cdot \ln u$ буде невизначеністю $(0 \cdot \infty)$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність $(0 \cdot \infty)$, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{x \to a} \ln y = k$ (k — скінченне або ∞).

Звідси $\lim\limits_{x \to a} y = \lim\limits_{x \to a} u^v = e^k$.

Невизначеність $(\infty - \infty)$ **.** Якщо функції $u(x) \to \infty$, $v(x) \to \infty$ при $x \to a$ (a — скінченне або нескінченне), то різниця $(u - v)$ при $x \to a$ дає невизначеність $(\infty - \infty)$. Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

<u>*Приклад.*</u> Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$.

Маємо невизначеність виду $(\infty - \infty)$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

3. Формула Тейлора для многочлена

Як відомо, многочленом n-го степеня називають функцію виду

$$P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Запис многочлена $P_n(x)$ у вигляді

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + C_3(x - x_0)^3 + \ldots + C_n(x - x_0)^n \qquad (1)$$

називають *розкладом многочлена за степенями* $(x - x_0)$.

Покладемо в рівності (1) $x = x_0$, тоді одержимо $P_n(x_0) = C_0$. Продиференціюємо рівність (1)

$$P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x - x_0) + 3C_3(x - x_0)^2 + \ldots + nC_n(x - x_0)^{n-1}. \quad (2)$$

Покладаючи в рівності (2) $x = x_0$ знайдемо $P_n'(x_0) = C_1$. Продиференціюємо рівність (2)

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1C_2 + 3 \cdot 2C_3(x - a) + \ldots + n(n-1)C_n(x - a)^{n-2}. \quad (3)$$

Покладаючи в рівності (3) $x = x_0$ знайдемо $P_n''(x_0) = 2C_2$. Продовжуючи аналогічно будемо мати

$$6C_3 = P_n'''(x_0),$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1c_4 = P_n^{(4)}(x_0),$$

$$n!c_n = P_n^{(n)}(x_0).$$

Як бачимо, коефіцієнти в ряді (1) обчислюються за формулами

$$C_0 = P_n(x_0),\ C_1 = P_n'(x_0) = \frac{P_n'(x_0)}{1!},\ C_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2} = \frac{P_n''(x_0)}{2!},\ C_3 = \frac{P_n'''(x_0)}{3!},\ldots,$$

$$c_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Завдяки цьому рівність (1) можна записати у вигляді

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{P_n'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (4)$$

Рівність (4) називають *формулою Тейлора для многочлена*.

4. Формула Тейлора для функції. Різні форми залишкового члена

Візьмемо деяку функцію $f(x)$, визначену в околі точки x_0 і таку, що в точці x_0 має похідні до $(n+1)$-го порядку. Тоді по аналогії з формулою Тейлора для многочлена можемо скласти многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

В загальному випадку цей многочлен не буде рівний $f(x)$, тому можна записати $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, або у розгорнутому вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x). \qquad (5)$$

Доданок $R_n(x)$ називають залишковим членом. Його шукають з формули

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0 + \Theta(x - x_0)\right), \text{ де } 0 < \Theta < 1.$$

Підставивши $R_n(x)$ в рівність (5) отримуємо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0 + \Theta(x - x_0)\right), \quad (0 < \Theta < 1) \qquad (6)$$

Узявши у формулі $x_0 = 0$, дістанемо формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) +$$
$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta x). \qquad (7)$$

5. Розклад за формулою Маклорена функцій $e^x; sinx; cosx; ln(1+x)$.

Розклад функції $f(x) = e^x$. Послідовно диференціюючи функцію e^x, дістаємо:

$$f(x)=e^x, \quad f(0)=1;$$
$$f'(x)=e^x, \quad f(0)=1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x, \; f(0)=1.$$

Підставляючи здобуті вирази у формулу Маклорена, маємо:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x}, \; 0<\Theta<1.$$

При x = 1 маємо формулу для знаходження наближеного значення числа e:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}\approx 2,71828,$$

при цьому допущена похибка не перевищує числа $\frac{3}{9!}$ або 0,00001.

Розклад функції $f(x)=\sin x$. Знаходимо послідовно похідні від $f(x)=\sin x$:

$$f(x)=\sin x, \qquad f(0)=0;$$
$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0)=1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2};$$
$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right), f^{(n+1)}(\Theta x)=\sin\left(\Theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$
$$(0<\Theta<1)$$

Підставляючи здобуті значення у формулу Маклорена, дістаємо розклад функції $f(x)=\sin x$:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\Theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Розклад функції $f(x) = \cos x$. Знаходячи значення послідовних похідних при $x = 0$ від функції $f(x) = \cos x$ та підставляючи у формулу Маклорена, дістаємо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\Theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad |\Theta x| < |x|.$$

Розклад функції $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\Theta x}\right)^{n+1}, \ |\Theta x| < |x|.$$