

# РОЗДІЛ. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

## Комплексні числа і дії щодо них

### План

1. Алгебраїчна форма комплексного числа
2. Геометричне зображення комплексних чисел
3. Тригонометрична форма комплексного числа
4. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі
5. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

### 1. Алгебраїчна форма комплексного числа

Комплексним числом  $z$  називається вираз  $z = x + iy$ , де  $x$  і  $y$  – будь-які дійсні числа, а  $i$  – уявна одиниця, яку визначено рівністю  $i^2 = -1$ .

Задання комплексного числа у вигляді  $z = x + iy$  називається алгебраїчною формою комплексного числа. Число  $x$  називається дійсною частиною, а  $y$  – уявною частиною числа  $z$ , їх позначають так:  $x = \operatorname{Re}(z)$ ;  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

Два комплексних числа, задані в алгебраїчній формі, називаються *рівними* тоді і тільки тоді, коли рівні відповідно їх дійсні і уявні частини.

### 2. Геометричне зображення комплексних чисел

Якщо на площині введена декартова прямокутна система координат, то кожному комплексному числу  $z = x + iy$  може бути поставлена у відповідність точка  $M(x, y)$  з абсцисою  $x$  і ординатою  $y$ . Навпаки, кожній точці  $M(x, y)$  площини відповідає комплексне число  $z = x + iy$ .

Площина, на якій зображаються комплексні числа, називається *комплексною площиною*  $Z$ . Очевидно, дійсні числа  $z = x + i0$  ( $y = 0$ ) зображаються точками осі  $Ox$ , а уявні  $z = 0 + iy$  ( $x = 0$ ) – точками, що лежать на осі  $Oy$ . Тому вісь  $Ox$  називається дійсною віссю, а вісь  $Oy$  – уявною віссю.

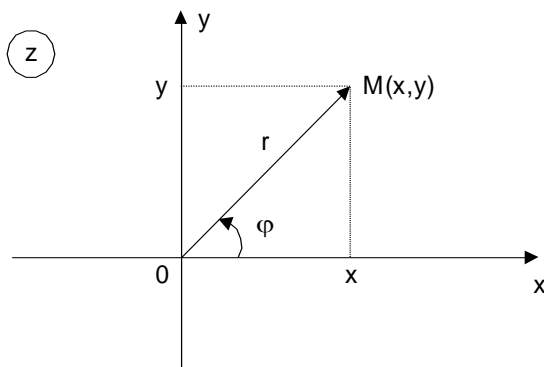


Рис. 16

Дійсній і уявній частинам комплексного числа можна також поставити у відповідність координати вектора  $\overrightarrow{OM}$  – радіуса-вектора точки  $M(x, y)$ , що зображає це число.

У деяких випадках зручно вважати геометричним зображенням числа  $z = x + iy$  вектор  $\overrightarrow{OM}$  (чи будь-який вектор, що дорівнює вектору  $\overrightarrow{OM}$ ).

### 3. Тригонометрична форма комплексного числа

Введемо на комплексній площині  $Z$  полярну систему координат так, що полюс збігається з початком координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю  $Ox$ . Тоді точка  $M(x, y)$  – образ комплексного числа  $z = x + iy$  має полярні координати  $\rho = |\overrightarrow{OM}|$  і  $\varphi$  – кут між додатним напрямком осі  $Ox$  і вектором  $\overrightarrow{OM}$ .

Тоді, як відомо,  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , а, отже, комплексне число  $z$  можна представити у формі

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Таке зображення називається *тригонометричною формою* комплексного числа  $z$ ,  $\rho$  називається *модулем* комплексного числа  $z$ ,  $\varphi$  – *аргументом*, що відповідно позначаються  $\rho = |z|$ ,  $\varphi = \text{Arg} z$ .

За означенням модуля й аргументу випливає

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{tg}(\text{Arg} z) = \text{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$\text{Arg} z$  визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного  $2\pi$ :

$$\text{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де  $\arg z$  є головне значення  $Arg z$ , обумовлене нерівністю  $-\pi \leq \arg z \leq \pi$ , причому

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y > 0 \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

#### 4. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Додавання і множення комплексних чисел виконується за правилами додавання і множення алгебраїчних многочленів. Записуючи результати дій, зроблених над комплексними числами, варто відокремити дійсну частину від уявної.

Нехай  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ , то

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

Різниця визначається як дія, зворотня додаванню:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Отже, при додаванні і відніманні комплексних чисел додаються і віднімаються відповідно їх дійсні і уявні частини.

Числа  $z = x + iy$  і  $\bar{z} = x - iy$  називаються *взаємно спряженими*. Для спряжених комплексних чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Ділення комплексних чисел означається як дія, зворотня множенню, а саме:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

### 5. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Нехай  $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ,  $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ . Тоді

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отже,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2.$$

З правила множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, випливає правило піднесення комплексного числа до натурального степеня  $n$ :

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Добудемо корінь  $n$ -го степеня із числа  $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$