Лекція 5. Добутки векторів

План

1. Скалярний добуток двох векторів

2. Векторний добуток двох векторів

3.Мішаний добуток трьох векторів

1. Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число (скаляр), що обчислюється за формулою $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi$, де φ — кут між цими векторами.

Якщо $\vec{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b}=(b_x;\ b_y;\ b_z)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ є

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Кут між двома векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ можна знайти за формулою:

$$cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2. $(\alpha\vec{a})\vec{b}=\alpha(\vec{a}\vec{b})$;

3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$;

4. $(\vec{a}\vec{a})=|\vec{a}|^2$; $\sqrt{(\vec{a})^2}=|\vec{a}|$;

5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, і навпаки $(\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0)$.

6. $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, то кут φ − гострий, $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, то кут φ − тупий.

7. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

2. Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ такий, що:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|sin\varphi$, де φ — кут між двома векторами;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Позначення: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

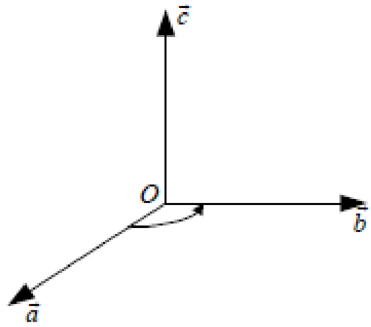

Рис. 5

Якщо $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, то

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}||\vec{b}$.

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

3. $(\alpha\vec{a} \times \vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$.

4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

5. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{паралелограма}}$.

3.Мішаний добуток трьох векторів

Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Позначення: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Властивості мішаного добутку:

1. $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = V_{\text{паралелепіпеда}}$.
2. Умова компланарності трьох векторів заданих в координатах:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

<u>*Приклад.*</u> Дано три точки $A(1;1;1), B(2;2;1), C(2;1;2)$. Знайти кут BAC.

<u>*Розв'язання.*</u> Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB} = \{1;1;0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1;0;1\}$. Згідно з формулою кута між векторами маємо:

$$\cos(\overrightarrow{AB} \hat{} \overrightarrow{AC}) = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, кут $BAC = 60^{\circ}$.

<u>*Приклад.*</u> Дано вершини трикутника $A(-1;-1;2), B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

<u>*Розв'язання.*</u> З елементарної математики відомо, що $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$. Звідки шукана висота

$$BD = \frac{2S}{AC}.$$

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB} = \{4;-5;0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{0;4;-3\}$.

Тоді $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+9} = 5$, а $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Оскільки

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}.$$

Тоді $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 25$. Отже, $2S_{\Delta ABC} = 25$, $BD = \frac{2S}{AC} = \frac{25}{5} = 5$.