Лекція   Неперервність функції

План

1. ***Основні поняття***
2. ***Властивості функцій неперервних на відрізку***
3. ***Рівномірна неперервність***
4. ***Точки розриву функції та їх класифікація***

1. Основні поняття

З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу – поняття неперервності функції.

Означення Функція $f(x)$ *неперервна в точці* скупчення x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо розглядати означення границі функції в точці, то означення неперервної функції можна сформулювати інакше.

Означення (Гейне). Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* скупчення x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$ збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до $f(x_0)$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Означення (Коші). Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* скупчення x_0, якщо для кожного (достатньо малого) числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що при умові $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Сформулюємо означення неперервності функції мовою приростів. Покладемо $\Delta x = x - x_0$. Число Δx називають *приростом аргумента*, а різницю $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називають *приростом функції*.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції.

Функція $f(x)$ *неперервна на інтервалі* (a, b)(відрізку $[a, b]$), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу (відрізку).

Теорема. *Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці x_0, то їх сума, різниця, добуток і частка (при умові $g(x_0) \neq 0$) також неперервні функції.*

Теорема. *Якщо функція $t = \varphi(x)$ неперервна в будь-якій точці x_0 і $y = f(t)$ неперервна в точці $t_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.*

2. Властивості функцій неперервних на відрізку

Теорема (Больцано-Коші). *Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях його набуває значень різних знаків (Рис. 14). Тоді на інтервалі (a, b) знайдеться точка c, в якій функція перетворюється на нуль.*

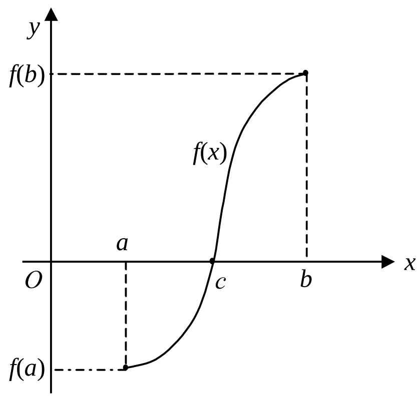

Рис. 14

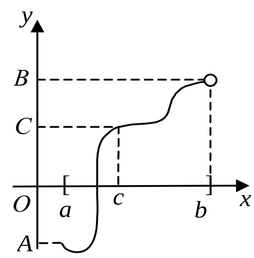

Рис. 15

Теорема (Коші). *Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на його кінцях набуває різних значень (Рис. 15). Позначимо $f(a) = A, f(b) = B$. Тоді при будь-якому $C: A < C < B$ знайдеться точка $c \in [a, b]$, така що $f(c) = C$.*

Теорема (Вейєрштрасса). *Якщо функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Теорема (Вейєрштрасса). *Функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, досягає на ньому свого найбільшого та найменшого значення.*

3. Рівномірна неперервність

Функція $y = f(x)$ називається *рівномірно неперервною на деякому проміжку* I, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що для будь-яких $x_1, x_2 \in I$, які задовольняють умову $|x_1 - x_2| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема (Кантора). *Якщо функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a, b]$, *то вона рівномірно неперервна на ньому.*

4. Точки розриву функції та їх класифікація

Класифікація точок розриву

1. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, $x_0 -$ усувна точка розриву першого роду.

2. $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, $x_0 -$ не усувна точка розриву першого роду. Різниця $f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0) -$ стрибок функції.

3. Якщо хоча б одна з границь $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ не існує або рівна нескінченності, то $x_0 -$ точка розриву другого роду.

Приклад. Довести, що при $x = 3$ функція $y = \frac{x+1}{x-3}$ має розрив та встановити його характер.

Розв'язання. При $x = 3$ функція має розрив, оскільки це значення належить її області визначення. З'ясуємо характер розриву. Обчислимо:

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{x+1}{x-3} = -\infty, \ \lim_{x \to 3+0} \frac{x+1}{x-3} = +\infty.$$

Отже, функція при $x \to 3$ не має скінченних односторонніх границь (і не визначена у цій точці). Тому $x = 3$ є точкою розриву другого роду.

Приклад. Дослідити функцію $y = arctg\ \frac{1}{x-2}$ на неперервність.

Розв'язання. Функція $y = arctg\ t$ є основною елементарною функцією з областю визначення $t\epsilon(-\infty, +\infty)$. Функція $t = \frac{1}{z} = z^{-1}$ також елементарна і визначена при $z\epsilon(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, тобто $z \neq 0$. Але функція $z = x - 2$ також елементарна і визначена при $x\epsilon(-\infty, +\infty)$. Тобто єдиною точкою, що не належить області визначення функції $y = arctg\ \frac{1}{x-2}$, є точка $x = 2$. Тому $x = 2$ є точкою розриву.

З'ясуємо характер цього розриву. При $x \to 2-0$ маємо $\frac{1}{x-2} \to -\infty$. Звідси $\lim_{x\to 2-0} arctg\ \frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2}$. При $x \to 2+0$ маємо $\frac{1}{x-2} \to +\infty$. Звідси $\lim_{x\to 2+0} arctg\ \frac{1}{x-2} = +\frac{\pi}{2}$. Односторонні границі скінченні, але не рівні. Тому $x = 2$ є точкою неусувного розриву першого роду зі стрибком

$$f(2+0) - f(2-0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$