Лекція Границя функції в точці

План

1. Основні означення

2. Односторонні границі

3. Дві особливі границі

4. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

1. Основні означення

Нехай задано дві непорожні множини $X, Y,$ елементи яких можуть мати довільну природу. Якщо кожному елементу $x \in X$ за деяким правилом поставлено у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то говорять, що задано *функцію* $y = f(x)$.

Розглянемо деяку множину дійсних чисел E. Точка $x_0 \in E$ називається *ізольованою точкою* множини E, якщо існує деякий окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ в якому є лише одна точка $x_0 \in E$. Точка $x_0 \in E$ називається *точкою скупчення* множини E, якщо в будь-якому її окілі $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ міститься хоча б одна точка цієї множини відмінна від x_0.

Означення за Коші. Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, яка є точкою скупчення в області визначення функції, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Означення за Гейне. Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, яка є точкою скупчення в області визначення функції, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $\{x_n\}$ відповідна послідовність значень функцій $\{f(x_n)\}$ збігається до A, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Теорема Гейне. *Обидва означення границі функції еквівалентні.*

Число A називають *границею функції* $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, що для всіх значень x з області визначення функції, які задовольняють умову $|x| > \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

2. Односторонні границі

Число A називають *лівосторонньою границею функції* $f(x)$ в точці x_0, або *границею зліва*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$, що для всіх x з області визначення функції, які задовольняють умову $x_0 - \delta < x < x_0$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$. Аналогічно вводиться поняття *правосторонньої границі*, яку позначають $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$. Ліву і праву границю називають *односторонніми*.

Теорема 2. *Для того, щоб функція $f(x)$ у точці x_0 мала границю, необхідно і достатньо, щоб у цій точці існували лівостороння та правостороння границі, і щоб вони були рівні між собою.*

При обчисленні границь зручно використовувати ряд **властивостей**:

I (арифметичні властивості границь)

Якщо існують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

а) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0} [c \cdot g(x)] = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

г) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

II (границя суперпозиції функцій)

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$ та $\lim\limits_{x\to a} f(t) = A$, то існує границя складної функції $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = A$.

3. Дві особливі границі

Перша особлива (чудова) границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Наслідки першої особливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1;\ \ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;\ \ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{tgx}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$$

Зауваження. За допомогою першої особливої границі можна досліджувати невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ для виразів з тригонометричними функціями.

<u>*Приклад.*</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Використаємо першу визначну границю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

<u>*Приклад.*</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg\ 2x}$.

<u>*Розв'язання.*</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg\ 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5x}{2x}\cdot\cos 2x\right]=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x=\frac{5}{2}.$$

Розглянемо ***другу особливу границю***

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Наслідки доугої особливої границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab};\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

Зауваження: За допомогою другої особливої границі та її наслідків можна досліджувати невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$; (1^{∞}); $\left(\frac{\infty^{\infty}}{\infty}\right)$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\frac{2x+5}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+5}{x+1}}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)}=\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{2}{1}}=4.$$

4. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою в точці* x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Функцію $f(x)$ називають нескінченно великою в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

Теорема. *Якщо $\alpha(x)$ нескінченно мала в точці x_0 функція, причому в околі точки x_0 $\alpha(x)\neq 0$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ у точці x_0 – нескінченно велика.*

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі в точці x_0 функції. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорять, що $\alpha(x)$ в околі точки x_0 є *нескінченно малою вищого порядку* порівняно з $\beta(x)$ і пишуть $\alpha(x)=0(\beta(x))$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$, де $C=const$,то функції $\alpha(x),\beta(x)$ називаються *нескінченно малими одного порядку* в околі точки x_0.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C\neq 0$, де $C=const, k-$ додатне число, то функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою порядку* k відносно нескінченно малої функції $\beta(x)$.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\neq C$, то нескінченно малі функції $\alpha(x),\beta(x)$ називаються *непорівнянними* в околі точки x_0.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то функції $\alpha(x),\beta(x)$ називаються *еквівалентними* нескінченно малими в околі точки x_0. У цьому випадку пишуть $\alpha(x)\sim\beta(x)$.